UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimitation

Thème

Croissance des solutions de certaines equations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients méromorphes

Présenté par

Mr- Koucha Saddam Housseyn

et Mr-Ladjal Farid

Soutenu le /05/2016

Devant le jury

Mme Belarbi Hamani S	**Présidente**	**M.C.A U. MOSTAGANEM.**
Mr Fettouch haouri	**Examinateur**	**M.A.A U. MOSTAGANEM.**
Mme Aziz Hamani K	**Encadreur**	**M.C.A U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

DÉDICACES

Au nom de Dieu le tout miséricordieux, le très miséricordieux.
Notre devoir est rendu grâce à dieu qui nous a donné la patience et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous dédions ce travail à nos parents, nos soeurs et frères et à toute notre famille, aussi qu'à tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mme : AZIZ HAMANI Karima pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de ce travail.

nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté a notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons aussi à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail sans oublier tout nos proffeseurs de l'université de Mostaganem

RÉSUMÉ

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt, joue un rôle trés important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Ce mémoire consiste à étudier l'ordre et l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles de la forme :

$$f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)})f^{(k-1)} + ... + (D_1(z) + B_1(z)e^{R_1(z)})f$$
$$+(D_0(z) + A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)})f = 0$$

où $P(z)$, $Q(z)$ et $R_l(z)$ $(l = 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1, 2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1, ..., k-1)$ et $D_m(z)(m = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes avec $\max = \{\sigma(A_j)(j = 1, 2), \sigma(B_l)(l = 1, ..., k-1), \sigma(D_m)(m = 0, ..., k-1)\} < n$. On considère aussi le cas non homogène.

Le but de ce mémoire est d'étudier les résultats obtenus par ZHENG et HE [14] .

INTRODUCTION

Considèrons l'équation différentielle linéaire du second ordre.

$$f" + P(z)f' + Q(z)f = 0, \tag{0.1}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des fonction entière d'ordre fini. il est bien connu que toute solution f de l'équation (0.1) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (0.1) , alors il y a au moins une solution f_1 ou f_2 d'ordre infini [15]. Par conséquent, la plupart des solutions de (0.1) sont d'ordre infini. Ainsi une question naturelle est : Quelles conditions sur $P(z)$ et $Q\,(z)$ garantira que toute solution $f\,(\not\equiv 0)$ de (0.1) soit d'ordre infini ? Plusieurs auteurs Ozawa [17], Gundersen [10] , Amemiya et Ozawa [1] Chen [3]ont étudié ce problème avec $P(z) = e^{-z}$ et $Q\,(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante. Chen [3] a considéré le cas où $P(z) = e^{-z}$ et $Q\,(z)$ est une fonction entière d'ordre $\sigma\,(Q) = 1$ et a démontré différents résultats concernant la croissance des solutions de l'équation (0.1) . Récemment, Peng et Chen [18] ont étudié les solutions de certaines équations différentielles linéaires du second orde . Leurs résultats ont été plutard généralisés par Habib et Belaïdi [11] .

Ce mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.
Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécéssaires par la suite dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ordre et de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de la forme :

$$\begin{aligned} f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)})f^{(k-1)} + ... + (D_1(z) + B_1(z)e^{R_1(z)})f' \\ + (D_0(z) + A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)})f = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

où $P(z)$, $Q(z)$ et $R_l(z)$ $(l = 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1, 2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1, ..., k-1)$ et $D_m(z)(m = 0, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes.

Dans le troisième chapitre, on considère le cas non homogène.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n\left(t,a,f\right)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,a,f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leqslant t$. On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z|\leqslant t$.

Notons

$$N\left(r,a,f\right)=\int_0^r\frac{\left[n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)\right]}{t}dt+n\left(0,a,f\right)\log r\left(a\neq\infty\right), \tag{1.1.1}$$

$$N\left(r,\infty,f\right)=N\left(r,f\right)=\int_0^r\frac{\left[n\left(t,\infty,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)\right]}{t}dt+n\left(0,\infty,f\right)\log r, \tag{1.1.2}$$

$$\overline{N}\left(r,a,f\right)=\int_0^r\frac{\left[\overline{n}\left(t,a,f\right)-\overline{n}\left(0,a,f\right)\right]}{t}dt+\overline{n}\left(0,a,f\right)\log r\ \ \left(a\neq\infty\right), \tag{1.1.3}$$

$$\overline{N}\left(r,\infty,f\right)=\overline{N}\left(r,f\right)=\int_0^r\frac{\left[\overline{n}\left(t,\infty,f\right)-\overline{n}\left(0,\infty,f\right)\right]}{t}dt+\overline{n}\left(0,\infty,f\right)\log r, \tag{1.1.4}$$

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \ \ (a \neq \infty) \tag{1.1.5}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \tag{1.1.6}$$

où

$$\lg^+ x = \max(\lg x, 0) = \begin{cases} \ln x, \ x > 1 \\ 0, \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leqslant r$ et $m(r,a,f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

Définition 1.1.1 ([12]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction caractéristique de R.Nevanlinna par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) \tag{1.1.7}$$

où $0 < r < +\infty$.

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $N(r,f) \equiv 0$.*

D'autre part,

$$\begin{aligned}
m(r,\infty,f) &= m(r,f) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\varphi}\right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{r}{2\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\
&= \frac{r}{\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}.
\end{aligned}$$

D'où

$$T(r,f) = r/\pi.$$

1.2 Propriétés de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Proposition 1.2.1 ([12], [16]) *Soient $f_n (n \geqslant 1$ un entier) des fonctions méromorphes, a, b, c et d sont des constantes complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$ Alors on a*

1. $T(r, \prod\limits_{j=1}^{n} f_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} T(r, f_j)$.
2. $T(r, \sum\limits_{j=1}^{n} f_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \ln n$.
3. $T(r, f^n) = nT(r, f)$.
4. $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + o(1)$, $(f \not\equiv -d/c)$. $(r \to +\infty)$.

1.3 Ordre et hyper-ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 ([12], [19]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre de f par*

$$\sigma(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.3.1}$$

Si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty, \tag{1.3.2}$$

on dit que la fonction f est d'ordre infini.

Exemple 1.3.1 *Pour la fonctin $f(z) = e^z$, on a $T(r,f) = r/\pi$. D'où $\sigma(f) = 1$.*

Exemple 1.3.2 *Pour la fonctin $f(z) = e^{e^z}$, on a*

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, r \to +\infty.$$

D'où $\sigma(f) = +\infty$.

