UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES_INFORMATIQUE

Mémoire de Master
En Mathématique
Analyse fonctionnelle

Thème

Etude d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites de Robin à coefficient opérateur dans les espaces L_P et applications

Présenté par

DJILALI Bakhta

SALAH Meriem

Soutenu le ../05/2016.

Devant le jury

Président		**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur		**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	M.Ahmed Medeghri	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Resumé

Dans ce mémoire on fait la synthèse de l'article de M.Cheggag , A.Favini , R.Labbas , S.Maingot , A.Medeghri."Elliptic problems with Robin boundary coefficient-operator conditions in general L^p sobolev spaces and applications".(Bulletin SUSU MMCS),2015,VOL.8,NO.3,PP.56-77. DIO : 10.14529 / mmp150304.

On étudie une équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x)$$

avec des conditions aux limites de Robin à coefficient opérateur dans les espaces $L^p(0,1;X)$, X Banach

$$u'(0) - Hu(0) = d_0 \ , u(1) = u_1$$

pour obtenir une solution vérifiant l'existence, l'unicité et la régularité maximale, c'est à dire une fonction u telle que :

$$\begin{cases} i)u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ ii)u(0) \in D(H). \\ iii)u \text{ vérifie } (1). \end{cases}$$

Remerciements

Louange à Allah, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être. Nous remercions le bon Dieu qui nous a orienté au chemin du savoir et aux portes de la science.

Nous tenons à s'exprimer notre profond respect et reconnaissance à la directeur de notre mémoire, Professeur monsieur Ahmed Medeghri, qui nous a proposé ce sujet et qui nous a conseillé et encouragé durant la rédaction de ce mémoire.

Nous remercions tous les enseignants du Département de Mathématiques sans oublier le chef de Département de Mathématique monsieur Bel-hamiti.

Merci aussi à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mon Dieu à qui j'adresse mes remerciements par sa grâce infinie pour moi.

A ma très chère grande mère et mon très cher grand père.

A mes parents, Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mon très cher oncle Miloud, Vous avez toujours été présents pour les bons conseils. Votre affection et votre soutien m'ont été d'un grand secours au long de ma vie professionnelle et personnelle.

A mon très cher frère Ibrahim, Je te souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité.

A ma très chère sœur Nadjia, son marie Abdallah et leurs enfants (Rayan et Alae).

A mes sœurs Hayat, Omhani, Samia, Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A ma très chère amie Meriem, Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mes chères amies : Denia, hanan, Fatima, Hayat et Souad.

A tous les membres de ma famille, petits et grands. Veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

Bakhta

Je dédie ce mémoire

A mes parents, particulièrement ma très chère maman

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

A mes sœurs : Sarah et Hadjer, En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous.

A mon très cher oncle Mohamed et sa famille, Je t'exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour.

A tous ma famille Que ce travail soit un témoignage de ma gratitude et mon profond respect.

A ma tante Amina et sa famille particulièrement Karima.

A ma très chère amie Bakhta, présent dans tous mes moments d'examens par sa soutien moral et ses belles surprises sucrées.

A mes chères amies : Denia, Fatima.

Meriem

Introduction

Dans ce mémoire on fait la synthèse de l'article de M.Cheggag , A.Favini , R.Labbas , S.Maingot , A.Medeghri."Elliptic problems with Robin boundary coefficient-operator conditions in general L^p sobolev spaces and applications".(Bulletin SUSU MMCS),2015,VOL.8,NO.3,PP.56-77. DIO : 10.14529 / mmp150304.

On étudie une équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \tag{1}$$

avec des conditions aux limites de Robin à coefficient opérateur dans les espaces $L^p(0,1;X)$, X Banach

$$u'(0) - Hu(0) = d_0 \ , u(1) = u_1$$

pour obtenir une solution vérifiant l'existence, l'unicité et la régularité maximale, c'est à dire une fonction u telle que :

$$\begin{cases} i) u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L_p(0,1;D(A)), u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ ii) u(0) \in D(H). \\ iii) u \text{ vérifie } (1). \end{cases} \tag{2}$$

Dans une première étape on étudie le problème :

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \ , u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3}$$

Où L et M sont deux opérateurs linéaires fermés et :

$$L - M \subset 2B \ et \ LM \subset -A \tag{4}$$

Définition 0.1 *Soit P et Q deux opérateurs linéaires dans X, on dit que $P \subset Q$ si :*
$$\begin{cases} i) D(P) \subset D(Q) \\ ii) \forall \varphi \in D(P) \ ona : P\varphi = Q\varphi \end{cases}$$

Une solution classique de (3) est définie par :

$$\begin{cases} i) u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(LM)), u' \in L^p(0,1;D(L-M)). \\ ii) u(0) \in D(H). \\ iii) u \text{ vérifie } (3). \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 0.1 *A partir de* (4)*, une solution classique* u *de (*3) *sera une solution classique de* (1)*.*

Dans ce travail on suppose que :

$$X \text{ est } UMD \tag{6}$$

Définition 0.2 *soit* X *un espace de Banach et* $p \in]1,+\infty[$*on dit que* X *est* UMD *si et seulement si la transformation de Hilbert est continue dans* $L^p(\mathbb{R}, X)$

Plusieurs auteurs ont étudié l'équation :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) .x \in (0,1)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases}$$

quand $f \in L^p(0, 1 : X)$, $1 < p < +\infty$. et $f \in C^\theta(0,1; X), \theta \in (0,1)$

Dans ce travail on utilise les conditions aux limites de Robin en 0. $u'(0) - Hu(0) = d_0$, avec H un opérateur linéaire fermé, ce cas est compliqué car les domaines sont différents.

Dans l'article [2] les auteurs ont étudié le cas ou $B = 0$ avec $f \in L^p(0, 1 : X)$, $1 < p < +\infty$ et dans [4] pour $f \in C^\theta(0,1; X), \theta \in (0,1)$.

Le cas ou B génère un groupe est traité dans l'article [3].

Les techniques utilisées sont basées sur les semi groupes, la théorie des sommes d'opérateurs (l'approche de Dore-Venni), les résultats de Pruss-Sohr et le théorème de réitération dans la théorie d'interpolation.

Remarque 0.2 *Tous les articles cités précédemment ont utilisé le cas commutatif (*A, B *et* L, M *commutent) Le cadre non commutatif a été étudié dans l'article* [8] *pour le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), x \in (0,1). \\ u(0) = u_0, \; u(1) = u_1 \end{cases}$$

avec $\omega > 0$ *assez grand*

Cette nouvelle approche peut être utilisée dans des études futures pour résoudre les différentes équations avec les conditions aux limites de Robin dans le cas non-commutatif.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne des rappels sur les opérateurs, les semi groupes, définitions de quelques espaces fonctionnels, les espaces d'interpolations et les sommes d'opérateurs Dore-Venni.

Dans le deuxième chapitre on donne les hypothèses et on construit une représentation de la solution du problème (3) en s'inspirant du cas scalaire. On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une unique solution stricte satisfaisant la régularité maximale.

Dans le troisième chapitre, on applique le résultat du deuxième chapitre pour obtenir un résultat final pour le problème (1) avec

$$L = B - (B^2 - A)^{1/2} \; et \quad M = -B - (B^2 - A)^{1/2}.$$

Et, dans le dernier chapitre on donne des applications à des exemples concrets d'équations à dérivées partielles.

Chapitre 1

Rappels

On rappelle dans cette partie, les notions fondamentales qui seront utilisées par la suite.

1.1 Définition et propriétés des opérateurs

Définition 1.1 *soit X un espace de Banach, on dit que A est un opérateur linéaire sur X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ ($D(A)$ le domaine de définition de A) de X à valeur dans X. ie)*

$$A : D(A) \subset X \to X \text{ est linéaire}$$

Propriétés :

Soit A un opérateur linéaire sur X on dit que :

1. A est borné si : $D(A) = X$ et $\underset{\|x\| \prec 1}{sup} \|Ax\| < +\infty$

   et on note : $A \in \mathcal{L}(X)$.
2. A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$

   telle que : $\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$
3. A est fermable si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$

   telle que : $\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \quad y = 0.$

Définition 1.2 *on appelle l'ensemble résolvant de l'opérateur A et on note $\rho(A)$ l 'ensemble :*

$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe dans } \mathcal{L}(X)\right\}$

les éléments de $\rho(A)$ sont appelés les valeurs résolvantes de A et si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par :

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Définition 1.3 *on appelle le spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Les éléments de $\sigma(A)$ sont appelés les valeurs spectrales de A.

1.2 Les semi groupes

Définition 1.4 *soit X un espace de Banach, on définit un semi groupe sur X par une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés vérifiant :*

i) propriété algébrique : $G(t+s) = G(t).G(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

ii) Identité dans $\mathcal{L}(X)$:$G(0) = I$

iii) propriété topologique : $\lim\limits_{t\to 0^+} G(t)x = x.\ \forall x \in X$

Remarque 1.1 *si i) vérifiée pour toute $s, t \in \mathbb{R}$ alors $\{G(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est dit groupe.*

Définition 1.5 ***générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe***
On appelle générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur A définit par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall x \in D(A), Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

1.3 Semi groupe analytique

Définition 1.6 *soient X un espace de Banach et D tel que :*
$D = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$,une famille $\{G(z)\}_{z\in D}$ forme un semi groupe analytique dans X si elle vérifie :

i) *$z \to G(Z)$ est analytique dans D*

ii) *$G(0) = I$ et $\forall x \in X$,* $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ x \in X}} G(z)x = x.$

iii) $\forall z_1, z_2 \in D, G(z_1 + z_2) = G(z_1).G(z_2).$

Générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique :

Théorème 1.1 *soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire telle que :*

1. *A est fermé.*
2. *D_A est dense.*
3. *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ et $\forall\ \lambda \in \rho(A)$:*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{L}{|\lambda|}.\ \forall L > 0$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe analytique telle que :

1. $\exists M > 0; \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$
2. $\forall t > 0, G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ *et* $\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{t}.$

1.4 Définition de quelques espaces

Définition 1.7 ***espace de Banach***
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.8 ***espace métrique complet***
Un espace métrique (X, d) est complet si tout suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 1.9 ***l'espace $\mathcal{L}_P$***
on appelle espace $\mathcal{L}_P$ l'ensemble des fonctions mesurable telle que :
$\left(\int |f|^P \, dm\right)^{\frac{1}{P}} < +\infty$ *et on note* $:f \in \mathcal{L}_P$

Définition 1.10 ***l'espace L_p***
soient $(E; T.m)$ un espace mesuré et $1 < p < +\infty$; on définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}_p$ pour la relation d'équivalence égalité presque partout (= p.p).

