UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Quelques résultats sur les solutions des équations différentielles linéaires du second ordre

Présenté par

M^{elle} ADLI Yamina

et

M^{elle} BENDJEDOUD Imane

Soutenu le 29/05/2016

Devant le jury

Mr BELAÏDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme BELARBI HAMANI S	**Examinatrice**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme AZIZ HAMANI K	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

DÉDICACES

Au nom de Dieu le tout miséricordieux

Nous dédions ce modeste travail à nos chers parents que nous aimons plus que tout au monde,

à nos soeurs et frères et à toute notre famille.

Noud dédions également ce travail à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remercions "DIEU" qui nous a donné le courage, la volonté, la patience, la santé et la force pour finir ce modeste travail. Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire. En particulier, notre encadreur Mme AZIZ HAMANI Karima, pour sa totale disposition et ses précieux conseils qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Nous remercions aussi l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement. Nous tenons aussi à exprimer nos vifs remerciements aux membres du jury Mr BELAIDI Benharrat et Mme BELARBI HAMANI Samira qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

RÉSUMÉ

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt, joue un rôle trés important dans l'étude de lacroissance et de l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans ledomaine complexe.
Ce mémoire consiste à étudier la croissance et les points fixes des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A_0 e^{a_0 z} f' + \left(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}\right) f = 0,$$

où $A_j\left(z\right)\left(\not\equiv 0\right)\left(j = 0, 1, 2\right)$ sont des fonctions meromorphes avec $\sigma\left(A_j\right) < 1$, $a_j\left(j = 0, 1, 2\right)$ sont des nombres complexes.
Le but de ce mémoire est d'étudier les résultats obtenus par Xu et Zhang [23] .

INTRODUCTION

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt joue un rôle trés important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{0.1}$$

où $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre fini. Il est bien connu que toute solution de l'équation (0.1) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement independantes de (0.1), alors il y a au moins une des deux solutions f_1 et f_2 qui doit être d'ordre infini [8] . Par conséquent, la plupart des solutions de (0.1) sont d'ordre infini, mais l'équation (0.1) avec $B(z) = -(1 + e^{-z})$ possède une solution $f = e^z$ d'ordre fini. Alors une question naturelle est la suivante : Quelle condition sur $B(z)$ garantira que toute solution f $(\not\equiv 0)$ de (0.1) est d'ordre infini ?. Plusieurs auteurs Frei [8], Langley [17] , Ozawa [19] , Gundersen [9] , Amemiya et Ozawa [1] ont étudié ce problème dans le cas où $B(z)$ est soit un polynôme non constant, soit une fonction entière transcendante. Chen [2] a considéré le cas où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre $\sigma(Q) = 1$ et a démontré différents résultats concernant la croissance des solutions de l'équation (0.1) . Récemment, Peng et Chen [20] ont étudié les solutions de (0.1). Leurs résultats ont été ensuite généralisés par Xu et Zhang [23] .

Ce mémoire consiste à étudier la croissance et les points fixes des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes.

Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécéssaires par la suite dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes.

Dans le troisième chapitre, on s'intéressera à l'étude de l'exposant du convergence des points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaire étudiées dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 ([13])*Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,a,f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leqslant t$. On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z|\leqslant t$.*
Notons

$$N(r,a,f)=\int_0^r \frac{[n(t,a,f)-n(0,a,f)]}{t}dt+n(0,a,f)\log r\ (a\neq\infty), \tag{1.1.1}$$

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r \frac{[n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)]}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r, \tag{1.1.2}$$

$$\overline{N}(r,a,f)=\int_0^r \frac{[\overline{n}(t,a,f)-\overline{n}(0,a,f)]}{t}dt+\overline{n}(0,a,f)\log r\ (a\neq\infty), \tag{1.1.3}$$

$$\overline{N}(r,\infty,f)=\overline{N}(r,f)=\int_0^r \frac{[\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)]}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)\log r, \tag{1.1.4}$$

$N(r,f)$ est applée la fonction de comptage de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

On définit

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \ \ (a \neq \infty) \tag{1.1.5}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \tag{1.1.6}$$

où

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, \ x > 1 \\ 0, \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

$m(r,f)$ est applée fonction de proximité de la fonction f au point a.

Définition 1.1.2 ([13]) *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f). \tag{1.1.8}$$

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f(z) = \exp(z)$, on a*

$$N(r,f) = 0$$

et

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\exp(r\ \exp(i\theta))| \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\exp(r\cos\theta + ir\sin\theta)| \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} 2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}$$

1.2 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.2.1 ([13] , [24])*Soit f est une fonction méromorphe. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont respectivement définis par*

$$\sigma(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} \tag{1.2.1}$$

et

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log \log T(r,f)}{\log r} \tag{1.2.2}$$

Si

$$\lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty, \tag{1.2.3}$$

on dit que la fonction f est d'ordre infini.

Exemple 1.2.1 *La fonction $f(z) = \exp(e^z)$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) =$* 1.

1.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 ([15])*Soit f une fonction méromorphe. on définit respectivement l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \tag{1.3.1}$$

et

$$\lambda_2(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.2 ([*15*])*Soit f une fonction méromorphe. On définit respectivement l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f respectivement par*

$$\bar{\lambda}(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \tag{1.3.3}$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log \log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \tag{1.3.4}$$

Définition 1.3.3 ([3]) *Soient f et g deux fonctions meromorphes satisfaisant $\sigma(g) < \sigma(f)$, et soient $z_1, z_2, ...$ ($|z_j| = r_j, 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq ...$) une suite des zéros distincts de la fonction meromorphe $f-g$. Alors $\bar{\lambda}_g(f)$ l'exposant de convergence de la suite des zéros distincts de $f-g$, est défini par*

$$\overline{\tau}_g(f) = \inf\left\{\tau > 0, \left|\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^{-\tau}\right| < \infty\right\} \tag{1.3.5}$$

Il est évident que

$$\overline{\tau}_g(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-g}\right)}{\log r} \tag{1.3.6}$$

et

$$\overline{\tau}_g(f) = \bar{\lambda}(f-g). \tag{1.3.7}$$

Si $g(z) = z$, on note

$$\overline{\tau}_g(f) = \overline{\tau}(f). \tag{1.3.8}$$

1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.4.1 ([14]) *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt, \tag{1.4.1}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Exemple 1.4.1 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 5] \cup [6, 8] \subset [0, +\infty)$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^5 dt + \int_6^8 dt = 6.$$

Définition 1.4.2 ([14]) *La mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par*

$$lm(H) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt, \tag{1.4.2}$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H.