Définition 1.3.2 ([12], [19]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'hyper ordre de f par*

$$\sigma_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.3.3}$$

Exemple 1.3.3 *La fonction $f(z) = \exp\{\exp z^2\}$ est d'ordre $\sigma(f) = +\infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 2$.*

1.4 Exposant et hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 ([16]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros (respectivement des zéros distincts) de la fonction f noté $\lambda(f)$ (respectivement $\overline{\lambda}(f)$) est défini par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,1/f)}{\log r}, \tag{1.4.1}$$

et

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \overline{N}(r,1/f)}{\log r}. \tag{1.4.2}$$

Exemple 1.4.1 *Pour la fonction* $f(z) = e^z - b$, *où* $b \in \mathbb{C}$ *et* $b \neq 0, \infty$, *on a* $\lambda(f) = 1$.

Définition 1.4.2 ([4]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'hyper-exposant de convergence des zéros (respectivement des zéros distincts) de la fonction f noté $\lambda_2(f)$ (respectivement $\overline{\lambda}_2(f)$)est défini par*

$$\lambda_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log N(r, 1/f)}{\log r}, \tag{1.4.3}$$

et

$$\overline{\lambda}_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \overline{N}(r, 1/f)}{\log r}. \tag{1.4.4}$$

1.5 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.5.1 ([13]) *On définit la mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt, \tag{1.5.1}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Exemple 1.5.1 *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [1, 5] \cup [6, 8] \subset [0, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^5 dt + \int_6^8 dt = 6.$$

Définition 1.5.2 ([13]) *1La mesure logarithmique d'un ensemble* $H \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$lm(H) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt, \tag{1.5.2}$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H.

Exemple 1.5.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$lm = \int_0^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

1.6 Dérivée logarithmique

Lemme 1.6.1 ([16]) *Soit f une fonction méromorphe trancsendante. ALors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S\left(r, f\right),$$

où

$$S\left(r, f\right) = O\left(\ln T(r, f) + \ln r\right)$$

à l'éxtérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\ln r\right).$$

Chapitre 2

Ordre et hyper-ordre des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires homogènes à coefficients méromorphes

2.1 Introduction et résultats

Considèrons l'équation différentielle linéaire du second ordre.

$$f" + P(z)f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.0}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des fonction entière d'ordre fini. il est bien connu que toute solution f de l'équation (2.1.1) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1.1) , alors il y a au moins une solution f_1 ou f_2 d'ordre infini [15]. Par conséquent, la plupart des solutions de (2.1.1) sont d'ordre infini. Ainsi une question naturelle est : Quelles conditions sur $P(z)$ et $Q(z)$ garantira que toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de (2.1.1) soit d'ordre infini ? Plusieurs auteurs Ozawa [17], Gundersen [10] , Amemiya et Ozawa [1] CHEN [3] ont étudié ce problème avec $P(z) = e^{-z}$ et $Q(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante. Dans le cas où $P(z) = e^{-z}$ et $Q(z)$ est une fonction entière transcendante, Gundersen [10] a prouvé le résultat suivant :

Théorème A([10]) Si $Q(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(Q) \neq 1$, alors chaque solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation

$$f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.2}$$

est d'ordre infini.

Cependant l'équation (2.1.2) avec $Q(z) = -(2+4z^2+2ze^{-z})$ possède une solution $f(z) = e^{z^2}$ d'ordre fini. De façon plus précise, quelle condition dans $Q(z)$ lorsque $\sigma(Q) = 1$ va garantir que chaque solution $f(\not\equiv 0)$ de (2.1.2) est d'ordre infini ? une estimation plus exacle de son taux de croissance est un aspect très important. CHEN [3] a examiné l'équation (2.1.2) et a obtenu des résultats différents concernant la croissance de sa solution lorsque $\sigma(Q) = 1$.

Récemment, Peng et Chen [18], Habib et Belaïdi [11] ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires et ont prouvé les résultats suivants :

Théorème B ([18]) Soient $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1, 2)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a_1, a_2 deux nombres complexes tels que $a_1a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$. (suposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou $a_1 < 1$, alors chaque solution $f(\not\equiv 0)$ de equation

$$f'' + e^{-z}f' + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Théorème C ([11]) Soient $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1, 2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1, ..., k-1)$, $D_m(z)(m = 0, ..., k-1)$ des fonctions entières avec $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_l), \sigma(D_m)\} < 1$, b_l $(l = 1, ..., k-1)$ une constante complexe tels que **(i)** $\arg b_l = \arg a_1$ et $b_l = c_la_2$ $(0 < c_l < 1)$ et **(ii)** b_l un constante réelles telle que $b_l \leq 0$ $(l \in I_2)$. où $I_1 \neq \varnothing$. $I_2 \neq \varnothing$. $I_1 \cup I_2 = \{1, ..., k-1\}$ et a_1, a_2 sont deux nombres complexes tels que $a_1a_2 \neq 0$. $a_1 \neq a_2$. (suposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou a_1 un nombre réel tel que $a_1 < b(1-c)^{-1}$, où $c = \max\{c_l : l \in I_1\}$ et $b = \min\{b_l : l \in I_2\}$, alors chaque solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation

$$f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + B_{k-1}(z)e^{b_{k-1}z})f^{(k-1)} + ... + (D_1(z) + B_1(z)e^{b_1z})f'$$

$$+ (D_0(z) + A_1(z)e^{a_1 z} + A_2(z)e^{a_2 z})f = 0 \tag{2.1.4}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Dans ce chapitre, on va étudier un résultat du à He et Zhang [14]. Ce théorème est le suivant :

Théorème 2.1.1 ([14]) *Soient* $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1,2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1,...,k-1)$, $D_m(z)(m = 0,...,k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max = \{\sigma(A_j)(j = 1,2), \sigma(B_l)(l = 1,...,k-1), \sigma(D_m)(m = 0,...,k-1)\} < n$. *Soient* $P(z) = a_n z^n + ..., Q(z) = b_n z^n + ..., R_l(z) = c_{\ln} z^n + ...$, *des polynômes non constants avec* $a_n b_n \neq 0$, $a_n \neq b_n$ *(on suppose que* $|a_n| \leqslant |b_n|$*),* $c_{\ln}(l = 1,...,k-1)$ *des constantes complexes tels que (i)* $c_{\ln} = t_l a_n (0 < t_l < 1)(l \in I_1)$ *et (ii)* $c_{\ln}$ *sont des constantes réelles vérifiant* $c_{\ln} \leqslant 0 (l \in I_2)$*, ou* $I_1 \neq \varnothing, I_2 \neq \varnothing, I_1 \cap I_2 = \varnothing, I_1 \cup I_2 = \{1,...,k-1\}$. *Si* $\arg a_n \neq \pi$ *ou* a_n *est un nombre réel tel que* $a_n < c(1-t)^{-1}$*, où* $t = \max\{t_l : l \in I_1\}$ *et* $c = \min\{c_{\ln} : l \in I_2\}$*, alors chaque solution méromorphe* $f\,(\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)})f^{(k-1)} + ... + (D_1(z) + B_1(z)e^{R_1(z)})f$$

$$+ (D_0(z) + A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)})f = 0 \tag{2.1.1}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = n$.

