UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité :Mathématique

Thème

Problème aux limites pour les inclusion differentielle fractionnaire

Soutenu le .29./06/2016.

Devant le jury

Président	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la géneralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers (réels ou complexes). Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du 17 éme siècle, partant de quelques spéculations de G.W.Leibniz concernant la question de l'Hopital, posée le 30/09/1695, sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$, le calcule fractionaire a été longuement considéré comme simple théorie mathématique sans aucune explication réelle où pratique.
Le sujet principale de ce mémoire est l.étude de l.existence des solutions pour les problèmes aux limites concernant les inclusions diférentielles fractionnaires pour $alpha \in \left]0,1\right]$. Notre approche est basée sur la théorie du point fixe (l'alternative non-lineare de leray-schauder et le théoréme du covitz et Nadler pour les contractions multivoques.)
Ce mémoire est composé de deux chapitres : Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant les espaces fonctionnelle, l'analyse multivoque, le calcul fractionnaire et quelques théorèmes du point fixe.
Le deuxième chapitre est consacré à l'existence des solutions pour les inclusions diférentielles fractionnaires où l'ordre $\alpha \in [0,1[$. Notre approche est basé sur l'alternative non-lineare de leray-schauder et le théoréme du covitz et Nadler pour les contractions multivoques. .

Chapitre 1

Espaces fonctionnelles

Définition

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ où $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$,on désigne par $L^1([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme :

$$\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|.$$

Définition

On désigne par $L^1([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$ où $a,b\in\mathbb{R}$ et aux valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|x\|_{L^1}=\int_a^b|x(t)|\,dt$$

Définition

$AC(J,\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $y:J\to\mathbb{R}$, qui sont absolument continues.

1.0.1 Théorème d'ascola arzela

Soit X espace compact et $C(X)$ un espace de Banach des fonctions continues sur X à valeurs complexe, muni de la norme du sup, Alors, un sous ensemble H de $C(X)$ est relativement compact si et seulement si,

1. H est équicontinue.
2. H est borné dans $C(X)$.

1.1 Quelque notions d'analyse multivoque

Définition

Soient X et Y deux ensembles non vides. Un opérateur multivoque du X de Y est une correspondance qui associe un sous-ensemble $G(x)$ du Y à chaque élément convenxe x de X. On note l'opérateur multivoque par : $G(X) : X \to P(X)$.

Définition

On dit que l'opérateur multivique $G : X \to P(X)$ est à valeurs convenxes(fermées) si $G(x)$ est convenxe(fermé) pour chaque $x \in X$.

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $G : X \to P(X)$ est borné si $G(B)$ est borné dans X pour chaque ensemble borné B dans X i,e

$$\sup_{x \in B} \{\sup \{\|y\| : y \in G(x)\}\} < \infty$$

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $G : X \to P(X)$ est completèment continue si $G(B)$ est relativement compact pour chaque sous-ensemble borné $B \subseteq X$.

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $G : X \to P(X)$ est semi-continue supérieurement(s.c.s) dans X si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $G(x_0)$ est non vide fermé de X et pour chaque ouvert N de X tel que $N \subseteq G(x_0)$,il exsiste un voisinage ouvert M de x_0 tel que $G(M) \subseteq N$.

Remarque

Si $G : X \to P(X)$ est complètement continue et à valeur non vide compacte, alors G est s.c.s si est seulement si G a un graphe fermé i.e

$$x_n \to x_*, y_n \to y_*, y_n \in G(x_n) \Rightarrow y_* \in G(x_*).$$

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $G : X \to P(X)$ admet un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.

Définition

Soit $p_{cp,c}(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les sous-ensemble non vides compactes et convenxes de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $G : X \to p_{cp,c}(\mathbb{R})$ est mesurable si pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $Y : J \to \mathbb{R}$ est définie par:

$$Y(t) = d(x, G(t)) = \inf \{|x - z| : z \in G(t)\} \text{. est mesurable.}$$

Où d est la distance réduire par l'espace de Banach X.

Définition

On dit que l'opérateur multivoque $F\ [a,b] \times X \to p(X)$ est L^1-Carathéodory si

i $t \to F(t,u)$ est mesurable pour chaque $u \in X$;

ii $u \to F(t,u)$ est semi-continu supérieur p,p $t \in [a,b]$;

iii pour chaque $q > 0$, il existe $\Phi_q \in L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$ tell que :

$$\|F(t,u)\| = \sup \{|v| : v \in\in F(t,u)\} \leq \Phi_q(t)$$

pour tout $\|v\| \leq q$ et pour chaque $t \in [a,b]$.