Exemple 1.4.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$ est*

$$lm = \int_0^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

1.5 Indice central d'une fonction entière

Définition 1.5.1 ([15])*Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une fonction entière et soit* $0 \leq r \leq +\infty$. *Notons par* $\mu(r) = \max\{| a_n | r^n : n = 0, 1...\}$*le terme maximal de* f. *Alors l'indice central de la fonction* f *est défini par*

$$\nu_f(r) = \max\{m; \mu(r) =| a_m | r^m \text{ et } m = m(r)\}.$$

Exemple 1.5.1 *Pour le polynôme* $p(z) = a_n z^n + ... + a_0, a_n \neq 0$, *pour* r *suffisamment grand, on a*

$$\mu(r) =| a_n | r^n \text{ et } \nu_p(r) = n.$$

Chapitre 2

Croissance des solutions méromorphes de certaines équations differentielles linéaires du socond ordre

2.1 Introduction et resultats

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{2.1.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. il est bien connu que toute solution f de l'équation (2.1.1) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement independantes de (2.1.1), alors il y a au moins une des deux solutions f_1 et f_2 qui doit être d'ordre infini [8]. Par conséquent, la plupart des solutions de (2.1.1) sont d'ordre infini. Cependant, l'équation (2.1.1) avec $B(z) = -(1 + e^{-z})$ possède une solution $f = e^z$ d'ordre fini.

Une question naturelle est : Quelle condition sur $B(z)$ garantira que toute solution f $(\not\equiv 0)$ de (2.1.1) est d'ordre infini ? Plusieus auteurs Frei [8], Chen [2] et Gundersen [9] ont étudié ce problème. Dans le cas où $B(z)$ est une fonction entière transcendante, Gundersen [9] a prouvé que si $\sigma(B) \neq 1$, alors chaque solution $f\,(\not\equiv 0)$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

En 2002, Chen [2] a aussi considére ce problème et a obtenu les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.1 ([2]) *Soient a, b deux nombres complexe non nuls, $a \neq b$, $B(z)\,(\not\equiv 0)$ un polynôme non constant ou $B(z) = h(z)\, e^{bz}$, où $h(z)$ est un polynôme non nul . Alors toute* *solution* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f'' + e^{az} f' + B(z) f = 0 \tag{2.1.2}$$

est d'ordre infini.

Théorème 2.1.2 ([2]) *Supposons que* $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j = 0, 1)$ *sont des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1$. *Soient* a, b *deux nombres complexes tels que* $ab \neq 0$ *et* $a \neq b$. *Alors toute solution* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f'' + A_1 e^{az} + A_0 e^{bz} f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini

Récemment Peng et Chen [20] ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre et ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.3 ([20]) *Supposons que* $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j = 1, 2)$ *sont des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1$. *Soient* a_1 *et* a_2 *deux nombres complexes tels que* $a_1 a_2 \neq 0$ *et* $a_1 \neq a_2$ (*supposons que* $|a_1| \leq |a_2|$). *Si* $\arg a_1 \neq \pi$ *ou* $a_1 < -1$, *alors toute solution* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + \left(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}\right) f = 0 \tag{2.1.4}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Dans ce chapitre, on va étudier un théorème du à Xu et Zhang [23]. Ce théorème est le suivant :

Théorème 2.1.4 ([23]) *Supposons que* $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j = 0, 1, 2)$ *sont des fonctions meromorphes avec* $\sigma(A_j) < 1$ *et* $a_{1,}a_2$ *sont deux nombres complexes tels que* $a_1 a_2 \neq 0$ *et* $a_1 \neq a_2$ (*supposons que* $\mid a_1 \mid \leq \mid a_2 \mid$). *Soit* a_0 *une constante réelle strictement négative. Si* $\arg a_1 \neq \pi$ *ou* $a_1 < a_0$. *alors toute solution* $f\ (\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f'' + A_0 e^{a_0 z} f' + \left(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}\right) f = 0 \tag{2.1.5}$$

est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) = 1$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 ([22]) *Supposons que* $f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes et que* $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv f_{n+1}$.

(ii) *Si* $1 \leq j \leq n+1, 1 \leq k \leq n$ *l'ordre de* f_j *est inférieur à l'ordre de* $e^{g_k(z)}$. *Si* $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n+1$, $1 \leq h < k \leq n$ *et l'ordre de* f_j *est inférieur à l'ordre de* $e^{g_h - g_k}$.

Alors $f_j(z) \equiv 0$ $(j = 1, 2, ..., n+1)$.

Lemme 2.2.2 ([10]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante d'ordre* $\sigma(f) = \sigma < \infty$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée et soient* k *et* j *deux nombres entièrs vérifiant* $k > j \geq 0$. *Alors il existe un ensemble* $E_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *de mesure linéaire nulle tel que si* $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_1$, *alors il existe une constante* $R = R(\theta)$ *telle que pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \theta$ *et* $|z| \geq R$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2.3 ([5]) *Soit* $g(z)$ *une fonction méromorphe transcendante avec* $\sigma(g) = \sigma < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_2 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *de mesure linéaire nulle telle que si* $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus E_2$, *alors il existe une constante* $R = R(\psi) > 1$ *telle que pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \psi$ *et* $|z| = r > R$, *on ait*

$$\exp\left\{-r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \leq |g(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.4 ([5]) *Soit* $g(z) = A(z) e^{az}$, *où* $A(z) (\not\equiv 0)$ *est une fonction méromorphe d'ordre* $\sigma(A) = \alpha < 1$, a *est une constante complexe,* $a = |a| e^{i\varphi}$ $(\varphi \in (0, 2\pi])$. *Posons* $E_3 = \{\theta \in (0, 2\pi] : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$. *Alors* E_3 *est un ensemble fini. Alors pour tout* ε *donné* $(0 < \varepsilon < 1 - \alpha)$, *il existe un ensemble* $E_4 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que si* $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi] \setminus (E_3 \cup E_4)$, *alors pour* r *suffisamment grand, on a*

(i) *si* $\cos(\varphi + \theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon) r\delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon) r\delta(az, \theta)\}, \tag{2.2.3}$$

