UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Fin d'Etude pour l'Obtention du Diplôme de Master

Spécialité : MCO

Thème

CERTAINES CLASSES D'INEGALITES INTEGRALES

Présenté par

FREHA Karima & KHAMELI Amina

Soutenu le 30/05/2016

Devant le Jury

Président	M. ANDASMAS	U. **MOSTAGANEM**.
Encadrant	Z. DAHMANI	U. **MOSTAGANEM**.
Examinateur	L. BELARBI	U. **MOSTAGANEM**.

Table des matières

Introduction Générale

Actuellement, le calcul fractionnaire est d'une grande importance en Mathématiques.
Selon les spécialistes cette nouvelle théorie est apparue dès 1695 lors d'une correspondance entre Leibniz et l'Hôpital. Ce dernier voulait savoir quelle pourrait être la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction $x(t)$; Leibniz lui répond que cela mène à un paradoxe.
Depuis, de nombreux célèbres mathématiciens se sont intéressés à cette théorie comme Euler, Laplace, Fourier... Mais les premières recherches rigoureuses sont dues à Liouville et Riemann. Dès lors, cette théorie porte le nom de ces deux mathématiciens : le calcul fractionnaire est alors né.
Dans ce mémoire, nous allons nous intéressés à établir des nouveaux résultats en utilisant l'intégrale fractionnaire.
Ce mémoire se compose d'une introduction, quatre chapitres et une conclusion.
Le premier chapitre comporte des notions sur le calcul fractionnaire.
Le deuxième chapitre est consacré à une généralisation d'ordre fractionnaire de l'inégalité de Chebyshev lorsque les fonctions données sont synchrones. Ce travail peut être classé comme une continuité des travaux de S. Belarbi et Z. Dahmani publiés en 2009 au JIPAM Journal.
Le troisième chapitre est une autre généralisation de l'inégalité de Chebyshev mais en remplaçant la synchronicité des fonctions données par d'autres conditions récemment imposées et prouvées par C.P. Niculescu et I. Roventa.
Le quatrième chapitre présente deux nouveaux résultats généralisant des inégalités de type Hardy classiques. On généralise aussi quelques théorèmes de N. Levinson, W.T. Sulaiman et B. Sroysang dans le cadre fractionnaire. Certains de nos résultats sont publiés et d'autres sont soumis pour publication.

Chapitre 1

Description du Calcul Fractionnaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit quelques notions du calcul fractionnaire.
En premier lieu, on rappelle quelques propriétés des fonctions spéciales utilisées dans le calcul fractionnaire, puis on définit l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville ainsi que ses différentes propriétés.

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma d'Euler, notée* Γ, *est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \,; \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Elle peut aussi être définie pour des valeurs réelles $z > 0$ par la même expression :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \;; \quad z > 0.$$

Par convension, $\Gamma(1) = 1$.

Propriétés :

1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; $z > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Preuve.

1. On démontre la première propriété en passant par une intégration par partie.

Pour tout $z > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^t dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Pour démontrer la deuxième propriété, on prend $z = n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)...\Gamma(1) \\ &= n!, \end{aligned}$$

avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = 1$.

1.2.2 Fonction Béta d'Euler

Définition 1.2.2 *La fonction Béta d'Euler est définie par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \text{ où } \operatorname{Re}(x) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Propriétés :

1) $\beta(x,y) = \beta(y,x)$; $\operatorname{Re}(x) > 0$, $\operatorname{Re}(y) > 0$.

2) $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$; $\operatorname{Re}(x) > 0$, $\operatorname{Re}(y) > 0$.

1.3 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 *[10] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

On définit l'intégrale fractionaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f, notée $J_a^\alpha f(t)$, par :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ \alpha > 0, \ a < t \leq b, \\ J_a^0 f(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Si f est continue sur l'intervalle $[0,b]$, alors,

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ \alpha > 0, \ 0 < t \leq b.$$

Exemple 1.3.1

On calcule l'intégrale d'odre $\frac{1}{2}$ de la fonction

$$f(t) = t \ ; \ t > 0.$$

Par définition, on a :

$$J^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau.$$

On prend le changement de variables suivant :

$$v = \frac{\tau}{t} \Rightarrow \tau = tv \text{ et } d\tau = tdv.$$

Donc,

$$\begin{aligned} J^{\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (t-tv)^{-\frac{1}{2}} tvtdv \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} vdv \\ &= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 v^{2-1} (1-v)^{\frac{1}{2}-1} dv \\ &= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \beta(2, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

D'après la deuxième propriété de la fonction *Béta*, on aboutit à

$$J^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

Et alors,

$$J^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

d'où

$$J^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}.$$

Si on calcule $J^{\frac{1}{2}}\left(J^{\frac{1}{2}}f(t)\right)$, on peut facilement remarquer que c'est exactement $J^1 f(t) = \frac{1}{2}t^2$.

1.3.2 Propriétés

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+;\ J_a^\alpha J_a^\beta f(t) = J_a^\beta J_a^\alpha f(t);\ t \in [a, b]$.

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+;\ J_a^\alpha J_a^\beta f(t) = J_a^{\alpha+\beta} f(t);\ t \in [a, b]$.

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-x)^{\beta-1} f(x)dx\right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\int_0^s (s-x)^{\beta-1} f(x)dx\right] ds. \end{aligned}$$

Or, $a \leq x \leq s \leq t$, donc,

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(x) \left[\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} ds\right] dx.$$

On fait le changement de variables $\tau = \dfrac{s-x}{t-x}$, puis, on calcule $\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}ds$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}ds &= \int_0^1 (t-\tau(t-x)-x)^{\alpha-1}(\tau(t-x)+x-x)^{\beta-1}(t-x)d\tau \\
&= \int_0^1 (t-x)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}(t-x)^{\beta-1}(t-x)d\tau \\
&= (t-x)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= (t-x)^{\alpha+\beta-1}\beta(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha J_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)dx \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1}f(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha J_a^\beta f(t) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-x)^{(\alpha+\beta)-1}f(x)dx \\
&= J_a^{\alpha+\beta}f(t) \\
&= J_a^{\beta+\alpha}f(t) = J_a^\beta J_a^\alpha f(t).
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *L'application de l'opérateur d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann Liouville sur $(x-a)^\beta$ nous donne*

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+\beta};\ \beta > -1,\ x > a.$$

Preuve.

