

UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Thème

Noyaux d'Ondelettes de Jacobi et Application au  
Traitement du Signal

Présenté par

*M<sup>elle</sup> : ELKHEDIM Nacera*

*M<sup>elle</sup> : HOUARI Siham*

Soutenu le 29/05/2016

Devant le jury

<b>Président</b>	Mr	AMIR	Abdessamad	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
<b>Examineur</b>	<i>M<sup>elle</sup></i>	KAISSALI	Zineb	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
<b>Encadreur</b>	Mr	BAHRI	Sidi Mohamed	<b>U. MOSTAGANEM.</b>

---

# RESUME

---

L'analyse en ondelettes consiste à décomposer les signaux sur une famille de fonctions obtenues en dilatant et translatant une ondelette dite analysante, dont la caractéristique essentielle est d'être localisée, c'est-à-dire nulle ou presque hors d'un intervalle de temps borné.

Dans ce travail, nous avons considéré une famille très généralisante d'ondelettes construite à partir de polynôme de Jacobi. Vu leurs variété étant dépendante de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , ces ondelettes concernent un grand éventail de bases de fonctions analysantes.

Nous avons testé ces ondelettes sur quelques signaux connues dans la littérature du traitement du signal.

---

---

# Remerciements

---

En tout premier lieu, nous remercions Allah le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour aller jusqu'au bout de ce travail.

Nous tenons à adresser nos chaleureux remerciements au collectif enseignant et tout particulièrement à notre encadreur Mr. BAHRI Sidi Mohamed qui nous a aidé à adopter une démarche méthodologique, c'est grâce à ses précieux conseils que nous avons pu et avec succès réaliser notre projet.

A tous les membres du jury pour leur disponibilité.

A nos camarades de la promotion 2015-2016.

Toute notre reconnaissance à nos amis, pour tous les encouragements .

A tous ceux qui ont contribué à réaliser ce travail de près ou de loin.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à nos parents.

Merci à tous.

---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Listes des figures</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Analyse de Fourier</b>	<b>2</b>
1.1 Série de Fourier . . . . .	2
1.2 Transformée de Fourier . . . . .	3
1.3 Transformée inverse de Fourier . . . . .	3
1.4 Transformée discrète de Fourier . . . . .	4
1.5 Transformée discrète inverse de Fourier . . . . .	5
1.6 Transformée rapide de Fourier . . . . .	5
<b>2 Analyse par ondelettes</b>	<b>8</b>
2.1 Transformée de Wigner-Ville . . . . .	8
2.2 Transformée de Gabor (ou transformée à fenêtre glissante) . . . . .	9
2.3 Transformée continue en ondelette . . . . .	12
2.4 Transformée discrète en ondelette . . . . .	16
2.5 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	16

---

<b>3</b>	<b>Noyaux d'ondelettes de Jacobi</b>	<b>18</b>
3.1	Ondelettes de Jacobi . . . . .	18
3.1.1	Les polynômes orthogonaux . . . . .	18
3.1.2	Polynômes de Jacobi . . . . .	19
3.1.3	Ondelettes de Jacobi . . . . .	20
3.1.4	Application à l'analyse du signal . . . . .	22
3.2	Noyaux d'ondelettes de Jacobi . . . . .	25
3.2.1	Noyaux polynômiaux . . . . .	25
3.2.2	Fonctions Echelles localisées . . . . .	25
3.2.3	Fonctions Echelles de Jacobi localisées . . . . .	25
3.2.4	Ondelettes de Jacobi centrées . . . . .	28
3.2.5	Noyaux d'ondelettes de Jacobi . . . . .	33
3.2.6	Application à l'analyse du signal . . . . .	34
	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

---

# Listes des figures

---

**Figure 1** : Les fenêtres (la fenêtre triangulaire, les fenêtres de Hanning et Hamming et fenêtre de Gauss).

**Figure 2** : Une famille d'ondelettes de Jacobi.

**Figure 3** : Les ondelettes de Jacobi.

**Figure 4** : Ondelettes de Jacobi  $\psi_{0,0}^{1,0}$ .

**Figure 5** : Ondelettes de Jacobi  $\psi_{0,1}^{1,2}$ .

**Figure 6** : Ondelettes de Jacobi  $\psi_{1,2}^{1,2}$ .

**Figure 7** : Les fonctions échelles pour  $n = 16$ .

**Figure 8** : Les fonctions échelles pour  $n = 32$ .

**Figure 9** : Les noyaux d'ondelettes pour  $n = 16$ .

**Figure 10** : Les noyaux d'ondelettes pour  $n = 32$  et  $n = 64$ .

**Figure 11** : Noyaux d'ondelettes de Jacobi de différents indices.

---

---

# INTRODUCTION

---

Les ondelettes ont été créées pour répondre à un besoin en traitement du signal que la transformée de Fourier ne solutionnait pas. En 1768, Joseph Fourier invente la transformée de Fourier dont l'analyse permet la décomposition d'un signal et qui est jusqu'au 20<sup>ème</sup> siècle la seule technique faisable. En 1909, Alfred Haar définit ce que l'on peut considérer comme les premières ondelettes, et en 1946, Denis Gabor met en place la transformée de Fourier à court terme. Ce n'est qu'au début des années 1980 que le terme d'ondelettes a été introduit dans le langage mathématique par Jean Morlet. Puis les années 1980-1990 ont connu l'apparition du traitement du signal qui entraîne l'amélioration de cette théorie par de nombreux mathématiciens.