Définition

Pour tout $y \in \mathbb{C}([a,b], X)$, on définit l'ensemble des séléction de F par :

$$S_{F,y} = \left\{v \in L^1([a,b], X) : v(t) \in F \in (t, y(t)) a.e.t \in [a,b]\right\}$$

Lemme

Soit X un espace de Banach et $[a,b]$ un intervalle réel compact.
Soit $F : [a,b] \times X \to p_{b,cl,c}(X)$ un opérateur multivoque L^1-Carathéodory et soit Γ une application continue de $L^1(J,X)$ en $\mathbb{C}(J,X)$, alors l'opérateur

$$\Gamma \circ S_F : \mathbb{C}(J,X) \to p_{cp,c}(\mathbb{C}(J,X)), y \to (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y})$$

est un opérateur à graphe fermé dans $\mathbb{C}(J,X) \times \mathbb{C}(J,X)$

1.1.1 Quelques théorème de point fixe

Théoreme du point fixe de Leray-Schauder

l'altarnative non linéaire de Leray-Schauder
Soient B un espace de Banach et C un sous-ensemble convenxe de B. On suppose que U est un sous-ensemble ouvert de C avec $u_0 \in U$ et $T : U \to C$ un opérateur continu et compact alors :l'un des énoncés suivants a lieu.

1. T admet un point fixe.
2. Il existe $u \in \partial u$ et $\lambda \in [0,1]$ avec $u = \lambda T(u) + (1-\lambda)u_0$.

1.1.2 Théorème du point fixe du Covitz et Nadler

Théorème 1.1.1 *Soit (X,d) un espace métric complet. Si $N : X \to P_{cl}(X)$ est une contraction, alors T admet au moins un point fixe.*

Théorem du point fixe Schaefer

Soient X un espace de Banach et $N : X \to X$ est un opérateur comlètement continu (i.e l'opérateur est continu et l'image tout borné B de X par l'opérateur N est un ensemble relativement compact dans X).
Si l'ensemble

$$E(N) = \{x \in X : x = \lambda N x \text{ pour } \lambda \in [0,1]\}$$

est borné,alors N admet un point fixe.

1.2 Le calcul fractionnaire

La fonction Gamma

Lemme

La fonction Gamma est simplement la généralement de la fonction de la factorièlle cètte fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Définition

La fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1}dt,\ z > 0$$

où $t^{z-1} = \exp(z-1)\ln(t)$.

Proposition

pour tout $z \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

•$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

•$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z)$

•$\Gamma(n+1) = n!$

1.3 La fonction Delta

La fonction Delta est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{SI} \quad t \neq 0 \\ +\infty & \text{SI} \quad t = 0 \end{cases}$$

telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a :

• $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$

1.4 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}h(s)ds, t > a \ et \ n \in \mathbb{N}^*$$

En généralisant cette formule à l'ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura définition suivante :

Définition

Soit $h \in L^1\left([a,b], \mathbb{R}^+\right)$. On définit I'ntégrale fractionnaire (arbitraire) d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par la formule :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

1) Si $a = 0$, on écrit :

$$I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

telle que

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t \leq 0 \end{cases}$$

et $\varphi_a \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$.

2) Si $\alpha = 0$, on écrit :

$$I^0 h(t) = h(t)$$

3) Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour tout $h(t) \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta h(t) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) = I_a^\beta I_a^\alpha h(t)$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

4) Si $h \in L^1[a,b]$ avec a fini, alors $I_a^\alpha h(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $I_a^\alpha \in L^1[a,b]$.