Pour tout $\alpha > 0$, $x > a$, et par définition de J_a^α, on a :

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt.$$

On utilise le changement de variables suivant $\tau = \dfrac{t-a}{x-a}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
t &= a \Rightarrow \tau = 0 \text{ et } t = x \Rightarrow \tau = 1, \\
(x-t) &= (1-\tau)(x-a) \text{ et } dt = (x-a)d\tau.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}((x-a)\tau)^\beta (x-a)d\tau \\
&= (x-a)^\beta (x-a)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta+1-1}d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha);\ \ \alpha>0,\ \ \beta+1>0 \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Chapitre 2

Inégalité de Chebyshev avec Condition de Synchronicité

2.1 Introduction

Une des inégalités la plus célèbre dans la litérature des mathématiques est l'inégalité de Chebyshev [1] donnée par :

$$T(f,g) \geq 0, \tag{2.1.1}$$

telle que

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right),$$

et f, g sont deux fonctions synchrones sur $[a,b]$:

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0;\ x,y \in [a,b].$$

Dans ce chapitre, on énonce des résultats fractionnaires sur l'inégalité de Chebychev.
On rappelle aussi les définitions de la fonction de Chebyshev avec poids citées dans [14] ainsi que d'autres théorèmes.

2.2 Rappels

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, et $p:[a,b]\to[0,\infty[$ une fonction positive et intégrable sur $[a,b]$. On définit la fonction de Chebyschev à un poids; noté $T(f,g,p)$, par :*

$$T(f,g,p):=\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx-\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx.$$

On peut l'écrire sous forme de l'idendité de Korkine comme suit :

$$T(f,g,p)=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy.$$

Définition 2.2.2 *Soient f,g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, et p,q deux fonctions positives intégrables sur $[a,b]$. La fonction de Chebyschev à deux poids est donné par :*

$$\begin{aligned}\tilde{T}(f,g,p,q)\ :\ &=\int_a^b q(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\\&+\int_a^b p(x)dx\int_a^b q(x)f(x)g(x)dx\\&-\left(\int_a^b q(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right)\\&-\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b q(x)g(x)dx\right).\end{aligned}$$

Sa forme de l'identité de Korkine est donc :

$$\tilde{T}(f,g,p,q)=\int_a^b\int_a^b p(x)q(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy.$$

2.2.2 Théorèmes

On donne les résultats suivants :

Théorème 2.2.1 *[3] Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si f et g sont synchrones sur $[a,b]$. Alors, Pour tout $\delta>0$, on a :*

$$\frac{(t-a)^\delta}{\Gamma(\delta+1)}J_a^\delta f(t)g(t)\geq J_a^\delta f(t)J_a^\delta g(t).$$

Remarque 2.2.1 *Si on prend $\delta = 1$, $t = b$ dans le théorème 2.2.1, on obtient :*

$$\begin{aligned} (b-a)\int_a^b fg(t) &\geq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right) \\ \frac{1}{(b-a)}\int_a^b fg(t) &\geq \left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt\right) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité représente l'inégalité classique de Chebyshev (2.1.1).

Théorème 2.2.2 *[7] Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$ et soit p une fonction positive et intégrable sur $[0,\infty[$. Si $f' \in L^{\alpha}([0,\infty[)$ et $g' \in L^{\beta}([0,\infty[)$ tels que $\alpha > 1$, $\beta > 1$ avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, alors $\forall\ t > 0$, $\delta > 0$, on a l'inégalité suivante :*

$$2\left|J^{\delta}p(t)J_a^{\delta}pfg(t) - J^{\delta}pf(t)J_a^{\delta}pg(t)\right|$$

$$\leq \frac{\|f'\|_{\infty}\|g'\|_{\infty}}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}|x-y|\,p(x)p(y)dxdy.$$

Théorème 2.2.3 *[3] Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0,\infty[$ et p, q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$. Alors pour tout $t > 0, \delta > 0$, on a :*

$$J^{\delta}p(t)J^{\delta}qfg(t) + J^{\delta}q(t)J^{\delta}pfg(t) \geq J^{\delta}pf(t)J^{\delta}qg(t) + J^{\delta}qf(t)J^{\delta}pg(t).$$

Théorème 2.2.4 *[7] Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$ et p, q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$. Si $f' \in L^{\alpha}([0,\infty[)$ et $g' \in L^{\beta}([0,\infty[)$ tels que $\alpha > 1$, $\beta > 1$ avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$, alors $\forall\ t > 0$, $\delta > 0$, on a l'inégalité suivante :*

$$|J^{\alpha}p(t)J^{\alpha}qfg(t) + J^{\alpha}q(t)J_a^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J_a^{\alpha}qg(t) - J^{\alpha}qf(t)J^{\alpha}pg(t)|$$

$$\leq \frac{\|f'\|_{\infty}\|g'\|_{\infty}}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}|x-y|\,p(x)q(y)dxdy.$$

2.3 Résultats Originaux avec Poids

Dans [9], les auteurs ont démontré le résultat suivant :

Pour f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$, p une fonction intégrable et positive sur $[a,b]$, vérifiant $f' \in L^{\alpha}([a,b])$ et $g' \in L^{\beta}([a,b])$ tels que $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$ avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1, \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1, \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, alors $\forall\ t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
|T(f,g,p)| &\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_y^x |f'(t)|^{\alpha}\,dt\right|^{\frac{\gamma}{\alpha}} dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\quad \times \left(\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_y^x |g'(t)|^{\beta}\,dt\right|^{\frac{\gamma'}{\beta}} dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
&\leq \frac{1}{2}||f'||_{\alpha}||g'||_{\beta}\left(\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right). \qquad (2.3.1)
\end{aligned}$$

Le but de ce chapitre est de généraliser le résultat précédent sur $[0,b]$ en utilisant l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.3.1 Résultat 1

On commence par le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *[5] Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,b]$ et soit p une fonction positive et intégrable sur $[0,b]$. Si $f' \in L^{\alpha}([0,b])$ et $g' \in L^{\beta}([0,b])$ tels que $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$ avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1, \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1, \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, alors $\forall\ t \in [0,b]$, $\delta > 0$, on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}
&2\left|J^{\delta}p(t)J^{\delta}pfg(t) - J^{\delta}pf(t)J^{\delta}pg(t)\right| \\
\leq &\left(\frac{||f'||_{\alpha}^{\gamma}}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\times\left(\frac{||g'||_{\beta}^{\gamma'}}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
\leq &\frac{||f'||_{\alpha}||g'||_{\beta}}{\Gamma^2(\delta)}\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}p(x)p(y)dxdy\right).
\end{aligned}$$

Preuve.

On prend f et g deux fonctions satisfaisant les conditions du théorème 2.3.1 et p une fonction positive et intégrable sur $[0, b]$.

