UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse fonctionnelle.

Thème

Les équations différentielles fonctionnelles perturbées d'ordre fractionnaires.

Présenté par

Haddouche Halima

Soutenu le 29/05/2016.

Devant le jury

Président	B.Belaidi	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	Mr.L.Belarbi	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	Mme.S.Belarbi.Hamani	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à la théorie de *Caputo* sur les dérivées fractionnaires.
On a présenté quelques définitions et propriétés permettant d'abordé le chapitre clé de notre mémoire.
Par la suite, on a présenté les conditions suffisantes, pour lesquelles notre problème admet au moins une solution. Puis, on a assuré l'existence des solutions extrémales (Maximales et Minimales) .
Ce mémoire est finalisé par un exemple qui illustre le cas théorique.
Mots clés :

Equation Différentielle Fonctionnelle Perturbée, Intégrale Fractionnaire, Dérivée Fractionnaire, Dérivée de *Caputo,* Point Fixe, Solution, Solution Extrémale (Maximale et Minimale).

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes chers parents dont le rêve était toujours de me voir réussir, qu'ils sachent que leur place dans mon coeur et ma pensée, reste et demeure immense.
Je vous dois ce que je suis aujourd'hui grâce à votre amour, à votre patience et vos innombrables sacrifices.
A mes frères et mes soeurs.
A mes trés chers amis.
En témoignage de l'amitié sincère qui nous a liées et des bons moments passés ensemble.
Je vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux et pleine bonnes promesse.

Remerciements

Avant tout, Je remercie le dieu de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'étude et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.

*Tout d'abord, Je remercie vivement et en premier lieu, mon encadreur" **Mme S.Belarbi.Hamani**" pour son aide précieuse, sa gentillesse, ses conseils, son soutien et ses critiques utiles.*

*Je remercie également les membres de jury "**Mr.B.Belaidi**" et "**Mr.L.Belarbi**" pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

J'adresse également mes remerciments envers toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

INTRODUCTION

Quand on introduit la notion de la dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de la dérivée à la fonction dérivée elle-même et de même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier.On peut aussi se demander si, ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet prèsque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{ème}$ siècle, partant de quelques spéculations de *Leibniz* concernant la question de l'*Hôpital*, posée en 1695 , sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si, $n = \frac{1}{2}$. Des nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie (*Laplace*, *Fourier*, *liouville*...ect) .

Les équations différentielles sont devenues importantes, ces dernières années dans différentes branches mathématiques appliquées telles que les phénomènes physiques, la technologie, l'éléctronique, l'énergie et la biologie...etc. Elles ont recemment rélévé être des outils précieux dans la modilisation de nombreux phénomènes.

En effet, nous pouvons trouver de nombreuses applications dans viscoélasticité, élétrochimie, contrôle, et élétromagnétique...etc.

Ce mémoire consiste à étudier l'existence des solutions pour les équations différentielles fonctionnelles perturbées d'ordre fractionnaire. Notre approche est basée sur la théorie du point fixe.

Ce mémoire se compose d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion.

Le Premier Chapitre comporte quelques notions de base ainsi que toutes les notions et définitions qui nous serons utiles. nous introduisons le calcul fractionnaire et nous insisterons sur les définitions et les propriétés des intégrales et des dérivées fractionnaires et nous citons quelques théorèmes du point fixe et le théorème d'*Ascoli-Arzélà*, ils permettent de prouver l'existence des solutions de notre problème.

Le Deuxième Chapitre est consacré à l'existence des solutions pour le problème :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t), \forall t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f, g : J \times C([-r, 0], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données et $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$.

Le Troisième Chapitre est consacré à l'existence des solutions maximales et minimales pour notre problème et on termine avec un exemple qui illustre le cas théorique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit les notions de base, les définitions et les préliminaires qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.
Considérons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de *Banach* de toute fonction continue de J à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|y\|_{\infty} := \sup\{|y(t)| : t \in J\}.$$

Ainsi, $C([-r, 0], \mathbb{R})$ est normé par $\|.\|_C$ qui est définie par

$$\|\phi\|_C := \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leqslant \theta \leqslant 0\}.$$

1.2 Notations et définitions

Définition

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|_E)$ .On dit que $(x_n)_n$ est une suite de *cauchy* si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_q\|_E < \varepsilon.$$

Définition

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ est dit complet si, toute suite de *cauchy* $(x_n)_n$ d'éléments de E, est une suite convergente dans E.