(ii) *si* $\cos(\varphi+\theta)<0,$ *alors*

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\, r\delta\,(az,\theta)\right\} \leq |g\,(z)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\, r\delta\,(az,\theta)\right\}, \tag{2.2.4}$$

où $\delta\,(az,\theta)=|a|\cos(\varphi+\theta)\,.$

Lemme 2.2.5 ([20]) *Supposons que* $n\geq 1$ *est un entier. Soit* $P_j\,(z)=a_{jn}z^n+...\,(j=1,2)$ *des polynômes non constants, où* a_{jq} $(q=1,...,n)$ *sont des nombres complexes et* $a_{1n}a_{2n}\neq 0.$ *Posons* $z=re^{i\theta},$ $a_{jn}=|a_{jn}|\,e^{i\theta},$ $\theta_j\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),$ $\delta\,(P_j,\theta)=|a_{jn}|\cos(\theta_j+n\theta)\,.$ *Alors il existe un ensemble* $E_5\subset\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right)$ *de mesure linéaire nulle. Si* $\theta_1\neq\theta_2$, *alors il existe un rayon* $\arg z=\theta,$ $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\setminus(E_5\cup E_6)$ *tel que*

$$\delta\,(P_1,\theta)>0 \qquad et \qquad \delta\,(P_2,\theta)<0 \tag{2.2.5}$$

ou

$$\delta\,(P_1,\theta)<0 \qquad et \qquad \delta\,(P_2,\theta)>0, \tag{2.2.6}$$

où $E_6=\left\{\theta\in\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right):\delta\,(P_j,\theta)=0\right\}$ *est un ensemble fini de mesure linéaire nulle.*

Remarque 2.2.1 ([20]) *Dans lemme 2.2.5, si* $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\setminus(E_5\cup E_6)$ *est remplacé par* $\theta\in\left[\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right)\setminus(E_5\cup E_6)\,,$ *alors on peut obtenir le même résultat.*

Lemme 2.2.6 ([4]) *Soit* $A_0,A_1,...,A_{k-1},F\,(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_1f^{'}+A_0f=F, \tag{2.2.7}$$

alors $\lambda\,(f)=\bar{\lambda}\,(f)=\sigma\,(f)=+\infty.$

Lemme 2.2.7 ([6]) *Soient* $k\geq 2$ *et* $A_0,A_1,...,A_{k-1}$ *des fonctions méromorphes. Posons* $\sigma=\max\left\{\sigma\,(A_j)\,,j=0,1,...,k-1\right\}.$ *Alors toute solution méromorphe transcendante dont les poles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation différentielle*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_1f^{'}+A_0f=0 \tag{2.2.8}$$

vérifié $\sigma_2\,(f)\leq\sigma$

Lemme 2.2.8 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante. Soit $\alpha > 1$ une constante et soit k et j deux nombres entiers vérifiant $k > j \geq 0$. Alors il existe un ensemble $E_7 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $C > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_7 \cup [0, 1]$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq C\left[\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log r)^{\alpha} \log T(\alpha r, f)\right]^{k-j} \tag{2.2.9}$$

Lemme 2.2.9 ([11], [15]) *Soient $F(r)$ et $G(r)$ des fonctions réelles non décroissantes sur $(0, \infty)$ telles que $F(r) \leq G(r)$ pour tout r à l'éxtérieur d'un ensemble $E \subset (0, \infty)$ de mesure linéaire finie ou à l'éxterieur d'un ensemble $H \cup [0, 1]$, où $H \subset (1, \infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors pour toute constante $\alpha > 1$, il existe un $r_0 > 0$ tel que $F(r) \leq G(\alpha r)$ pour tout $r > r_{0.}$*

2.3 Preuve du Théorème 2.1.4

Preuve. Tout d'abord prouvons que l'équation (2.1.5) ne peut pas avoir une solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ d'ordre $\sigma(f) < 1$. Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5) d'ordre $\sigma(f) = \sigma_1 < 1$. Alors $\sigma\left(f^{(j)}\right) = \sigma_1 < 1\,(j = 1, 2)$. Réécrivons (2.1.5) comme suit :

$$A_0 f' e^{a_0 z} + A_1 f e^{a_1 z} + A_2 f e^{a_2 z} = -f'' \tag{2.3.1}$$

Considérons deux cas :

(1). $a_2 \neq a_0$, on note que $a_1 \neq a_0$, $a_1 \neq a_2$, $\sigma(A_1 f) < 1$, $\sigma(A_2 f) < 1$, $\sigma\left(A_0 f'\right) < 1$, $\sigma\left(-f''\right) < 1$ et par le Lemme 2.2.1, on obtient que $f \equiv 0$. Ce qui est une contradiction.

(2). $a_2 = a_0$, alors (2.3.1) peut être réécrite cmme suit :

$$A_1 f e^{a_1 z} + \left(A_0 f' + A_2 f'\right) e^{a_2 z} = -f'' \tag{2.3.2}$$

On note que $a_1 \neq a_2$, $\sigma(A_1 f) < 1$, $\sigma\left(A_0 f' + A_2 f'\right) < 1$, $\sigma\left(-f''\right) < 1$ et encore par le Lemme 2.2.1, on obtient que $f \equiv 0$. Ce qui est une contradiction. Par conséquent, $\sigma(f) \geq 1$.

Supposons maintenant que f est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5) d'ordre $1 \leq \sigma(f) = \sigma < +\infty$. De l'équation (2.1.5), on sait que les pôles de $f(z)$ peuvent se produire seulement par les pôles de A_j $(j = 0, 1, 2)$. Notons que la multiplicité des pôles de f est uniformément bornée. Alors on a

$$N(r,f) \leq M_1 \bar{N}(r,f) \leq M_1 \sum_{j=0}^{2} \bar{N}(r,A_j) \leq M \max\{N(r,A_j) : j=0,1,2\}, \tag{2.3.3}$$

où M_1 et M sont des constantes positives. D'où

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leq \alpha = \max\{\sigma(A_j) : j=0,1,2\} \leq 1. \tag{2.3.4}$$

Soit $f = \frac{g}{d}$, d est le produit canonique formé par les pôles non nuls de $f(z)$ avec $\beta = \sigma(d) = \lambda(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leq \alpha < 1$ et g est une fonction entière d'ordre $1 \leq \sigma(g) = \sigma(f) = \sigma < \infty$.
En substituant $f = \frac{g}{d}$ dans (2.1.5), on obtient

$$\frac{g''}{g} + \left[A_0 e^{a_0 z} - 2\frac{d'}{d}\right]\frac{g'}{g} + 2\left(\frac{d'}{d}\right)^2 - \frac{d''}{d} - A_0 \frac{d'}{d} e^{a_0 z} + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z} = 0. \tag{2.3.5}$$

D'après le Lemme 2.2.3, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < 1-\alpha)$, il existe un ensemble $E_1 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ de mesure linéare nulle tel que si $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \backslash E_1$, alors il existe une constante $R = R(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R$, on ait

$$|A_0(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.6}$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour tout ε donné $\left(0 < \varepsilon < \min\left\{1-\alpha, \frac{|a_2|-|a_1|}{|a_2|+|a_1|}\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_2 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ de mesure linéare nulle tel que si $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \backslash E_2$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_0$, on ait

$$\left|\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)}\right| \leq |z|^{j(\sigma-1+\varepsilon)},\ j = 1,2 \tag{2.3.7}$$

et

$$\left|\frac{d^{(j)}(z)}{d(z)}\right| \leq |z|^{j(\beta-1+\varepsilon)},\ j = 1.2 \tag{2.3.8}$$