Corollaire 2.1.1 ([14]) *Soient* $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1,2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1,...,k-1)$, $D_m(z)(m = 0,...,k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max = \{\sigma(A_j)(j = 1,2), \sigma(B_l)(l = 1,...,k-1), \sigma(D_m)(m = 0,...,k-1)\} < n$. *Soient* $P(z) = a_n z^n + ..., Q(z) = b_n z^n + ..., R(z) = c_{\ln} z^n + ...$, *des polynômes non constants avec* $a_n b_n \neq 0$, $a_n \neq b_n$ *(on suppose que* $|a_n| \leqslant |b_n|$*),* $c_{\ln}(l = 1,...,k-1)$ *des constantes complexes tels que* $c_{\ln} = t_l a_n (0 < t_l < 1)(l = 1,...,k-1)$. *Si* $\arg a_n \neq \pi$ *ou* a_n *est un nombre réel tel que* $a_n < 0$*, alors chaque solution méromorphe* $f\,(\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (2.1.1) vérifie* $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = n$.

Corollaire 2.1.2 ([14]) *Soient* $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1,2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1,...,k-1)$, $D_m(z)(m = 0,...,k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max = \{\sigma(A_j)(j = 1,2), \sigma(B_l)(l = 1,...,k-1),$

$\sigma(D_m)(m = 0, ..., k-1)\} < n$. Soient $P(z) = a_n z^n + ..., Q(z) = b_n z^n + ..., R(z) = c_{\ln} z^n + ...,$ des polynômes non constants avec $a_n b_n \neq 0$, $a_n \neq b_n$ (on suppose que $|a_n| \leqslant |b_n|$), $c_{\ln}(l = 1, ..., k-1)$ des constantes réelles tels que $c_{\ln} \leqslant 0$. Si $\arg a_n \neq \pi$ ou a_n est un nombre réel tel que $a_n < c$, où $c = \min\{c_{\ln} : l = 1, ..., k-1\}$ alors chaque solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (2.1.1) vérifie $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = n$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 ([2]) *Soient $P_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., k)$ des polynômes avec $\deg P_0(z) = n$ $(n \geqslant 1)$ et $\deg P_j(z) = n$ $(j = 1, 2, ..., k)$. Soient $A_j(z)(j = 0, 1, ..., k)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que $\max\{\sigma(A_j) : (j = 0, 1, ..., k)\} < n$ et $A_0(z) \not\equiv 0$.*
Notons

$$F(z) = A_k(z)e^{P_k(z)} + A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)} + ... + A_1(z)e^{P_1(z)} + A_0(z)e^{P_0(z)}. \tag{2.2.1}$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, ..., k$, alors F est une solution méromorphe non triviale d'ordre fini et vérifie $\sigma(F) = n$.

Lemme 2.2.2 ([9]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, $H = \{(k_1, j_1)(k_2, j_2), .., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, ..., q)$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors*
***(i)** il existe un ensemble $E_1 \subset [-\pi/2, 3\pi/2]$ de mesure linéaire zéro tel que, si $\Psi \in [-\pi/2, 3\pi/2] \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_{0(\Psi)} > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \Psi$ et $|z| \geqslant R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}, \tag{2.2.2}$$

***(ii)** il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_1 \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in H$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}, \tag{2.2.3}$$

(iii) *il existe un ensemble* $E_1 \subset (0, \infty)$ *de mesure linéaire finie, tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| \notin E_1$ *et pour tout* $(k, j) \in H$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma+\varepsilon)} . \tag{2.2.4}$$

Lemme 2.2.3 ([7]) *Supposons que* $P(z) = (\alpha + \beta i) z^n + ...(\alpha, \beta$ *sont des nombres réels,*$|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ *est un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et que* $w(z) (\not\equiv 0)$ *est une fonction méromorphe avec* $\sigma(w) < n$. *Posons* $g(z) = w(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, z) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $H_0 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire zéro tel que pour tout* $\theta \subset [0, 2\pi) \setminus (H_0 \cup H_1)$, *il existe* $r_0 > 0$, *tel que pour* $|z| = r > r_0(\theta)$, *on ait*
(i) *si* $\delta(P, \theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.2.5}$$

(ii) *si* $\delta(P, \theta) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.2.6}$$

où $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ *est un ensemble fini.*

Lemme 2.2.4 ([18]) *Supposons que* $n \geq 1$ *est un nombre entier. Soient* $P_j(z) = a_{jn} z^n + ...$ $(j = 1, 2)$ *des polynômes non constants, où* a_{jq} $(q = 1, 2, ..., n)$ *sont des nombres complexes et* $a_{1n} a_{2n} \neq 0$. *Posons* $z = re^{i\theta}, a_{jn} = |a_{jn}| e^{i\theta_j}, \theta_j \in [-\pi/2, 3\pi/2), \delta(P, \theta) = |a_{jn}| \cos(\theta_j + n\theta)$. *Alors il existe un ensemble* $H_2 \subset [-\pi/(2n), 3\pi/(2n))$ *de mesure linéaire zéro. Si* $\theta_1 \neq \theta_2$, *alors il existe un rayon* $\arg z = \theta, \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \setminus (H_2 \cup H_3)$ *tel que*

$$\delta(P_1, \theta) > 0, \delta(P_2, \theta) < 0 \tag{2.2.7}$$

ou

$$\delta(P_1, \theta) < 0, \delta(P_2, \theta) > 0, \tag{2.2.8}$$

où $H_3 = \{\theta \in [-\pi/(2n), 3\pi/(2n)) : \delta(P_j, Q) = 0\}$ *est un ensemble fini de mesure linéaire zéro.*

Remarque 2.2.1 ([18]) *Dans le Lemme 2.2.4, si* $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \backslash (H_2 \cup H_3)$ *est remplacé par* $\theta \in (\pi/(2n), 3\pi/(2n)) \backslash (H_2 \cup H_3)$*, alors on obtient le même résultat.*

