Résumé

Dans ce travail, on étudie l'existence des solutions pour un problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires, dans un intervalle fini $]2,3]$ définie comme suit :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right), \text{ pour tout } t \in J := \left[0, T\right], \ 2 < \alpha \leq 3 \\ \\ y\left(0\right) = y_0, \, y^{'}\left(0\right) = y_0^{*}, \, y''\left(T\right) \quad = y_T \end{cases}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et y_0, y_0^{*} et y_T sont des constantes reélles.

Les résultats d'existence et d'unicité sont prouvés en utilisant le théorème du point fixe de Banach, le théorème de Schaefer et le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Puis, on termine par un exemple.

Dédicaces

$\mathcal{J}$e dédie ce travail :

$\mathcal{A}$ mes *chers* parents dont le rêve était toujours de me voir réussir. Qu'ils sachent que leur place dans mon cœur et ma pensée, reste et demeure immense.

$\mathcal{J}$e vous dois ce que je suis aujourd'hui grâce à votre amour, à votre patience et vos innombrables sacrifices.

$\mathcal{A}$ mes frères et ma sœur.

$\mathcal{A}$ toute ma grande famille.

$\mathcal{A}$ mes très chers amis Freha.k et les autres.

En témoignage de l'amitié sincère qui nous a liées et des bons moments passés ensemble. $\mathcal{J}$e vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux et pleine bonnes promesse.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement, mon encadreur, l'enseignante au département de Mathématiques et Informatiques de l'université de Mostaganem, madame S. Belarbi Hamani pour avoir encadré ce mémoire avec ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité et je tiens à présenter toute ma gratitude.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Monsieur B. Belaidi pour l'honneur qu'il m'a fait en président le jury et Monsieur D. Bouagada d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à tous nos enseignants du département de Mathématiques et Informatiques, l'université de Mostaganem qui ont participé à notre formation.

Enfin, j'adresse mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du département de Mathématiques et Informatique de l'université de Mostaganem, et tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin pour réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire : (calcul d'intégrales et dérivation de tout ordre arbitraire réel ou complexe) a vu une grande expension durant les trois dernières décennies. Du fait qu'il a plusieurs applications dans beaucoup de domaines aussi bien des mathématiques, de la physique, que des sciences et de la technologie.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle , l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f.

Cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974.

Ce mémoire est consacré a l'existence des solutions pour les problèmes aux limites consernant les équations différentielles fractionnaires.
L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie de point fixe est au coeur de l'analyse mathématique.
Ce mémoire se compose d'une introduction, deux chapitres et d'une conclusion avec quelques perspectives.

Le chapitre 1 comporte quelques notions des bases ainsi que toutes les notations et définitions qui nous serons utilisé. On se penche dans le première section la base des théorèmes connus du point fixe. Ensuite, nous introduirons le calcul fractionnaire et nous insisterons sur les définitions et les propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

Le chapitre 2 s'étend à l'étude du problèmes aux limites consernant les équations différentielles fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right), \text{ pour tout } t\in J:=\left[0,T\right], \ 2<\alpha\leq 3 \\ \\ y\left(0\right)=y_{0},\, y^{'}\left(0\right)=y_{0}^{*},\, y''\left(T\right) \quad =y_{T} \end{cases}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f:[0,T]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonction continue et y_0, y_0^* et y_T sont des constantes reéles.

Ensuite, on donne trois résultats d'existence : le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach, le deuxiéme est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer et le troisiéme est basé sur le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Enfin, ce mémoire est clôturée par un exemple numérique, conclusion et bibliographie.

Chapitre 1

Prélimilaire

1.1 Analyse fonctionnelle

On introduit dans cette section quelques notions de l'analyse fonctionnelle et nous explicitons quelque théorème du point fixe.

1.1.1 Théorème d'Ascoli-Arzélà

Pour formuler le théorème d'Ascoli-Arzélà, il est indispensable d'introduire les notions suivantes :

Définition 1.1.1

Soit $F \subset C([a,b])$. On dit que F est équicontinue, si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, $\forall f \in F$, $\forall x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ .$$

Remarque 1.1.1 L'équicontinuité est une généralisation de l'uniforme continuité.

Définition 1.1.2 On dit que F un sous-ensemble borné de E si $\exists M > 0$, tel que $\forall x \in F$,

$$\|x\| < M.$$

Définition 1.1.3

On dit que F un sous-ensemble compact de E si, et seulement s'il vérifie de toute suite $(f_n)_{n\leq 1} \subset F$, on peut extraire des sous-suites convergentes (f_{nk}), avec une point limite dans F.

Exemple Les segments de $\mathbb{R}$ sont des compactes.

Remarque 1.1.2 Toute partie fermée d'un espace compacte est compacte.

Définition 1.1.4 On dit qu'un sous espace F d'un espace topologique est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Théoréme d'Ascoli-Arzélà

Soient E et F deux espaces de Banach. Si E est compact, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) L'ensemble H est relativement compact dans $C(E, F)$.