1.5 Dérivées fractionnaires

plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1.6 Opérateur de dérivée $n^{éme}$

Définition

L'opérateur de la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n;

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

$$\begin{aligned} D^n I^n f \ &= f;\ I^n D^n f \neq f,\ f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}_+) \\ I^n D^n f &= f(x) - \sum_{K=0}^{n-1} f^{(K)}(0) \frac{t^K}{K!},\ t > 0 \end{aligned}$$

1.7 Dérivée au sens de Riemann -Liouville

Définition

Soit $h \in \mathbb{C}^1([a,b])$ .On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < \alpha \leq 1)$ au sens de Riemann -Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

Définition

Soit $h \in \mathbb{C}^n([a,b])$. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < n-1 < \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s) ds \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

cas particulier :

Si $(0 < \alpha \leq 1)$:

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} h(s) ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

Remarque

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = ... = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0.$$

Proposition

Soient α, β deux paramètre réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors on a :

1.$D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x), \alpha > 0$

2.$D^\beta I^\alpha f(x) = D^{\alpha-\beta} f(x), \beta < 0, \alpha > 0$

3.$D^n I^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x), n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$

4.$I^\alpha D^\alpha f(x) \neq f(x)$

5.$D^\alpha D^\beta f(x) \neq D^\beta D^\alpha f(x)$

6.$D^\beta D^\alpha f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x)$

1.8 Dérivée au sens se Caputo

Soit $h \in \mathbb{C}^n([a,b])$ .On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction h par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s) ds \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

cas particuliers

•$(0 < \alpha \leq 1)$:

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} h'(s) ds \\ &= I_a^{1-\alpha} D^1 h(t). \end{aligned}$$

1.

$${}^cD_a^\alpha c = 0;$$

avec c est une constante.

2.

$${}^cD_a^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} & ;\beta \succ \alpha-1 \\ 0 & ;\ \beta \leq \alpha-1 \end{cases}$$

Chapitre 2

Existence des solutions

Ce chapitre est consacré à l'étude des solutions du problèmes aux limites consernant les inclusions differentièlles fractionnaires.

2.1 Introduction

Soit α un rèel positive tel que $0 < \alpha \leq 1$
On considéré le problèmes aux limites fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y(t)), t \in J = [0, T], \\ ay(0) + by(T) = c, \end{cases}$$

Õu ${}^{C}D^{\alpha}$ est la dérivé fractionnaire au sens du caputo, $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ est un opérateur multivoque ,$P(\mathbb{R})$ est la famille de tout les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$,a, b, c sont réels constantes tel que $a + b \neq 0$.

Définition

une fonction $y \in AC(J, \mathbb{R})$est dit solution de $(1)-(2)$s'il existe une fonction $v \in L^{1}(J, \mathbb{R})$avec $v(t) \in F(t, y(t))$,pour a,e $t \in J$,tel que $D^{\alpha}y(t) = v(t)$,a,e $t \in J, 0 < \alpha \leq 1$ et la fonction y satisfait condition (2)l'existance d'une solution pour le problème $(1) - (2)$.
Nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivantes :

Lemme (3.3)

soit $\alpha > 0$,l'equation différentielle

$$D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet la solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1},$$

avec $c_i \in \mathbb{R}; i = 0, ..., n; n = [\alpha] + 1$.

En conséquence de lemme $(3, 2)$ et $(3, 3)$, on a le resultat suivant :

Lemme(3.4)

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $h : J \to \mathbb{R}$ continue. Une fonction y est une solution de l'équation integrale fractionnaire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \quad (3),$$

si et seulement si, y est une solution de BVP

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in J \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Lemme (5.3)

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $h : J \to \mathbb{R}$ continue. La fonction y est une solution de l'équation integrale fractionnaire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - c \right] \quad (3),$$

Si et seulement si, y est une solution BVP

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in J \quad (7) \\ ay(0) + by(T) = c \quad (8). \end{cases}$$

Preuve

Assume y satisfait(7) ,alors le lemme 3.2 implique que

$$y(t) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

de (8), un simple calcul donne

$$c_0 = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \right].$$

2.2 Le premier resultat

Théorème

On suppose que

(H_1) $F : J \times \mathbb{R} \to Þ_{cp,c}(\mathbb{R})$ est un opérateur multivoque Cathéodory ;

(H_2) Il existe $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\Psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue et non décroissante tel que

$$\|F(t,u)\|_p \leq p(t)\,\Psi(|u|)\,,\ \text{pour tout } t \in Jetu \in \mathbb{R};$$

(H_3) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R})$,avec $I^\alpha l < \infty$ tel que

$$H_d(F(t,u), F(t,\bar{u})) \leq l(t)\,|u - \bar{u}|$$

pour tout $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$ et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t)\,; a, et \in J;$$

(H_4) Il existe un certain membre $M > 0$ tell que

$$\frac{M}{\Psi(M)\,\|I^\alpha p\|_\infty + \frac{|b|\Psi(M)(I^\alpha p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}} > 1, (9)$$

alors, le BVP $(1)-(2)$admet au moins une solution sur J.