Définition 1.11 ***espace séparé***
on dit que l'espace topologique $(E; T)$ est séparé si :
$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \Longrightarrow \exists v \in V(x), \exists w \in V(y) : v \cap w = \emptyset.$
telle que : $V(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

1.5 Les espaces d'interpolation

Soient E_0, E_1 deux espaces de Banach, tout deux inclus dans un même espace vectoriel topologique séparé E.

on considère les espaces $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ (espace des $a \in E$ de la forme $a = a_0 + a_1$, $a_i \in E_i \subset E$) munis des normes (respectivement) :

$$\|a\|_{E_0 \cap E_1} = \max\left(\|a\|_{E_0}, \|a\|_{E_1}\right)$$

$$\|a\|_{E_0 + E_1} = \inf\left(\|a_0\|_{E_0} + \|a_1\|_{E_1}\right)$$

se sont des espaces de Banach et on a :

$$E_0 \cap E_1 \subset E_i \subset E_0 + E_1 \qquad (E_i \subset E).$$

On appelle espace intermédiaire (entre E_0, E_1) tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé E telle que :

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Définition 1.12 *soit X un espace de Banach, on désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ $(1 < p < +\infty)$ l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ à valeurs dans X telle que :*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

Définition 1.13 *soit $p \in \lceil 1, +\infty \lfloor$ et $\theta \in [0,1]$, on dit que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ l'espace intermédiaire entre $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} i)\forall t > 0, \exists\ u_0(t) \in E_0 \ \text{ et } u_1(t) \in E_1 \text{telle que :} \\ x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(E_0) \ \text{ et } t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(E_1) \end{cases}$$

1.6 Théorie des sommes d'opérateurs approche de Dore-Venni

Dans un espace de Banach X, on considère l'équation suivant :

$$Au + Bu = f$$

Ou A et B sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines D_A et D_B inclus dans X et on pose l'opérateur somme L telle que :

$$\begin{cases} Lu = A + B \\ u \in D_A \cap D_B \end{cases}$$

Cette approche s'applique pour un espace UMD X et donne des résultats pour tout f dans X et utilise des intégrales des puissances complexes de A et B qui sont des opérateurs BIP.

Définition 1.14 ***espace* UMD**

Soit X un espace de Banach et $p \in]1, +\infty[$, on dit que X est UMD si et seulement si la transformation de Hilbert est continue dans $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.15 ***transformation de Hilbert***

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in]1, +\infty[, \forall\ f \in L^p(\mathbb{R})$:

$$Hf = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Définition 1.16 ***opérateur* BIP**

Soit A un opérateur linéaire fermé on dit que A est BIP si $\forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}(X)$ et $\exists$ $K > 0$,$\exists \theta_A \in [0, \pi[\forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K e^{|s|\theta_A}$

1.7 Résultat principal de l'approche de Dore-Venni

Soit X un espace UMD et A,B sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines D_A,D_B denses dans X, vérifiant :

$$\textbf{(DV1)} \begin{cases} \text{i)}\rho(A) \supset \left]+\infty,0\right] \;\; et \; \exists M_A > 0 \forall\lambda \geq 0 : \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M_A}{1+\lambda}. \\ \text{ii)}\rho(B) \supset \left]+\infty,0\right] \;\; et \; \exists M_B > 0 \forall\lambda \geq 0 : \left\|(\lambda + B)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M_B}{1+\lambda}. \end{cases}$$

$$\textbf{(DV2)} \begin{cases} \text{iii) } \forall\ \lambda \in \rho(-A), \forall\ \mu \in \rho\left(-B\right) : \\ \left(B + \mu\right)^{-1}\left(A + \lambda\right)^{-1} = \left(A + \lambda\right)^{-1}\left(B + \mu\right)^{-1} \end{cases}$$

$$\textbf{(DV3)} \begin{cases} \text{ix)}\forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}\left(X\right) \text{ et } \exists\ k > 0, \exists\ \theta_A \in [0,\pi[\,,\ \forall\ s \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad \left\|A^{is}\right\| \leq k \exp\left|s\right|\theta_A. \\ \text{v)}\forall s \in \mathbb{R}, B^{is} \in \mathcal{L}\left(X\right) \text{ et } \exists\ k > 0, \exists\ \theta_B \in [0,\pi[\,,\ \forall\ s \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad \left\|B^{is}\right\| \leq k \exp\left|s\right|\theta_B. \\ \text{vi) } \theta_A + \theta_B < \pi \end{cases}$$

Théorème 1.2 *(Dore-Venni)*

Soit X un espace UMD et sous les hypothèses (DV1),(DV2) et (DV3), l'opérateur L et fermé et il existe $L^{-1} \in \mathcal{L}\left(X\right)$ .tel que : $L^{-1} = \frac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin\pi z}dz$

où γ est une courbe verticale continue dans la bande $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\right\}$.

1.8 Application de l'approche de Dore-Venni

On considère le problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} u'\left(t\right) + Au\left(t\right) = f\left(t\right) \quad 0 < t < T \\ \qquad\qquad u\left(0\right) = 0. \end{cases} \tag{*}$$

tel que : $f \in X = L^p\left(\left(0,T\right);Y\right)$, $0 < p < +\infty$ et Y est $UMD \Rightarrow X$ et UMD.
$A : D\left(A\right) \to Y$ linéaire fermé de domaine dense tel que :
$\left\|\left(A + \lambda I\right)^{-1}\right\| \leq \dfrac{C}{1+\lambda}.\ \forall\lambda \geq 0.$
$\xi \to A^{i\xi}$ groupe fortement continue et $\left\|A^{i\xi}\right\| \leq C \exp\theta_A\left|\xi\right|$ et $0 \leq \theta_A \leq \frac{\pi}{2}$.
On pose : $B : D\left(B\right) \to Y$, $Bu = u'$.
$D\left(A\right) = \left\{u \in L^p\left(0,T;Y\right), u(t) \in D(A)\right\}$.
$(Au)(t) = Au(t)$.
$(*) \Rightarrow Bu(t) + Au(t) = f(t)$. dans X.
On a : B linéaire fermé : $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subset \rho\left(B\right)$ et $\forall\lambda \geq 0; \left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leq \dfrac{C_0}{1+|\lambda|}$.
De plus, $\forall s \in \mathbb{R}; B^{is} \in \mathcal{L}\left(X\right) : s \to B^{is}$ groupe et $\left\|B^{is}\right\| \leq C_1\left(1+s^2\right)\exp\frac{\pi}{2}\left|s\right|$.

1.8.1 Résultat

Théorème 1.3 *Si Y est UMD et A vérifié les hypothèses, alors $\forall\ f \in L^p\left(o,T;Y\right)$ $1 < p < +\infty$, le problème de Cauchy admet une unique solution u tel que :*

$$u \in W^{1;p}\left(0,T;Y\right) \cap L^p\left(0,T;D\left(A\right)\right)$$

Remarque 1.2 *A générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique et :*

$$u(t) = \int_0^t \exp(t-s)\,Af(s)\,ds.$$

On a :

$$Au(t) = A\int_0^t \exp(t-s)\,Af(s)\,ds.$$

pour tout $f \in L^p(0,T;X)$, X espace UMD alors le problème (*) admet une unique solution u telle que :

$$u \in W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$$

et donc, $Au \in L^p(0,T;X)$.

1.9 Généralités : espace d'interpolation et réitération

Définition 1.17 ***la classe* BIP** (X,α) *où* $\alpha \in [0,\pi]$
$u \in$ **BIP** (X,α) *si u est un opérateur linéaire fermé vérifiée :*

$$\begin{cases}]-\infty,0[\subset \rho(u), N(u) = \{0\}, \overline{R(u)} = X \\ et\ \exists c \geq 1, \forall\lambda > 0, \left\|(u+\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{c}{\lambda} \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $N(u)$, $R(u)$ et $\rho(u)$ sont respectivement le noyau, le rang et le résolvent de u.
et :

$$\left\{\forall s \in \mathbb{R}, u^{is} \in \mathcal{L}(X)\ et ;\exists c \geq 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \left\|u^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\exp\alpha\,|s|\right. \tag{1.2}$$