2) $\begin{cases} i)\text{L'ensemble } H \text{ est équicontinue en tout point } x \text{ de } E \\ ii)\ H(x) = \{f(x),\ f \in H\} \text{ est borné.} \end{cases}$

1.1.2 Quelque théorème du Point Fixe

On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schaefer qui assure l'existence seulement. Enfin, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 1.1.5

Soit f une application d'un ensemble E dans lui même, on appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Définition 1.1.6(Suite de Cauchy)

Soit $(x_n)_n$ une suite d'élements d'un espace normé $(E, \|.\|)$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p; q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0), (q \geq n_0) \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.7(Espace complet)

Un espace véctoriel normé $(E, \ \|.\|)$ est dit complet si tout suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'élements de E est une suite convergente dans E.

Définition 1.1.8(Espace de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace véctoriel normé complet.

Définition 1.1.9 Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$, et $f : X \to X$. On dit que f est Lipshizienne s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,,\ \forall x,\ y \in X.$$

Définition 1.1.10 Soit $f : E \to F$ un opérateur. On dit que f est contractante si $\exists k$, $0 < k < 1$, telle que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\,\|x - y\|_E\,,\ \text{pour tout } x,\ y \in E.$$

Définition 1.1.11 L'opérateur T est dite complétement continue, si elle est continue et compacte.

Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante.

Théorème 1.1.1(Banach)

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : A \subset E \to A$ (telle que : A est un fermé de E) est une application contractante. Alors f admet un point fixe unique c'est à dire :

$$\exists! a_0 \in A : f(a_0) = a_0.$$

Théorème 1.1.2(Schaefer)

Soient A un espace de Banach et $F : A \to A$ une application continue et compact sur A. Si l'ensenble

$$B = \{a \in A;\ a = \lambda F,\ 0 < \lambda < 1\}$$

est bornée, alors l'application F admet au moins un point fixe.

Théorème1.1.3(**L'alternative non linéaire de Leray-Schauder**)

Soient A un espace de Banach et F un sous-ensemble convexe non vide de A. Soient E un sous-ensemble ouvert non vide de F avec $0 \in E$ et $T : \overline{E} \to F$ un opérateur continue et compact. Alors

1) T admet des points fixes. Ou bien

2) Il existe $u \in \partial E$ et $\lambda \in [0, 1]$ avec $u = \lambda T(u)$.

1.2 Le calcul fractionnaire

Dans cette section. On introduit des fonctions qui seront utilisées dans les autres chapitres telles que la fonction Delta, Gamma et Beta. Ces deux dernières fonctions sont des fonctions spéciales dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté en certains points).

Définition 1.2.1 Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction Gamma, notée par Γ :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$$

cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.2.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

et si $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (généralise la factorielle).

Preuve. La preuve de la premiére formule est immédiate à l'aide d'une intégration par partie :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

et la seconde se traite par récurrence . □

Remarque 1.2.1

i) Puisque $\Gamma(1) = 0! = 1$, et car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, nons obtenons pour $z = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2! \\ &. \\ &. \\ &. \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \end{aligned}$$

ii) $\Gamma(0_+) = +\infty$.

Propriétés

Pour tout $z \in \mathbb{R} \diagdown \{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

i) On peut représenter $\Gamma(z)$ par la limite,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!n^z}{(z+1)...(z+n)}, \ \text{Re}(z) > 0.$$

ii) Pour $Re(z) > 0$,

$$\Gamma(z+n) = z(z+n)...(z+n-1)\Gamma(z).$$

iii) On peut représenter aussi $\Gamma(z)$ comme suit :

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1).$$

1.2.2 Fonction Beta

Définition 1.2.2

La fonction Beta est définie par

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \ , \ (\text{Re}(z) > 0, \ \text{Re}(w) > 0) \, .$$

Cette fonction est reliée aux fonctions gamma par la relation suivante

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \textbf{,} \ \forall z, w : Re(z) > 0, Re(w) > 0.$$

Remarque 1.2.2

La fonction Bêta est symétrique i.e $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

1.2.3 Fonction Delta

Définition 1.2.3

La fonction Delta est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0).$$

Preuve. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui n'est pas infinie en 0 et qu'on supposera dans un premier temps intégrable sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la quantité

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\, dx,$$

Pour approcher cette intégrale, nous allons utiliser la fonction g_ε dont δ [1] est la limite quand $\varepsilon \to 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x)\, dx$$

et l'on permute limite et intégrale

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_\varepsilon(x)\, dx$$

et comme la fonction $g_\varepsilon(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, le domaine d'intégration se réduit à cet intervalle. Il vient :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \frac{1}{\varepsilon} dx$$

[1] En physique δ n'existe pas on aura plutôt affaire à des fonctions très localisées, et d'amplitude très élevée mais finie de type g_ε: le produit $0.g_\varepsilon(x)=0$ ne pose pas de problème et on adoptera le passage à la limite : $0.\delta(x)=0$.

et le changement de variable $x = \varepsilon y$ permet d'écrire

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(\varepsilon y) dx$$

et par passage à la limite

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(0) dy = f(0).$$

D'où l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0).$$

$\square$

Remarque 1.2.3

La fonction δ est paire, c'est à dire $\delta(-x) = \delta(x)$.