Lemme 2.2.5 ([6], [8]) *Soit* $g(z)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma(g) = \beta < +\infty$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble* $E_2 \subset (1, +\infty)$ *de mesure loharithmique finie tel que pour tout* z *avec* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2, r \to \infty$*, on ait*

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leqslant |g(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.9}$$

Lemme 2.2.6 ([8]) *Soient* $k \geq 2$ *et* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ *des fonctions méromorphes. Posons* $\sigma = \max\{\sigma(A_j), j = 0, ..., k-1\}$*. Alors chaque solution méromorphe transcendante* f *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0 \tag{2.2.10}$$

vérifie $\sigma_2(f) \leqslant \sigma$*.*

Lemme 2.2.7 ([9]) *Soient* f *une fonction méromorphe transcendante,* $\alpha > 1$ *une constante donnée et* k *et* j *des nombres entiers vérifiant* $k > j \geqslant 0$*. Alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *il existe un ensemble* $E_3 \subset (1, \infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $C > 0$ *tels que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$*, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant C\left[\frac{T\alpha r, f)}{r}(\log r)^{\alpha}\log T(\alpha r, f)\right]^{k-j}. \tag{2.2.11}$$

(ii) *il existe un ensemble* $E_3 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire zéro tel que que si* $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E_3$*, alors il existe une constante* $R = R(\theta) > 0$ *telle que* (2.2.11) *soit vérifiée pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \theta$ *et* $|z| \geqslant R$*.*

Lemme 2.2.8 ([13], [16]) *Soit* $F(r)$ *et* $G(r)$ *des fonctions non décroissantes monotones sur* $(0, +\infty)$ *telles que* $F(r) \leqslant G(r)$ *pour* $r \notin [0, 1] \cup E_4$*, où* $E_4 \subset (1, +\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. alors pour toute constante* $\alpha > 1$*, il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $F(r) \leqslant G(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$*.*

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

D'abord, démontrons que chaque solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.1) est transcendante. Supposons que $f\ (\not\equiv 0)$ est une solution polynômiale ou rationnelle de (2.1.1). Alors $\sigma(f) = 0$.

On peut écrire (2.1.1) sous la forme :

$$(A_1(z)f)\, e^{P(z)} + (A_2(z)f)\, e^{Q(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} B_j(z) f^{(j)} e^{R_j(z)} = B\,(z)\,, \tag{2.3.1}$$

où $B\,(z) = -\left(f^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{k-1} D_j(z) f^{(j)} + D_0(z) f \right)$, $A_s f\ \ (s = 1, 2)$ et $B_j f^{(j)}\ \ (j = 1, 2, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $A_s f \not\equiv 0\ (s = 1, 2)\,, \sigma\,(A_s f) < n\ (s = 1, 2)$, $\sigma\left(B_j f^{(j)}\right) < n\ (j = 1, 2, ..., k-1)$ et $\sigma\,(B) < n$.

On a $\deg\,(P(z) - Q(z)) = n$ et $\deg\,(P(z) - R_j(z)) = n\ (j = 1, 2, ..., k-1)$. Alors de (2.3.1) et en utilisant le lemme 2.1.1, on trouve que $\sigma\,(B) = n$. C'est une contradiction. Ainsi chaque solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.1) est transcendante.

Soit $f\ (\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.1).

Première étape : On montre que $\sigma(f) = +\infty$. Supposons que $\sigma(f) = \sigma < +\infty$.

Posons $\max\{\sigma(A_j)(j = 1, 2), \sigma(B_l)(l = 1, ..., k-1), \sigma(D_m)(m = 0, ..., k-1)\} = \beta < n$.

Alors d'après le Lemme 2.5.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\,\{\frac{|b_n|-|a_n|}{|b_n|+|a_n|}, \frac{n-\beta}{3}, \frac{1-t}{2(1+t)}, \frac{1}{3}\}$, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, et $r \to +\infty$, on ait

$$\begin{aligned} |A_j(z)| &\leqslant \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}(j = 1, 2), |B_l(z)| \leq \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}(l = 1, ..., k-1), \\ |D_m(z)| &\leqslant \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}(m = 1, ..., k-1). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour le ε ci-dessus, il existe un ensemble $E_1 \subset [-\pi/2, 3\pi/2]$ de mesure linéaire zero, tel que si $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2) \backslash E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0\,(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geqslant R_0$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |z|^{j(\sigma-1+\varepsilon)}\,(j=1,...,k). \tag{2.3.3}$$

Posons $z = re^{i\theta}$, $a_n = |a_n|\, e^{i\theta_1}, b_n = |b_n|\, e^{i\theta_2}, \theta_1, \theta_2 \in [-\pi/2, 3\pi/2]$. On sait que

$\delta(R_l, \theta) = |c_{\ln}| \cos(\theta_1 + n\theta) = t_l\, |a_n| \cos(\theta_1 + n\theta) = t_l \delta(P, \theta)(l \in I_1)$,

$\delta(R_l, \theta) = |c_{\ln}| \cos(\pi + n\theta) = c_{\ln} \cos(n\theta)\,(l \in I_2)$.

Cas (1) $\arg a_n \neq \pi$ soit $\theta_1 \neq \pi$.

(i) Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \backslash (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$, où H_2 et H_3 sont définis comme dans le Lemme 2.2.4, et $H_2 \cup H_3$ est de mesure linéaire zéro tel que

$$\delta(P, \theta) > 0, \delta(Q, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(P, \theta) < 0, \delta(Q, \theta) > 0.$$

a) Si $\delta(P, \theta) > 0, \delta(Q, \theta) < 0$ pour r suffisamment grand, en utilisent le Lemme 2.2.3, on obtient que

$$\left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\}, \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n \leqslant 1 \tag{2.3.4}$$

Par conséquent, de (2.3.4), on a

$$\begin{aligned}\left|A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)}\right| &\geqslant \left|A_1(z)e^{P(z)}\right| - \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| \\ &\geqslant (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\},\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De (2.1.1), on a

$$\begin{aligned}\left|A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)}\right| &\leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(|D_{k-1}(z)| + \left|B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ &+ ... + \left(|D_1(z)| + \left|B_1(z)e^{R_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |D_0(z)|.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Pour $l \in I_1$, on a

$$\left|B_l(z)e^{R_1(z)}\right| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)t_l\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\} \tag{2.3.7}$$

et pour $l \in I_2$, on a

$$\left|B_1(z)e^{R_1(z)}\right| \leqslant \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}\exp\{r^{n-1+\varepsilon}\}\exp\{c_{\ln}r^n\cos n\theta \leqslant \exp\{r^{q+2\varepsilon}\}, \tag{2.3.8}$$

où $q = \max\{\beta, n-1\}$ et $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)\backslash(E_1 \cup H_2 \cup H_3)$.En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.5), (2.3.7) et (2.3.8) dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned}(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n &\leqslant r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} + (\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \left|B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)}\right|)r^{(\sigma-1+\varepsilon)(k-1)} \\ &\quad +\ldots + (\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \left|B_1(z)e^{R_1(z)}\right|)r^{(\sigma-1+\varepsilon)} + \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} \\ &\leqslant M_0 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

où $M_0 > 0$ est une constante. De (2.3.9) et comme $0 < \varepsilon < (1-t)(2(1+t))^{-1}$, on a

$$(1-o(1))\exp\{\frac{1-t}{2}\delta(P,\theta)r^n \leqslant M_0 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}. \tag{2.3.10}$$