Remarque 1.3 *si u vérifié (1.1), alors u admet un puissance complexe u^z $\forall\ z \in \mathbb{C}$, soit $\theta \in (0,1), q \in [1,+\infty[, m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$ et V opérateur linéaire fermé en X vérifié :*
$]\mu,+\infty[\subset \rho(V)$ *et* $\sup\left\|\lambda(V-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$
Et, on considère l'espace d'interpolation $(X, D(V))_{\theta,q}$.
On définie : $(X,D(V))_{m+\theta,q} = \left\{\phi \in D(V^m), V^m\phi \in (X,D(V))_{\theta,q}\right\}$ quand $\theta \neq \dfrac{1}{2}$, on peut utilisé résultat de riétération

$$\left(X, D\left(V^2\right)\right)_{\theta,q} = (X, D(V))_{2\theta,q} \tag{1.3}$$

et on a : $(D(V),X)_{\theta,q} = (X,D(V))_{1-\theta,q}$ donc d'aprés (1.3) on a :

$$\left(D\left(V^2\right),X\right)_{\theta,q} = \left(X,D\left(V^2\right)\right)_{1-\theta,q} = (X,D(V))_{2-2\theta,q} \tag{1.4}$$

et ;

$$V\varphi \in (X,D(V))_{\theta,q} \Leftrightarrow \varphi \in (X,D(V))_{\theta+1,q}$$

Chapitre 2

Hypothèses et représentation de la solution du problème (3) avec les opérateurs L et M

2.1 Les hypothèses

On étudie le problème (3) :

$$\begin{cases} u''(x) + (L - M)\,u'(x) - LMu(x) = f(x) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \;, u(1) = u_1 \end{cases}$$

Les opérateurs L, M et H sont des opérateurs linéaires fermés telle que :

1. Domaines de définition $D(L)$ et $D(M)$:

$$D(L) = D(M) \text{ et } \; D(LM) = D(ML) \tag{2.1}$$

2. La commutativité de L et M :

$$ML = LM \tag{2.2}$$

3. La classe BIP de $-L$ et $-M$:

$$\exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, -L \in BIP(X, \theta_L) \;\text{ et }\; -M \in BIP(X, \theta_M) \tag{2.3}$$

$$L + M \;\text{ est inversible et à inverse borné} \tag{2.4}$$

4. La commutativité des résolvantes de L et M avec l'opérateur H :

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon \in D(H), \forall\, \lambda \in \rho(L), (L - \lambda I)^{-1} \varepsilon \in D(H) \;\text{ et} \\ (L - \lambda I)^{-1} H\varepsilon = H(L - \lambda I)^{-1} \varepsilon. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon \in D(H), \forall\, \mu \in \rho(L), (M - \mu I)^{-1} \varepsilon \in D(H) \;\text{ et} \\ (M - \mu I)^{-1} H\varepsilon = H(M - \mu I)^{-1} \varepsilon. \end{cases} \tag{2.6}$$

On considère l'opérateur Λ définit par :

$$D(\Lambda) = D(L) \cap D(H) \text{ et } \Lambda = (M - H) + e^{L+M}(L + H)$$

Et on suppose que :

$$\Lambda \text{ est fermé, inversible et à inverse borné} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1 *Cette dernière hypothèse veut dire que le déterminant (dans un certain sens) de (3) est inversible.*
Elle généralise l'hypothèse du cas $B = 0$ (voir [3]).

Le résultat principal de ce chapitre est donné par :

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses précédentes et si $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < +\infty$, alors le problème (3) admet une unique solution classique si et seulement si :*

$$\Lambda^{-1}d_0,\ u_1 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

2.2 Conséquences des hypothèses

Remarque 2.2 *d'après (2.1) et (2.2) on a :*

1. $D(L^2) = D(M^2) = D(ML) = D(LM)$.
2. ***Egalités des espaces d'interpolation :***
   pour $\theta \in [0,1]$, $q \in [1,+\infty[$ on a : $(X, D(L))_{\theta,q} = (X, D(M))_{\theta,q}$ *et*
   $$\left(X, D(L^2)\right)_{\theta,q} = \left(X, D(M^2)\right)_{\theta,q} = (X, D(LM))_{\theta,q} = (X, D(ML))_{\theta,q}$$
   Et,
   $$(X, D(L))_{1+\theta,q} = (X, D(M))_{1+\theta,q}$$
3. ***La commutativité des résolvantes de*** L *et* M :
   $\forall\lambda \in \rho(L), \forall\mu \in \rho(M); (L - \lambda I)^{-1}(M - \mu I)^{-1} = (M - \mu I)^{-1}(L - \lambda I)^{-1}$

Remarque 2.3 ***résultat de Prus-Sohr***
Comme L(ou M) est BIP alors L un générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique.

Remarque 2.4 ***propriétés sur la somme et le produit de*** L, M

1. *L'opérateur $(-L - M)$ est fermé et de plus si L et M inversible alors $L + M$ est inversible.*
2. *Comme $-L$ et $-M$ est BIP alors :*
   $$-(L + M) \in BIP(X, \theta) \text{ avec } \theta = \max(\theta_L, \theta_M) + \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \text{ et arbitraire} \tag{2.8}$$
   donc $(L + M)$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique.

3. *LM est fermable et $\overline{LM} \in BIP\left(X, \theta_L + \theta_M\right)$, la fermeture est donné par l'application directe de corollaire 3 dans* [11], *mais là on déduit que : $D(L) = D(M)$,et on peut appliqué le lemme* 1, *p.* 168 *dans* [7] *pour dit que : LM est fermé donc $LM \in BIP\left(X, \theta_L + \theta_M\right)$.*

On considère le lemme suivant pour donner quelques propriétés de la commutativité.

Lemme 2.1 *d'après* (2.1) ∼(2.6) *et* (2.7) *on a :*

1. *Soient $C \in \{M, L, L+M\}, \tilde{C} \in \{M, L, H\}, x \geq 0$ et $\varepsilon \in D(\tilde{C})$ alors :*
$$e^{xC}\varepsilon \in D(\tilde{C}) \text{ et } \tilde{C}e^{xC}\varepsilon = e^{xC}\tilde{C}\ \varepsilon.$$
2. *Soient $C \in \{M, L, L+M\}, \tilde{C} \in \{M, L\}, x \geq 0, z \in X$ et $\lambda \in \rho\left(\tilde{C}\right)$ alors :*
$$e^{xC}\left(\tilde{C} - \lambda I\right)^{-1} z = \left(\tilde{C} - \lambda I\right)^{-1} e^{xC} z.$$
3. *Soient $C \in \{M, L\}, \varepsilon \in D(\Lambda), \lambda \in \rho(C)$, on a :*
$$(C - \lambda I)^{-1}\varepsilon \in D(\Lambda) \text{ et } (C - \lambda I)^{-1}\Lambda\varepsilon = \Lambda(C - \lambda I)^{-1}\varepsilon.$$
4. *Soient $C \in \{M, L\}, \varepsilon \in D(C)$ on a :*
$$C\ \Lambda^{-1}\varepsilon = \Lambda^{-1}C\ \varepsilon.$$
5. *Pour $\varepsilon \in D(\Lambda) = D(H) \cap D(L)$ on a :*
$$H\ \Lambda^{-1}\varepsilon = \Lambda^{-1}H\ \varepsilon.$$
6. *Soit $x \geq 0$ et $L + M$ générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique en X vérifiant :*
$$e^{x(L+M)} = e^{xL}e^{xM} = e^{xM}e^{xL}.$$

Preuve. 1) Soit $x > 0$ et $\varepsilon \in D(H)$, l'opérateur C est générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe donc on peut appliquer la formule exponentielle suivante :
$$e^{xC}\varepsilon = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{x}\left(\frac{n}{x}I - C\right)^{-1}\right)^n \varepsilon. \tag{2.9}$$
et d'après (2.2), (2.5) et (2.6), on déduit que :
$$e^{x\tilde{C}}\ \varepsilon = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{x}\left(\frac{n}{x}I - C\right)^{-1}\right)^n \tilde{C}\ \varepsilon = \lim_{n\to+\infty}\tilde{C}\left(\frac{n}{x}\left(\frac{n}{x}I - C\right)^{-1}\right)^n \varepsilon.$$
et, comme $\tilde{C}$ est fermé, on déduit que $e^{xC}\varepsilon \in D(\tilde{C})$ et,
$$\tilde{C}e^{xC}\varepsilon = e^{xC}\tilde{C}\ \varepsilon$$
2) On considère $\varepsilon = \left(\tilde{C} - \lambda I\right)^{-1} z$, d'aprés 1) on déduit que :
$$\left(\tilde{C} - \lambda I\right)e^{xC}\varepsilon = e^{xC}\left(\tilde{C} - \lambda I\right)\varepsilon$$

$\Rightarrow$
$$\left(\tilde{C}-\lambda I\right)e^{xC}\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}z=e^{xC}z$$
$\Rightarrow$
$$\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}\left(\tilde{C}-\lambda I\right)e^{xC}\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}z=\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}e^{xC}z.$$
$\Rightarrow$
$$e^{xC}\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}z=\left(\tilde{C}-\lambda I\right)^{-1}e^{xC}z.$$

3) Comme $\varepsilon \in D(H)$, d'aprés (2.5),(2.6), on déduit que $(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon \in D(\Lambda)$ et :

$$\begin{aligned}\Lambda(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon &= \left((M-H)+e^{L+M}(L+H)\right)(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon.\\ &= (M-H)(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon+e^{L+M}(L+H)(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon\end{aligned}$$

Et, d'après $(2.2),(2.5),(2.6)$ et 2) on déduit que :

$$\begin{aligned}\Lambda(C-\lambda I)^{-1}\varepsilon &= (C-\lambda I)^{-1}(M-H)\varepsilon+(C-\lambda I)^{-1}e^{L+M}(L+H)\varepsilon\\ &= (C-\lambda I)^{-1}\Lambda\varepsilon.\end{aligned}$$

4) On fixe $\lambda \in \rho(C)$ et soit : $y=\Lambda^{-1}(C-\lambda I)\varepsilon$, et d'après 3) on a :

$$(C-\lambda I)^{-1}\Lambda y=\Lambda(C-\lambda I)^{-1}y.$$

Soit $\varepsilon=\Lambda(C-\lambda I)^{-1}\Lambda^{-1}(C-\lambda I)\varepsilon$, alors,

$$(C-\lambda I)\Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}(C-\lambda I)\varepsilon.\text{ donc,}C\ \Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}C\ \varepsilon\ .$$