Dans ce travail, nous avons considéré une famille très généralisante d'ondelette construite à partir des polynômes orthogonaux de Jacobi. Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le chapitre **1**, nous avons présenté l'analyse de Fourier qui nous permet d'analyser par fréquence masquant l'aspect temporel.

Dans le chapitre **2**, nous avons introduit les transformées en ondelettes qui permettent une analyse mixte temps fréquence. Tout d'abord, on a commencé par la transformée de Wigner-Ville qui est représentée un signal en temps et fréquence. Ensuite, nous avons présenté la transformée de Gabor qui permet une analyse par fréquence instantané. Puis, nous nous sommes intéressées par la transformée continue et discrète en ondelette.

Dans le chapitre **3**, nous avons défini et énuméré quelques propriétés principales des polynômes orthogonaux classiques celle de Jacobi, entre autre les polynômes de Legendre, Hermite, et de Laguerre. Dans la seconde partie de ce travail, nous avons considéré une fonction ondelette en termes de polynôme de Jacobi. Notre travail est la généralisation du travail de M<sup>elle</sup> Lakhal ([8]) qui a considéré le cas particulier d'indice  $(0, 2)$ . Pour notre part, nous avons étudié les ondelettes de Jacobi pour différents d'indices  $\alpha, \beta > -1$ .

Notre objectif est d'introduire en détail, le cadre général de l'analyse par ondelettes de Jacobi pour effectuer les décompositions des fonctions utilisées en analyse du signal. Ensuite, nous

nous sommes concernées par les noyaux de ces ondelettes.

Nous avons testé cette dernière méthode à noyau sur quelques signaux.





# Analyse de Fourier

---

## 1.1 Série de Fourier

Soit  $f(t)$  un signal périodique du temps  $t$  et intégrable sur une période  $P$ . L'expression de ce signal dans la base orthogonale des fonctions sinus et cosinus est :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{2\pi kt}{P} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{P} \right] + \frac{a_0}{2}. \quad (1.1.1)$$

Les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  forment la série de Fourier,  $k$  est un entier naturel. Leurs expressions sont déterminés par :

$$a_k = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{P} dt, \quad b_k = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{P} dt. \quad (1.1.2)$$

Dans tous les cas, on peut prendre  $b_0 = 0$ .

En notation complexe, en posant  $\theta_k = \frac{2\pi kt}{P}$  et en utilisant la formule de Moivre dans l'expression (1.1.1), nous obtenons :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \frac{1}{2} (e^{j\theta_k} + e^{-j\theta_k}) + b_k \frac{1}{2j} (e^{j\theta_k} - e^{-j\theta_k}) \right] \quad (1.1.3)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_{|k|} - j \cdot \text{sign}(k) b_{|k|}) e^{j\theta_k} \right]. \quad (1.1.4)$$

Où,  $|k|$  représente la fonction valeur absolue de  $k$ .

Ainsi, en posant :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2} [a_{|k|} - j \cdot \text{sign}(k) b_{|k|}], \quad (1.1.5)$$

$\widehat{f}(k)$  représente le spectre en fréquence du signal  $f(t)$ . Connaissant  $\widehat{f}(k)$ , alors :

$$a_{|k|} = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k), \quad (1.1.6)$$

$$b_{|k|} = j \left[ \widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k) \right]. \quad (1.1.7)$$

Nous obtenons :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{j\theta_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2j\pi kt/P}. \quad (1.1.8)$$

La définition de  $\widehat{f}(k)$  devient en remplaçant  $a_k$  et  $b_k$  par leurs expressions :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-2j\pi kt/P} dt, \quad k \in ]-\infty, \infty[. \quad (1.1.9)$$

Sous réserve que le signal  $f(t)$  remplisse certaines conditions mathématiques, il existe un unique spectre  $\widehat{f}(k)$ ,  $k$  entier.