1.2.4 Intégrale fractionnaire de Riemann Liouville

Notre but dans cette partie est d'introduire la définition d'une intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et ces propriétés les plus courantes.

Définition 1.2.4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L) d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \; pour (-\infty \leq a < t < \infty).$$

$\cdot$ Si $a = 0$, on ecrit :

$$I^\alpha f(t) = f(t) * \varphi_a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

telle que

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

et $\varphi_a \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$.

Propriétés

1) Pour $\alpha = 0$, on a :

$$I_a^0 := I \text{ (l'opérateur identité).}$$

2) Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

3) Si $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$, alors $I_a^\alpha f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a :

$$I_a^\alpha f \in L^1[a,b].$$

4) Soit $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t).$$

Exemple

Posons $f(x) = (x-a)^\gamma$ avec $\gamma > -1$, alors

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma}$$

En effet,

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\gamma dt$$

En effectuant le changement de variable :

$$t = a + s(x-a), \ (0 \leq s \leq 1)$$

et en utilisant la fonction Béta il en résulte :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{\alpha-1} s^\gamma (x-a)^{\gamma+1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \int_0^1 s^\gamma (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \beta(\alpha, \ \gamma+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}
\end{aligned}$$

Et donc

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}(x-a)^{\alpha+\gamma}$$

dans le cas où $a = 0$, on a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma}.$$

1.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement, elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

1.3.1 Opérateur de dérivée n^{éme}

Définition 1.3.1

L'opérateur de la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n;

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

où $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$.

Propréties

$$\begin{aligned} D^n I^n f &= f;\ I^n D^n f \neq f,\ f \in C^n(\mathbb{R}_+). \\ I^n D^n f &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}, t > 0. \end{aligned}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, tel que $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} D_{R.L}^\alpha f(t) &= D^1 I_a^{1-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds. \end{aligned}$$

Définition 1.3.3

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{R.L}\ f(t) &= D^n\ I_a^{n-\alpha}\ f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\ f(s)\ ds \end{aligned}$$

où $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$.

Remarque 1.3.1

i) Pour $\alpha = 0$, on a :

$$D^0_{R.L}\ f(t) = D\ I_a^1\ f(t) = I\ f(t).$$

ii) Pour $\alpha = m \in N$, on a :

$$D^m_{R.L}\ f(t) = D^{m+1}\ I_a^{m+1-m}\ f(t) = D^{m+1}\ I_a^1\ f(t) = D^m f(t)$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de R-L coincide avec la dérivée usuelle.

iii) Pour $1 < \alpha < 2$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{R.L}\ f(t) &= D^2\ I_a^{2-\alpha}\ f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha}\ f(s)\ ds, \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

Exemple

La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville.
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha \geq 0$, alors on a :

$$D^p_{R.L}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} D^{p}_{R.L}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\ &= \frac{\beta(n-p,\ \alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-a)^{\alpha-p}\frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)}{\Gamma(n+\alpha-p-n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\,\Gamma(n-p)\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\,\Gamma(\alpha-p+1)\,\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

A titre exemple

$$D^{0.5}_{R.L}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Proposition1.3.1

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$D^{\alpha}_{R.L}\ f(t) = D^m\ I_a^{m-\alpha}\ f(t),\ \ m > \alpha.$$

Lemme 1.3.1

Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors l'égalité :

$$D^{\alpha}_{R.L}I^{\alpha}_a f(t) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $x \in [a,b]$.

Preuve. En utilisant la définition 1.3.3, on a

$$D^{\alpha}_{R.L}I^{\alpha}_a f(t) = D^{n}_{R.L}I^{n-\alpha}_a I^{\alpha}_a f(t) = D^n I^n_a f(t) = f(t).$$

□

Théorème 1.3.1

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ tel que $(n; m \in \mathbb{N}^*)$ alors :

1) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a,b]$ l'égalité :

$$D^{\beta}_{R.L}(I^{\alpha}_a f)(t) = I^{\alpha-\beta}_a f(t)$$

est presque par tout sur $[a,b]$.