Définition

Tout espace vectoriel complet normé est appelé espace de *Banach*.

Exemple $(\ C([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_{\infty})$ est un espace de *Banach*.

Définition

$L^1([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, intégrables au sens de *Lebesgue*. Cet espace est normé par

$$\|f\|_{L^1}=\int_a^b|f(t)|\,dt.$$

Définition

On dit qu'un opérateur $T\in\mathcal{L}(E,F)$ est continu, si et seulement si,

$$\exists c>0 \text{ telle que } \|Tx\|_F\leq c\,\|x\|_E\,, \text{pour tout } x\in E.$$

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T\in\mathcal{L}(E,F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(\overline{B_E})}$ est un compact de F, où $\overline{B_E}$ est la boule unité fermée de E.

Exemple L'opérateur $f\to I(f)$ défini par $I(f)(t)=\int_0^t f(s)ds$ sur $L^2([0,1],C)$ est compact.

Définition

Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dite localement intégrable si, sa restriction à tout segment $[a,b]$ est intégrable, c'est-à-dire si, l'intégrale$\int_a^b|f(t)|dt$ converge pour tout couple de réels (a,b) avec $a<b$.

Exemple Toute fonction continue est localement intégrable.

Définition

L'opérateur T est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

Définition

Soient E et F deux espaces de *Banach*, l'opérateur $T : E \longrightarrow F$ est complètement continu, s'il transforme tout compact de E à une partie relativement compacte dans F.

Définition

$f : X \longrightarrow X$ est dite contractante si,

$$\exists 0 < k < 1, \forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_X \leq k \|x - y\|_X .$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est équicontinue si,
$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \forall x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ dés que } |x - y| < \delta.$$

Exemple Soient $k > 0$, F l'ensemble des fonctions différentiables, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\left|\acute{f}(t)\right| \leqslant k, \forall t \in [a, b].$$

est équicontinue.
En effet, pour $f \in F$ par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a, b]$, il existe $c \in]t_0, t[$, tel que

$$|f(t) - f(t_0)| = \left|\acute{f}(c)\right| |t - t_0| \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leqslant k |t - t_0| .$$

Fixons $t_0 \in [a, b]$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors,

$$\forall t \in [a, b], |t - t_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leqslant k |t - t_0| \leqslant k\eta = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - f(t_0)| \leqslant \varepsilon, \text{ dés que } |t - t_0| \leqslant \eta.$$

Théorème d'*Ascoli-Arzélà*

Soit X espace compact et $C(X)$ l'espace de *Banach* des fonctions continues sur X à valeurs complexes, munis de la norme du sup. Alors, un sous-ensemble H de $C(X)$ est relativement compact si et seulement si,

1. H est équicontinu.

2. H est borné dans $C(X)$.

Remarque

On peut remplacer la condition (2) par la condition

$$\forall x \in X, \exists M_x > 0, \forall f \in H, |f'(x)| \leqslant M_x.$$

1.3 Le calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrales fractionnaires

Quelques fonctions spéciales du calcul fractionnaire

Fonction *Gamma*

Définition La fonction *Gamma* d'*Euler* est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} dt, \ x > 0.$$

Propriétés Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration

1. Par une intégration par partie.

2. Il suffit de remarquer que $\Gamma(x+1) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-x+1)$ si, on prend $x = n$, on obtient le résultat.

3. On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \exp(-t)\, t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$

Considérons $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$, $x \rightsquigarrow N(\mu, \delta)$, Où $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$.
En faisant le changement de variable $\mu = \sqrt{t} \Longrightarrow d\mu = \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dt}{2\mu}$, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2}}{\mu} \mu d\mu = 2\int_0^\infty e^{-\mu^2} d\mu.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2} dx = 1$, propriété de la densité de $x \rightsquigarrow N(0,1)$.
Alors, on obtient $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exemple $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

Fonction *Béta*

Définition On appelle fonction *Beta* d'*Euler*, la fonction définie par

$$\beta(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du; x > 0, y > 0.$$

Propriétés

1. $\beta(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2a-1} \cos\theta^{2b-1} d\theta; a, b > 0.$
2. $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$
3. $\beta(a,a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta^{2a-1} d\theta; a > 0.$
4. $\beta(a,a) = \frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(2a)}.$

Définition

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$.
On appelle intégrale au sens de *Reimann-Liouville* d'ordre $\alpha > 0$ de f et on la note I_a^α, l'intégrale :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Remarque

1. On peut écrire I_a^α sous la forme siuvante :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds.$$

2. Par convention, pour $\alpha = 0$, on prend $I_a^0 f(t) = f(x)$.

Exemple

On calcule l'intégrale d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction $f(x) = x$, $x > 0$.