Comme $\delta(P,\theta) > 0$, $t < 1$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$, (2.3.10) est une contradiction .

b) Si $\delta(P,\theta) < 0$ et $\delta(Q,\theta) > 0$, pour r suffisamment grand, en utilisant le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\} \leqslant 1, \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n\right\}. \tag{2.3.11}$$

Par conséquent, on a

$$\left|A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| - \left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \geqslant (1-o(1))\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\} \tag{2.3.12}$$

Pour $l \in I_1$, on a

$$\left|B_l(z)e^{R_l(z)}\right| \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)t_l\delta(P,\theta)r^n\right\} \leqslant 1 \tag{2.3.13}$$

et pour $l \in I_2$, on a (2.3.8). En substituant (2.3.2),(2.3.3),(2.3.8),(2.3.12) et (2.3.13) dans (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned}(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n &\leqslant r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} + (\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \left|B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)}\right|)r^{(\sigma-1+\varepsilon)(k-1)} \\ &\quad +\ldots + (\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \left|B_1(z)e^{R_1(z)}\right|)r^{\sigma-1+\varepsilon} + \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} \\ &\leqslant M_0 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}. \qquad (2.3.14)\end{aligned}$$

Comme $\delta(P,\theta) > 0$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$, alors (2.3.14) est une contradiction.

(ii) Supposons que $\theta_1 = \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)\backslash(E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ et $\delta(P,\theta) > 0$. Puisque $|a_n| \leqslant |b_n|$, $a_n \neq b_n$ et $\theta_1 = \theta_2$, alors $|a_n| < |b_n|$ et donc $\delta(Q,\theta) = |b_n|\cos(\theta_2 + n\theta) = |b_n|\cos(\theta_1 + n\theta) > |a_n|\cos(\theta_1 + n\theta) = \delta(P,\theta) > 0$. Pour r suffisamment grand, en utilisant le Lemme 2.2.3, on a

$$\left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n\} \qquad (2.3.15)$$

et (2.3.7),(2.3.8) sont vérifiées. D'où

$$\left|A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| - \left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \geqslant M\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \quad (2.3.16)$$

où $M = \exp\{[(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P,\theta)]r^n\} - 1$. Puisque $0 < \varepsilon < (|b_n| - |a_n|)(|b_n| + |a_n|)^{-1}$, alors $(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P,\theta) > 0$. D'où $M > 0$. En remplaçant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.16) dans (2.3.6), on obtient

$$M\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant M_1 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\},$$

où $M_1 > 0$ est une constante.Alors on a

$$M\exp\{(1+\varepsilon)(1-t)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant M_1 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}. \qquad (2.3.17)$$

Comme $\delta(P,\theta) > 0, t < 1$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$, (2.3.17) est une contradiction.

Cas (2) $a_n < c(1-t)^{-1}$ soit $\theta_1 = \pi$.

(i) Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $\theta_2 \neq \pi$. D'après le Lemme 2.2.3, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon de $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)\backslash(E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ et $\delta(Q,\theta) > 0$ car $\cos(n\theta) > 0$,$\delta(P,\theta) = |a_n|\cos(\theta_1 + n\theta) = -|a_n|\cos(n\theta) < 0$. pour r suffisamment grand, en utilisent le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant 1, \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n\} \tag{2.3.18}$$

et (2.3.8), (2.3.13) sont vérifiées. Par conséquent, on obtient

$$\left|A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)}\right| \geqslant \left|A_2(z)e^{Q(z)}\right| - \left|A_1(z)e^{P(z)}\right| \geqslant (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n\}. \tag{2.3.19}$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas 1(i), on peut obtenir une contradiction.

(ii) Supposons que $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 2.2.3 et sa remarque, le ε ci-dessus , il existe un rayan $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in (\pi/(2n), 3\pi/(2n))\backslash(E_1 \cup H_2 \cup H_3)$. Alors $\cos(n\theta) < 0, \delta(P,\theta) = -|a_n|\cos(n\theta) > 0, \delta(Q,\theta) = -|b_n|\cos n\theta > 0$. Comme $|a_n| \leqslant |b_n|$, $a_n \neq b_n$ et $\theta_1 = \theta_2$, alors $|a_n| < |b_n|$ et donc $\delta(P,\theta) < \delta(Q,\theta)$. Pour r suffisamment grand, d'après le lemme 2.2.3, on obtient (2.3.7), (2.3.15) et (2.3.16). For $l \in I_2$, on a

$$\left|B_l(z)e^{R_l(z)}\right| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)c_{\ln}r^n\cos n\theta\} \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)cr^n\cos(n\theta)\}. \tag{2.3.20}$$

Car $c_{\ln} \leq 0, c = \min\{c_{\ln} : l \in I_2\}$ et $\cos(n\theta) < 0$. En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.7), (2.3.16) et (2.3.20) dans (2.3.6), on obtient

$$M\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant M_2 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)cr^n\cos n\theta\}\exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\},$$

où $M_2 > 0$ est une constante. Ainsi on obtient

$$M\exp\{(1+\varepsilon)r^n\gamma\} \leqslant M_2 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}, \tag{2.3.21}$$

où $\gamma = (1-t)\delta(P,\theta) - c\cos(n\theta)$. Comme $\cos(n\theta) < 0$, $a_n < c(1-t)^{-1}$ et $c \leqslant 0$, alors

$\gamma = (1-t)\delta(P,\theta) - c\cos(n\theta) = -(1-t)\,|a_n|\cos(n\theta) - c\cos(n\theta)$

$= -[(1-t)\,|a_n| + c]\cos(n\theta) > [(1-t)\frac{|c|}{1-t} + c]\cos(n\theta) = 0$

Comme $\gamma > 0$ et $\varepsilon < (n-\beta)/3$, (2.3.21) est une contraduction. En conclusion, on obtient que $\sigma(f) = +\infty$.