On définit

$$H(x,y) := (f(x) - f(y))(g(x) - g(y));\ \ x, y \in (0,t)\,,\ \ t \in [0,b]\,. \tag{2.3.2}$$

On développe (2.3.2), on obtient :

$$H(x,y) = f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(y)g(x) - f(x)g(y). \tag{2.3.3}$$

On multiplie (2.3.3) par $\dfrac{(t-x)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}p(x)$, $x \in (0,t)$, puis on intègre par rapport à x sur $(0,t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)H(x,y)dx \\
=\ &\frac{1}{\Gamma(\delta)}\left[\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)f(x)g(x)dx + f(y)g(y)\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)dx\right. \\
&\left.-f(y)\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)g(x)dx - g(y)\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)f(x)dx\right].
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

l'intégration de (2.3.4) donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-x)^{\delta-1}p(x)H(x,y)dx \\
=\ &J^{\delta}pfg(t) + f(y)g(y)J^{\delta}p(t) - f(y)J^{\delta}pg(t) - g(y)J^{\delta}pf(t).
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

On multiplie (2.3.5) par $\dfrac{(t-y)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}p(y)$, $y \in (0,t)$, puis on intègre par rapport à y sur $(0,t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)H(x,y)dxdy \\
=\ &J^{\delta}pfg(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-y)^{\delta-1}p(y)dy\right) + J^{\delta}p(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-y)^{\delta-1}p(y)f(y)g(y)dy\right) \\
&-J^{\delta}pg(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-y)^{\delta-1}p(y)f(y)dy\right) - J^{\delta}pf(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-y)^{\delta-1}p(y)g(y)dy\right).
\end{aligned}$$

L'intégration de cette dernière égalité donne :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)H(x,y)dxdy\\ = \;& J^\delta p(t)J^\delta pfg(t)+J^\delta pfg(t)J^\delta p(t)-J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)-J^\delta pg(t)J^\delta pf(t).\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}&2\left(J^\delta p(t)J^\delta pfg(t)-J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)\right)\\ = \;& \frac{1}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)H(x,y)dxdy.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

D'autre part, on peut écrire

$$H(x,y)=\int_x^y\int_x^y f'(\tau)g'(\mu)d\tau d\mu. \tag{2.3.7}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1$, on obtient :

$$\left|\int_x^y f'(\tau)d\tau\right|\leq |x-y|^{\frac{1}{\alpha'}}\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha d\tau\right|^{\frac{1}{\alpha}},$$

de même, en utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1$, on trouve :

$$\left|\int_x^y g'(\mu)d\mu\right|\leq |x-y|^{\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta d\mu\right|^{\frac{1}{\beta}}.$$

Donc, (2.3.7) devient :

$$|H(x,y)|\leq |x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha d\tau\right|^{\frac{1}{\alpha}}\left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta d\mu\right|^{\frac{1}{\beta}}.$$

Et alors, on peut estimer (2.3.6) comme suit :

$$\begin{aligned}&2|J^\delta p(t)J^\delta pfg(t)-J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)|\\ \leq\;& \frac{1}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha d\tau\right|^{\frac{1}{\alpha}}\left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta d\mu\right|^{\frac{1}{\beta}}dxdy.\end{aligned}$$

En appliquant encore l'inégalité de Hölder avec poids pour double intégrale; $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, on obtient :

$$\begin{aligned}&2|J^\delta p(t)J^\delta pfg(t)-J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)|\\ \leq\;& \frac{1}{\Gamma^2(\delta)}\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha d\tau\right|^{\frac{\gamma}{\alpha}}dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\ &\times\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta d\mu\right|^{\frac{\gamma'}{\beta}}dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}}.\end{aligned}$$

Et en utilisant les propriétées suivantes :

$$\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha d\tau\right| \leq ||f'||_\alpha^\alpha \ , \ \left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta d\mu\right| \leq ||g'||_\beta^\beta \ ,$$

on aura :

$$\begin{aligned}
&2|J^\delta p(t)J^\delta pfg(t) - J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)| \\
\leq\ & \left(\frac{||f'||_\alpha^\gamma}{\Gamma^\gamma(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\times\left(\frac{||g'||_\beta^{\gamma'}}{\Gamma^{\gamma'}(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
\leq\ & \frac{||f'||_\alpha||g'||_\beta}{\Gamma^2(\delta)}\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}p(x)p(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, on déduit :

$$\begin{aligned}
&2|J^\delta p(t)J^\delta pfg(t) - J^\delta pf(t)J^\delta pg(t)| \\
\leq\ & \frac{||f'||_\alpha||g'||_\beta}{\Gamma^2(\delta)}\int_0^t\int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}p(x)p(y)dxdy.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 2.3.1 *Prenons $\delta = 1$ dans le Théorème 2.3.1, on obtient l'inégalité (2.3.1) sur* $[0,t]$.

2.3.2 Résultat 2

D'abord, on présente le nouveau résultat suivant :

Théorème 2.3.2 *[5] Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et soient p,q deux fonctions positives et intégrables sur $[a,b]$. Si $f' \in L^\alpha([a,b])$ et $g' \in L^\beta([a,b]); \alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$ avec : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1, \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1$ et $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{T}(f,g,p,q)\right| \leq\ & \left(\int_a^b\int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |f'(\tau)|^\alpha\,d\tau\right|^{\frac{\gamma}{\alpha}}dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\times\left(\int_a^b\int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\left|\int_x^y |g'(\mu)|^\beta\,d\mu\right|^{\frac{\gamma'}{\beta}}dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
\leq\ & ||f'||_\alpha||g'||_\beta\left(\int_a^b\int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}}\,dxdy\right). \qquad (2.3.8)
\end{aligned}$$

Preuve.

On a :

$$\left|\tilde{T}(f,g,p,q)\right| \leq \int_a^b \int_a^b p(x)q(y)\left|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\right| dxdy. \tag{2.3.9}$$

Gràce à l'inégalité de Hölder, on aura :

$$\begin{aligned} &\left|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\right| \\ \leq\ & |x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} \left|\int_x^y |f'(\tau)|^{\alpha} d\tau\right|^{\frac{1}{\alpha}} \left|\int_x^y |g'(\mu)|^{\beta} d\mu\right|^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Donc, (2.3.9) devient :

$$\begin{aligned} &\left|\tilde{T}(f,g,p,q)\right| \\ \leq\ & \int_a^b \int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} \left|\int_x^y |f'(\tau)|^{\alpha} d\tau\right|^{\frac{1}{\alpha}} \left|\int_x^y |g'(\mu)|^{\beta} d\mu\right|^{\frac{1}{\beta}} dxdy. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec poids pour les intégrales doubles, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\tilde{T}(f,g,p,q)\right| \leq\ & \left(\int_a^b \int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} \left|\int_x^y |f'(\tau)|^{\alpha} d\tau\right|^{\frac{\gamma}{\alpha}} dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \times \left(\int_a^b \int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} \left|\int_x^y |g'(\mu)|^{\beta} d\mu\right|^{\frac{\gamma'}{\beta}} dxdy\right)^{\frac{1}{\gamma'}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\tilde{T}(f,g,p,q)\right| \leq ||f'||_{\alpha}||g'||_{\beta} \left(\int_a^b \int_a^b p(x)q(y)\,|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} dxdy\right).$$

On va proposer une généralisation du théorème précédent dans le cadre fractionnaire.