5) Si $\varepsilon \in D(\Lambda)$ on a $\Lambda\Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}\ \Lambda\varepsilon$, on a :

$$\left((M-H)+e^{L+M}(L+H)\right)\Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}\left((M-H)+e^{L+M}(L+H)\right)\varepsilon.$$

Donc ;

$$\begin{aligned}&M\Lambda^{-1}\varepsilon+e^{L+M}L\Lambda^{-1}\varepsilon-\left(I-e^{L+M}\right)H\Lambda^{-1}\varepsilon\\ =\ &\Lambda^{-1}M\varepsilon+\Lambda^{-1}e^{L+M}L\varepsilon-\Lambda^{-1}\left(I-e^{L+M}\right)H\varepsilon\end{aligned}$$

et ;
$$\left(I-e^{L+M}\right)H\Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}\left(I-e^{L+M}\right)H\varepsilon=\left(I-e^{L+M}\right)\Lambda^{-1}H\varepsilon.$$
$\left(I-e^{L+M}\right)$ est inversible et à inverse borné donc :

$$H\Lambda^{-1}\varepsilon=\Lambda^{-1}H\varepsilon.$$

6) On applique 2) on trouve pour $x \in]0,+\infty[\,, n \in \mathbb{N}$:

$$e^{xL}\left(\frac{n}{x}\left(\frac{n}{x}I-M\right)^{-1}\right)=\left(\frac{n}{x}\left(\frac{n}{x}I-M\right)^{-1}\right)e^{xL}.$$

Et, d'après (2.9), on déduit que $e^{xL}\ e^{xM}=e^{xM}e^{xL}$, et $\left(e^{xL}e^{xM}\right)_{x\geq 0}$ est un semi groupe fortement continu, on note d'après (2.4)

$L+M$ est fermé, on déduit que $L+M$ est générateur d'un semi groupe produit $\left(e^{xL}e^{xM}\right)_{x\geq 0}$.

■

2.3 Représentation de la solution

A partir de (6) et (2.1) $\sim$ (2.7), supposons que le problème (3) admet une solution classique u telle que :

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(LM)); u' \in L^p(0,1;D(L-M)).$$

$u_0 = u(0) \in D(H)$ et on peut écrire :

$$\begin{cases} u''(.) + (L-M)u'(.) + LMu(.) \in L^p(0,1;X), \ x \in (0;1) \\ u(0) = u_0, u(1) = u_1. \end{cases}$$

Alors,

$$u(0), u(1) \in \big(D(L^2), X\big)_{\frac{1}{2P},p} = \big(D(M^2), X\big)_{\frac{1}{2P},p} \tag{2.10}$$

voir([7, théorème 5, p. 173]).
D'autre part, d'après (1.4) on a :

$$\big(D(L^2), X\big)_{\frac{1}{2p},q} = (X, D(L))_{2-\frac{1}{p},q} = \Big\{\phi \in D(L) : L\phi \in (X, D(L))_{1-\frac{1}{p},q}\Big\}$$

et,

$$u(0), u(1) \in D(L) = D(M). \tag{2.11}$$

D'après [6], pour $x \in (0,1), u$ satisfait :

$$u(x) = e^{xM}\varepsilon_0 + e^{(1-x)L}\varepsilon_1 + I_x + J_x. \tag{2.12}$$

où :

$$I_x = (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \ \text{ et } \ J_x = (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds.$$

Maintenant, on détermine les constants $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ pour obtenir une représentation finale de u.
A partir des conditions aux limites du problème (3) :

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, u(1) = u_1 \tag{2.13}$$

D'après (2.11) on a : $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in D(L) = D(M)$, alors :

$$u(0) = \varepsilon_0 + e^L\varepsilon_1 + J_0.$$

pour $x \in (0,1)$, on a :

$$u'(x) = Me^{xM}\varepsilon_0 - Le^{(1-x)L}\varepsilon_1 + MI_x - LJ_x. \tag{2.14}$$

donc,

$$u'(0) = M\varepsilon_0 - Le^L\varepsilon_1 - LJ_0$$

telle que,

$$\begin{cases} \Lambda^{-1}u(0) = \Lambda^{-1}\varepsilon_0 + \Lambda^{-1}e^L\varepsilon_1 + \Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}\acute{u}(0) = \Lambda^{-1}M\varepsilon_0 - \Lambda^{-1}Le^L\varepsilon_1 - \Lambda^{-1}LJ_0 \end{cases}$$

comme $\Lambda^{-1}(X) = D(H) \cap D(L) = D(H) \cap D(M)$, on a :

$$\begin{cases} H\Lambda^{-1}u(0) = H\Lambda^{-1}\varepsilon_0 + H\Lambda^{-1}e^L\varepsilon_1 + H\Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}\acute{u}(0) = \Lambda^{-1}M\varepsilon_0 - \Lambda^{-1}Le^L\varepsilon_1 - \Lambda^{-1}LJ_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

et,

$$\Lambda^{-1}d_0 = \Lambda^{-1}\left(\acute{u}\,(0) - Hu(0)\right)$$

d'après (2.15), et on utilise le lemme (1) et (2.11), on trouve :

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}d_0 &= \Lambda^{-1}\acute{u}\,(0) - H\Lambda^{-1}u(0) \\ &= (M-H)\,\Lambda^{-1}\varepsilon_0 - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\varepsilon_1 - (L+H)\,\Lambda^{-1}J_0 \end{aligned}$$

et comme

$$u_1 = e^M\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + I_1$$

alors,

$$\varepsilon_1 = u_1 - e^M\varepsilon_0 - I_1$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}d_0 &= (M-H)\,\Lambda^{-1}\varepsilon_0 - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\left(u_1 - e^M\varepsilon_0 - I_1\right) - (L+H)\,\Lambda^{-1}J_0 \\ &= \left[(M-H) + e^{L+M}\,(L+H)\right]\Lambda^{-1}\varepsilon_0 - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\,(u_1 - I_1) - (L+H)\,\Lambda^{-1}J_0 \\ &= \varepsilon_0 - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\,(u_1 - I_1) - (L+H)\,\Lambda^{-1}d_0. \end{aligned}$$

alors,

$$\varepsilon_0 = \Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\,\Lambda^{-1}\left[e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0\right] \tag{2.16}$$

et,

$$\varepsilon_1 = -e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0\right] - e^M\Lambda^{-1}d_0 + u_1 - I_1 \tag{2.17}$$

Finalement, on remplace $\varepsilon_0, \varepsilon_1$, et on déduit la représentation de u :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM}\left[\Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\,\Lambda^{-1}e^Lu_1\right] - e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad + e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad + e^{(1-x)L}\left(I - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^{(L+M)}u_1 - \Lambda^{-1}e^Md_0\right) \\ &\quad - e^{(1-x)L}\,(L+H)\,e^M\Lambda^{-1}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad - e^{(1-x)L}\left[I - (L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L+M}\right](L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds. \end{aligned}$$

alors on écrit :

$$u(x) = S(x, f_0, f, M) + S(1-x, f_1, f(1-.), L) + R(x, Tf_1, M) - R\left(1-x, f_0 + Te^L f_1, L\right) \tag{2.18}$$

telle que :

$$T = (L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X) \tag{2.19}$$

$$f_0 = \Lambda^{-1} d_0 + T(L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \tag{2.20}$$

$$f_1 = u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \tag{2.21}$$

Et, pour $\phi \in X$ et $C = L$ où M :

$$\begin{cases} S(x, \phi, f, c) = e^{xC}\phi + (L+M)^{-1} \displaystyle\int_0^x e^{(x-s)C} f(s) ds. \\ R(x, \phi, C) = e^{xC} e^{L+M-C}\phi. \end{cases} \tag{2.22}$$

Remarque 2.5 *si le problème (*3*) admet une solution classique u, alors elle est unique et déterminée par (*2.18*).*

2.4 Lemmes techniques

Lemme 2.2 *Soient (*6*) et* $-C \in BIP(X, \alpha)$ *avec* $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $p \in]1, +\infty[$ *on a :*

1. $\forall g \in L^p(0,1;X)$:

$$x \longmapsto C \int_0^x e^{(x-s)C} g(s) ds \in L^p(0,1;X). \tag{2.23}$$

2. $\forall g \in L^P(0,1;X)$:

$$x \longmapsto Ce^{xC} \int_0^1 e^{sC} g(s) ds \in L^p(0,1;X). \tag{2.24}$$

Preuve. pour 1) voir rappel (application de Dore-Venni)

et pour 2) on a :

$$\begin{aligned} Ce^{xC} \int_0^1 e^{sC} g(s) ds &= Ce^{xC} \int_0^x e^{sC} g(s) ds + Ce^{xC} \int_x^1 e^{sC} g(s) ds \\ &= C \int_0^1 e^{(x-s)C} e^{2sC} g(s) ds + Ce^{2xC} \int_x^1 e^{(s-x)C} g(s) ds \end{aligned}$$

D'où d'après (1) et [7] on a : $Ce^{xC}\int_0^1 e^{sC}g(s)ds \in L^p(0,1;X)$. ■

On utilise un résultat d'interpolation : si C est générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique et pour tout $q \in]1,+\infty[\,, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp},q} \Leftrightarrow x \longmapsto C^m e^{xC}\phi \in L^q(0,1;X) \tag{2.25}$$

Et, par exemple si ($m = 1$ où $m = 2$) on a :

$$\left\{\begin{array}{c} \phi \in (D(C), X)_{\frac{1}{P},p} \Leftrightarrow x \longmapsto Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X) \\ \phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2P},p} \Leftrightarrow x \longmapsto C^2 e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X) \end{array}\right. \tag{2.26}$$

(voir [12]).