Deuxième étape : Démontrons que $\sigma_2(f) = n$.

D'après le Lemme 2.2.6 et $\max\{\sigma(D_0 + A_1e^{P(z)} + A_2e^{Q(z)}, \sigma(D_l + B_le^{R_l(z)}, l = (1, ..., k-1)\}$ $\leq n$, alors $\sigma_2(f\ ) \leqslant n$. D'après le lemme 2.2.7, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $C > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant C[T(2r,f)]^{i+1}, (j = 1, ..., k)\,. \tag{2.3.22}$$

Cas (1) $\arg a_n \neq \pi$, soit $\theta_1 \neq \pi$.

(i) Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$. Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$, où $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \backslash (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ vérifiant $\delta(P,\theta) > 0, \delta(Q,\theta) < 0$ ou $\delta(P,\theta) < 0, \delta(Q,\theta) > 0$.

a) Si $\delta(P,\theta) > 0, \delta(Q,\theta) < 0$, pour r suffisament grand, on obtient (2.3.5). En substituant (2.3.2), (2.3.5), (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.22) dans (2.3.6), pour tout $z = re^{i\theta}$ vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_3, \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \backslash (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} & (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \\ \leqslant\ & C[T(2r,f)]^{k+1} + C(\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + (\left|B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)}\right|)[T(2r,f)]^k \\ & +... + C(\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \left|B_1(z)e^{R_1(z)}\right|)[T(2r,f)]^2 + \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} \\ \leqslant\ & M_0\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\}[T(2r,f)]^{k+1}, \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

où $M_0 > 0$ est une constante. De (2.3.23) et comme $\varepsilon < (1-t)(2(1+t))^{-1}$, on obtient

$$(1+o(1))\exp\{\frac{1-t}{2}\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant M_0\exp\{r^{q+2\varepsilon}\}T(2r,f)]^{k+1}. \tag{2.3.24}$$

Puisque $\delta(P,\theta) > 0, t < 1$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$, en utilisant le Lemme 2.2.8 et (2.3.23), on obtient $\sigma_2(f) \geqslant n$. Par conséquent, $\sigma_2(f) = n$.

b) Si $\delta(P,\theta) < 0$ et $\delta(Q,\theta) > 0$, pour r suffisamment grand, on obtient (2.3.12).
En substituant (2.3.2), (2.3.8), (2.3.12), (2.3.13) et (2.3.22) dans (2.3.6) pour tout $z = re^{i\theta}$ vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_3, \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$, on obtient

$$(1+o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^n\} \leqslant M_0 \exp\{r^{q+2\varepsilon}\}T(2r,f)]^{k+1}. \tag{2.3.25}$$

où M_0 est une constante. Comme $\delta(Q,\theta) > 0$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$, alors en utilisant le lemme 2.2.8 et (2.3.25), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$. Par conséquent, $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Supposons que $\theta_1 = \theta_2$. Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$ où $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ vérifiant $\delta(P,\theta) > 0, \delta(Q,\theta) < 0$ et pour r suffisamment grand, on a (2.3.16). En substituant (2.3.2),(2.3.7), (2.3.8), (2.3.16) et (2.3.22) dans (2.3.6), pour tout $z = re^{i\theta}$ vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_3, \theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$, on obtient

$$M\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)\} \leqslant M_1 \exp\{r^{q+2\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\}[T(2r,f)]^{k+1} \tag{2.3.26}$$

où $M_1 > 0$ est une constante. De (2.3.26), on a

$$M\exp\{(1+\varepsilon)(1-t)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant M_1 \exp\{r^{q+2\varepsilon}\}[T(2r,f)]^{k+1} \tag{2.3.27}$$

Comme $\delta(P,\theta) > 0$ et $\varepsilon < \min\{(n-\beta)/3, 1/3\}$,$0 < t < 1$, alors en utilisant le Lemme 2.2.8 et (2.3.27), on obtient $\sigma_2(f) \geqslant n$. Par conséquent, $\sigma_2(f) = n$.

Cas(2) $a_n < (1+t)^{-1}$, c'est $\theta_1 = \pi$. **(i)** Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$. Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$ où $\theta \in (-\pi/(2n), \pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ vérifiant $\delta(P,\theta) > 0, \delta(Q,\theta) < 0$ et pour r suffisamment grand, on obtient (2.3.19). En utilisant le même raisonnement que dans le cas 1 de la deuxième étape, on peut obtenir $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Supposons que $\theta_1 = \theta_2$. Dans la première étape, on a prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$ où $\theta \in (\pi/(2n), 3\pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$ vérifiant $\delta(P,\theta) > 0, \delta(Q,\theta) > 0$ et pour r suffisamment grand, on obtient (2.3.16). En substituant (2.3.2), (2.3.7), (2.3.16), (2.3.20) et (2.3.22) dans (2.3.6), pour tout $z = re^{i\theta}$ vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_3$, $\theta \in (\pi/(2n), 3\pi/(2n)) \setminus (E_1 \cup H_2 \cup H_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} & M \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \\ \leqslant \ & M_2 \exp\{r^{\beta+2\varepsilon}\} \exp\{(1+\varepsilon)cr^n \cos(n\theta)\} \exp\{(1+\varepsilon)t\delta(P,\theta)r^n\}[T(2r,f)]^{k+1} \end{aligned}$$

où M_2 est une constante. Ainsi

$$M \exp\{(1+\varepsilon)r^n\gamma\} \leqslant M_2 \exp\{r^{\beta+2\varepsilon}\}[T(2r,f)]^{k+1}, \tag{2.3.28}$$

où $\gamma = (1-t)\delta(P,\theta) - c\cos n\theta > 0$. Comme $\gamma > 0$ et $\varepsilon < (n-\beta)/3$, en utilisant le lemme 2.2.8 et (2.3.28), on a $\sigma_2(f) \geqslant n$. Par conséquant, $\sigma_2(f) = n$. En conclusion, on obtient que $\sigma_2(f) = n$.

Chapitre 3

Croissance et oscillation des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients méromorphes.

3.1 Introduction et résultat

Dans ce chapitre, on considère l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + B_{k-1}(z)e^{R_{k-1}(z)})f^{(k-1)} + ... + (D_1(z) + B_1(z)e^{R_1(z)})f'$$

$$+ (D_0(z) + A_1(z)e^{P(z)} + A_2(z)e^{Q(z)})f = F, \tag{3.1.1}$$

où $P(z)$, $Q(z)$ et $R_l(z)$ $(l = 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1, 2)$, $B_l(z)(\not\equiv 0)(l = 1, ..., k-1)$et $D_m(z)(m = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes avec $\max = \{\sigma(A_j)(j = 1, 2), \sigma(B_l)(l = 1, ..., k-1), \sigma(D_m)(m = 0, ..., k-1)\} < n$ et F est une fonction entière d'ordre fini.