2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a,b]$ tel que $f = I_a^\alpha \varphi$ alors :

$$I_a^\alpha D_{R.L}^\alpha f\left(t\right) = f\left(t\right)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

3) Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_{R.L}^\alpha f$ et $D_{R.L}^{k+\alpha} f$ existes, alors :

$$D^k\left(D_{R.L}^\alpha f\left(t\right)\right) = D_{R.L}^{k+\alpha} f\left(t\right).$$

4) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_{R.L}^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_{R.L}^\beta\left(I_a^\alpha f\right)(t) = D_{R.L}^{\beta-\alpha} f\left(t\right).$$

Propriétés

Soit α, β deux paramétres réels et f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

1) $D^\alpha I^\alpha f\left(t\right) = f\left(t\right),\ \alpha > 0.$

2) $D^\beta I^\alpha f\left(t\right) = D^{\beta-\alpha} f\left(t\right),\ \beta < 0,\ \alpha > 0.$

3) $D^n I^\alpha f\left(t\right) = D^{n+\alpha} f\left(t\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.

4) $I^\alpha D^\alpha f\left(t\right) \neq f\left(t\right).$

5) $D^\alpha D^\beta f\left(t\right) \neq D^\beta D^\alpha f\left(t\right).$

6) $D^\beta D^\alpha f\left(t\right) \neq D^{\alpha+\beta} f\left(t\right).$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

On donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 1.3.4

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par :

$$^cD_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} D^n f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_a^t \left(t-s\right)^{n-\alpha-1}\ f^{(n)}(s)\ ds$$

avec $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas particuliers

1) $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} ^cD_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \int_a^t \left(t-s\right)^{-\alpha}\ \frac{d}{dt} f(s)\ ds \\ &= I_a^{1-\alpha} D^1 f(t). \end{aligned}$$

2) $1 < \alpha < 2$:

$$\begin{aligned} ^cD_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)} \int_a^t \left(t-s\right)^{1-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} f(s)\ ds \\ &= I_a^{2-\alpha} D^2 f(t). \end{aligned}$$

Exemple

Soit $f(t) = (x-a)^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$, pour $0 < \alpha \leq 1$ et utilisant le changement de variable $t - a = s(x-a)$, $0 \leq s \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) &= I_{a}^{1-\alpha}f'(x) = \gamma I_{a}^{1-\alpha}(x-a)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\gamma-1}dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}\int_{0}^{1}s^{\gamma-1}(1-s)^{-\alpha}ds \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}\beta(\gamma,1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1

Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f$ et $D_{a}^{\alpha}f$ existent, on suppose que $D^{k}f(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, alors :

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t) = D_{a}^{\alpha}f(t).$$

Théorème 1.3.2

Si $f \in C[a,b]$ et si $\alpha > 0$ $(n-1 < \alpha \leq n)$, alors :

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f(t) = f(t).$$

Propriétés

i) ${}^{c}D_{a}^{\alpha}c = 0$, c est une constante.

ii) ${}^{c}D_{a}^{\alpha}t^{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)}t^{\beta+\alpha}, & \beta > \alpha - 1 \\ 0, & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases}$

1.3.4 Lien entre Riemann-Liouville et Caputo

Théorème 1.3.3

Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, $(n \in N^{*})$, supposons que f est une fonction telle que ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)$ et $D_{RL}^{\alpha}f(t)$ existent alors

$$^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)=D_{RL}^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)\left(t-a\right)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}.$$

Remarque1.3.2 On déduit que si $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,2,...,n-1$, on aura

$$^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)=D_{RL}^{\alpha}f(t).$$

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

preuve

Il suffit de démontrer que $D_{RL}^{\alpha}f(t)={}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(0\right)t^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}$ par une integration par partie, on a :

$$\begin{aligned}
D_{RL}^{\alpha}f(t) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}\ f(s)\ ds\right) \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(\frac{\left(t-s\right)^{n-\alpha}}{n-\alpha}f(0)+\frac{\left(t-s\right)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha}f^{(1)}(0)+...+\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha+n-1}\ f^{(n)}\ (s)ds\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(0\right)t^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}+\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha+n-1}\ f^{(n)}(s)\ ds\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(0\right)t^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}\ f^{(n)}(s)\ ds \\
&= {}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(0\right)t^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Existence des solutions

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problèmes aux limites concernant des équations différentielles fractionnaires .

Définition et Notations

Soit $J := [0\ ,\ T]$.
Soit $C\left(J\ ,\ \mathbb{R}\right)$ est l'espace de Banach des fonctions y définies de J dans $\mathbb{R}$ continues muni de la norme :

$$\left\|y\right\|_{\infty} = \left\{\left|y\left(t\right)\right| : 0 \leq t \leq T\right\}.$$

Soit $L^{1}\left(J, \mathbb{R}\right)$ est l'espace de Banach des fonctions y définies de J dans $\mathbb{R}$ intégrables par rapport à la mesure de lebesgue muni de la norme :

$$\left\|y\right\|_{L^{1}} = \int_{0}^{T} \left|y\left(t\right)\right| dt.$$

2.1 Problème aux limites avec des conditions réelles

Introduction

Soit α un réel positif vérifiant $2 < \alpha \leq 3$.
On considére le problème aux limite fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)),\ t \in J = [0, T] \\ u(0) = u_{0},\ u^{'}(0) = u_{0}^{*},\ u^{''}(T) = u_{T} \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, u_{0}, u_{0}^{*} et u_{T} sont des constantes réelles.