Lemme 2.3 *Soit* (6) *et* (2.1) $\backsim$ (2.4), *et pour* $C = L$ *où* M *et* $\lambda_0 \in \rho(C)$ *on a :*

1. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \Leftrightarrow (C-\lambda_0 I)\,Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$.
2. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \Leftrightarrow (L+M-C)\,Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$.
3. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \Leftrightarrow (L+M-C)^2\,e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$.

Preuve. 1) On sait que :

$$\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & C^2 e^{xC}\phi \in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow x \longmapsto x^{\frac{1}{p}} C^2 e^{\cdot C}\phi \in L^p_*(0,1;X) \\ & \Longleftrightarrow & \phi \in (D(C^2);X)_{\frac{1}{2p},p} \end{array}$$

car C est un générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique.
Soit $\lambda_0 \in \rho(C)$, si $\phi \in (D(C^2);X)_{\frac{1}{2P},P}$, alors,

$$\begin{array}{rcl} \left\|Ce^{xC}\phi\right\|_X & = & \left\|Ce^{\cdot C}\phi + \int_x^1 C^2 e^{sC}\phi ds\right\|_X \\ & \leq & C\left\|\phi\right\|_X + \int_x^1 \left\|C^2 e^{sC}\phi\right\|_X ds \end{array}$$

Et, d'après l'inégalité de Holder on a :

$$\begin{array}{rcl} \left\|Ce^{\cdot C}\phi\right\|_X & \leq & C\left\|\phi\right\|_X + (1-x)^{1-\frac{1}{p}}\left\|C^2 e^{\cdot C}\phi\right\|_{L^p(0,1;X)} \\ & \leq & C\left\|\phi\right\|_{(D(C^2),X)_{\frac{1}{2p},p}}. \end{array}$$

$$(C-\lambda_0 I)\,Ce^{xC})\phi = C^2 e^{xC}\phi - \lambda_0 Ce^{xC}\phi \in L^p(0,1;X)$$

Et, d'autre part si :

$$(C-\lambda_0 I)\,Ce^{xC}\phi \in L^p(0,1;X)$$

alors,

$$Ce^{xC}\phi = (C-\lambda_0 I)^{-1}(C-\lambda_0 I)\,Ce^{xC}\phi \in L^p(0,1;X)$$

et,

$$C^2e^{xC}\phi = (C-\lambda_0 I)\,Ce^{xC}\phi + \lambda_0 Ce^{xC}\phi \in L^P(0,1;X)$$

alors,

$$\phi \in \left(D(C^2),X\right)_{\frac{1}{2P},p}.$$

2) On pose $C = L$ (même démonstration pour $C = M$), si $\phi \in (D(C^2),X)_{\frac{1}{2P},P}$, et $M(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on obtient d'après (1) :

$$MLe^{\cdot L}\phi = M(L-I)^{-1}(L-I)Le^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$$

D'autre part, si $MLe^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ alors,

$$\begin{aligned} Le^{\cdot L}\phi &= L(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= (M-I)^{-1}LMe^{L}\phi - L(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \end{aligned}$$

alors,

$$Le^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$$

et d'après :

$$\begin{aligned} L^2e^{\cdot L}\phi &= L^2(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= L(M-I)^{-1}LMe^{\cdot L}\phi - L(M-I)^{-1}Le^{\cdot L}\phi \end{aligned}$$

On déduit que : $L^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ et de (2.26) on obtient :

$$\phi \in \left(D(L^2),X\right)_{\frac{1}{2P},p}$$

3) On prend $C = L$:
Si $\phi \in (D(L^2),X)_{\frac{1}{2P},p}$, alors $Me^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ car :

$$\begin{aligned} Me^{\cdot L}\phi &= M(L-I)^{-1}(L-I)e^{\cdot L}\phi \\ &= M(L-I)^{-1}Le^{\cdot L}\phi - M(L-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi. \end{aligned}$$

de 2) on déduit que $M^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ car :

$$\begin{aligned} M^2e^{\cdot L}\phi &= M(L-I)^{-1}M(L-I)e^{\cdot L}\phi \\ &= M(L-I)^{-1}MLe^{\cdot L}\phi - M(L-I)^{-1}Me^{\cdot L}\phi \end{aligned}$$

d'autre part, si $M^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ et $Me^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ car

$$\begin{aligned} Me^{\cdot L}\phi &= M(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= (M-I)^{-1}M^2e^{\cdot L}\phi - M(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi. \end{aligned}$$

mais,

$$\begin{aligned} LMe^{\cdot L}\phi &= LM(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= L(M-I)^{-1}M^2e^{\cdot L}\phi - L(M-I)^{-1}Me^{\cdot L}\phi. \end{aligned}$$

donc, $LMe^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$, et d'après 2) :

$$\phi \in \left(D(L^2), X\right)_{\frac{1}{2P},p}.$$

■

Maintenant, on étudie la régularité des termes R et S :

Lemme 2.4 *Soient (6), (2.1) $\backsim$ (2.7), et $C = L$ où M et $\phi \in X$, pour le terme régulier défini par $R(.,\phi,C)$ on a :*

$$LMR\,(.,\phi,C)\,,\;\; L^2R\,(.,\phi,C)\,,\;\; M^2R\,(.,\phi,C) \in L^P(0,1;X).$$

Preuve. pour $C = L$ où M, on a :

$$e^{(L+M-C)}\phi \in D(L^2) = D(ML) = D(LM) = D(M^2).$$

et pour $x \in (0,1)$ on a :

$$LMR\,(x,\phi,C) = e^{xC}MLe^{L+M-C}\phi.$$

donc, $LMR\,(x,\phi,C)$ est borné et dans $L^p(0,1;X)$ et même pour $L^2R\,(.,\phi,C)$ et $M^2R\,(.,\phi,C)$.

■

Maintenant, concernant le terme singulier $S(.,f_0,f,M)$ on a :

Proposition 2.1 *Soient (6) , (2.1) $\backsim$ (2.7), $f \in L^p(0,1;X), 1 \prec p \prec +\infty$ et $P \in \{LM, M^2, L^2\}$, alors :*

$$PS(.,f_0,f,M) \in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2P},p}.$$

Preuve. Soit :

$$\begin{cases} l(x,g,C) = LM(L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)C}g(s)ds. \\ m(x,g,C) = LM(L+M)^{-1}e^{xC}\displaystyle\int_0^1 e^{s(L+M-C)}g(s)ds. \end{cases} \tag{2.27}$$

d'après la commutativité de L, M on peut écrire pour $y \in D(L) = D(M)$:

$$LM(L+M)^{-1}y = (L+M-C)(L+M)^{-1}Cy.$$

donc on a :

$$\begin{cases} l(x,g,C) = (L+M-C)(L+M)^{-1}C\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)C}g(s)ds. \\ m(x,g,C) = (L+M-C)(L+M)^{-1}Ce^{xC}\displaystyle\int_0^1 e^{s(L+M-C)})g(s)ds. \end{cases}$$

comme $(L+M-C)(L+M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on a :

$$l(.,g,C) \in L^p(0,1;X). \tag{2.28}$$

et,

$$x \mapsto (L+M-C)e^{x(L+M-C)} \int_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)ds \in L^P(0,1;X).$$

alors, d'après (2.26) on a :

$$\int_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)ds \in (D(L+M-C);X)_{\frac{1}{p},p} = (D(C);X)_{\frac{1}{p},p}$$

et,

$$x \mapsto Ce^{xC} \int_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)ds \in L^p(0,1;X).$$

alors,

$$m(.,g,C) \in L^p(0,1;X) \tag{2.29}$$

Par exemple si $P = LM$, pour $x \in (0,1)$ on a :

$$\begin{aligned}
PS(x,f_0,f,M) &= LMe^{xM} f_0 + LM(L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \\
&= LMe^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + LM(L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \\
&\quad + LMe^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
&= Me^{xM}L\Lambda^{-1}d_0 + l(x,f,M) + (L+H)\Lambda^{-1}m(x,f,M).
\end{aligned}$$

et comme $L\Lambda^{-1}, H\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, d'aprés (2.28),(2.29) et (2.26) on déduit que :

$$\begin{aligned}
PS(.,f_0,f,M) &\in L^P(0,1;X) \Longleftrightarrow Me^{\cdot M}L\Lambda^{-1}d_0 \in L^P(0,1;X) \\
&\Leftrightarrow L\Lambda^{-1}d_0 \in (D(M);X)_{\frac{1}{p},p} = (D(L);X)_{\frac{1}{p},p} \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (X;D(L))_{2-\frac{1}{p},p} \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (X;D(L^2))_{1-\frac{1}{2p},p} \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(L^2);X)_{\frac{1}{2P},p} \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM);X)_{\frac{1}{2P},p}
\end{aligned}$$

même chose pour $P = L^2$ où M^2. ■

Et, pour le terme $S(1-.,f_1,f(1-.),L)$ on a la proposition suivante :