On pose $z = re^{i\theta}$, $a_1 = |a_1|e^{i\theta_1}$, $a_2 = |a_2|e^{i\theta_2}$, θ_1, $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
Cas 1 : $\arg a_1 \neq \pi$, ce qui est $\theta_1 \neq \pi$.
Cas 1.1 : Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$, D'après le Lemme 2.2.5, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$ (où E_5 et E_6 sont définis comme dans le Lemme 2.2.5, $E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6$ est de mesure linéare nulle) vérifiant $[\delta(a_1 z, \theta) > 0$ et $\delta(a_2 z, \theta) < 0]$ ou $[\delta(a_1 z, \theta) < 0$ et $\delta(a_2 z, \theta) > 0]$ pour $|z| = r$ assez grand.

(i) Si $\delta(a_1 z, \theta) > 0$ et $\delta(a_2 z, \theta) < 0$ pour $|z| = r$ assez grand, alors d'après le Lemme 2.2.4, on a

$$|A_1 e^{a_1 z}| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\} \tag{2.3.9}$$

et

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(a_2 z, \theta)\, r\} < 1 \tag{2.3.10}$$

De (2.3.9) et (2.3.10), on a

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_1 e^{a_1 z}| - |A_2 e^{a_2 z}| \\ &\geq \exp\{(1-\epsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\} - 1 \\ &= (1 - o(1)) \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\}. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

De (2.3.5), on obtient

$$|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \leq \left|\frac{g''}{g}\right| + \left[|A_0 e^{a_0 z}| + 2\left|\frac{d'}{d}\right|\right]\left|\frac{g'}{g}\right| + 2\left|\frac{d'}{d}\right|^2 + \left|\frac{d''}{d}\right| + |A_0|\left|\frac{d'}{d}\right| |e^{a_0 z}| \tag{2.3.12}$$

Comme $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$, on a $\cos\theta > 0$ et donc $|e^{a_0 z}| = e^{-|a_0| r \cos\theta} < 1$. Par conséquent, de (2.3.6) on obtient

$$|A_0(z)\, e^{a_0 z}| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.13}$$

En substituant (2.3.7), (2.3.8), (2.3.11) et (2.3.13) dans (2.3.12), on obtient

$$(1 - o(1)) \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\} \leq M_1 r^{k(\sigma - 1 + \varepsilon)} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{2.3.14}$$

où $M_1 > 0$ et $k > 0$ sont des constantes. Comme $\delta(a_1 z, \theta)\, r > 0$ et $\alpha + \varepsilon < 1$, (2.3.14) est une contradiction.

(ii) Si $\delta(a_1 z, \theta) < 0$ et $\delta(a_2 z, \theta) > 0$, en utilisant la même raisonnement que dans cas 1.1, nous pouvons obtenir une contradiction.

Cas 1.2 : Supposons que $\theta_1 = \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.5, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$ vérifiant $\delta(a_1 z, \theta)\, r > 0$. Comme $|a_1| \leq |a_2|$, $a_1 \neq a_2$, et $\theta_1 = \theta_2$, alors $|a_1| < |a_2|$ et donc $\delta(a_2 z, \theta)\, r > \delta(a_1 z, \theta)\, r > 0$. Pour r assez grand, nous obtenons, par le Lemme 2.2.4

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\} \tag{2.3.15}$$

et

$$|A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta)\, r\}\,. \tag{2.3.16}$$

De (2.3.15) et (2.3.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_2 e^{a_2 z}| - |A_1 e^{a_1 z}| \\ &\geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta)\, r\} - \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)\, r\} \\ &= M_2 \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)\, r\}\,, \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

où $M_2 = \exp\{[(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta) - (1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)]\, r\} - 1$.

Comme $0 < \varepsilon < \min\left\{1 - \alpha, \frac{|a_2| - |a_1|}{|a_2| + |a_1|}\right\}$, alors $(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta) - (1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta) > 0$ et donc $\exp\{[(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta) - (1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)]\, r\} > 1$. D'où $M_2 > 0$.

Comme $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$, alors $\cos\theta > 0$ et donc $|e^{a_0 z}| = e^{-|a_0| r \cos\theta} < 1$.

Par conséquent, de (2.3.6) on obtient

$$|A_0\,(z)\, e^{a_0 z}| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \tag{2.3.18}$$

En substituant (2.3.7) – (2.3.8) et (2.3.17) – (2.3.18) dans (2.3.12), on obtient

$$M_2 \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)\, r\} \leq M_1 r^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.19}$$

Comme $\delta\,(a_1 z, \theta) > 0$, $M_2 > 0$ et $\alpha + \varepsilon < 1$, (2.3.19) est une contradictions.

Cas 2 : $a_1 < a_0$, ce qui est $\theta_1 = \pi$.

Cas 2.1 : Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $\theta_2 \neq \pi$. d'après le Lemme 2.2.5, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$ vérifiant $\delta\,(a_2 z, \theta) > 0$. Comme $\cos\theta > 0$, nous avons $\delta\,(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos\theta < 0$. pour $|z| = r$ assez grand, on a

$$|A_1 e^{a_1 z}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_1 z, \theta)\, r\} < 1 \tag{2.3.20}$$

et

$$|A_2 e^{a_2 z}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta)\, r\}\,. \tag{2.3.21}$$

De (2.3.20) et (2.3.21) , on obtient

$$\begin{aligned} |A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| &\geq |A_2 e^{a_2 z}| - |A_1 e^{a_1 z}| \\ &\geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(a_2 z, \theta)\, r\} - 1. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas 1.1, on peut obtenir une contradiction.

Cas 2.2 :Supposons que $\theta_1 = \theta_2$, alors $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 2.2.5, pour le ε ci-dessus, il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$. Alors $\cos\theta < 0$, $\delta(a_1 z, \theta) = |a_1| \cos(\theta_1 + \theta) = -|a_1| \cos\theta > 0$, $\delta(a_2 z, \theta) = |a_2| \cos(\theta_2 + \theta) = -|a_2| \cos\theta > 0$. Comme $|a_1| \leq |a_2|$, $a_1 \neq a_2$ et $\theta_1 = \theta_2$, alors $|a_1| < |a_2|$ et donc $\delta(a_2 z, \theta) > \delta(a_1 z, \theta) > 0$. pour $|z| = r$ assez grand, nous obtenons $(2.3.15)$, $(2.3.16)$ et $(2.3.17)$ est vérifiée.