On a $I_0^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-s)^{-\frac{1}{2}} s ds$, on pose $\mu = \frac{s}{x} \Longrightarrow s = x\mu$,

$$\begin{aligned}
I_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (x - x\mu)^{-\frac{1}{2}} x\mu x d\mu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\mu)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \mu d\mu \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\mu)^{\frac{1}{2}-1} \mu^{2-1} d\mu \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \beta\left(2, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{5}{2})} \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}} \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}.
\end{aligned}$$

Définition

L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$; définie par

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

Où Γ est la fonction *Gamma*, lorsque $a = 0$, nous écrivons

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f(x) &= f(x) * \phi_{\alpha}(x). \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Où

$$\phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\phi \longrightarrow \delta$ quand $\alpha \longrightarrow 0$.

Proposition

Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors, pour tout $f(t) \in L^1([a,b])$, on a

1. $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$ "*semi groupe*".
2. $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x)$ "*commutativité*".

Preuve

1. Par définition, on a

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-s)^{\alpha-1} I_a^{\beta} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} (x-s)^{\alpha-1} \int_{0}^{x} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds. \end{aligned}$$

On remarque que $a \leq t \leq s \leq x$, on peut donc dire que

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} f(t) \int_{0}^{x} (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} dt ds.$$

En utilisant le changement de variable $\nu = \frac{s-t}{x-t}$, $\begin{cases} s = t \rightarrow \nu = 0 \\ s = x \rightarrow \nu = 1 \end{cases}$;
on obtient,

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} f(t)(x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_{0}^{1} (1-\nu)^{\alpha-1} \nu^{\beta-1} d\nu dt.$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\beta(\alpha,\beta)\int_0^x f(t)(x-s)^{\alpha+\beta-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(t)(x-s)^{\alpha+\beta-1}dt \\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(x) \\ &= I_a^{\beta+\alpha}f(x) \\ &= I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires

Opérateur de dérivée n^{ieme}

Définition L'opérateur de la dérivée d'ordre n ; $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n;

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

Où D^n vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} D^n I^n f &= f\ , \\ D^n I^n f &\neq f \ \text{ si, } f \in C^n\left(\mathbb{R}^+\right). \end{aligned}$$

Plus précisement,

$$D^n I^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}, t > 0.$$

1.3.3 Dérivée au sens de *Riemann-Liouville*

Définition

Soit $f \in C^1([a,b])$, on définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < \alpha < 1)$ au sens de *Riemann*[1]-*Liouville*[2] par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Définition

Soit $f \in C^n([a,b])$, on définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < n-1 < \alpha < n)$ au sens de *Riemann-Liouville* par :

$$\begin{aligned} D_a^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Propriétés

Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a

1. $D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t), \alpha > 0.$

2. $D^\beta I^\alpha f(t) = D^{\beta-\alpha} f(t), \alpha > 0, \beta < 0.$

3. $D^n D^\alpha f(t) = D^{n+\alpha} f(t), \alpha > 0, n \in \mathbb{N}.$

4. $I^\alpha D^\alpha f(t) \neq f(t).$

5. $D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^\alpha D^\beta f(t).$

6. $D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^{\beta+\alpha} f(t).$

---

[1] **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, né le 17 septembre1826 à Hanovre, mort le20 juillet 1866 à Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle.

[2] **Joseph Liouville**, né le 24 mars1809à Saint-Omer et mort le8 septembre1882 à Paris, est un mathématicien français. Ses travaux concernent la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle.