Définition 2.1.1

La fonction $u \in C^2([0,T],\mathbb{R})$ est dite solution de (2.1) si u satisfaite les équations ${}^cD^\alpha u(t) = f(t,u(t))$ sur J, et les conditions $u(0) = u_0$, $u^{'}(0) = u_0^*$ et $u^{''}(T) = u_T$.
Pour l'existence de la solution du probléme (2.1), nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.1.1 [9]

Pour $\alpha > 0$ et $g(t) \in C[0,T]$, l'équation différentielle fractionnaire homogène suivant :

$$^cD^\alpha g(t) = 0$$

possède une solution :

$$g(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + ... + c_nt^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,...,n$ et $n = [\alpha]+1$, ($[\alpha]$ est la partie entière de α).

Lemme 2.1.2 [9]

Pour $\alpha > 0$, on a :

$$I^{\alpha c}D^\alpha g(t) = g(t) + c_1 + c_2t + c_3t^2 + ... + c_nt^{n-1}$$

où $n = [\alpha]+1$, ($[\alpha]$ est la partie entière de α).

Commençant d'abord par la résolution du problème auxiliaire.

Lemme 2.1.3 [9]

Soient $2 < \alpha \leq 3$, et $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue. La fonction u est solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}g(s)ds + u_0 + u_0^*t + \frac{u_T}{2}t^2$$

si et seulement si u est solution du probléme aux limite fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = g(t),\ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0,\ u^{'}(0) = u_0^*,\ u^{''}(T) = u_T. \end{cases}$$

Preuve Soit $2 < \alpha \leq 3$, et soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Appliquant le lemme 2.1.1, on trouve

$$u(t) = I_a^{\alpha} g(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \tag{2.2}$$

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds$$

on calcul c_0, c_1 et c_2 :

$$\begin{aligned} u(0) &= c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\ u(0) &= c_0 \end{aligned}$$

et on a $u(0) = u_0$, par identification, on obtient :

$$c_0 = u_0$$

et par une dérivation des deux membres, on trouve

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1 + 2c_2 t + \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} g(s) ds \\ &= c_1 + 2c_2 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} g(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''(t) &= 2c_2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} g(s) ds \\ &= 2c_2 + \frac{(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} g(s) ds \\ &= 2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} g(s) ds. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} u'(0) &= c_1 + 2c_2 0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-2} g(s) ds \\ u'(0) &= c_1 \end{aligned}$$

et on a $u'(0) = u_0^*$, par identification, on obtient :

$$c_1 = u_0^*$$

par suite

$$u''(T) = 2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s) ds$$

et on a $u''(T) = u_T$, par identification, on obtient :

$$2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s)ds = u_T$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}u_T - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s)ds.$$

Substituant c_1, c_2 et c_3 dans (2), on obtient

$$u(t) = I_a^\alpha g(t) + u_0 + u_0^* t + \left[\frac{1}{2}u_T - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s)ds\right] t^2$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds + u_0 + u_0^* t + \left[\frac{1}{2}u_T - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s)ds\right] t^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s)ds + u_0 + u_0^* t + \frac{u_T}{2} t^2. \end{aligned}$$

2.2 Le premier résultat

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.2.1

On suppose que :
(H_1) : Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t,x) - f(t,\overline{x})| \leq k\,|x - \overline{x}|\,, \text{ pour tout } t \in J \text{ et } x,\ \overline{x} \in \mathbb{R}\ .$$

Si

$$kT^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right] < 1, \tag{2.3}$$

alors le problème aux limites (2.1) admet une solution unique dans J.

Preuve

On transforme le problème (2.1) au un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C(J,\ \mathbb{R}) \to C(J,\ \mathbb{R})$$

définie par :

$$\begin{aligned} F(u)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ u(s))ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,\ u(s))ds \\ &\quad + u_0 + u_0^* t + \frac{u_T}{2} t^2. \end{aligned}$$