En utilisant le même raisonnement que dans le cas 1.2, on peut obtenir une contradiction.

En conclusion de la preuve précédente, on obtient que $\sigma(f) = \sigma(g) = +\infty$.

Dans ce qui suit, montrons que si tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément bornée, alors $\sigma_2(f) \leq 1$.

D'après le Lemme 2.2.7 et $\max\{\sigma(A_0 e^{a_0 z}),\ \sigma(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z})\} = 1$, alors $\sigma_2(f) \leq 1$.

D'après le Lemme 2.2.8, il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $C > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$, on ait

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq C [T(2r, f) \log T(2r, f)]^j \leq C [T(2r, f)]^{j+1}, \qquad j = 1, 2 \tag{2.3.23}$$

Dans les cas 1.1 et cas 2.1, nous avons prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$ vérifiant $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$ et pour $|z| = r$ assez grand, on a (2.3.11) ou (2.3.22), c'est que

$$|A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}| \geq \exp\{h_1 r\}, \tag{2.3.24}$$

où $h_1 > 0$ est une constante.

De (2.1.5), on a

$$\frac{f''}{f} + A_0 e^{a_0 z} \frac{f'}{f} = -(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}). \tag{2.3.25}$$

Comme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$, alors $\cos\theta > 0$, $e^{-|a_0| r \cos\theta} < 1$. De (2.3.23), (2.3.24) et (2.3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{h_1 r\} &\leq C [T(2r, f)]^3 + \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\} e^{-|a_0| r \cos\theta} C [T(2r, f)]^2 \\ &\leq 2C \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\} [T(2r, f)]^3 \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Comme $h_1 > 0$, $\alpha + \varepsilon < 1$, alors en utilisant (2.3.26) et le Lemme 2.2.9, on trouve $\sigma_2(f) \geq 1$ d'où $\sigma_2(f) = 1$.

Dans les deux cas 1.2 et cas 2.2, on a prouvé qu'il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6)$ et pour $|z| = r$ assez grand, on a (2.3.17). On a aussi $\cos\theta < 0$ $\delta(a_1 z, \theta) > -|a_0| \cos\theta > 0$.

Par (2.3.17) , (2.3.23) et (2.3.25), on obtient

$$\begin{aligned} M_2 \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta(a_1 z, \theta)\, r\} &\leq C\,[T(2r, f)]^3 + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} e^{-|a_0| r \cos\theta} C\,[T(2r, f)]^2 \\ &\leq 2Ce^{-|a_0| r \cos\theta} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} [T(2r, f)]^3 . \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Comme $\delta(a_1 z, \theta) > -|a_0| \cos\theta > 0$, $M_2 > 0$, $\alpha + \varepsilon < 1$, alors en utilisant (2.3.27) et le Lemme 2.2.9, nous avons $\sigma_2(f) \geq 1$. Alors $\sigma_2(f) = 1$. $\square$

Chapitre 3

Points fixes des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires du second ordre

3.1 Introduction et resultas

Ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéréssés aux points fixes des solutions des équations différentielles linéaires. Chen [3] a étudié le problème en considérant des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients entières. Ensuite, Wang et Yi [21] , Laine et Rieppo [16] , Chen et Shon [5], Liu et Zhang [18] , El Farissi et Belaïdi [7] ont étudié les points fixes des solutions et de leurs dérivées mais dans le cas où les coefficients sont des fonctions méromorphes.
Dans ce chapitre, on va étudier un théorème du à Xu et Zhang [23] . Ce théorème est le suivant :

Théorème 3.1.1 ([23]) *Supposons que* $A_j(z)$, a_j $(j = 0, 1, 2)$ *vérifient les hypothèses du Théoreme* 2.1.4. *Si* $\varphi\,(\not\equiv 0)$ *est une fonction méromorphe d'ordre strictement inférieur à* 1, *alors toute solution méromorphe* $f\,(\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation* (2.1.5) *vérifie*

$$\overline{\lambda}(f-\varphi) = \overline{\lambda}\left(f' - \varphi\right) = \overline{\lambda}\left(f'' - \varphi\right) = \infty \qquad (3.1.1)$$

Corollaire 3.1.1 ([23]) *Supposons que* $A_j(z)$,a_j $(j=0,1,2)$ *vérifient les hypothèses du Théorème* 2.1.4. *Si* $f\ (\not\equiv 0)$ *est une solution méromorphe dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation* (2.1.5) *alors* f, f', f'' *toutes ont des points fixes infinis et vérifient*

$$\overline{\tau}(f)=\overline{\tau}\left(f'\right)=\overline{\tau}\left(f''\right)=\infty. \tag{3.1.2}$$

3.2 lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 ([22]) *Supposons que* $f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)$ $(n\geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes et* $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(z)\, e^{g_j(z)} = f_{n+1}$.

(ii) *si* $1\leq j\leq n+1, 1\leq k\leq n$ *l'ordre de* f_j *est inférieur à l'ordre de* $e^{g_k(z)}$. *si* $n\geq 2$, $1\leq j\leq n+1, 1\leq h<k\leq n$, *et l'ordre de* $f_j(z)$ *est inférieur à l'ordre de* $e^{g_h-g_k}$.

alors $f_j(z)=0$ $(j=1,2,...,n+1)$.

Lemme 3.2.2 ([4]) *Soient* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F\ (\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_1f'+A_0f=F, \tag{3.1.3}$$

alors $\lambda(f)=\bar{\lambda}(f)=\sigma(f)=+\infty$.

Lemme 3.2.3 ([23]) *Soit* a_0 *une constante vérifiant* $a_0<0$. *Si* $\arg a_1\neq\pi$ *ou* $a_1<a_0$, *alors on a* $a_1\neq ca_0$ $(0<c\leq 1)$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Preuve. Supposons que $f\ (\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de (2.1.5). Alors $\sigma(f)=\infty$ d'après le Théorème 2.1.4.

Soit $g_0(z)=f(z)-\varphi(z)$, $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$. En remplaçant $f=g_0+\varphi$ dans (2.1.5), on obtient

$$g_0''(z)+\varphi''(z)+A_0e^{a_0z}\left(g_0'(z)+\varphi'(z)\right)+\left(A_1e^{a_1z}+A_2e^{a_2z}\right)\left(g_0(z)+\varphi(z)\right)=0 \tag{3.3.1}$$

D'où

$$g_0'' + h_{0,1}g_0' + h_{0,0}g_0 = h_0, \tag{3.3.2}$$

où $h_{0,1} = A_0e^{a_0z}$, $h_{0,0} = A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}$ et $h_0 = -\left(\varphi'' + h_{0,1}\varphi' + h_{0,0}\varphi\right)$. Il est évident que, $h_0 \not\equiv 0$.