Preuve

On transformons le problème $(1)-(2)$ au un problème de point fixe.

On considère l'opérateur multivoque

$$\begin{aligned} N(y) &= \Bigg\{h \in C(J, \mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\,ds - c\right], v \in S_{F,y}\Bigg\} \end{aligned}$$

Remarque(3.5)

Clairement, du lemme (3.3) les points fixes de N sont des solution du $(1)-(2)$:

On va montrer que N satisfait les hypothéses de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, la preuve sera donnée en plusieurs étapes .

Etape 1 :$N(y)$ est convexe**.**

Si $h_1, h_2, N(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ telles que pour tout $t \in J$, nous avons

$$h_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s)\, ds - c\right],$$

avec $i = 1, 2$.

Pour $0 \leq d \leq 1$, alors, pour tout $t \in J$,nous avons

$$\begin{aligned}(dh_1 + (1-d)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]\, ds \\ &\quad - \frac{1}{|a+b|}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]\, ds - c\right].\end{aligned}$$

De puis, $S_{F,y}$ est convexe (parceque F convexe),nous avons

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N(y).$$

Etape 2 :N transforme un ensemble borné à un ensemble borné dans$C(J,\mathbb{R})$.

Soit $B_{\eta^*} = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$ est borné dans $C(J,\mathbb{R})$ et $y \in B_{\eta^*}$.

En suite, pour tout $h \in N(y)$,il existe $v \in S_{F,y}$ tel que

$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - c\right], t \in J.$

D'aprés (H_2), nous avons pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}|h(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds - \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\Psi(|y(s)|)\, ds + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\Psi(|y(s)|)\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \Psi(\eta^*) I^\alpha(p)(t) + \frac{|b|\Psi(\eta^*) I^\alpha(p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|h\|_\infty \leq \Psi(\eta^*) I^\alpha(p)(t) + \frac{|b|\Psi(\eta^*) I^\alpha(p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|} := l.$$

Etape 3 :N transforme un ensemble borné à un ensembles equicontinues de $C(J,\mathbb{R})$,soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$, B_{η^*}un ensemble de $C(J,\mathbb{R})$ dans l'étape 2 ,soit $y \in B_{\eta^*}$et $h \in N(y)$,puis

$$\begin{aligned}
|h(t_2) - h(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] v(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \right| \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds + \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right] + \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1 - t_2)^\alpha .
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$,alors le coté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zero,à la suite d'étape 1 à 3, avec le théoreme de Arzela-Ascoli ,on conclut que $N : C(J,\mathbb{R}) \to P(C(J,\mathbb{R}))$est complètement continue .

Etape 4 :Nest un graphe fermé .

soit $y_n \to y_*, h_n \to h_*$, on va montrer que $h_* \in N(y_*)$.

$h_n \in N(y_n)$ signifie qu'il existe $v_n \in S_{F,y}$tel que ,pour chaque $t \in J$,

$$h_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - c \right],$$

nous avons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y}$,tel que $t \in J$,

$$h_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s)\, ds - c \right].$$

Puisque $F(t,.)$est semi continue alors pour $\forall \varepsilon > 0$, nous avons

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0,1), \forall t \in J.$$

Puisque $F(.,.)$a valeurs compactes, alors, il existe une suite $v_{n_m}(t)(.)$ tel que

$$v_{n_m}(t)(.) \to v_*(t)(.) \text{ quand } m \to \infty$$

et

$$v_*(t) \in F(t, y_*(t)), \forall t \in J.$$

Pour tout $w \in F(t, y_*(t))$, nous avons

$$|v_{n_m}(t) - v_*(t)| \leq |v_{n_m}(t) - w| + |w - v_*(t)|.$$

Alors

$$|v_{n_m}(t) - v_*(t)| \leq d(v_{n_m}(t), F(t, y_*(t))).$$

Par une relation similaire, obtenu en inverssant du roles de v_{n_m}et v_*, en résultat

$$\begin{aligned} |v_{n_m}(t) - v_*(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)| \, ds \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)| \, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) \, ds \, \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) \, ds \, \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \end{aligned}$$

d'où,

$$\|h_{n_m} - h_*\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) \, ds \, \|y_{n_m} - y_*\|_\infty$$

$$+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) \, ds \, \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \to 0 \text{ quand } m \to \infty.$$

Etape 5 : Les limites a priori .