1.3.4 Dérivée au sens de *Caputo*

Définition

Soit $f \in C^m([a,b])$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo*[3] de la fonction f par

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)^{(n)} ds. \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned}$$

Ici $n = [\alpha] + 1$et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Exemple Pour $0 < \alpha < 1$ et $f : [a; b] \longrightarrow R$ une fonction absolument continue, alors la dérivée d'ordre fractionnaire de f existe.

cas particulier :

Si $0 < \alpha < 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)' ds \\ &= I_a^{1-\alpha} D^1 f(t). \end{aligned}$$

1.3.5 Le lien entre la dérivée de *Riemann-Liouville* et celle de *Caputo*

Pour tout $t > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$${}^cD_{a_+}^\alpha f(t) =^{RL} D_{a_+}^\alpha (f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k).$$

Pour plus de détails, sur les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires, voir les références [1; 2; 3; 4].

[3] **Pietro Caputo** est professeur agrégé au Département de mathématiques et de physique de Universitá Roma Tre, en Italie. Il a obtenu son doctorat en mathématiques à la Technische Universität de Berlin en 2000.

1.3.6 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo* et celle de *Riemann-liouville*

L'avantage principal de l'approche *Caputo* est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires, avec les dérivées de *Caputo* acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues, en borne inférieure $x = a$.

Une autre différence entre la définition de *Riemann-liouville* et celle de *Caputo*, est que la dérivée d'une constante est nulle par *Caputo*, par contre par *Riemann-Lioville*, elle est

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

1.3.7 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont des outils trés utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes, pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe. Ainsi, on assure l'existence des solutions, d'un problème donné. Dans cette section, on va présenter quelques théorèmes du point fixe, on commence par la définition d'un point fixe.

Définition

Soit $f : E \longrightarrow E$, on appelle point fixe de f, tout point $x \in E$ tel que

$$f(x) = x.$$

Théorème du point fixe de *Schaefer*

Soient X un espace de *Banach* et $f : X \longrightarrow X$ une application continue et compacte sur X . Si l'ensemble

$$B = \{x \in X, \text{ telle que } \exists\lambda \in [0;1] : x = \lambda f(x)\}$$

est bornée. Alors, il existe un point x de E tel que

$$x = f(x).$$

Théorème du point fixe de *Banach*

Le théorème du point fixe de *Banach*, (connu aussi sous le nom du théorème de l'application contractante), est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications. ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions, pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Théorème

Soient $(E; \|.\|)$ un espace de *Banach* et $f : X \sqsubset E \longrightarrow X$; (X est un fermé de E) une application contractante. Alors, f admet un point fixe unique

$$\exists! x_0 \in X : f(x_0) = x_0.$$

1.3.8 Lemme

Soit $v : [0; b] \to [0; \infty)$ une fonction réelle et $w(.)$ est une fonction non négative, localement intégrable sur $[0; b]$ et soit a une constante strictement positive ($a > 0$) et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^\alpha} ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(\alpha)$ telle que

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\alpha} ds; \forall t \in [0; b].$$

1.3.9 Théorème

Soient X un espace de Banach et $A, B : X \to X$ deux opérateurs vérifiant :

1. A est est une contraction.
2. B est complètement continu.

Alors,

$i.$ L'équation opérationnelle $y = Ay + By$ admet une solution.

Ou bien

$ii.$ L'ensemble $\Omega = \left\{u \in X : u = \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \lambda B\left(u\right)\right\}$ est non borné pour $\lambda \in (0, 1)$.

Chapitre 2

Existence des solutions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à établir les conditions suffisantes pour assurer l'existence des solutions, pour les équations différentielles, d'ordre fractionnaire.

Considérons le IVP (2.1) $-$ (2.2) siuvant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t), \forall t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1 & (2.1) \\ y(t) = \phi(t), t \in [-r, 0] & (2.2) \end{cases}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo*, $f, g : J \times C([-r, 0], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions données et $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$.

Pour toute fonction continue y, définie sur $[-r, 0]$ et pour tout $t \in J$, on note y_t l'élément de $C([-r, 0], \mathbb{R})$ par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \theta[-r, 0].$$

Voici $y_t(.)$ représente l'histoire de l'état de temps $t - r$ jusqu'à l'instant t.

2.2 Existence des solutions

D'abord, nous commençons par définir, qu'est-ce-qu'on peut dire par une solution du problème (2.1)-(2.2).

Définition

Une fonction y est dite une solution de (2.1)-(2.2) si, y satisfait de l'équation ${}^cDy(t) = f(t; y_t) + g(t; y_t)$ sur J et de la condition $y(t) = \phi(t)$ sur $[-r, 0]$.