En effet, si $h_0 \equiv 0$ alors

$$\varphi'' + h_{0,1}\varphi' + h_{0,0}\varphi = 0 \tag{3.3.3}$$

D'après le Théoreme 2.1.4, nous avons $\sigma(\varphi) = \infty$. C' est une contradiction. Par conséquent $h_0 \not\equiv 0$. Notons que les fonctions $h_{0,1}$, $h_{0,0}$, et h_0 sont d'ordre fini Par le Lemme 3.2.2 et de (3.3.2), nous avons $\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \infty$.

Maintenant, montrons que $\bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$. Soit $g_1(z) = f'(z) - \varphi(z)$. Alors $\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty$ et $\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - \varphi)$.

En différentiant les deux côtés de (2.1.5), nous avons

$$f''' + h_{0,1}f'' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0}\right]f' + h_{0,0}'f = 0 \tag{3.3.4}$$

De (2.1.5), nous avons

$$f = -\frac{1}{h_{0,0}}\left(f'' + h_{0,1}f'\right). \tag{3.3.5}$$

En remplaçant (3.3.5) dans (3.3.4), on obtient

$$f''' + h_{0,1}f'' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0}\right]f' - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\left[f'' + h_{0,1}f'\right] = 0 \tag{3.3.6}$$

D'où

$$f''' + \left(h_{0,1} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)f'' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right]f' = 0 \tag{3.3.7}$$

On pose $g_1 = f' - \varphi$. D'où $f' = g_1 + \varphi$ et $f'' = g_1' + \varphi'$, $f''' = g_1'' + \varphi''$ et en remplaçant dans (3.3.7), on obtient

$$g_1'' + \varphi'' + \left(h_{0,1} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)(g_1' + \varphi') + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right](g_1 + \varphi) = 0 \tag{3.3.8}$$

D'où

$$\begin{gathered} g_1'' + \left(h_{0,1} - \tfrac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)g' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \tfrac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right]g_1 = \\ = \left(-\varphi'' + \left(h_{0,1} - \tfrac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)\varphi' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \tfrac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right]\varphi\right) \end{gathered} \tag{3.3.9}$$

Ainsi

$$g_1'' + h_{1,1}g_1' + h_{1,0}g_1 = h_1, \tag{3.3.10}$$

où

$$h_{1,1} = h_{0,1} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}} \tag{3.3.11}$$

$$h_{1,0} = h_{0,1}' + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1} \tag{3.3.12}$$

$$-h_1 = \varphi'' + \left(h_{0,1} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)\varphi' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right]\varphi. \tag{3.3.13}$$

Maintenant, nous prouvons que $h_1 \not\equiv 0$. En effet, si $h_1 \equiv 0$, alors

$$\varphi'' + \left(h_{0,1} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}\right)\varphi' + \left[h_{0,1}' + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}'}{h_{0,0}}h_{0,1}\right]\varphi = 0. \tag{3.3.14}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \left(A_0e^{a_0z} + \frac{\left(A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}\right)'}{A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}}\right)\varphi' \\ &+ \left[\left(A_0e^{a_0z}\right)' + \left(A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}\right)\right]\varphi = 0 \\ &- \left[\frac{\left(A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}\right)'}{A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}}A_0e^{a_0z}\right]\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \left[\frac{A_0A_1e^{(a_0+a_1)z} + A_0A_2e^{(a_0+a_2)z} - (A_1'e^{a_1z} + a_1A_1e^{a_1z} + A_2'e^{a_2z} + a_2A_2e^{a_2z})}{A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}}\right]\varphi' \\ &+ \left[A_0'e^{a_0z} + a_0A_0e^{a_0z} + (A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z})\right]\varphi \\ &- \left[\left(\frac{A_1'e^{a_1z} + a_1A_1e^{a_1z} + A_2'e^{a_2z} + a_2A_2e^{a_2z}}{A_1e^{a_1z} + A_2e^{a_2z}}\right)A_0e^{a_0z}\right]\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left[\left(\tfrac{\varphi'}{\varphi}A_0 + +a_0A_0 - a_1A_0\right)A_1 - A_0A_1'\right]e^{(a_0+a_1)z} \\ &+ \left[\left(\tfrac{\varphi'}{\varphi}A_0 + A_0' + a_0A_0 - a_2A_0\right)A_2 - A_0A_2'\right]e^{(a_0+a_2)z} \\ &+ \left[\left(\tfrac{\varphi''}{\varphi} - a_1\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right)A_1 - \tfrac{\varphi'}{\varphi}A_1'\right]e^{a_1z} + \left[\left(\tfrac{\varphi''}{\varphi} - a_2\tfrac{\varphi'}{\varphi}\right)A_2 - \tfrac{\varphi'}{\varphi}A_2'\right]e^{a_2z} \\ &+ 2A_1A_2e^{(a_1+a_2)z} + A_1^2e^{2a_1z} + A_2^2e^{2a_2z} = 0 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

En peut ecrire (3.3.17) sous la forme suivante :

$$f_1e^{(a_0+a_1)z}+f_2e^{(a_0+a_2)z}+f_3e^{a_1z}+f_4e^{a_2z}+f_5e^{(a_1+a_2)z}+f_6e^{2a_1z}+f_7e^{2a_2z}=0. \tag{3.3.18}$$

Comme $\sigma=\sigma(\varphi)<1$, $\sigma(A_k)<1$ $(k=0,1,2)$, alors $\sigma(f_j)<1$ $(j=1,...,7)$. On note que $a_1\neq a_2$ et par le Lemme 3.2.3, alors $2a_1\neq a_1$, a_1+a_0, a_1+a_2, $2a_2$. Pour appliquer le lemme 3.2.1, nous devons considérer trois cas :

(1) si $2a_1\neq a_0+a_2$, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_6\equiv 0$, c'est que $A_1\equiv 0$, une contradiction.

(2) si $2a_1=a_0+a_2$, alors par le Lemme 3.2.3, $2a_2\neq a_1$, $2a_1$, a_2+a_0, a_1+a_2, a_0+a_1, a_2. Par le Lemme 3.2.1, nous obtenons $f_7\equiv 0$, c'est que $A_2\equiv 0$, une contradiction .

(3) si $2a_1=a_2$, alors par le Lemme 3.2.3, $2a_2\neq a_1$, $2a_1$, a_2+a_0, a_1+a_2, a_0+a_1, a_2. Par le Lemme 3.2.1, nous obtenons $f_7\equiv 0$, c'est que $A_2\equiv 0$, une contradiction .