Théorème 2.3.3 *[5] Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,b]$ et soient p,q deux fonctions positives et intégrables sur $[0,b]$. Si $f' \in L^{\alpha}([0,b])$ et $g' \in L^{\beta}([0,b])$; $\alpha>1$, $\beta>1$, $\gamma>1$ avec : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1$, $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1$ et $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, alors $\forall t\in[0,b]$, $\delta>0$, on a :*

$$\left|J^{\delta}q(t)J^{\delta}pfg(t)+J^{\delta}p(t)J^{\delta}qfg(t)-J^{\delta}pf(t)J^{\delta}qg(t)-J^{\delta}qf(t)J^{\delta}pg(t)\right|$$

$$\leq \frac{||f'||_{\alpha}||g'||_{\beta}}{\Gamma^2(\delta)} \int_0^t \int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1}|x-y|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} p(x)q(y)dxdy.$$

Preuve.

On multiplie (2.3.5) par $\dfrac{(t-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\delta)} q(y)$, $y \in (0,t)$, puis on intègre par rapport à y sur $(0,t)$; $t \in [0,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J^{\delta}q(t)J^{\delta}pfg(t) + J^{\delta}p(t)J^{\delta}qfg(t) - J^{\delta}pf(t)J^{\delta}qg(t) - J^{\delta}qf(t)J^{\delta}pg(t) \\ = & \frac{1}{\Gamma^2(\delta)} \int_0^t \int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1} p(x)q(y)H(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| J^{\delta}q(t)J^{\delta}pfg(t) + J^{\delta}p(t)J^{\delta}qfg(t) - J^{\delta}pf(t)J^{\delta}qg(t) - J^{\delta}qf(t)J^{\delta}pg(t) \right| \\ \leq & \frac{1}{\Gamma^2(\delta)} \int_0^t \int_0^t (t-x)^{\delta-1}(t-y)^{\delta-1} p(x)q(y) \left| x-y \right|^{\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}} \left| \int_x^y \left| f'(\tau) \right|^{\alpha} d\tau \right|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y \left| g'(\mu) \right|^{\beta} d\mu \right|^{\frac{1}{\beta}} dxdy. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du théorème 2.3.1, on obtient le résultat souhaité.

Remarque 2.3.2 *Si on prend $\delta = 1$ dans le Théorème 2.3.3, on obtient l'inégalité (2.3.8) sur* $[0,t]$.

Chapitre 3

Inégalité de Chebyshev Sans Condition de Synchronicité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre aussi des résultats fractionnaires originaux sur l'inégalité de P.L. Chebychev, mais sans la condition de la synchronicité des fonctions données.
On rappelle d'abord quelques résultats démontrés dans [15] .

3.2 Résultats Classiques de Non Synchronicité

Lemme 3.2.1 *Soient f et g deux fonctions appartiennent à l'espace $L^{\infty}([a,b])$. Alors $\forall\ x \in]a,b]$, on a :*

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)g(t)dt = \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)ds\right)\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x g(s)ds\right)$$
$$+\frac{1}{(x-a)}\int_a^x \left[\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left(g(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t g(s)ds\right)\right]dt.$$

Théorème 3.2.1 *Soient f et g deux fonctions appartiennent à l'éspace $L^{\infty}([a,b])$, et supposons que pour $x \in]a,b]$, l'inégalité*

$$\left(f(x)-\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)ds\right)\left(g(x)-\frac{1}{x-a}\int_a^x g(s)ds\right) \geq 0$$

est satisfaite.

Alors, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\ \geq & \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right). \end{aligned}$$

3.3 Résultats Fractionnaires

On démontre le lemme auxiliaire :

Lemme 3.3.1 *[6] Soient f et g deux fonctions appartiennent à l'espace $L^\infty([a,b])$. Alors $\forall$ $x \in \left]a,b\right]$, $\alpha \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-a}J_a^\alpha f(x)g(x) = \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)ds\right)\left(\frac{1}{x-a}J_a^\alpha g(x)\right) \\ & +\frac{1}{(x-a)\,\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left[\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left((x-t)^{\alpha-1}g(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\right]dt. \end{aligned}$$

Preuve.

Soient f et $g \in L^\infty([a,b])$, $x \in \left]a,b\right]$, $\alpha \geq 1$.

Une intégration par partie de $\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)g(t)dt$ nous donne :

$$\begin{aligned} & \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)g(t)dt \\ = & \left(f(t)\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \left(f'(t)\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)dt \\ = & f(x)\int_a^x \left((x-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \int_a^x ((t-a)f'(t))\left(\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\right)dt. \end{aligned}$$

On prend

$$u(t) = \frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds, u(t)' = \frac{-1}{(t-a)^2}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds + \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(t-a)}g(t)$$

et

$$v'(t) = (t-a)f'(t), v(t) = \int_a^t (s-a)f'(s)ds = (t-a)f(t) - \int_a^t f(s)ds.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt = f(x)\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds \\
&-\left[\left(\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)\right]_{t=a}^{t=x} \\
&-\int_a^x \left[\left(\frac{1}{(t-a)^2}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt \\
&+\int_a^x \left[\left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(t-a)}g(t)\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt = \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(s)ds\right)\left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \\
&-\int_a^x \frac{1}{(t-a)^2}\left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)dt \\
&+\int_a^x \left(\frac{1}{t-a}(x-t)^{\alpha-1}g(t)\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt = \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(s)ds\right)\left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \\
&-\int_a^x \left[\frac{1}{(t-a)}\left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\frac{1}{(t-a)}\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt \\
&+\int_a^x \left[\left(\frac{1}{t-a}(x-t)^{\alpha-1}g(t)\right)\left((t-a)f(t)-\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

Cela est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt = \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(s)ds\right)\left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \\
&-\int_a^x \left[\frac{1}{(t-a)}\left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\left(f(t)-\frac{1}{(t-a)}\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt \\
&+\int_a^x \left[(x-t)^{\alpha-1}g(t)\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\right]dt. \\
=\;& \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(s)ds\right)\left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \\
&+\int_a^x \left[\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left((x-t)^{\alpha-1}g(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$J_a^\alpha f(x)g(x) = \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(s)ds\right) J_a^\alpha g(x)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left[\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left((x-t)^{\alpha-1}g(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right)\right] dt.$$

D'où, le résultat.

Une conséquence immédiate du lemme précédent est le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *[6] Soient f et g deux fonctions appartiennent à l'éspace $L^\infty([a,b])$, et supposons que pour tout $\alpha \geq 1$ et $t, x \in]a,b]$; $t \leq x \leq b$, l'inégalité*

$$\left(f(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left((x-t)^{\alpha-1}g(t)-\frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \geq 0$$

est satisfaite.