Proposition 2.2 *d'aprés* (6) *et* (2.1) $\backsim$ (2.7),*soit* $f \in L^p(0,1;X)$ *et* $P \in \{LM, M^2, L^2\}$ *alors :*

$$PS(1-.,f_1,f(1-.),L) \in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow u_1 \in (D(LM);X)_{\frac{1}{2P},p}.$$

tel que :

$$f_1 = u_1 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds.$$

Preuve. on prend $P = LM$ (même chose pour $P = L^2$ et $P = M^2$)
on a :

$$\begin{aligned}
PS(1-x,f_1,f(1-x),L) &= LMe^{(1-x)L}f_1 + LM(L+M)^{-1}\int_0^{1-x} e^{(1-x-s)L}f(1-s)ds \\
&= LMe^{(1-x)L}u_1 + LM(L+M)^{-1}\int_0^{1-x} e^{(1-x-s)L}f(1-s)ds \\
&\quad -LM(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sM}f(1-s)ds \\
&= LMe^{(1-x)L}u_1 + l(1-x,f(1-.),L) - m(1-x,f(1-.),L).
\end{aligned}$$

donc, d'après lemme (3) et 2) on a :

$$\begin{aligned}
PS(1-.,f_1,f(1-.),L) &\in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow LMe^{(1-.)L}u_1 \in L^p(0,1;X) \\
&\Leftrightarrow u_1 \in (D(L);X)_{\frac{1}{P},p} \\
&\Longleftrightarrow u_1 \in (X;D(L))_{2-\frac{1}{P},p} \\
&\Longleftrightarrow u_1 \in (X;D(L^2))_{1-\frac{1}{2P},p} \\
&\Longleftrightarrow u_1 \in (D(L^2);X)_{\frac{1}{2P},p}
\end{aligned}$$

■

2.5 Résultat de problème (3) avec les opérateurs L et M

Théorème 2.2 *Soient* (6) *et* (2.1) $\backsim$ (2.7), *et* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $p \in]1,+\infty[$, *le problème* (3) *admet une solution classique* u *si et seulement si :*

$$\Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM);X)_{\frac{1}{2p},p}$$

dans ce cas, u *est unique et définie par :*

$$u(x) = S(x,f_0,f,M) + S(1-x,f_1,f(1-.),L) + R(x,Tf_1,M) - R(1-x,f_0+Te^Lf_1,L)$$

telle que : S,R,T,f_0 *et* f_1 *sont déterminé par* (2.19) $\backsim$ (2.22).

Preuve. si le problème (3) admet une solution classique u détermine par (2.18) :

$$u(x) = S(x, f_0, f, M)+S(1-x, f_1, f(1-.), L)+R(x, Tf_1, M)-R(1-x, f_0+Te^L f_1, L) \quad (2.30)$$

on étudie la régularité de (2.30) alors,
A partir de lemme (4) on a :

$$LMR(x, Tf_1, M) - LMR(1-x; f_0 + Te^L f_1, L) \in L^p(0, 1; X).$$

et du lemme (1) et la formule (2) on a :

$$\begin{cases} LMS(., f_0, f, M) \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM); X)_{\frac{1}{2P},p} \\ LMS(1-., f_1, f(1-.), L) \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow u_1 \in (D(LM); X)_{\frac{1}{2P},p} \end{cases}$$

Finalement on a :

$$LMu \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow \Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM); X)_{\frac{1}{2P},P}$$

D'autre part, on étudie la régularité de $(L-M)u'(x)$, on a :

$$u'(x) = MS(x, f_0, f, M)+LR(1-x, f_0+Te^L f_1, L)-LS(1-x, f_1, f(1-.), L)+MR(x, Tf_1, M)$$

donc,

$$\begin{aligned} (L-M)u'(x) &= (L-M)MS(x, f_0, f, M) + (L-M)LR(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) \\ &\quad -(L-M)LS(1-x, f_1, f(1-.), L) + (L-M)MR(x, Tf_1, M) \\ &= (LM-M^2)S(x, f_0, f, M) + (L^2-LM)R(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) \\ &\quad -(L^2-LM)S(1-x, f_1, f(1-.), L) + (LM-M^2)R(x, Tf_1, M). \end{aligned}$$

On utilise encore une fois le lemme (4) et les propositions (1) et (2), on obtient :

$$LMu' \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow \Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM); X)_{\frac{1}{2P},p}.$$

D'où u vérifie la régularité.
Maintenant,
on a :

$$u''(x) = M^2S(x, f_0, f, M)-L^2R(1-x, f_0+Te^L f_1, L)+L^2S(1-x, f_1, f(1-.), L)+M^2R(x, Tf_1, M)+f(x). \quad (2.31)$$

on utilise (2.18),(2.31) et :

$$M^2 + (L-M)M - LM = L^2 - (L-M)L - LM \subset 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) &= \left[M^2 + (L-M)M - LM\right] S(x, f_0, f, M) \\ &\quad - \left[L^2 - (L-M)L - LM\right] R(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) \\ &\quad + \left[L^2 - (L-M)L - LM\right] S(1-x, f_1, f(1-.), L) \\ &\quad + \left[M^2 + (L-M)M - LM\right] R(x, Tf_1, M) + f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

A partir de (2.18) on a :

$$u(1) = S(1, f_0, f, M) - R(0, f_0 + Te^L f_1, L) + S(0, f_1, f(1 - .), L) + R(1, Tf_1, M)$$

alors,

$$\begin{aligned} u(1) &= e^M f_0 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - e^M \left[f_0 + (L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1\right] \\ &\quad + f_1 + (L+H)\Lambda^{-1} e^{L+M} f_1 \\ &= f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds = u_1. \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} u(0) &= S(0, f_0, f, M) + S(1, f_1, f(1 - .), L) + R(0, Tf_1, M) - R(1, f_0 + Te^L) f_1, L) \\ &= f_0 + e^L f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds + (L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1 - e^{L+M}(f_0 + (L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1) \\ &= (I - e^{L+M})) f_0 + \left[I + (I - e^{L+M}(L+H)\Lambda^{-1}\right] e^L) f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds. \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} u(0) &= \Lambda^{-1}(I - e^{L+M}) d_0 + \Lambda^{-1}(L+M) e^L \left[u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \right] \\ &\quad + \left[\Lambda + (I - e^{L+M})(L+H)\right] \Lambda^{-1} (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds. \end{aligned}$$

donc on a : $u(0) \in D(H)$ et ;

$$u'(0) = MS(0, f_0, f, M) + LR(1, f_0 + Te^L f_1, L) - LS(1, f_1, f(1 - .), L) + MR(0, Tf_1, M)$$

alors,

$$
\begin{aligned}
u'(0) - Hu(0) &= (M-H)S(0, f_0, f, M) + (L+H)R(1, f_0 + Te^L f_1, L) \\
&\quad -(L+H)S(1, f_1, f(1-.), L) + (M-H)R(0, Tf_1, M) \\
&= (M-H)f_0 + (L+H)e^{L+M}(f_0 + (L+H)\Lambda^{-1}e^L f_1) \\
&\quad -(L+H)e^L f_1) - (L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)L} f(1-s)ds + (M-H)(L+H)\Lambda^{-1}e^L \\
&= \Lambda f_0 + (L+H)\left[(M-H) + e^{L+M}(L+H) - \Lambda\right]\Lambda^{-1}e^L f_1 \\
&\quad -(L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)L} f(1-s)ds \\
&= d_0 + (L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds - (L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
&= d_0.
\end{aligned}
$$

■

Remarque 2.6 *d'après* (6) *et* (2.1) $\backsim$ (2.7) *si :*

$$d_0 \in (D(M), X)_{\frac{1}{p},p} \ , \ u_1 \in (D(M^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

et :

$$\Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(M^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

comme $\Lambda^{-1}(X) \subset D(L) = D(M)$, *donc le problème* (3) *admet une solution classique* u.

Chapitre 3

Retour au problème (1) avec les opérateurs A et B

3.1 Les hypothèses :

On considère le problème (1) suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \ , \ u(1) = u_1. \end{cases}$$

Les hypothèses suivantes sur les opérateurs A, B et H :

On suppose L et M telle que :

$$L = B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad M = -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé en } X. \left]-\infty, 0\right[\subset \rho(B^2 - A) \text{ et,} \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} \|\lambda(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

L'opérateur $-(B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique en X.(voir [1])

$$D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B). \tag{3.2}$$

et,

$$\exists \ \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: -L \in BIP\left(X, \theta_L\right), -M \in BIP\left(X, \theta_M\right). \tag{3.3}$$

$$\forall y \in D(B), \ (B^2 - A)^{-\frac{1}{2}} By = B(B^2 - A)^{-\frac{1}{2}} y. \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon \in D(H), \forall \lambda \in \rho(L), \left(L - \lambda I\right)^{-1} \varepsilon \in D\left(H\right) \text{ et} \\ \left(L - \lambda I\right)^{-1} H\varepsilon = H\left(L - \lambda I\right)^{-1} \varepsilon. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\varepsilon \in D(H), \forall\mu \in \rho(M), (M-\mu I)^{-1}\varepsilon \in D(H) \text{ et} \\ (M-\mu I)^{-1} H\varepsilon = H(M-\mu I)^{-1}\varepsilon. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

et on suppose que :

$$D(\Lambda) = D(L) \cap D(H) \text{ et } \Lambda = (M-H) + e^{L+M}(L+H)$$

telle que :

$$\Lambda \text{ est inversible et fermé et à inverse borné.} \tag{3.7}$$

Remarque 3.1 *d'après* (3.1) $\backsim$ (3.5) *on a :*

1. $D(L) = D(M) = D((B^2-A)^{\frac{1}{2}})$ *alors,*

$$D(L-M) = D(L+M) = D((B^2-A)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B).$$

   car $L - M \subset 2B$, $L + M = -2(B^2-A)^{\frac{1}{2}}$ *et* $0 \in \rho(L+M)$.
2. $D(ML) = D(LM) = D(B^2-A)$ *et* $ML = LM \subset -A$.

3.2 Résultat du problème (1) avec les opérateurs A et B

Théorème 3.1 *Soient* (6) *et* (3.1) $\backsim$ (3.7), *et* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $p \in]1,+\infty[$, *le problème* (1) *admet une solution classique* u *vérifiant :*

$$u \in L^p(0,1;D(B^2-A)) \text{ et } u' \in L^p(0,1;D(B^2-A)^{\frac{1}{2}})$$

si et seulement si :

$$\Lambda^{-1}d_0 \in \left(D(B^2-A);X\right)_{\frac{1}{2p},p} \text{ et } u_1 \in \left(D(B^2-A);X\right)_{\frac{1}{2p},p}$$

avec u *déterminée par* (2.18).