Par conséquent $h_1\not\equiv 0$.

Pour l'équation (3.3.10), comme $h_1\not\equiv 0$ et $\sigma(g_1)=\infty$. Par le Lemme 3.2.2, on obtient $\bar{\lambda}(g_1)=\bar{\lambda}(f'-\varphi)=\sigma(g_1)=\sigma(f)=\infty$

L'utilisation d'une manière similaire à celle ci-dessus, nous permet facilement de prouver $h_{1,0}\not\equiv 0$.

Dans ce qui suit, nous preuvons $\bar{\lambda}\left(f''-\varphi\right)=\infty$ et $\bar{\lambda}(g_2)=\bar{\lambda}\left(f''-\varphi\right)$.

Soit $g_2(z)=f''-\varphi$, alors $\sigma(g_2)=\sigma\left(f''\right)=\sigma(f)=\infty$ et $\bar{\lambda}(g_2)=\bar{\lambda}\left(f''-\varphi\right)$.

Déffférentions les deux côtés de (3.3.4). Nous obtenons :

$$f^{(4)}+h_{0,1}f'''+\left[2h_{0,1}'+h_{0,0}\right]f''+\left[h_{0,1}''+2h_{0,0}'\right]f'+h_{0,0}''f=0. \tag{3.3.19}$$

De (3.3.7), nous avons

$$f'=\frac{-1}{h_{1,0}}\left[f'''+h_{1,1}f''\right] \tag{3.3.20}$$

De (3.3.5) , (3.3.19) et (3.3.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}&f^{(4)}+h_{0,1}f'''+\left[2h_{0,1}'+h_{0,0}\right]f''\\&+\left[h_{0,1}''+2h_{0,0}'\right]\left(\left[h_{0,1}''+2h_{0,0}'\right]\right)\\&+h_{0,0}''\left[-\frac{1}{h_{0,0}}\left(f''+h_{0,1}f'\right)\right]=0\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

D'où

$$f^{(4)} + \left[h_{0,1} - \frac{h_{0,1}^{''} + 2h_{0,0}^{'} - h_{0,1}\frac{h_{0,0}^{''}}{h_{0,0}}}{h_{0,1}} \right] f^{'''}$$

$$+ \left[2h_{0,1}^{'} + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}^{''}}{h_{0,0}} - \frac{h_{0,1}^{''} + 2h_{0,0}^{'} - h_{0,1}\frac{h_{0,0}^{''}}{h_{0,0}}}{h_{1,0}} h_{1,1} \right] f^{''} = 0 \qquad (3.3.22)$$

Donc

$$f^{(4)} + h_{2,1}f^{'''} + h_{2,0}f^{''} = 0, \qquad (3.3.23)$$

où

$$h_{2,1} = h_{0,1} - \frac{\varphi_1}{h_{1,0}} \qquad (3.3.24)$$

$$h_{2,0} = 2h_{0,1}^{'} + h_{0,0} - \frac{h_{0,0}^{''}}{h_{0,0}} - \frac{\varphi_1}{h_{1,0}} \left[h_{0,1} - \frac{h_{0,0}^{'}}{h_{0,0}} \right], \qquad (3.3.25)$$

où

$$\varphi_1 = h_{0,1}^{''} + 2h_{0,0}^{'} - h_{0,1}\frac{h_{0,0}^{''}}{h_{0,0}} \qquad (3.3.26)$$

En substituant $f^{''} = g_2 + \varphi$, $f^{'''} = g_2^{'} + \varphi'$, $f^{(4)} = g_2^{''} + \varphi^{''}$ dans (3.3.23), on obtient

$$g_2^{''} + h_{2,1}g_2^{'} + h_{2,0}g_2 = h_2, \qquad (3.3.27)$$

où

$$h_2 = -\left(\varphi^{''} + h_{2,1}\varphi^{'} + h_{2,0}\varphi \right) \qquad (3.3.28)$$

De même, si l'on peut prouver que $h_2 \not\equiv 0$, alors par le Lemme 3.2.2, on obtient $\bar{\lambda}(g_2) = \sigma(g_2) = \infty$. D'où $\bar{\lambda}\left(f^{''} - \varphi\right) = \infty$.

Maintenant, nous prouvons $h_2 \not\equiv 0$. On note

$$h_{2,1} = \frac{H_1}{h_{1,0}h_{0,0}} \qquad (3.3.29)$$

$$h_{2,0} = \frac{H_2}{h_{1,0}h_{0,0}}, \qquad (3.3.30)$$

où

$$H_1 = h_{0,0}h_{0,1}h_{0,1}^{'} + h_{0,0}^2h_{0,1} - h_{0,0}^{'}h_{0,1}^2 - h_{0,0}h_{0,1}^{''} - 2h_{0,0}h_{0,0}^{'} + h_{0,1}h_{0,0}^{''}$$

et

$$\begin{aligned} H_2 &= 2h_{0,1}^{'2}h_{0,0} + 3h_{0,0}^2h_{0,1} - 2h_{0,0}h_{0,1}h_{0,1}^{'} + h_{0,0}^3 - 3h_{0,0}h_{0,0}^{'}h_{0,1} + h_{0,1}^{'}h_{0,0}^{''} \\ &\quad -h_{0,0}^{''}h_{0,0} - h_{0,1}h_{0,1}^{''}h_{0,0} + 2h_{0,0}^{'2} + h_{0,0}^{'}h_{0,1}^{''} + h_{0,1}^2h_{0,0}^{''}. \end{aligned}$$

De toute évidence, H_1 et H_2 sont des fonctions méromorphes et $\sigma(H_j) < 1$ $(j = 1, 2)$. De (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30), on a

$$\frac{h_2}{\varphi} = -\frac{1}{h_{1,0}h_{0,0}}\left[\frac{\varphi^{''}}{\varphi}h_{1,0}h_{0,0} + \frac{\varphi^{'}}{\varphi}H_1 + H_2\right]. \tag{3.3.31}$$