Alors, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-a}J_a^\alpha f(x)g(x) \\ \geq & \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)ds\right)\left(\frac{1}{x-a}J_a^\alpha g(x)\right). \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 *Si on prend $\alpha = 1$, $x = b$ dans le théorèmé 3.3.1, on obtient le théorème 3.2.1 cité au début du chapitre.*

Chapitre 4

Inégalités de Type Hardy

4.1 Introduction

Une autre inégalité trés connue dans la théorie des intégrales est l'inégalité de Hardy.

En 1920, G. Hardy [11] a présenté sa fameuse inégalité comme suit :

$$\int_0^\infty x^{-p}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx,$$

tels que $p > 1, x > 0$, et f une fonction integrable et positive sur $[0, \infty[$.

Au cours de ces dernières décennies, l'inégalité de Hardy a été développée et appliquée dans plusieurs domaines mathématiques notamment l'analyse et ses applications [2] .

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats classiques reliés a cette inégalité. Puis on démontre des résultats plus généraux en utilisant la théorie fractionnaire.

4.2 Quelques Extensions

4.2.1 Inégalité de N. Levinson

En 1964, N. Levinson [13] a établie le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 *Soit f une fonction positive sur $[a, b] \subseteq [0, \infty[$ tel que $p > 1$, et*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ pour tout } x \in [a, b]\,.$$

Alors, on a :

$$\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b f^p(t)dt. \tag{4.2.1}$$

4.2.2 Inégalité de W.T. Sulaiman

En 2012, W.T. Sulaiman [18] a prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 *Soient f une fonction positive sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$ et F la fonction définit par l'intégrale :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Alors $\forall p > 1$, on a :

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx - \int_a^b \left(1-\frac{a}{x}\right)^p f^p(x)dx. \tag{4.2.2}$$

4.2.3 Inégalité de B. Sroysang

En 2013, B. Sroysang [16] a donné une généralisation de l'inégalité précédente comme suit :

Théorème 4.2.3 *Soient f une fonction positive sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$ et F la fonction définit par l'intégrale :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Alors $\forall p > 1$ et $q > 0$, on a :

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx. \tag{4.2.3}$$

4.3 Théorèmes

Dans cette section, on rappelle des théorèmes démontrés dans [17] .

Théorème 4.3.1 *Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$, et soit $\eta > 0$. Si la fonction $\dfrac{x-a+\eta}{g(x)}$ est décroissante, alors $\forall\ p > 1$, on a :*

$$\int_a^b \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b \left((x-a+\eta)\frac{f(x)}{g(x)}\right)^p dx.$$

Théorème 4.3.2 *Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$, et soit $\eta > 0$. Si g est décroissante, alors*

1) $\forall\ p \geq 1,\ q > 0,$ *on a :*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - (x-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx.$$

2) $\forall\ 0 < p < 1,\ q > 0,$ *on a :*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \geq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - (x-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx.$$

Théorème 4.3.3 *[4] Soient f, g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$, p, $q > 0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors, $\forall \delta > 0$, on a l'inégalité suivante*

$$J^\alpha \left|fg\right|(t) \leq \left(J^\alpha \left|f\right|^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(J^\alpha \left|g\right|^q(t)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4.4 Résultats Originaux de Type Hardy

Dans cette section, on présente des nouveaux résultats fractionnaires sur les inégalités de type Hardy.

4.4.1 Première Approche

Théorème 4.4.1 *[12] Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$, et soit $\eta > 0$. Si $\dfrac{x-a+\eta}{g(x)}$ est décroissante, alors $\forall\ p > 1,\ \alpha > 0,$ on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx &\leq \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p})\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)} \\ &\times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+\frac{1}{p}-p} \left(J_a^\alpha \left[\left(\tfrac{f(b)}{g(b)}(b-a+\eta)\right)^p (b-a)^{1-\frac{1}{p}}\right]\right)\right. \\ &\left. -J_a^\alpha \left[\left(\tfrac{f(b)}{g(b)}(b-a+\eta)\right)^p (b-a)^{1+\alpha(p-1)-p}\right]\right]\end{aligned}$$

Preuve.

Soient $f, g > 0,\ p > 1, \delta > 0.$

On a :

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx = \int_a^b g^{-p}(x)\left(\int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)^p dx$$
$$= \int_a^b g^{-p}(x)\left(\int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-t)^{\alpha-1}f(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p^2}}(t-a)^{\frac{1-p}{p^2}}dt\right)^p dx.$$

Grâce a l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \le \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^b g^{-p}(x)$$
$$\times\left[\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\left(\frac{1-p}{p^2}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]^p dx.$$

Par conséquent,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx$$
$$\le \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^b g^{-p}(x)\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\frac{-1}{p}}dt\right)^{p-1} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-p}(x)\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)\left(J_a^\alpha(x-a)^{\frac{-1}{p}}\right)^{p-1} dx. \tag{4.4.1}$$

On calcule $J_a^\alpha(x-a)^{\frac{-1}{p}}$,

$$J_a^\alpha(x-a)^{\frac{-1}{p}} = \frac{\Gamma(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(1-\frac{1}{p}+\alpha)}(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}.$$

On remplace ce dernier résultat par sa valeur dans (4.4.1) :

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \le \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)}$$
$$\times\int_a^b g^{-p}(x)(x-a)^{\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)(p-1)}\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx.$$

Cela est équivalent à

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \le \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)}$$
$$\times\int_a^b \left(\frac{x-a}{g(x)}\right)^p (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}}\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx.$$

D'autre part, on a

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \le \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)}$$
$$\times \int_a^b \left(\frac{x-a+\eta}{g(x)}\right)^p (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}} \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt\right) dx.$$

Et comme $\dfrac{x-a+\eta}{g(x)}$ est décroissante, alors l'inégalité précédente devient :

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \le \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)}$$
$$\times \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(x)}\right)^p (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}} \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt\right) dx.$$

Comme $a \le t \le x \le b$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \;\; \le \;\; & \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)} \\ & \times \left[\int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)}\right)^p (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}} \right. \\ & \left. \left(\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}} dx\right) dt\right].\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)}\right)^p dx \\ \le \;\; & \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{\Gamma^{p-1}(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)(\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p})} \\ & \times \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)}\right)^p (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}} \\ & \times \left((b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}} - (t-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}}\right) dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f\left(x\right)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p})\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)} \\
&\times\left[(b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}}\int_a^b\left(\frac{t-a+\eta}{g(t)}\right)^p(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p}}\right. \\
&\left.-\int_a^b\left(\frac{t-a+\eta}{g(t)}\right)^p(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)-p+1}\right].
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f\left(x\right)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p})\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)} \\
&\times\left[(b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}}J_a^\alpha\left[\left(\frac{f(b)}{g(b)}(b-a+\eta)\right)^p(b-a)^{\frac{p-1}{p}}\right]\right. \\
&\left.-J_a^\alpha\left[\left(\frac{f(b)}{g(b)}(b-a+\eta)\right)^p(b-a)^{1+\alpha(p-1)-p}\right]\right].
\end{aligned}$$