2.2.1 Lemmes auxilliaires

Concernant l'existence des solutions du problème (2.1)-(2.2), nous avans besoin des lemmes auxilliaires :

Lemme 1

Soit $\alpha > 0$. Alors, l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = 0$$

admet comme solution :

$$F(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

avec $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2

Soit $\alpha > 0$. Alors, on a

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

avec $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3

Soient $0 < \alpha < 1$; $h : (0; b] \to R$, une fonction continue et $\lim_{t \to 0_+} h(t) = h(0_+) \in \mathbb{R}$. Alors, y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

si et seulement si, y est une solution de problème :

$$\begin{cases} D^{\alpha} y(t) = h(t), t \in (0; b] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Preuve La démonstration de ce lemme est basée sur les deux lemmes précédents $(1)-(2)$
Si $0<\alpha<1 \Longrightarrow n=1$.On a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}y(t) &= h(t) \Longrightarrow I^{\alpha}D^{\alpha}y(t)=I^{\alpha}h(t)=y\left(t\right)+c_0 \\ &\Longrightarrow y\left(t\right)=I^{\alpha}h\left(t\right)-c_0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} y\left(0\right) &= 0 \Longrightarrow I^{\alpha}h\left(t\right)-c_0=0 \\ &\Longrightarrow c_0=0. \end{aligned}$$

Donc,

$$y\left(t\right)=I^{\alpha}h\left(t\right)=y(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\left(t-s\right)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

L'existence de nos solutions du problème (2.1)-(2.2) **est basée sur le théorème du point fixe.**

Introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $f:J\times C\left(\left[-r,0\right],\mathbb{R}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue.

(H_2) $g:J\times C\left(\left[-r,0\right],\mathbb{R}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$, il existe une constante $k>0$ telle que

$$\left\|g\left(t,u\right)-g\left(t,\bar{u}\right)\right\|_{\infty}\leq k\left\|u-\bar{u}\right\|_{C},\forall t\in J,\forall u,\bar{u}\in C\left(\left[-r,0\right],\mathbb{R}\right).$$

(H_3) Il existe une constante $M>0$ telle que

$$\left\|f\left(t,u\right)\right\|_{\infty}\leq M,\forall t\in J,\forall u\in C\left(\left[-r,0\right],\mathbb{R}\right).$$

2.2.2 Théorème

Sous les hypothèses $(H_1)\sim(H_3)$ si,

$$\frac{b^{\alpha}k}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}<1 \qquad (2.3),$$

alors, le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution sur $\left[-r,0\right]$.

Preuve

On considère les opérateurs suivants :

$$F, G : C([-r, 0], \mathbb{R}) \to C([-r, 0], \mathbb{R}),$$

définis par

$$F(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si, } t \in \ [-r, 0] \\ \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds & \text{si, } t \in [0, b] \end{cases}$$

et

$$G(y)(t) = \begin{cases} 0 & \text{, si } t \in \ [-r, 0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y_s)\, ds, & \text{si } t \in [0, b]. \end{cases}$$

Alors, la résolution du problème (2.1)-(2.2) revient à trouver les solutions de l'équation

$$F(y)(t) + G(y)(t) = y(t), t \in J.$$

Donc, il suffit de voir si, les opérateurs F et G satisfaient de conditions du théorème $(1.3.9)$.

Etape 1 :"F est continu **".**

Soit $(y_n)_n$ une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $C([-r, b], \mathbb{R})$.

En effet,

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \left| \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{ns})\, ds - \phi(0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)]\, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,b]} |f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)|\, ds \\
&\leq \frac{\|f(., y_{n.}) - f(., y_.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{b^\alpha \|f(., y_{n.}) - f(., y_.)\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
&\leq \frac{b^\alpha \|f(., y_{n.}) - f(., y_.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, nous avons

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty \leq \frac{b^\alpha \|f(.,y_{n.})-f(.,y.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Etape 2 :"F transforme un ensemble borné à un ensemble borné dans $C([-r,b],\mathbb{R})$".

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\mu>0$, il existe une constante positive l telle que pour tout $y\in B_\mu=\{y\in C([-r,b],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty\leq\mu\}$, nous avons $\|F(y)\|_\infty\leq l$.