He et Zhang [14] ont étudié la croissance et l'oscillation des solutions méromorphes de cette équation et ont démontré le Théorème suivant :

Théorème 3.1.1 ([14]) *Supposons que* $A_j(z), B_l(z), D_m(z,), P(z), Q(z), R_l(z)$ *vérifient les*

hypothèses du Théorème 2.1.1 et soit $F(\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe d'ordre fini.*

Si $\arg a_n \neq \pi$ *ou* a_n *est un nombre réel tel que* $a_n < c\,(1-t)^{-1}$*, où* c *et* t *sont définis comme dans le Théorème 2.1.1. Alors chaque solution méromorphe* $f\,(\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (3.1.1 vérifiant* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f)$*, avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *d'ordre fini. En outre, s'il existe une solution excéptionnelle* f_0 *d'ordre fini de l'équation (3.1.1), alors* $\sigma(f_0) \leqslant \max\left\{\sigma(F), n, \overline{\lambda}(f_0)\right\}$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 ([13] , [16]) *Soit* $F(r)$ *et* $G(r)$ *des fonctions non décroissantes monotones sur* $(0,+\infty)$ *telles que* $F(r) \leq G(r)$ *pour* $r \notin [0,1] \cup E_4$*, où* $E_4 \subset (1,+\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. alors pour toute constante* $\alpha > 1$*, il existe* $r_0 > 0$ *telle que* $F(r) \leqslant G(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 3.2.2 ([5]) *Soeint* $A_{0,}A_{1,\ldots,}A_{k-1}, F\,(\not\equiv 0)$ *sont fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe d'ordre infinide l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \ldots + A_0 f = F, \tag{3.2.1}$$

alors $f(z)$ *satisfait* $\lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Supposons que f_0 est une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (3.1.1). S'il existe une autre solution méromorphe $f_1\,(\not\equiv f_0)$ d'ordre fini de (3.1.1), alors $\sigma(f_1 - f_0)$ est une solution de l'équation différentielle homogène correspondante (2.1.1). Cependant d'après le Théorème 2.1.1, on obtient $\sigma(f_1 - f_0) = +\infty$. Ce qui est en contradiction avec $\sigma(f_1 - f_0) < +\infty$. Par conséquent, toutes les solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire (3.1.1) vérifient $\sigma(f) = +\infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini.

Supposons maintenant que f_0 est une solution méromorphe d'ordre fini de (3.1.1). Alors d'après le Lemme 3.2.1, on obtient $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = +\infty$.

Dans ce qui suit, on va vérifier que chaque solution méromorphe d'ordre infini de (3.1.1) vérifié $\overline{\lambda_2}(f) = \lambda_2(f)$.

En fait, de (3.1.1) il est facile de voir que les zéros de f se produisent par les pôles de $D_m\,(m = 0, ..., k-1)$ ou $B_l\ (l = 1, ..., k-1)$ ou $A_j\,(j = 1, 2)$ ou les zéros de $F\,(z.)$

Si f a un zéro à z_0 de l'ordre $n\,(n > k)$, alors $F\,(z)$ doit avoir un zéro à z_0 de l'ordre $n - k$. Par conséquent, on obtient par $F\,(\not\equiv 0)$ que

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqslant k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{m=0}^{k-1} N\,(r, D_m) + \sum_{l=1}^{k-1} N\,(r, B_l) + \sum_{j=1}^{2} N\,(r, A_j)$$

D'autre part, on réécrit l'équation (3.1.1) comme suit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left[\frac{f^{(k)}}{f} + \left(D_{k-1} + B_{k-1}e^{R_{k-1}(z)}\right)\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + D_0 + A_1e^{P(z)} + A_2e^{Q(z)}\right]. \tag{3.3.1}$$

Alors

$$\begin{aligned} m\left(r, \tfrac{1}{f}\right) &\leqslant m\left(r, \tfrac{1}{F}\right) + \sum_{m=0}^{k-1} m\,(r, D_m) + \sum_{l=1}^{k-1} m\,(r, B_l) + \sum_{l=1}^{k-1} m\left(r, e^{R_l}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \tfrac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{2} m\,(r, A_j) + m\left(r, e^{P(z)}\right) + m\left(r, e^{Q(z)}\right) + o\,(1)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, par le lemme de la dérivée logarithmique, il existe un ensemble E_4 ayant une mesure linéaire finie telle que pour tout $r \notin E_4$, on ait

$$\begin{aligned} T\,(r, f) = T\left(r, \tfrac{1}{f}\right) + \theta\,(1) \leqslant k\overline{N}\left(r, \tfrac{1}{f}\right) + T\,(r, F) + \sum_{m=0}^{k-1} T\,(r, D_m) + \sum_{l=1}^{k-1} T\,(r, B_l) \\ + \sum_{l=1}^{k-1} T\left(r, e^{R_l}\right) + C_1 \log\left\{rT\,(r, f)\right\} + \sum_{j=1}^{2} T\,(r, A_j) + T\left(r, e^{P(z)}\right) + T\left(r, e^{Q(z)}\right) + \theta\,(\log r)\,, \end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive.

Posons

$$\max\left\{\sigma\,(A_j)\,(j = 1, 2)\,, \sigma\,(B_l)\,(l = 1, ..., k-1)\,, \sigma\,(D_m)\,(m = 0, ..., k-1)\right\} = \beta < n.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}
C_1 \log\{rT(r,f)\} &\leqslant \frac{1}{2}T(r,f), T(r,F) \leqslant r^{\sigma(F)+\varepsilon} \\
\text{et } T\left(r,e^{R_l}\right) &\leqslant r^{n+\varepsilon}, T\left(r,e^{P}\right) \leqslant r^{n+\varepsilon} \\
\text{et } T\left(r,e^{Q}\right) &\leqslant r^{n+\varepsilon}, T(r,B_l) \leqslant r^{\beta+\varepsilon}\,(l=1,...,k-1) \\
\text{et } T(r,D_m) &\leqslant r^{\beta+\varepsilon}\,(m=0,...,k-1), T(r,A_j) \leqslant r^{\beta+\varepsilon}\,(j=1,2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $r \notin E_4$ suffisamment grand, on a

$$T(r,f) \leqslant 2k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2r^{\sigma(F)+\varepsilon} + (4k+2)\,r^{\beta+\varepsilon} + (2k+2)\,r^{n+\varepsilon}.$$

En utilisant le Lemme 3.2.1 on obtient que $\sigma_2(f) \leqslant \overline{\lambda}_2(f)$. Il est évident que $\lambda_2(f) \geqslant \overline{\lambda}_2(f) \geqslant \sigma_2(f)$.