Remarque 4.4.1 *Si on prend $\alpha=1$ dans le théorème 4.4.1, on obtient le théorème 4.3.1. En effet :*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\frac{\int_a^x f(t)dt}{g(x)}\right)dx \leq \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\frac{1}{p}-1)\Gamma^{p-1}(2-\frac{1}{p})} \\
&\times\left[(b-a)^{\frac{1}{p}-1}\int_a^b\left(\frac{f(t)}{g(t)}(t-a+\eta)\right)^p(t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt-\int_a^b\left(\frac{f(t)}{g(t)}(t-a+\eta)\right)^p dt\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\frac{\int_a^x f(t)dt}{g(x)}\right)dx \\
\leq\ & \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\frac{1}{p}-1)(1-\frac{1}{p})^{p-1}\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})} \\
&\times\int_a^b\left(\frac{f(t)}{g(x)}(t-a+\eta)\right)^p\left[(b-a)^{\frac{1}{p}-1}(t-a)^{\frac{p-1}{p}}-1\right]dt. \\
\leq\ & \frac{1}{(1-\frac{1}{p})^p}\int_a^b\left(\frac{f(t)}{g(t)}(t-a+\eta)\right)^p\left[1-\frac{(t-a)^{\frac{p-1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}}\right].
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{(t-a)^{\frac{p-1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}}\geq 0$, cela implique que $1-\dfrac{(t-a)^{\frac{p-1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}}\leq 1.$

Donc,

$$\int_a^b \left(\frac{\int_a^x f(t)dt}{g(x)}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}(t-a+\eta)\right)^p dt.$$

Corollaire 4.4.1 *Soit f une fonction positive sur $[a,b]\,, a>0$ et $0<\eta<a$, alors $\forall p > 1, \alpha > 0$, on a :*

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{x-a+\eta}\right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p})}{(\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p})\Gamma^{p-1}(1-\frac{1}{p}+\alpha)}$$
$$\times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+\frac{1}{p}-p} J_a^\alpha \left(f^p(b)(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\right) - J_a^\alpha \left(f^p(b)(b-a)^{1+\alpha(p-1)-p}\right)\right].$$

Remarque 4.4.2 *Si on prend $\alpha=1$ dans le corollaire 4.4.1, on obtient :*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a+\eta)^{-p}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \\
\leq\ & \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\int_a^b f^p(t)\left(1-\frac{(t-a)^{1-\frac{1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}}\right)dt\right] \\
\leq\ & \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b f^p(t)dt.
\end{aligned}$$

De plus, il est clair que pour tout $0<\eta<a$, on a :

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{x}\right)^p dx \leq \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{x-a+\eta}\right)^p dx. \tag{4.4.2}$$

Donc, l'inégalité (4.4.2) implique l'inégalité de Levinson (4.2.1).

Théorème 4.4.2 *[12] Soient f et g deux fonctions positives sur sur $[a,b]\subseteq[0,\infty[$. Si g est croissante, alors $\forall\alpha>0$, $q>0$:*

1) Si $p>1$, on a :

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{(\alpha p-\alpha+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times \left[(b-a)^{\alpha p-\alpha+1} J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)}\right) - J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)}(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}\right)\right].$$

2) Si $0<p<1$, on a :

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{g^{-q}(b)}{(\alpha p-\alpha+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times \left[\frac{(-1)^{\alpha p-\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha p+1)J_b^{\alpha p+1} f^p(a) - (b-a)^{\alpha p-\alpha+1} J_b^\alpha f^p(a)\right].$$

Preuve.

Partie 1 : Considérant $f > 0$, $g > 0$ et $p > 1$, $q > 0$. On a pour tout $\alpha > 0$:

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx = \int_a^b g^{-q}(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)^p dx.$$

En utilisant le théorème 4.4.1, on aura :

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \int_a^b g^{-q}(x) \left[(J_a^\alpha f^p(x))^{\frac{1}{p}} (J_a^\alpha 1)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx.$$

Cela est équivalent à

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \\ \leq &\int_a^b g^{-q}(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \\ &\times \left[\int_a^b g^{-q}(x) \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) (x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right]. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Comme g est croissante, la formule (4.4.3) devient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \\ &\times \left[\int_a^b g^{-q}(t) \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) (x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right], \end{aligned}$$

et puisque $a \leq t \leq x \leq b$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \\ &\times \left[\int_a^b g^{-q}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\leq \frac{1}{(\alpha p - \alpha + 1)\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \\ &\times \left[\int_a^b g^{-q}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) \left((b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} - (t-a)^{\alpha p - \alpha + 1} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

D'où,

$$\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{(\alpha p-\alpha+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times\left((b-a)^{\alpha p-\alpha+1} J_a^\alpha\left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)}\right)-J_a^\alpha\left[\left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)}\right)(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}\right]\right).$$

Partie 2 : Considérant $f>0$, $g>0$ et $0<p<1$, $q>0$. On a pour tout $\alpha>0$:

$$\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx=\frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)^p dx.$$

On utilise l'inégalité inverse de Hölder avec poids pour $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx\\
\geq\ & \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)\left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]^p dx\\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)\left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)\left(J_a^\alpha 1\right)^{p-1}\right] dx.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times\int_a^b g^{-q}(x)(x-a)^{\alpha(p-1)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)dx.$$

Et comme g est croissante sur $[a,b]$, on obtient :

$$\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times\int_a^b g^{-q}(b)(x-a)^{\alpha(p-1)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)dx.$$

Maintenant, on change l'ordre d'intégration :

$$\int_a^b \frac{\left(J_a^\alpha f(x)\right)^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \tag{4.4.4}$$
$$\int_b^a g^{-q}(b)(a-t)^{\alpha-1} f^p(t)\left(\int_b^t (x-a)^{\alpha(p-1)}dx\right)dt,$$

avec
$$\int_b^t (x-a)^{\alpha(p-1)}dx = \frac{(t-a)^{\alpha p-\alpha+1}-(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}}{(\alpha p-\alpha+1)}.$$
D'où, la formule (4.4.4) devient :
$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)(\alpha p-\alpha+1)}$$
$$\times \int_b^a g^{-q}(b)(a-t)^{\alpha-1}f^p(t)\left[(t-a)^{\alpha p-\alpha+1}-(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}\right]dt.$$