3.3 Cas ou Λ est inversible

Cela concerne les cas où Λ est toujours inversible.

Proposition 3.1 *Soit* (6) *et* (2.1) $\backsim$ (2.6) *si :*

$$M - H \text{ est fermé et } 0 \in \rho(M-H) \tag{3.8}$$

et

$$\left\| \left(I - e^{L+M}\right)^{-1} (L+M)(e^{L+M})(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1. \tag{3.9}$$

donc (2.7) *est vérifiée et, on peut appliquer théorème* (1).

Preuve. comme $I - e^{L+M}$ est inversible et son inverse borné ([10]) on peut écrit :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (M-H) - e^{L+M}\left[(M-H) - L - M\right] \\
&= (M-H) - (M-H)e^{L+M} + (L+M)e^{L+M} \\
&= \left[I - e^{L+M} + (L+M)e^{L+M}(M-H)^{-1}\right](M-H) \\
&= (I - e^{L+M})\left[I + (I-e^{L+M})^{-1}(L+M)e^{L+M}(M-H)^{-1}\right](M-H) \\
&= G(M-H).
\end{aligned}$$

avec ; $G = (I - e^{L+M})\left[I + (I-e^{L+M})^{-1}(L+M)e^{L+M}(M-H)^{-1}\right] \in \mathcal{L}(X)$.
maintenant, $0 \in \rho(G)$ à partir de (3.9) et d'aprés (3.8) on déduit que :
$\Lambda = G(M-H)$ est inversible et à inverse borné. ■

Remarque 3.2 *1. La proposition* (3) *reste vraie si on remplace (*3.9) *par :*

$$\begin{cases} \textit{pour } n_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \\ \left\|\left[(I-e^{L+M})^{-1}(L+M)e^{L+M}(M-H)^{-1}\right]^{n_1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1. \end{cases}$$

*2. d'après (*3.8)*,(*6) *et (*2.1) $\backsim$ (2.6) *si on a :*

$$\begin{cases} -M \in BIP(X,\theta_M) \\ H \in BIP(X,\theta_H) \ \textit{avec } \theta_H \in (0,\pi) \\ 0 \in \rho(M)\cup\rho(H) \ \textit{et } \theta_M + \theta_H \in (0,\pi) \end{cases}$$

alors $(-M)+H$ *est fermé et inversible et à un inverse borné* [8].

3. le problème spectral avec le paramètre $\omega \geq \omega_0$*(où* $\omega_0 > 0$*,fixé)*

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x) \ ,x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, u(1) = u_1. \end{cases} \tag{3.10}$$

est étudié dans [5] *tel que :*

$$A_\omega = A - \omega I,\ L_\omega = B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \ \textit{et} \ \ M_\omega = -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}.$$

*alors le problème (*3.10) *devient :*

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - L_\omega M_\omega u(x) = f(x) \ ,x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, u(1) = u_1. \end{cases}$$

et donc on peut appliquer les résultats de notre travail, on remplace L, M *par* L_ω, M_ω*. Dans un cas particulier, le paramètre spectral* ω *est utilisé pour obtenir (*3.9) *quand* ω *assez grand et (*2.7) *par la proposition* (3).

Proposition 3.2 *d'après (*6) *et (*2.1) $\backsim$ (2.6) *si*

$$M - H \ \textit{est fermé et } 0 \in \rho(M-H)$$

et pour $n_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\left\|\left((L+H)(M-H)^{-1}\right)^{n_1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

*alors (*2.7) *est vérifié et on peut appliquer théorème* (1).

Preuve. on écrit :

$$\Lambda = (M - H) + e^{L+M}(L + H)$$

alors,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left[I + e^{L+M}(L + H)(M - H)^{-1}\right](M - H) \\ &= (I - C)(M - H). \end{aligned}$$

où : $C = -e^{L+M}(L+H)(M-H)^{-1}$ alors (2.7) est vérifié si et seulement si : $0 \in \rho(I-C)$. D'après la preuve de lemme (2 dans [4])

- $\exists k \geq 1, \exists \delta > 0, \forall y > 0 : \left\|e^{y(L+M)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ke^{-\delta y}$.
- $\exists n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \left\|e^{2kn_1(L+M)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ke^{-2kn_1\delta} < 1$.

Alors,$\left\|C^{kn_1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ donc $0 \in \rho(I - C^{kn_1})$ et d'où $0 \in \rho(I - C)$. ■

3.4 Des cas particuliers

On considère le problème (3) et (6), (2.1) $\backsim$ (2.6) :

1. Si $H = -L$ alors $\Lambda = M + L$ et (2.7) est vérifié.
2. Si $-\frac{1}{2}(L - M) \subset H$ alors $\Lambda = \frac{1}{2}(L + M)(I + e^{L+M})$ et (2.7) vérifié.

On considère le problème (1) et (3.1) $\backsim$ (3.6) :
si $H = -B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ où $-B$ alors (3.7) est vérifié.

Chapitre 4

Exemples

4.1 Exemple 1

Considérons l'opérateur K tel que :

$$-K \text{ est } BIP \quad \text{et } 0 \in \rho(K) \tag{*}$$

avec,

$$L = M = -H = -\sqrt{-K}.$$

alors,

$$\Lambda = M + L = -2\sqrt{-K} \text{ est inversible et à inverse borné.}$$

et,

$$-L = (-K)^{\frac{1}{2}} \qquad (-L)^{it} = (-K)^{\frac{it}{2}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

donc,

$$L - M \subset 0 \quad \text{et} \quad -ML = K.$$

Alors, le problème (3) s'écrit :

$$\begin{cases} u''(x) + Ku(x) = f(x) \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - \sqrt{-K}u(0) = d_0. \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

Il est clair que K vérifie les hypothèses (2.1) $\backsim$ (2.6) donc on peut appliquer les résultats du chapitre (02).

Par exemple, soient $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K = \Delta - cI$ $(c > 0)$.

Remarque 4.1 *l'opérateur $K = \Delta - cI$ $(c > 0)$ vérifie $(*)$. (voire [9]).*

4.2 Exemple 2

On considère $X = L^2(\mathbb{R})$ et L, M deux opérateurs en X définie par :

$$\begin{cases} D(L) = D(M) = H^2(\mathbb{R}). \\ Lu = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu, \quad Mu = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a > 0, c < 0). \end{cases}$$

Alors, on a :

$$\begin{array}{rcl}(L-M)u &=& b\dfrac{\partial u}{\partial y}+cu \text{ et } (L+M)u = 2a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}+cu.\\ \text{avec} &:& 0\in\rho(L+M).\end{array}$$

et,

$$(LM)\,u = a\left(a\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+b\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

on prend :

$$Hu=-\frac{1}{2}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}+cu\right),\quad u\in D(H)=H^1.$$

Donc, le problème (3) s'écrit :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\left(b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)-a\left(\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}+b\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x,y)=f\left(x,y\right)\ x\in\left(0,1\right),\ y\in\mathbb{R}.\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(0,y\right)+\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(0,y\right)+\dfrac{c}{2}u\left(0,y\right)=d_0\left(y\right),y\in\mathbb{R}.\\ u\left(1,y\right)=u_1\left(y\right),\quad y\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Alors, les opérateurs vérifiant les hypothèses (2.1) $\backsim$ (2.6) donc on peut appliquer les résultats du chapitre (02).

Remarque 4.2 *on peut généraliser dans* $\mathbb{R}^n$ *et on définit les opérateurs :*

$$\begin{array}{rcl}Lu &=& -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu.\\ Mu &=& \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)u.\end{array}$$

(voir [11])

4.3 Exemple 3

On considère les opérateurs L, M vérifiant (2.1) $\backsim$ (2.5) et l'opérateur H vérifiant (2.6), posons :

$$M-H \text{ a inverse borné.}$$

il reste à obtenir (2.7). Mais, comme il est indiqué dans la proposition (4), on a :

$$\Lambda=\left[I+e^{L+M}\left(L+H\right)\left(M-H\right)^{-1}\right]\left(M-H\right).$$

avec : $\left(L+H\right)\left(M-H\right)^{-1}\in\mathcal{L}\left(X\right)$

$$\left\|e^{L+M}\left(L+H\right)\left(M-H\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Maintenant, si on remplace L par :

$$L_\delta = L - \delta I \text{ avec, } \delta > 0 \text{ assez grand.}$$

et L_δ, M et H vérifiant (2.1) $\backsim$ (2.7)

$$\begin{aligned}
\left\| e^{L_\delta + M} (L_\delta + H) (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \left\| e^{L_\delta} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M} (L + H) (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \delta \left\| e^{L_\delta} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M} (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq e^{-\delta} \left\| e^{L} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M} (L + H) (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \delta e^{-\delta} \left\| e^{L} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M} (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)}
\end{aligned}$$

alors,

$$\left\| e^{L_\delta + M} (L_\delta + H) (M - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1 \text{ pour } \delta > 0 \text{ assez grand.}$$

4.4 Exemple 4

On va étudier l'équation de la chaleur particulière suivante (dimension 2) en vue de bien mettre en relief les techniques des multiplicateurs de Fourier et de transfert pour majorer les puissances imaginaires pures d'opérateurs positifs et appliquer les résultats des sommes de Dore-Venni dans les espaces L^p qui sont UMD pour tout $p \in (1, \infty)$.(vaoir [11]).