Soit y une solution possible au problème $(1) - (2)$puis, il existe $v \in S_{F,y}$tel que pour tout $t \in J$,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) \, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) \, ds - c \right].$$

cela implique par (H_2)que ,pour chaque $t \in J$,nous avons

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds+\frac{|b|}{|a+b|}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|+\frac{|c|}{|a+b|}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\,\Psi(|y(s)|)\,ds+\frac{|b|}{|a+b|}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\,\Psi(|y(s)|)\,ds+\frac{|c|}{|a+b|}\\
&\leq \frac{\Psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds+\frac{|b|\,\Psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)\,|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds+\frac{|c|}{|a+b|}\\
&\leq \Psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(t)+\frac{|b|\,\Psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(t)}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\|y\|_\infty}{\Psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(t)+\frac{|b|\Psi\left(\|y\|_\infty\right)(I^\alpha p)(t)}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}}\leq 1.$$

Par condition (9), il existe M tel que

$$\|y\|_\infty \neq M.$$

Soit

$$U=\{y\in C(J,\mathbb{R}):\|y\|_\infty<M\}.$$

L'operateur $N:\bar{U}\to p(C(J,\mathbb{R}))$ est semi-continue superieure et complètement continue. Du choix de U, il n'y pas $y\in\partial U$ tel que

$$y\in\lambda N(y)\ \text{ pour } \lambda\in(0,1).$$

En conséquence de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on deduit que N admet un point fixe y dans $\bar{U}$ qui est solution du problème $(1)-(2)$.

2.3 Le deuxième resultat

On presente maintenent un resultat pour le problème $(1)-(2)$ avec un second membre à valeur non convenxe.Nos considérations est basée sur le théorème de point fixe pour les contractions multivoques donne par Covitz et Nadler.

Théorème 3-6

Assumer (H_3) et l'hypothèse suivante mésurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$;

si

(10)

$$\left\| I^{\alpha} l \right\|_{\infty} + \left| \frac{|b| \left(I^{\alpha} l \right) (T)}{|a+b|} \right| < 1,$$

puis le BVP admet au moins une solution dans J.

Remarque 3.7

Pour chaque $y \in C(J, \mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide puis que par (H_5) , F a une selection mesurable

preuve

Nous allons montrer que N satisfait les hupothèse de Théoréme de Covitz et Nadler, La preuve sera donnée en deux étapes :

Etape 1 : $N(y) \in p_{cl}(C(J, \mathbb{R}))$ pour chaque $y \in C(J, \mathbb{R})$.

En effet,soit $(y_n)_{n \geq 0} \in N(y)$ tel que $y_n \to \hat{y}$ dans $C(J, \mathbb{R})$.Alors,$\hat{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,y}$ tel que , pour chaque $t \in J$,

$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - c \right].$$

En utilisant ce que F des valeurs compactes et de (H_3) , nous bpouvons passer à une suite si nécessaire pour obtenir que v_n converge vers v dans $L^1_w(J, \mathbb{R})$ (l'espace muni de la topologie faible).Une application du théorème de Mazur's implique que v_n converge fortement vers v et par conséquent $v \in S_{F,y}$.

$$y_n(t) \to \hat{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - c \right].$$

Alors, $\hat{y} \in N(y)$.

Etape 2 :

Il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d\left(\left(N\left(y\right)\right), N\left(\hat{y}\right)\right) \leq \gamma \left|y - \hat{y}\right| \text{ pour chaque } y, \hat{y} \in C(J, \mathbb{R}).$$

Soit $y, \hat{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N\left(y\right)$ .Alors, il existe $v_1\left(t\right) \in F\left(t, y\left(t\right)\right)$ tel que pour chaque $t \in J$

$$h_1\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} v_1\left(s\right) ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} v_1\left(s\right) ds - c\right].$$