Donc,
$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{g^{-q}(b)}{(\alpha p-\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times \quad \left[\int_b^a (a-t)^{\alpha-1}\left((-1)(a-t)\right)^{\alpha p-\alpha+1} f^p(t)dt \right.$$
$$\left. -(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}\int_b^a (a-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right].$$

On remarque que
$$\int_b^a (a-t)^{\alpha p}(-1)^{\alpha p-\alpha+1} f^p(t)dt = \left((-1)^{\alpha p-\alpha+1}\Gamma(\alpha p+1)\right) J_b^{\alpha p+1} f^p(a)$$

et
$$(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a (a-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt = (b-a)^{\alpha p-\alpha+1}J_b^\alpha f^p(a).$$

Par conséquent,
$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{g^{-q}(b)}{(\alpha p-\alpha+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times \left[\frac{(-1)^{\alpha p-\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha p+1)J_b^{\alpha p+1}f^p(a)-(b-a)^{\alpha p-\alpha+1}J_b^\alpha f^p(a)\right].$$

Passons à présenter quelques remarques relatives au théorème précédent.

Remarque 4.4.3

1) En appliquant le théorème 4.4.2 (1) pour $\alpha = 1$, on obtient le résultat de la première partie du théorème 4.3.2.

2) Si on prend $\alpha = 1$, $g(x) = x$ dans le théorème 4.4.2 (1), on obtient l'inégalité de B. Sroysang (4.2.3) de [16] .

3) Si on prend $\alpha = 1$, $g(x) = x$, $p = q$ dans théorème 4.4.2 (1), on obtient l'inégalité de W.T. Sulaiman (4.2.2) de [18] .

4.4.2 Deuxième Approche

D'autres généralisations de l'inégalité de Hardy sont présentées dans les résultats suivants :

Théorème 4.4.3 *Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b] \subseteq [0,\infty[$, et soit $\eta > 0$. Si $\dfrac{x-a+\eta}{g(x)}$ est décroissante, alors $\forall\ p > 1,\ \alpha > 0,$ on a :*

$$J_a^\alpha \left(\frac{F(b)}{g(b)}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p J_a^\alpha \left(b-a+\eta\right)^p \left(\frac{f(b)}{g(b)}\right)^p,$$

avec

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ ,\ x \in [a,b] \, .$$

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha \left(\frac{F(b)}{g(b)}\right)^p &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x)(b-x)^{\alpha-1} \left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx. \end{aligned}$$

Cela est équivalent à

$$J_a^\alpha \left(\frac{F(b)}{g(b)}\right)^p = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x)(b-x)^{\alpha-1} \left(\int_a^x f(t)(t-a)^{\frac{p-1}{p^2}}(t-a)^{\frac{1-p}{p^2}} dt\right)^p dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \qquad (4.4.5) \\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x)(b-x)^{\alpha-1} \left(\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (t-a)^{\frac{-1}{p}} dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)^p dx \\ =\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x)(b-x)^{\alpha-1} \left(\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt\right) \left(\int_a^x (t-a)^{\frac{-1}{p}} dt\right)^{p-1}\right) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\left(\int_a^x (t-a)^{\frac{-1}{p}} dt\right)^{p-1} = \frac{(x-a)^{(1-\frac{1}{p})(p-1)}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}.$$

D'où, l'inégalité (4.4.5) devient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\int_a^b g^{-p}(x)(b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{(1-\frac{1}{p})(p-1)}\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx. \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\int_a^b \left(\frac{(x-a)}{g(x)}\right)^p (b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{1}{p}-2}\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\int_a^b \left(\frac{(x-a+\eta)}{g(x)}\right)^p (b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{1}{p}-2}\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{x-a+\eta}{g(x)}$ est décroissante, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\int_a^b \left(\frac{(t-a+\eta)}{g(x)}\right)^p (b-t)^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{1}{p}-2}\left(\int_a^x f(t)^p (t-a)^{\frac{p-1}{p}}dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Puisque $a \leq t \leq x \leq b$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}})\int_a^b \left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)}\right)^p f^p(t)(b-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_t^b (x-a)^{\frac{1}{p}-2}dx\right)dt.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}(\frac{1}{p}-1)} \\
&\times\int_a^b \left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)}\right)^p f^p(t)(b-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\frac{p-1}{p}}[(b-a)^{\frac{1}{p}-1}-(t-a)^{\frac{1}{p}-1}]dt \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}\left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)}\right)^p f^p(t)\left[1-\frac{(t-a)^{1-\frac{1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}}\right]dt.
\end{aligned}$$

Mais, comme $1-\frac{(t-a)^{1-\frac{1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}} \leq 1$, donc on va avoir :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b (b-t)^{\alpha-1}\left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)}\right)^p f^p(t)dt.
\end{aligned}$$

Et alors

$$J_a^\alpha\left(\frac{F(b)}{g(b)}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p J_a^\alpha\,(b-a+\eta)^p\left(\frac{f(b)}{g(b)}\right)^p.$$

Corollaire 4.4.2 *Soit f une fonction positive sur $[a,b]\,, a>0$ et $0<\eta<a$. Alors $\forall\ p>1, \alpha>0$, on a :*

$$J_a^\alpha\left(\frac{F(b)}{b-a+\eta}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p J_a^\alpha f^p(b),$$

avec

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\ x\in[a,b]\,.$$

Remarque 4.4.3 *Si $0<\eta<a$, on obtient*

$$J_a^\alpha\left(\frac{F(b)}{b}\right)^p \leq J_a^\alpha\left(\frac{F(b)}{b-a+\eta}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p J_a^\alpha f^p(b).$$

Prenons $\alpha=1$, on aboutit à l'inégalité de N. Levinson :

$$\int_a^b\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_b^b f^p(x)dx.$$

Théorème 4.4.4 *Soient $\eta\geq 0$, $f>0$ et $g>0$ sur $[a,b]\subseteq[0,\infty[$ sachant que g est croissante. Alors pour $p>1, \alpha>0$, on a*

$$pJ_a^\alpha\left(\frac{F^p(b)}{g(b)^q}\right) \leq (b-a)^p J_a^\alpha\left(\frac{f^p(b)}{g(b)^q}\right) - J_a^\alpha\left((b-a)^p\frac{f^p(b)}{g(b)^q}\right),$$

avec

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\ x\in[a,b]\,.$$

Preuve.