D'aprés (H_3), on a pour tout $t\in[0,b]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_s)|\,ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,b]}|f(s,y_s)|\,ds\\
&\leq \frac{\|f(.,y.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&\leq \frac{b^\alpha M}{\alpha\Gamma(\alpha)}\\
&\leq \frac{b^\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{b^\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)} := l.$$

Etape 3 :"F transforme un ensemble borné à un ensemble équicontinu dans $C([-r,b],\mathbb{R})$".

Soit $t_1,t_2\in[0,b]$, $t_1<t_2$, B_μ est un ensemble borné de $C([-r,b],\mathbb{R})$, (déjà démontrer dans l'étape 2).

Soit $y \in B_\mu$. Alors,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, y_s)\, ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] |f(s, y_s)|\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, y_s)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] \sup_{s \in [0,b]} |f(s, y_s)|\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,b]} |f(s, y_s)|\, ds \\
&\leq \frac{\|f(., y.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds \\
&\quad + \frac{\|f(., y.)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha).
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$, le second membre de cette dernière inégalité tend vers 0.

A la suite des étapes 1 à 3, d'aprés le thèorème d'*Ascoli-Arzélà*, on peut conclure que F : $C([-r, b], \mathbb{R}) \longrightarrow C([-r, b], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4 :"G est une contraction**".**

Soit $x, y \in C([-r, b], \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|G(x)(t) - G(y)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y_s)\, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s, x_s) - g(s, y_s)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k \|x-y\|_\infty\, ds \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{kb^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty .
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(x) - G(y)\|_\infty \leq \frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty .$$

D'aprés l'hypothèse (2.3), on déduit que G est une contraction.

Etape 5 :"l'ensemble $\Omega = \left\{ y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right), 0 < \lambda < 1 \right\}$ est borné**".**

Maintenant, il reste à voir si, l'ensemble $\Omega = \left\{ y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right), 0 < \lambda < 1 \right\}$ est borné.

Soit $y \in \Omega$. Alors, $y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right)$ pour $0 < \lambda < 1$.

Ainsi, pour tout $t \in J$, on a

$$y(t) = \lambda \left[\phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right) ds \right].$$

Cela implique par (H_2) et (H_3) que pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left|\lambda\left[\phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right) ds\right]\right| \\
&\leq |\phi(0)| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|g\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right) - g(s,0)\right| ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|g(s,0)|\,ds \\
&\leq \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha M}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y_s\|_C\,ds + \frac{b^\alpha g^*}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
&\leq \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y_s\|_C\,ds + \frac{b^\alpha g^*}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq \|\phi\|_C + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y_s\|_C\,ds + \frac{b^\alpha (g^* + M)}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Où

$$g^* = \sup_{s\in J} |g(s,0)|.$$

Considérons la fonction Ψ définie par

$$\Psi(t) = \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\}, 0 \leq t \leq b.$$

Soit $t^* \in [-r, t]$ telle que $\Psi(t) = |y(t^*)|$.

Si $t^* \in [0, b]$, d'aprés l'inégalité précédente, nous avons pour $t \in [0, b]$,

$$\Psi(t) \leq \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha (M + g^*)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(s)\,ds.$$

Si $t^* \in [-r, 0]$, on a $\Psi(t) = \|\phi\|_C$.

D'aprés le lemme $(1.3.8)$, il existe $\bar{K} = \bar{K}(\alpha)$ telle que on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t)\|_\infty &\leq \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha (M + g^*)}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{K}\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R\,ds \\
&\leq \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha (M + g^*)}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{K}\frac{b^\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)} R := \bar{R}.
\end{aligned}$$

Où

$$R := \|\phi\|_C + \frac{b^\alpha (M + g^*)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Puisque pour tout $t \in [0, b]$, $\|y_t\|_\infty \leq \Psi(t)$, on a

$$\|y\|_\infty \leq \max\left(\|\phi\|_C\, , \bar{R}\right) := A.$$

Cela montre que l'ensemble Ω est borné. En conséquence du théorème (1.3.9), On déduit que $F(y) + G(y)$ admet un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2) .

Chapitre 3

Existence des solutions extrémales

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va démontrer l'existence des solutions maximales et minimales, pour le IVP $(2.1) - (2.2)$.

3.2 Rappel

Dans cette section, on introduit quelques notions et définitions qui sont utilisées pour la suite.

Définition

C un sous ensemble fermé non vide d 'un espace de *Banach,* X est dit un cône si,

i $C + C \subset C$,

ii $\lambda C \subset C$,

iii $\{-C\} \cap \{C\} = \{0\}$.