Soit $H = \frac{\varphi^{''}}{\varphi}h_{1,0}h_{0,0} + \frac{\varphi^{'}}{\varphi}H_1 + H_2$. Nous avons seulement besoin de prouver que $H \not\equiv 0$.
On note $\sigma\left(\frac{\varphi^{''}}{\varphi}\right) < 1$, $\sigma\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\right) < 1$ et $h_{1,0}h_{0,0} = h_{0,1}^{'}h_{0,0} + h_{0,0}^2 - h_{0,1}h_{0,0}^{'}$, et de (3.3.29) et (3.3.30), nous pouvons écrire H sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H &= f_1e^{(a_0+a_1)z} + f_2e^{(a_0+a_2)z} + f_3e^{2a_1z} + f_4e^{2a_2z} \\ &\quad +f_5e^{(a_1+a_2)z} + f_6e^{(2a_1+a_2)z} + f_7e^{(a_1+2a_2)z} \\ &\quad +f_8e^{(2a_0+a_1)z} + f_9e^{(2a_0+a_2)z} + f_{10}e^{(2a_1+a_0)z} \\ &\quad + f_{11}e^{(2a_2+a_0)z} + f_{12}e^{(a_0+a_1+a_2)z} + f_{13}e^{3a_1z} + f_{14}e^{3a_2z} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $f_{13} = A_1^3$, $f_{14} = A_2^3$ ce qui vient du terme $h_{0,0}^3$ dans H_2
Nous pouvons prouver que $\sigma(f_j) < 1$ $(1 \le i \le 12)$. posons

$$\begin{aligned} \Lambda = \{&a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 + a_2,\ 2a_1,\ 2a_2,\ a_1 + a_2,\ 2a_1 + a_2,\ a_1 + 2a_2, \\ &2a_0 + a_1,\ 2a_0 + a_2,\ 2a_1 + a_0,\ 2a_2 + a_0,\ a_1 + a_2,\ 3a_1,\ 3a_2\} \end{aligned}$$

On note que $a_1 \neq a_2$ et le par le Lemme 3.2.3, on a

$$3a_1 \neq a_1 + a_0, a_1 + 2a_0, 2a_1, 2a_1 + a_0, 2a_1 + a_2, 3a_2, a_1 + 2a_2$$

et

$$3a_2 \neq 2a_2,\ 3a_1,\ 2a_1 + a_2,\ a_2 + a_0$$

En utilisant le même raisonement que et en tenant compte des sept cas suivants :
(**1**) si $3a_1 \neq a_2 + a_0,\ a_2 + 2a_0,\ a_1 + a_2,\ 2a_2 + a_0,\ a_0 + a_1 + a_2,\ 2a_2$. Par le Lemme 3.2.1, nous obtenons que $f_{13} \equiv 0$, c'est que $A_1 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**2**) si $3a_1 = a_2 + a_0$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{3a_2\}$. Par conséquent, par lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**3**) si $3a_1 \neq a_2 + 2a_0$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{3a_2\}$. Par conséquent, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**4**) si $3a_1 = a_1 + a_2$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{3a_2\}$. Par conséquent, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**5**) si $3a_1 = 2a_2 + a_0$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{3a_2\}$. Par conséquent, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**6**) si $3a_1 = a_0 + a_1 + a_2$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{3a_2\}$. Par conséquent, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

(**7**) si $3a_1 = 2a_2$, alors nous pouvons conclure que $3a_2 \neq \Lambda - \{a_2\}$. Par conséquent, par le Lemme 3.2.1 nous obtenons $f_{14} \equiv 0$, c'est que $A_2 \equiv 0$. C'est une contradiction.

Par conséquent, on a $H \not\equiv 0$ et $h_2 \not\equiv 0$. $\square$

CONCLUSION

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont soit d'ordre infini, soit d'ordre fini. Cependant le cas où les coefficients de ces équations sont des fonctions méromorphes est un peu difficile à étudie car les solutions ne sont pas toujours des fonctions méromorphes.

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à Xu et Zhang [23] sur la croissance et les points fixes des solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes. Ces résultats ont été récemment généralisés par Habib et Belaïdi [12] .

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of fnite order solutions of* $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$, Hokkaido Math. J. 10 (1981), Special Issue, 1-17.

[2] Z. X. Chen, *the growth of solutions* of $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$, *where the order (Q) = 1*, Sci. China Ser. A (2002), 45-30, 290-300 (in Chinese).

[3] Z.X. Chen, *The fixed points and hyper-order of solutions of second order linear differential equations,* Acta Math. Sci. 20, (2000) 425-432 (in Chinese) .

[4] Z. X. Chen, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Analysis 14, (1999) 425-438.

[5] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and fixed point of solutions of second order differential equation with meromorphic coefficients,* Acta Math . Sin. Engl. Ser. 21(4), (2005) 753-764.

[6] W. J. Chen and J. F. Xu, *Growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations,* Electron. J. Qual.Theory Differ. Equ. 1, (2009) 1-13.

[7] A. El Farissi and B. Belaidi, *On oscillation theorems for differential polynomials,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009(22) , (2009) 1-10.

[8] M. Frei, *Uber die subnormalen losungen der Differentialgleichungen* $W''+e^{-z}W'+$ (konst.) $f=0$, Comment. Math. Helv. 36, (1961) 1-8.

[9] G. Gundersen, *On the question of whether* $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ *can admit a solution* $f\not\equiv 0$ *of finite order,* Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 102, (1986) 9-17.

[10] G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates,* J. Lond. Math. Soc. 73(2), (1988) 88-104.

[11] G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans. Am. Math. Soc. 305(1) , (1988) 415-429.

[12] H. Habib and B. Belaïdi, *Hyper-order and fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Arab J. Math. Sci., 22 (2016), 96-114.

[13] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions,* Clarendon, Oxford (1964) .

[14] W. K. Hayman, *The local growth of power series : asurvey of the Wiman-Valiron method,* Canad. Math. Bull. 17 (1974), no. 3, 317-358.

[15] l. Laine, *Nevanlinna theory and Complex Differential Equations,* de Gruyter, Berlin (1993) .

[16] l. Laine and J. Rieppo, *Differential polynomials generated by linear differential equations,* Complex Var. Theory appl. 49, (2004) 897-911.

[17] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J., 9 (1986), no. 3, 430-439.

[18] M. S. Liu and X. M. Zhang, *Fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. 31, (2006) 191-211.

[19] M. Ozawa, *On a solution of* $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$, Kodai Math. J., 3 (1980), no. 2, 295-309.

[20] F. Peng and Z. X. Chen, *On the growth of solutions of some second-order linear differential equations,* J. Inequal. Appl. 2011 (2011), Article ID 635604.

[21] J. Wang and H. X. Yi, *Fixed points and hyper-order of differential polynomials generated by solutions of differential equation,* Complex Var. Theory Appl. 48, 83-94 (2003)

[22] J. F. Xu and H. X. Yi, *Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations,* J. Korean Math. Soc. 46(4), 747-758 (2009)

[23] J. F. Xu and X. B. Zhang, *Some results of meromorphic solutions of second order linear differential equations,* J. Inequal. Appl., 2013 (2013) no. 304, 1-14.

[24] C. C. Yang and H. X. Yi, *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions,* Kluwer Academic, New York (2003)