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F^p(x)}{g^q(x)}\right)dx \\
=\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)(b-x)^{\alpha-1}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)^p dx \\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)(b-x)^{\alpha-1}\left(\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)^p dx.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F^p(x)}{g^q(x)}\right)dx \\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(x)(b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Et comme g est croissante, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F^p(x)}{g^q(x)}\right)dx \\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(t)(b-x)^{\alpha-1}(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F^p(x)}{g^q(x)}\right)dx \\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(t)(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)\left(\int_t^b (x-a)^{p-1}dx\right)dt \\
=\ &\frac{1}{p\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-q}(t)(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)((b-a)^p-(t-a)^p)dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(\frac{F^p(x)}{g^q(x)}\right)dx \\
\leq\ &\frac{1}{p\Gamma(\alpha)}\int_a^x (b-a)^p g^{-q}(t)(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt-\frac{1}{p\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^p g^{-q}(x)(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt \\
\leq\ &\frac{(b-a)^p}{p}J_a^\alpha\frac{f^p(b)}{g^q(b)}-\frac{1}{p}J_a^\alpha\frac{(b-a)^pf^p(b)}{g^q(b)}.
\end{aligned}$$

Remarque 4.4.5

1) En appliquant le théorème 4.4.4 (1) pour $\alpha = 1$, on obtient le résultat de la première partie du théorème 4.3.2 de [13]

2) Si on prend $\alpha = 1$, $g(x) = x$ dans le théorème 4.4.4 (1), on obtient l'inégalité de B. Sroysang (4.2.3) de [15] .

3) Si on prend $\alpha = 1$, $g(x) = x$, $p = q$ dans théorème 4.4.4 (1), on obtient l'inégalité de W.T. Sulaiman (4.2.2) de [17] .

4.4.3 Exemple d'application

On prend la fonction croissante $g(x) = \frac{-1}{x}$; $x \in [0, b]$ et f la fonction de densité de la loi uniforme telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a};\ x \in [a, b] \\ 0;\ \text{sinon} \end{cases},$$

où sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases}.$$

Alors pour $p = 2$, $q = 1$, on a :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\frac{F^2(b)}{g(b)} &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x\left(\frac{x}{b}\right)^2 dx \\ &= \frac{-1}{b^2\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x^3 dx \\ &= \frac{-1}{b^2}J^{\alpha}t^3\,;\ t = b \\ &= \frac{-1}{b^2}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4+\alpha)}t^{3+\alpha} \\ &= \frac{-6}{\Gamma(4+\alpha)}b^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}\frac{f^2(b)}{g(b)} &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x\left(\frac{1}{b}\right)^2 dx \\
&= \frac{-1}{b^2\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x dx \\
&= \frac{-1}{b^2}J^{\alpha}t\,;\ t=b \\
&= \frac{-1}{b^2}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}t^{1+\alpha} \\
&= \frac{-b^{\alpha-1}}{\Gamma(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}\left(b^2\frac{f^2(b)}{g(b)}\right) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x^2\left(\frac{1}{b}\right)^2 dx \\
&= \frac{-1}{b^2\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-x)^{\alpha-1}x^3 dx \\
&= \frac{-1}{b^2}J^{\alpha}t^3\,;\ t=b \\
&= \frac{-\Gamma(4)}{b^2\Gamma(4+\alpha)}t^{3+\alpha} \\
&= \frac{-6}{\Gamma(4+\alpha)}b^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.4.4, on obtient :

$$\frac{-12b^{1+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} \leq \frac{6}{\Gamma(4+\alpha)}b^{1+\alpha} - \frac{b^{\alpha-1}}{\Gamma(2+\alpha)},$$

c'est à dire

$$\frac{18b^{1+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} \leq \frac{b^{\alpha-1}}{\Gamma(2+\alpha)}.$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire de Master, on a présenté des résultats fractionnaires sur les inégalités suivantes :

– Chebyshev : dont on a étudié le cas où les fonctions données sont synchrones puis non forcement synchrones.

– G. Hardy ; N. Livenson, W.T. Sulaimann et B. Sroysang.

Les théorèmes qu'on a démontrés sont soit publiés en 2016, soit soumis pour publication dans des Revues Internaionales de Mathematiques.

Comme perspective ou problème ouvert, on propose d'améliorer la condition de non synchronicité des fonctions, dans le cas de Chebyshev, à deux variables. Voilà un problème ouvert à s'y intéresser.

Bibliographie

[1] P.L. Chebyshev : Sur les expressions approximatives des integrales definis par les autres prises entre les memes limite. Proc. Math. Soc. Charkov, 2, (1882), 93-98.

[2] W.S. Cheung, Z. Hanjs, J. Pecaric : Some Hardy-type inequalities. J. Math. Anal. Appl., 250 (2000), 621-634.

[3] Z. Dahmani : New inequalities in fractional integrals. International Journal of Nonlinear Sciences, 9(4), (2010), 493-497.

[4] Z. Dahmani : About some integral inequalities using Riemann-Liouville integrals. General Mathematics, 20(4) (2012), 63-69.

[5] Z. Dahmani, A. Khameli, K. Freha : Some Riemann-Liouville integral inequalities for the weighted and the exteded Chebyshev functionals. Konuralp Journal of Mathematics, soumis 2016.

[6] Z. Dahmani, A. Khameli, K. Freha : Fractional integral Chebyshev inequality without synchronous functions condition. Facta Mathematics, soumis (2016).

[7] Z. Dahmani, O. Mechouar, S. Brahami : Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving Riemann-Liouville operator. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications 3 (4), (2011), 38-44.

[8] Z. Dahmani, L. Tabharit : On weighted Gruss type inequalities via fractional integrals, JARPM, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2(4), (2010), 31-38.

[9] N. Elezovic, L. Marangunic, G. Pecaric : Some improvements of Gruss type inequality. JMI 1(3), (2007), 425-436.

[10] R. Gorenflo, F. Mainardi : Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order. Springer Verlag, Wien, (1997), 223-276.

[11] G.H. Hardy : Note on a theorem of Hilbert. Math. Z., 6 (1920), 314-317.

[12] A. Khameli, Z. Dahmani, K. Freha, M.Z. Sarikaya : New Riemann-Liouville generalizations for some inequalities of Hardy Type. M.J.M., 4(2) (2016), 277-283.

[13] N. Levinson : Generalizations of an inequality of Hardy. Duke Math. J., 31 (1964), 389-394.

[14] D.S. Mitrinovic : Analytic inequalities. Springer Verlag. Berlin, (1970).

[15] C.P. Niculescu, I. Roventa : An extention of Chebyshev's algebric inequality. Math. Reports 15 (65), (2013), 91-95.

[16] B. Sroysang : A generalization of some integral inequalities similar to Hardy's inequality. Math. Aeterna, 3 (2013), 593-593.

[17] S. Wu, B. Sroysang and S. Li : A further generalization of certain integral inequalities similar to Hardy's inequality. J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016), 1093-1102.

[18] W.T. Sulaiman : Reverses of Minkowski's, Hölder's, and Hardy's integral inequalities. Int. J. Mod. Math. Sci, 1(1), (2012), 14-24.