Ainsi $\lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \sigma_2(f)$.

Enfin soit f_0 une solution d'ordre fini de (3.1.1) alors $f_0 \not\equiv 0$. En substituant f_0 dans (3.1.1) on a

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}\left[\frac{f_0^{(k)}}{f_0} + \left(D_{k-1} + B_{k-1}e^{R_{k-1}(z)}\right)\frac{f_0^{(k-1)}}{f_0} + ... + D_0 + A_1e^{p(z)} + A_2e^{Q(z)}\right]. \qquad (3.3.2)$$

D'où

$$\begin{aligned}
m\left(r,\tfrac{1}{f}\right) &\leqslant m\left(r,\tfrac{1}{F}\right) + \sum_{m=0}^{k-1} m(r,D_m) + \sum_{l=1}^{k-1} m(r,B_l) + \sum_{l=1}^{k-1} m\left(r,e^{R_l}\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{k} m\left(r,\tfrac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{2} m(r,A_j) + m\left(r,e^{P(z)}\right) + m\left(r,e^{Q(z)}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les zéros de f_0 se produisent par les pôles de $D_m\,(m=0,...,k-1)$ ou $B_l\,(l=1,...,k-1)$ ou $A_j\,(j=1,2)$ ou les zéros de F.

Si f_0 a un zéro à z_0 de l'ordre $n\,(n>k)$,alors F doit avoir un zéro à z_0 de l'ordre $n-k$.

Par conséquent, on obtient par $F\,(\not\equiv 0)$ que

$$N\left(r,\frac{1}{f_0}\right) \leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right) + N\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{m=0}^{k-1} N(r,D_m) + \sum_{l=1}^{k-1} N(r,B_l) + \sum_{j=1}^{2} N(r,A_j).$$

Ainsi d'après le Lemme de la dérivée logarithmique et en notant que $\sigma(f_0) < +\infty$, nous pouvons obtenir que

$$T(r, f_0) = T\left(r, \tfrac{1}{f_0}\right) + o(1) \leqslant k\overline{N}\left(r, \tfrac{1}{f_0}\right) + T(r, F) + \sum_{m=0}^{k-1} T(r, D_m)$$
$$+ \sum_{l=1}^{k-1} T(r, B_l) + \sum_{l=1}^{k-1} T\left(r, e^{R_l}\right) + \sum_{j=1}^{2} T(r, A_j) + T\left(r, e^{P(z)}\right) + T\left(r, e^{Q(z)}\right) + o(\log r)$$

et donc $\sigma(f_0) \leq \max\left\{n, \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\}$. Ce qui achève la démonstration de ce Théorème.

3.4 Exemple illustratif

Considérons l'équation différentielle non homogène

$$f^{(4)} + z\mathrm{e}^{z^2+z} f''' + \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-3z^3+z} f - \left(1 + z\mathrm{e}^{z^2+z} + z\mathrm{e}^{3iz^3/2-z}\right) f'$$
$$+ \left(z\mathrm{e}^{2iz^3-z} - \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-3z^3+z}\right) f = z\mathrm{e}^{3iz^3/2}\left(\mathrm{e}^{iz^3/2} - 1\right). \tag{3.4.1}$$

Elle admet une solution $f_0(z) = \mathrm{e}^z$ d'ordre fini $\sigma(f_0) = 1 < 3 = \max\left\{3, \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\}$.

CONCLUSION

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance et l'oscillation des solutions des équations diférentielles linéaires homogènes et non homogène à coefficients entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini. C'est pourquoi on a introduit la notion de l'hyper-ordre. Cependant l'étude de ces équations dans le cas où les coefficients sont des fonctions méromorphes est un peu difficile car les solutions ne sont pas forcément des fonctions méromorphes.

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à HE et Zheng sur la croissance et l'oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à coefficients méromorphes. Ces résultats peuvent aussi nous permettre de réaliser d'autres travaux dans ce domaine.

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of fnite order solutions of* $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$, Hokkaido Math. J. 10 (1981), Special Issue, 1-17.

[2] M. Andasmas and B. Belaïdi, *On the order and hyper-order of meromorphic solutions of higher order linear diferential equations,* Hokkaido Math. J. 42 (2013) p. 1-27.

[3] Z. X. Chen, *the growth of solutions of* $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$, *where the order* $\sigma(Q)=1$, Sci. China Ser. A (2002), 45-30, 290-300 (in Chinese).

[4] Z. X. Chen and C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations,* Kodai Math. J. 22(1999), pp. 273-285.

[5] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the Growth and Fixed Point of Solution of Second Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients,* Acta. Math. Sin, English series, 21 (2004), 753-764.

[6] Z. X. Chen, *the growth of solutions of differential equation* $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$, Sci. China Ser. A 31 (2001), 775-784 (in Chinese).

[7] C. L. Cao and Z. X. Chen, *On the orders and zeros of solutions of certain linear differential equations with entire coefficients,* J. Acta Math. Appl. Sinica., 25 (2002) no. 1, 123-131.

[8] W. J. Chen and J. Xu, *Growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2009, no. 1, 1-13.

[9] G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function plus similar estimates,* J. London Math. Soc., 1988,37(1) : 88-104.

[10] G. Gundersen, *On the question of whether* $f'' + e^{-z}f + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of fnite order,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A (1986), no. 1-2, 9-17.

[11] H. Habib and B. Belaïdi, *On the growth of solutions of some higher-order linear differential equations with entire coeffcients*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., (2011), no. 93, 1-13.

[12] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[13] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method,* J. Canada. Math. Bull. 1974, 17(3) : 317-358.

[14] J. He and X. Zheng, *Growth of solutions of some higher order linear differential equations with meromorphic coefficients,* Mathematica Applicata, 26 (2013), no. 1, 114-124.

[15] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain,* A Wiley-interscience publication, 1976 by John Wiley & Sons.

[16] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[17] M. Ozawa, *On a solution of* $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$*,* Kodai Math. J., 3 (1980), 295–309.

[18] F. Peng and Z. X. Chen, *On the growth of solutions of some second -order linear differential equation,* J. Inequal . Appl. Art. 2011. ID 635601,1-9.

[19] C.-C. Yang and H.-X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Mathematics and Its Applications, 557, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.