Définition

Un cône C est dit normal si, la norme $\|.\|$ est semi-monotone dans C, c'est-à-dire,

$$\text{il existe une constante } N > 0 \text{ telle que } \|x\| \leq N \|y\|, \text{ désque } x \leq y.$$

Soit l'espace $X = C([-r, b], \mathbb{R})$ avec la relation d'ordre $\leq$ induite par un cône régulier dans X, pour tout $y, \bar{y} \in X : y \leq \bar{y}$, si et seulement si,

$$y(t) - \bar{y}(t) \geq 0, \forall t \in [-r, b].$$

Définition

Soit $\alpha, \beta \in X$ tels que $\alpha \leq \beta$. l'intervalle ordonné est un ensemble des points de X, donné par

$$[\alpha, \beta] = \{x \in X / \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Définition

Soit X un espace de *Banach*. $T : X \longrightarrow X$ est dit une isotone croissante si,

$$T(x) \leq T(y) \text{ pour tout } x, y \in X, \text{ tels que } x < y.$$

De même, $T : X \longrightarrow X$ est dit une isotone décroissante si,

$$T(x) \geq T(y) \text{ pour tout } x, y \in X, \text{ tels que } x < y.$$

Définition

On dit que $x \in X$ est un point fixe minimal de G dans X si,

$$x = Gx \text{ et } x \leq y, \forall y \in X \text{ et } y = Gy.$$

De même, on définit le point fixe maximal de G dans X, en inversant l'inégalité.

Remarque

Si, un point fixe minimal et maximal de G dans X existe, nous les appelons des points fixes extrémals de G dans X.
Nous avons besoin du théorème du point fixe dans la suite.

3.3 Théorème

Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle ordonné, dans un espace de *Banach* et $B_1, B_2 : [\alpha, \beta] \longrightarrow X$, deux fonctions satisfaisantes :

1. B_1 est une contraction,

2. B_2 est complètement continue,

3. $B_{1,}B_2$ sont strictement monotones croissantes,

4. $B_1(x) + B_2(x) \in [\alpha, \beta], \forall x \in [\alpha, \beta]$.

En outre, si le cône est normal, alors, l'équation $x = B_1(x) + B_2(x)$ a un point fixe minimal x_* et un point fixe maximal $x^* \in [\alpha, \beta]$. De plus, $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x^* = \lim_{n\to\infty} y_n$, telles que (x_n) et (y_n) sont des suites dans $[\alpha, \beta]$ définies par

$$x_{n+1} = B_1(x_n) + B_2(x_n), x_0 = \alpha \text{ et } y_{n+1} = B_1(y_n) + B_2(y_n), y_0 = \beta.$$

Nous adoptons les définitions suivantes :

Définition

Une fonction $v \in C([-r, b], \mathbb{R})$ est dite une solution inférieure du IVP $(2.1) - (2.2)$ si, $D^\alpha v(t) \leq f(t, v_t) + g(t, v_t)$, pour tout $t \in J$ et $v(t) \leq \phi(t)$ si, $t \in [-r, 0]$ .De même, une solution supérieure w du IVP $(2.1) - (2.2)$, est définie en inversant l'ordre de ce qui précède.

Définition

une solution x_M du IVP $(2.1) - (2.2)$, est dite maximale si, pour toute autre solution x du IVP $(2.1) - (2.2)$ dans $[-r, b]$, nous avons $x(t) \leq x_M(t)$, pour tout $t \in [-r, b]$.
De même, la solution minimale du IVP $(2.1) - (2.2)$ est définie en inversant l'ordre de l'énigalité précèdente.

Définition

Un fonction $f(t, x)$ est dite strictement monotone croissante en x presque partout $t \in J$, si, $f(t, x) \leq f(t, y), \forall t \in J$ et $\forall x, y \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ tel que $x < y$.
De même, $f(t, x)$ est dite strictement monotone décroissante en x presque partout $t \in J$, si, $f(t, x) \geq f(t, y), \forall t \in J$ et $\forall x, y \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ tel que $x < y$.

3.4 Existence des solutions extrémales

Dans la suite nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(H_4) La fonction $f(t,x)$ et $g(t,x)$ sont strictement monotone non décroissante en y, $\forall t \in J$.