clairement, les points fixes de l'opérateur F sont solutions du probléme (2.1). On utilise la théorème de Bannach pour montrer que F admet un point fixe unique.
Soient $u,\, v \in C\left(J,\ \mathbb{R}\right)$. Alors, pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|F\left(u\right)\left(t\right)-F\left(v\right)\left(t\right)\right| &= \Bigg|\Bigg[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,\ u\left(s\right))ds \\
&\quad -\frac{t^2}{2\Gamma\left(\alpha-2\right)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}f(s,u\left(s\right))ds+u_0+u_0^*t+\frac{u_T}{2}t^2\Bigg] \\
&\quad -\Bigg[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,\ v\left(s\right))ds \\
&\quad -\frac{t^2}{2\Gamma\left(\alpha-2\right)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}f(s,\ v\left(s\right))ds+u_0+u_0^*t+\frac{u_T}{2}t^2\Bigg]\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,\ u\left(s\right))-f(s,\ v\left(s\right))\right|ds \\
&\quad +\frac{t^2}{2\Gamma\left(\alpha-2\right)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\left|f(s,u\left(s\right))-f(s,v\left(s\right))\right|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}\left|u\left(s\right)-v\left(s\right)\right|ds \\
&\quad +\frac{t^2k}{2\Gamma\left(\alpha-2\right)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\sup_{s\in[0,T]}\left|u\left(s\right)-v\left(s\right)\right|ds \\
&\leq \frac{k\left\|u-v\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad +\frac{t^2k\left\|u-v\right\|_\infty}{2\Gamma\left(\alpha-2\right)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}ds \\
&= \frac{k\left\|u-v\right\|_\infty t^\alpha}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}+\frac{t^2k\left\|u-v\right\|_\infty T^{\alpha-2}}{2\left(\alpha-2\right)\Gamma\left(\alpha-2\right)} \\
&= \frac{k\left\|u-v\right\|_\infty t^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{t^2k\left\|u-v\right\|_\infty T^{\alpha-2}}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)} \\
&\leq \frac{k\left\|u-v\right\|_\infty T^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{T^2k\left\|u-v\right\|_\infty T^{\alpha-2}}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)} \\
&= kT^\alpha\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)}\right]\left\|u-v\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\|F\left(u\right)-F\left(v\right)\right\|_\infty \leq kT^\alpha\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)}\right]\left\|u-v\right\|_\infty.$$

D'aprés (2.3), F est une contraction et d'aprés la consequence du théorème du point fixe de Banach, F admet un seul point fixe qui la solution unique du problème (2.1).

2.3 Le deuxiéme résultat

Le deuxiéme résultat est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 2.3.1

On suppose que :
(H_2) $f : [0,\ T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
(H_3) Il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t,x)| \leq M \,;\text{ pour tout } t \in [0,\ T]\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

donc le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution sur $[0,\ T]$.

Preuve

On utilise le théorème du point fixe de Schaefer pour démontre que F définie dans le premier résultat admet un point fixe.
Il faut passer par 4 étapes :

Étape 1 F est continue.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $u_n \to u$ dans $C([0,T],\mathbb{R})$.
Alors, $\forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(u_n)(t) - F(u)(t)| &= \Bigg|\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ u_n(s))ds \\
&\quad -\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,u_n(s))ds + u_0 + u_0^* t + \frac{u_T}{2}t^2\Bigg] \\
&\quad -\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ u(s))ds \\
&\quad -\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,\ u(s))ds + u_0 + u_0^* t + \frac{u_T}{2}t^2\Bigg]\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,\ u_n(s)) - f(s,\ u(s))\right| ds \\
&\quad +\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\left|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,\ T]}\left|f(s,\ u_n(s)) - f(s,\ u(s))\right| ds \\
&\quad +\frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\sup_{s\in[0,\ T]}\left|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\right| ds.
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors on a :

$$\|F(u_n) - F(u)\|_\infty \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Étape 2 F transforme un ensenble borné en un ensenble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$.
En effet, Pour montrer que $\forall \eta^* > 0, \exists l > 0$ telle que $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|u\|_\infty < \eta^*\}$, il suffit de montrer que $\|F(u)\|_\infty \leq l$, par (H_3) on a $\forall t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned}
|F(u)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\ u(s)) ds \\
&\quad - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,\ u(s)) ds + u_0 + u_0^* t + \frac{u_T}{2} t^2 \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,\ u(s))| ds \\
&\quad + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} |f(s,\ u(s))| ds + |u_0| + |u_0^*| t + \frac{|u_T|}{2} t^2 \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{t^2 M}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} ds + |u_0| + |u_0^*| t + \frac{|u_T|}{2} t^2 \\
&= \frac{t^\alpha M}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{t^2 M T^{\alpha-2}}{2(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)} + |u_0| + |u_0^*| t + \frac{|u_T|}{2} t^2 \\
&\leq \frac{M T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{T^2 M T^{\alpha-2}}{2(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)} + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2 \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha-1)} T^\alpha + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2.
\end{aligned}$$

De cette façon

$$\|F(u)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha-1)} T^\alpha + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2 := l.$$