De (H_3) il en resulte que

$$H_d\left(F\left(t, y\left(t\right)\right), F\left(t, \hat{y}\left(t\right)\right)\right) \leq l\left(t\right)\left|y\left(t\right) - \hat{y}\left(t\right)\right|.$$

Par conséquent, il existe $w \in F\left(t, \hat{y}\left(t\right)\right)$ tel que

$$\left|v_1\left(t\right) - w\right| \leq l\left(t\right)\left|y\left(t\right) - \hat{y}\left(t\right)\right|, t \in J.$$

On considère $U : J \to P\left(\mathbb{R}\right)$ donée par

$$U\left(t\right) = \left\{w \in \mathbb{R} : \left|v_1\left(t\right) - w\right| \leq l\left(t\right)\left|y\left(t\right) - \hat{y}\left(t\right)\right|\right\}.$$

Etant donnée que l'operateur multivoque $V\left(t\right) = U\left(t\right) \cap F\left(t, \hat{y}\left(t\right)\right)$ est mésurable, ilexiste une fonction $v_2\left(t\right)$ qui est une selection mésurable pour V.Alors, $v_2\left(t\right) \in F\left(t, \hat{y}\left(t\right)\right)$, et pour chaque $t \in J$,

$$\left|v_1\left(t\right) - v_2\left(t\right)\right| \leq l\left(t\right)\left|y\left(t\right) - \hat{y}\left(t\right)\right|.$$

Laissez-nous définir pour chaque $t \in J$

$$h_2\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} v_2\left(s\right) ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} v_2\left(s\right) ds - c\right].$$

Alors pour $t \in J$

$$\left|h_1\left(t\right) - h_2\left(t\right)\right| \leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left|v_1\left(t\right) - v_2\left(s\right)\right| ds - \frac{\left|b\right|}{\left|a+b\right|\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(T-s\right)^{\alpha-1}\left|v_1\left(t\right) - v_2\left(s\right)\right| ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} l\left(s\right)\left|y\left(s\right) - \hat{y}\left(s\right)\right| ds - \frac{\left|b\right|}{\left|a+b\right|\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(T-s\right)^{\alpha-1}\left|l\left(s\right) y\left(s\right) - \hat{y}\left(s\right)\right| ds.$$

Ainsi

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq \left[\|I^\alpha l\|_\infty + \frac{|b| (I^\alpha l)(t)}{|a+b| \Gamma(\alpha)}\right] \|y - \hat{y}\|_\infty .$$

A partir d'une relation analogue, obtenu en inverssant les rôles de y et $\hat{y}$ il en resulte que

$$H_d\left((N(y)), N(\hat{y})\right) \leq \left[\|I^\alpha l\|_\infty + \frac{|b| (I^\alpha l)(t)}{|a+b| \Gamma(\alpha)}\right] \|y - \hat{y}\|_\infty .$$

Alors, N est une contraction et ainsi,d'aprés le Théoréme de Covitz et Nadler, N a un point fixe y qui est une solution pour $(1) - (2)$.

remarque 3-8

Notre resultat du BVP $(1) - (2)$ sont appliqués pour des valeurs initiales de problème $(a = 1, b = 0)$, valeur final $(a = 0, b = 1)$ et des solutions anti-périodiques $(a = 0, b = 1, c = o)$.

CONCLUSION

Notre but principal dans ce mémoire, est de présenter plusieurs résultats d'éxistence pour les inclusions diférentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus par l'aproche du point fixe dans le cas multivoque. Dans le future, on peut considére le problème aux limites pour les inclusions différentielles fractionnaires avec la dérivée de Riemman-Liouville et la dérivée d'Hdamart.

Bibliographie

[1] J.P.Aubin and A.cellina Differential, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1984.

[3] M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order , Surv.Appl.3 (2008), 1-12.

[4] M.Benchohra, S.Hamani Boundary value problems for differential inclusions with fractional order, Discussiones Mathematicae Differntial Inclusions, control and optimization 28 (2008) 147-164.

[5] H.Covitz and S.B.Nadler Jr, Multivalued contraction mapping in generalized metic spaces, Israel J.Math.8 (1907), 5-11.

[6] K.Deimling, Multivalued Differntial Equations, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[7] A.A.Kilbas, Hari M.Srivastava, and Juan J.Trujillo, Theory and Applications of fractional differential Equations,North-Holland Mathematics Studies, 204.Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006.