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t} (t, x, y) = a(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} (t, x, y) + b(y) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} (t, x, y) + f(t, x, y) \\ u(0, x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega \\ u(t, \sigma) = 0 \quad (t, \sigma) \in \left]0, T\right[\times \partial\Omega \end{array} \right.$$

Ω est l'ouvert particulier $]0,1[\times]0,1[$. $f \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$ et a, b sont des fonctions particulières de $L^\infty(\Omega)$:

$$a(x) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ pour } x \in [0, x_1[. \\ \beta_1 \text{ pour } x \in]x_1, 1] . \end{array} \right.$$

$$b(y) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \text{ pour } y \in [0, y_1[. \\ \beta_2 \text{ pour } y \in]y_1, 1] . \end{array} \right.$$

avec par exemple : $\alpha_1 < \beta_1$; $\alpha_2 < \beta_2$.
(On a choisi arbitrairement une discontinuité de a et de b respectivement en x_1 et y_1)
Posons alors :

$$D(A_1) = W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1) \qquad A_1 v = a(x) v^n \text{ pour } v \in D(A_1).$$

Proposition 4.1 *L'opérateur linéaire fermé A_1 vérifie :*

i) $\rho(A_1) \supset [0, +\infty[$ *et* $\exists K > 0 / \left\| (A_1 - \lambda)^{-1} \right\|_{L(L^p(0,1))} \leq \dfrac{K}{I + \lambda} \quad \forall \lambda \geq 0.$

ii) $\exists K > 0 \diagup \forall s \in \mathbb{R}\, (-A_1)^{is} \in L\left(L^p\left(0,1\right)\right)$ *et* $\left\| (-A_1)^{is} \right\| \leq K e^{|s|\varepsilon_1}$.

Preuve. *Pour le point* $i)$ *on résoudre explicitement l'équation :*

$$\begin{cases} a\left(x\right) v^{n}\left(x\right) - \lambda v\left(x\right) = g\left(x\right) \quad & g \in L^{p}\left(0,1\right), \lambda > 0 \\ v\left(0\right) = v\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

On peut voir que ce problème admet une unique solution $v \in W^{2,p}\left(0,1\right) \cap W_0^{1,p}\left(0,1\right)$ *et que :*

$$\left\{ \left(A_1 - \lambda\right)^{-1} g = v\left(x\right) \right\}$$

$$v\left(x\right) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1 (x-s)}}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + Q_1\left(x,s,\lambda\right)\right) g\left(s\right) ds + \int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1 (s-x)}}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + R_1\left(x,s,\lambda\right)\right) g\,(s \\ \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\beta_1 (x-s)}}}{\sqrt{\lambda/\beta_1}} \left(\frac{1}{\beta_1} + Q_2\left(x,s,\lambda\right)\right) g\left(s\right) ds + \int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\beta_1 (s-x)}}}{\sqrt{\lambda/\beta_1}} \left(\frac{1}{\beta_1} + R_2\left(x,s,\lambda\right)\right) g\,(s \end{cases}$$

où $(*)$ *est vraie pour* $0 \leq x < x_1$ *et* $(**)$ *pour* $1 \geq x \geq x_1$ *et :*

$$Q_1\left(x,s,\lambda\right) = \left(\frac{e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1}} - e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1 (s)}} - e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1 (1-x)}} + e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1 (1-x+s)}}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1}}}\right)$$

Les autres termes Q_i *et* R_i *s'obtiennent par symétrie. Il est classique grâce à la symétrie du noyau et au lemme de Schur d'en déduit* $i)$.

Pour le point $ii)$ *on utilise la représentation intégrale suivante pour la puissance complexe d'un opérateur linéaire fermé (voir Triebel) pour* $0 < \mathrm{Re}\left(z\right) < 1/2$:

$$\begin{aligned} \left[(-A_1)^{-z} g\right](x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-z\right)\Gamma\left(z\right)} \int_0^{\infty} \lambda^{-z} \left[\left(-A_1 + \lambda\right)^{-1} g\right](x)\, d\lambda \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=4} I_{1,j}\left(x\right) \quad \textit{pour} \;\; x \in [0, 1/2[\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=4} I_{2,j}\left(x\right) \quad \textit{pour} \;\; x \in]1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

pour $I_{1,1}$ *on a:*

$$\begin{aligned}
I_{1,1}(x) &= \frac{1}{\alpha_1\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^x\left(\int_0^\infty \lambda^{-z}\frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1(x-s)}}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}}d\lambda\right)g(s)\,ds.\\
&= \frac{1}{\alpha_1\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^x\int_0^\infty\left(\frac{\alpha_1\sigma^2}{(x-s)^2}\right)^{-z}\frac{\alpha_1 e^{-\sigma}2\sigma}{\frac{\sigma}{(x-s)}(x-s)^2}g(s)\,d\sigma ds\\
&= \frac{2\alpha_1^{-z}}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^x (x-s)^{2z-1}\left(\int_0^\infty \sigma^{-2z}e^{-\sigma}d\sigma\right)g(s)\,ds\\
&= \frac{2\alpha_1^{-z}\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^x (x-s)^{2z-1}g(s)\,ds\\
&= \frac{2\alpha_1^{-z}\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}(\Phi_z * G)(x)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}\Phi_z(\lambda) = \chi_{[0,\infty[}(\lambda).\lambda^{2z-1} = \lambda_+^{2z-1} \in S' \\ G(s) = g(s) \ \ \textit{sur} \ [0,1] \ \ \textit{et nulle ailleurs.}\end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
F(\Phi_z)(\xi) &= \Gamma(2z)[2\pi i\xi + 0]^{-2z}\\
&= \Gamma(2z)|2\pi\xi|^{-2z}\left[h(\xi)e^{i\pi z} + h(-\xi)e^{-i\pi z}\right]
\end{aligned}$$

Où h *est la fonction valant* 1 *pour* $\xi > 0$ *et nulle ailleurs et* F *la transformée de Fourier.*
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
I_{1,1}(x) &= \bar{F}[m_z.F(G)](x) \quad \textit{où :}\\
m_z(\xi) &= \frac{2\alpha_1^{-z}\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}F(\Phi_z)(\xi).\\
&= \frac{2\alpha_1^{-z}\Gamma(1-2z)\Gamma(2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}|2\pi\xi|^{-2z}\left[h(\xi)e^{i\pi z} + h(-\xi)e^{-i\pi z}\right]
\end{aligned}$$

Et grâce à la formule des compléments de la fonction Γ *on a :*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|m_z(\xi)| \le \left|\frac{1}{\alpha_1^z}\frac{1}{\cos\pi z}\frac{1}{2i\pi\xi^{2z}}\right|e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.$$

Et :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\xi m_z(\xi)| \le |2z|\left|\frac{1}{\alpha_1^z}\frac{1}{\cos\pi z}\frac{1}{2i\pi\xi^{2z+1}}\right|e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.$$

D'où l'on déduit par application de Mikhlin et du même travail pour les autres termes $I_{k,j}$, *après les avoir mis sous forme de convolution, l'existence d'une constante* K, *positive(dépendant de* p, α_i, β_i*) telle que :*

$$\begin{aligned}
\left\|(-A_1)^{-z}\right\|_{L(L^p(0,1))} &\leq K\,(1+|z|)\,\frac{1}{|\alpha_1^z|}\frac{1}{|\cos \pi z|}e^{\pi|\operatorname{Im} z|}. \\
\left\|(-A_1)^{is}\right\|_{L(L^p(0,1))} &\leq K\,(1+|s|)\,\frac{e^{\pi|s|}}{\cosh \pi\,|s|} \leq K e^{\xi_1|s|}.
\end{aligned}$$

Les mêmes techniques s'emploient pour A_2*; par ailleurs ces deux opérateurs commutent au sens des résolvantes (à cause des fonctions choisies* $a(x)$ *,* $b(x)$*) ; en utilisant donc le théorème 2.4 il vient :*

$$\left\|(-A_1 - A_2)^{is}\right\|_{L(L^p(0,1))} \leq K e^{Max(\xi_1,\xi_2|s|}.$$

On en déduit la résolution et la régularité de la solution du problème 3.1 dans l'espace $L^p\,(0,T;L^p\,(Q))$ *.* ■

.

Bibliographie

[1] Balakrishnan A.V. Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them. *Pacific J. Math.,* 1960, vol. 10, pp. 419-437. DIO : 10.2140/pjm.1960.10.419.

[2] Cheggag M., Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Medeghri A. Strum - Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces. Differential and Integral Equations, 2008, vol. 21, no. 9-10, pp. 981-1000.

[3] Cheggag M., Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Medeghri A. Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Spaces. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 1-16.

[4] Cheggag M., Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Medeghri A. Abstract Differential Equation of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in Holder Spaces. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, no. 8, pp. 1453-1475. DIO : 10.1080/00036811.2011.635653.

[5] Cheggag M., Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Medeghri A. Spectral Parameter Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in UMD Spaces and Applications. (To appear).

[6] Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Tanabe H., Yagi A. Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2006, vol. 49, pp.193-214.DIO : 10.1619/ fesi.49.193.

[7] Favini A., Labbas R., .Maingot S., .Tanabe H., Yagi A. Simplified Approach in the Study of Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces and New Applications. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2008, vol. 51, pp.165-187. DIO : 10.1619/ fesi.51.165.

[8] Favini A., Labbas R., .Maingot S., Meisner M. Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations un Noncommutative Cases. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2013, vol. 33, no. 11-12, pp. 4967-4990.

[9] Labbas R., Moussaoui M. : Résolution de l'équation de la Chaleur a coefficients discontinus par la méthode des sommes d'opérateurs. Lyon Saint-Etienne novembre 1995 preprint $N^0$217.

[10] Lunardi A. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. Birkhauser, Basel, 1995.

[11] Prus J., Sohr H. On operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces. *Mathematicsche zeitschrift,* 1990, vol. 203, pp. 429-452. DIO : 10.1007/BF02570748.

[12] Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Amsterdam, North Holland, 1978