Étape 3 F transforme un ensenble borné en un ensenble équicontinue dans $C([0,T],\mathbb{R})$.
Soient $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} est un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ comme dans étape 2, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(u)(t_2)-F(u)(t_1)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds-\frac{t_2^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-3}f(s,\ u(s))ds\right.\\
&\quad +u_0+u_0^*t_2+\frac{u_T}{2}t_2^2-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds\\
&\quad \left.+\frac{t_1^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-3}f(s,\ u(s))ds-u_0-u_0^*t_1-\frac{u_T}{2}t_1^2\right|\\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]f(s,\ u(s))ds\right.\\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds+\frac{(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-3}f(s,\ u(s))ds\\
&\quad \left.+u_0^*(t_2-t_1)+\frac{u_T}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]|f(s,u(s))|\,ds\\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|\,ds\\
&\quad +\frac{(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-3}|f(s,u(s))|\,ds+|u_0^*|(t_2-t_1)+\frac{|u_T|}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]ds+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&\quad +\frac{M(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-3}ds+|u_0^*|(t_1-t_2)+\frac{|u_T|}{2}\left(t_1^2-t_2^2\right)\\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\alpha}+\frac{(t_2)^\alpha}{\alpha}-\frac{(t_1)^\alpha}{\alpha}\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\alpha}\right]\\
&\quad +\frac{M(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-2)}\left[\frac{T^{\alpha-2}}{\alpha-2}\right]+|u_0^*|(t_2-t_1)+\frac{|u_T|}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)\\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[-(t_2-t_1)^\alpha+t_2^\alpha-t_1^\alpha\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\
&\quad +\frac{M(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-1)}T^{\alpha-2}+|u_0^*|(t_2-t_1)+\frac{|u_T|}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)\\
&= \frac{M(t_2^\alpha-t_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{M(t_1^2-t_2^2)}{2\Gamma(\alpha-1)}T^{\alpha-2}+|u_0^*|(t_2-t_1)+\frac{|u_T|}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le second membre de cette dernière inégalit tend vers zéro, ainsi les étapes 1 à 3 et d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzélà, d'où $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est complètement continue.

Étape 4 Les limites à priori.
Maintenant, il reste montrer que l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in C([0,T],\mathbb{R}) : u = \lambda F(u),\ 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.
Soit $u \in \varepsilon$, et $u = F(u)$ telle que $0 < \lambda < 1$. Alors pour chaque $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda F(u)(t) \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds - \frac{\lambda t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,u(s))ds \\ &\quad + \lambda u_0 + \lambda u_0^* t + \lambda \frac{u_T}{2} t^2. \end{aligned}$$

Cela implique par (H_3) que pour chaque $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds - \frac{\lambda t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,u(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda u_0 + \lambda u_0^* t + \lambda \frac{u_T}{2} t^2 \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| ds + \frac{\lambda t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} |f(s,u(s))| ds \\ &\quad + \lambda |u_0| + \lambda |u_0^*| t + \lambda \frac{|u_T|}{2} t^2 \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{Mt^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} ds + |u_0| + |u_0^*| t + \frac{|u_T|}{2} t^2 \\ &= \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} t^\alpha + \frac{Mt^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \frac{T^{\alpha-2}}{(\alpha-2)} + |u_0| + |u_0^*| t + \frac{|u_T|}{2} t^2 \\ &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{MT^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \frac{T^{\alpha-2}}{(\alpha-2)} + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2 \\ &= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M}{2\Gamma(\alpha-1)} T^\alpha + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M}{2\Gamma(\alpha-1)} T^\alpha + |u_0| + |u_0^*| T + \frac{|u_T|}{2} T^2 := R.$$

Cela montre que l'ensemble ε est borné. D'aprés le théorème du point fixe de Scheafer, nous déduisons que F a un point fixe qui est une solution du problème (2.1) .

2.4 Le troisiéme résultat

Dans le théorème suivant nous allons donner un résultat d'existence pour le problème (2.1) on va appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, où la condition $(H3)$ est affaiblie.

Théorème 2.4.1

Supposons que $(H2)$ et les conditions suivantes sont satisfaites.
$(H4)$ Il existe $\phi_f \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et continue et croissante $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ de telle sorte que

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\, \psi(|u|) \text{ pour tout } (t, u) \in J \times \mathbb{R}.$$

$(H5)$ Il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$\frac{M}{\left\| I^{\alpha}\phi_f \right\|_{L^1} \psi(M) + \frac{T^2}{2}\left(I^{\alpha-2}\phi_f\right)(T)\, \psi(M) + |u_0| + |u_0^*|\, T + \frac{|u_T|}{2} T^2} > 1. \tag{2.4}$$

Alors, le probléme aux limites (2.1) admet au moins une solution sur J.

Preuve

Considérons l'opérateur F défini dans les théorèmes 2.2.1 et 2.3.1. Il est facile de montrer que F est continue et complètement continue, pour $\lambda \in [0,1]$ et pour chaque $t \in J$ on a $u(t) = \lambda(Fu)(t)$, par $(H4)$ $(H5)$ et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|u(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi_f(s)\, \psi(|u(s)|)\, ds \\
& + \frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \phi_f(s)\, \psi(|u(s)|)\, ds \\
& + |u_0| + |u_0^*|\, T + \frac{|u_T|}{2} T^2 \\
\leq\ & \psi(\|u\|_\infty) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi_f(s)\, ds \\
& + \psi(\|u\|_\infty) \frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \phi_f(s)\, ds \\
& + |u_0| + |u_0^*|\, T + \frac{|u_T|}{2} T^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\|u\|_\infty}{\psi(\|u\|_\infty) \left\| I^{\alpha}\phi_f \right\|_{L^1} + \frac{T^2}{2}\left(I^{\alpha-2}\phi_f\right)(T)\, \psi(\|u\|_\infty) + |u_0| + |u_0^*|\, T + \frac{|u_T|}{2} T^2} \leq 1.$$