(H_5) Le IVP $(2.1) - (2.2)$ admet une solution inférieure v et une solution supérieure w avec $v \leq w$.

3.4.1 Théorème

Sous les hyopothèse (H_4) et (H_5), le IVP $(2.1) - (2.2)$ admet des solutions minimales et maximales dans l'intervalle $[-r, b]$.

Preuve

On a déjà démontrer dans le théorème (2.2.2) que F est complètement continu et que G est une contraction. Maintenant, il reste à démonter que F et G sont des isotones croissantes dans $[v; w]$. Soient $y, \bar{y} \in [v; w]$, tels que $y \leq \bar{y}$, $y \neq \bar{y}$. Alors, on a pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\, ds \\ &\leq \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \bar{y}_s)\, ds \\ &= F(\bar{y})(t). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} G(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y_s)\, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, \bar{y}_s)\, ds \\ &= G(\bar{y})(t). \end{aligned}$$

Donc, F et G sont des isotones croissantes dans $[v, w]$.

Finalement, soient $x \in [v, w]$ un élément quelconque .D'aprés (H_5), on déduit que

$$v \leq F(v) + G(v) \leq F(x) + G(x) \leq F(w) + G(w) \leq w,$$

D'où,

$$F(x) + G(x) \in [v, w], \ \forall x \in [v, w].$$

Puisque, F et G satisfaient les conditions du théorème (3.4.1), le IVP $(2.1) - (2.2)$ admet des solutions minimales et maximales sur $[-r, b]$.

3.4.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire,

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = \frac{e^t\|y_t\|}{c(e^t+e^{-t})(1+\|y_t\|)} + \frac{e^{-t}}{1+\|y_t\|}, \ t \in J := [0,b], \alpha \in [0,1], c > 0 & (1) \\ y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r,0] & (2) \end{cases}$$

On pose

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}}{1+x}, (t,x) \in J \times [0,\infty).$$

et

$$g(t,x) = \frac{e^t x}{c(e^t+e^{-t})(1+x)}, (t,x) \in J \times [0,\infty),$$

Soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$. On a

$$\begin{aligned} |g(t,x) - g(t,y)| &= \frac{e^t}{c(e^t+e^{-t})}\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\ &= \frac{e^t}{c(e^t+e^{-t})(1+x)(1+y)}|x-y| \\ &\leq \frac{e^t}{c(e^t+e^{-t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{c}|x-y|. \end{aligned}$$

Donc, g est contractante.

D'aprés l'hypothèse (H_3), la fonction f est continue sur $J \times [0,\infty)$ et $|f(t,y)| \leq 1$, pour tout $(t,y) \in J \times [0,\infty)$.

Sous l'hypothèse (H_1) et (H_3), nous avons $\frac{b^{\alpha}}{c\Gamma(\alpha+1)} < 1$ et donc, d'aprés le théorème $(2.2.2)$, le problème $(1)-(2)$ admet au moins une solution dans $[-r,b]$.

Conclusion

Dans ce travail, nous étudions l'existence des solutions d'un problème de *Cauchy* pour une équation différentielle fonctionnelle perturbée d'ordre fractionnaire. on a traité le cas de la dérivée au sens de *Caputo*.

Ce résultat ouvre certains perspectives, pour les lecteurs intéressés. On cite à titre d'exemple :

- Peut-on généraliser ce résultat à un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^+$?
- Peut-on reprendre ce résultat en considérant l'approche de *Riemann-Liouville* ?
- Peut-on reprendre ce résultat en considérant les inclusions différentielles (le cas multivoques)?

Voilà quelques chemins à suivre.

Bibliographie

[1] **A.Bahloul**, Les Problèmes aux Limites concernant les Equations Différentielles Fractionnaires avec des Conditions Non Locales, Mémoire de Master, (26/05/2015) , Université de Mostaganem.

[2] **A. Belarbi, M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas**, Perturbed functional differential equations with fractional order, Communications in Applied Analysis 11 (3-4) (2007), 429-440.

[3] **Z.Boukhoza**, Les Problèmes aux Limites concernant les Equations Différentielles Fractionnaires, Mémoire de Master, (26/05/2015) , Université de Mostaganem.

[4] **A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava and Juan J. Trujillo**, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006..

[5] **I.Podlubni**, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego (1999).

[6] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev**, Fractional Integrals and Derivatives.Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.