Puis, par la condition (2.4), il existe M tel que $\|u\|_\infty \neq M$.
Soit

$$V = \left\{ u \in C(J, \mathbb{R}) :\ \|u\|_\infty < M \right\}.$$

L'opérateur $F : \overline{V} \to C(J, R)$ est continue et complètement continue. Par le choix de V, il n' existe pas $u \in \partial V$ tel que $u = \lambda F(u)$ pour certains $\lambda \in (0, 1)$.

D'apres l'alternative non linéaire de type de Leray-Schauder, on déduit que F a un point fixe u en $\overline{V}$, qui est une solution du problème (2.1), D'où le résultat.

Dans cette section, on va donner un exemple dont on utilise les résultats précédents.

2.5 Exemple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = \dfrac{e^{-t}\left|u\left(t\right)\right|}{\left(9+e^t\right)\left(1+\left|u\left(t\right)\right|\right)}, \ t \in J := \left[0,1\right], \ 2 < \alpha \leq 3 \\ u\left(0\right) = 0, \qquad u'\left(0\right) = 1, \qquad u''\left(1\right) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

la fonction

$$f\left(t,v\right) = \frac{e^{-t}v}{\left(9+e^t\right)\left(1+v\right)}, \ \ (t,v) \in J \times [0,\infty).$$

Soit u, $v \in [0,\infty)$ et $t \in J$. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} \left|f\left(t,u\right) - f\left(t,v\right)\right| &= \frac{e^{-t}}{\left(9+e^t\right)}\left|\frac{u}{1+u} - \frac{v}{1+v}\right| \\ &= \frac{e^{-t}\left|u-v\right|}{\left(9+e^t\right)\left(1+u\right)\left(1+v\right)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{\left(9+e^t\right)}\left|u-v\right| \\ &\leq \frac{1}{10}\left|u-v\right|. \end{aligned}$$

D'où la condition $(H1)$ vérifie est avec $k = \dfrac{1}{10}$. Nous allons vérifier que la condition (2.3) est satisfait avec $T = 1$. En effet,

$$kT^\alpha\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + \frac{1}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)}\right] < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + \frac{1}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)} < 10. \tag{2.6}$$

Nous avons

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} < \frac{1}{2},$$

et

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\Gamma\left(\alpha-1\right)} < c \tag{2.7}$$

pour une constante c choisi de manière appropriée, qui seront préciasées. (2.6) (2.7) impliquent que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}<\frac{1}{2}+c<10 \tag{2.8}$$

donc à partir de (2.8) la constante c positive doit satisfaire

$$c\leq\frac{19}{2}.$$

De (2.7) nous obtenons

$$\Gamma(\alpha-1)>\frac{1}{19}\simeq 0.0526, \tag{2.9}$$

qui est satisfaite pour un certain $\alpha\in$ de $(2,3]$. Ensuite, par le théorème 2.2.1 le problème (2.5) admet une solution unique sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (2.9).

Conclusion

Ce mémoire présente l'étude de l'existence des solutions pour les problèmes aux limites conservant les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo.

Les résultats d'existence et de l'unicité sont prouvées en utilisant le théorème du point fixe de Banach, le théorème de Scheafer et le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Dans le futur, on peut faire l'étude de l'existence des solutions des mêmes problémes avec la dérivée de Riemann-Liouville et les problèmes concernant les inclusions différentielles fractionaires.

Bibliographie

[1] R. Agarwal, M. Benchohra, and S. Hamani, Bondary Value Problems Fractional Differntial Equations, Georgain Mathematical Journal, Volume 16 (2009) , Number 3, $401-411$.

[2] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surveys in Mathematics and its Applications, 3(2008).

[3] M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Analysis, V(71), (2009)$2391-2396$.

[4] D. Delbosco and Rodine, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 204(1996), No. 2, $609-625$.

[5] A. A. Kilabs and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations With the caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. (Russian) Differ. Uravn. 41 (2005) , No. 1, 82-86, 142, English transl. : Differ. Equ. 41 (2005), No. 1, $84-89$.

[6] Lalmi Abdellatif, Existence et unicit e de solution d'un equation differentielle fractionnaire du type volt erra avec retard. mémoire de fin d'étude (2010) , University de New South Wales.

[7] I. Podlubny, Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[8] M.SabahYessaad, Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire 2012,Universite Badji Mokhtar Annaba.

[9] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations. Electron. J. Differential Equations 2006, No. 36, 12 pp.