## 1.2 Transformée de Fourier

Dans la pratique, il existe un grand nombre de signaux apériodiques qui ne peuvent pas être décomposés en série de Fourier. Alors nous utiliserons un autre outil mathématique qui est la transformée de Fourier, et cette dernière est définie par l'expression suivante :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2j\pi xt} dt. \quad (1.2.1)$$

## 1.3 Transformée inverse de Fourier

L'expression de la transformée inverse de Fourier du signal  $f(t)$  est :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{2j\pi xt} dx. \quad (1.3.1)$$

## 1.4 Transformée discrète de Fourier

Soit  $f(t)$  un signal continu et périodique en fonction du temps, de période  $P$ . L'expression des coefficients  $\hat{f}(k)$  de sa décomposition en série de Fourier, est donnée par (1.1.9) :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-2j\pi kt/P} dt. \quad (1.4.1)$$

Soit  $f(n)$ , le signal résultat de l'échantillonnage de  $f(t)$  par un peigne de Dirac de largeur  $T$ , et ayant un nombre de dents  $N$ . Si  $n$  est le rang du  $n^{\text{ème}}$  échantillon, alors  $n$  varie de 0 à  $N - 1$  :

$$P \rightarrow N \cdot T, \quad t \rightarrow n \cdot T, \quad dt \rightarrow T \quad \text{et} \quad f(t) \rightarrow f(n)$$

Dans ce changement de notations,  $f(n)$  signifie la valeur de  $f(t)$  au point  $t = nT$ .

Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-2j\pi kt/P} dt \rightarrow \frac{1}{N \cdot T} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) T e^{-2j\pi knT/(NT)}. \quad (1.4.2)$$

Ceci correspond à une approximation de l'intégrale, mais ce n'est pas la seule possible,  $k$  est un entier entre 0 et  $+\infty$ , or une analyse utilisant la théorie de l'échantillonnage montre que  $k$  peut prendre  $N$  valeurs. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2j\pi knT/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.4.3)$$

C'est la transformée discrète de Fourier.

L'ensemble des valeurs  $\hat{f}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , peut se calculer en utilisant un produit matriciel en posant :

$$[\hat{f}] = [\hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots, \hat{f}(N - 1)]^T; \quad (1.4.4)$$

$$[f] = [f(0), f(1), \dots, f(N - 1)]^T, \quad (1.4.5)$$

et :

$$W = e^{-2j\pi/N} \Rightarrow W^{kn} = (e^{-2j\pi/N})^{kn}. \quad (1.4.6)$$

Et si l'on convient de désigner par  $[W^{kn}]$  la matrice carrée, symétrique de taille  $N \cdot N$  :

$$[W^{kn}] = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & \dots & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & \dots & W^{N-2} & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{N-2} & \dots & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^{N-1} & \dots & W^2 & W^1 \end{bmatrix}, \quad (1.4.7)$$

alors, l'ensemble des valeurs  $\widehat{f}(k)$  s'exprime par l'expression :

$$[\widehat{f}] = \frac{1}{N} \cdot [W^{kn}] \cdot [f]. \quad (1.4.8)$$

## 1.5 Transformée discrète inverse de Fourier

La transformée discrète de Fourier est une conséquence de l'approximation d'une intégrale par une série finie. La transformée discrète inverse de Fourier s'exprime en utilisant la même approximation, et est aussi une série finie. L'expression (1.1.8) du développement en série de Fourier de  $f(t)$  pourra s'écrire si  $N$  est pair :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k) e^{2j\pi kn/N} \quad (1.5.1)$$

En utilisant les conventions d'écriture matricielle on aura :

$$[f] = [W^{-kn}] \cdot [\widehat{f}]. \quad (1.5.2)$$

C'est l'expression de la transformée discrète inverse de Fourier.

## 1.6 Transformée rapide de Fourier

Le calcul direct de la transformée discrète de Fourier par un ordinateur, bien que très simple à implementer. Pour calculer les coefficients  $\widehat{f}(n)$  d'un signal  $f(n)$  avec  $n = 0, \dots, N$ , il est nécessaire d'effectuer le produit d'un vecteur de dimension  $N$  par une matrice de dimension  $N \times N$  soit  $N^2$  multiplications.

La transformée rapide de Fourier est une simple optimisation du calcul direct de la transformée discrète pour certaines valeurs de  $N$ . Concrètement,  $N$  est choisi comme un produit de puissances de nombres premiers de valeur la plus petite possible. Le cas le plus simple est de choisir  $N = 2^L$ .

En reprenant l'expression (1.4.3), des coefficients de la transformée discrète

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2j\pi knT/N} \quad (1.6.1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.6.2)$$

Si  $N$  est puissance de 2,  $N/2$  est alors aussi un entier et  $\frac{N}{2} = 2^{L-1}$  est aussi une puissance de 2

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N/2-1} f(n) W^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} f(n) W^{kn} \right]. \quad (1.6.3)$$

En transformant la seconde somme du second membre, on pourra écrire :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [f(n) W^{kn} + f(n + N/2) W^{k(n+N/2)}] \quad (1.6.4)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [(f(n) + (f(n + N/2) W^{kN/2})) W^{kn}]. \quad (1.6.5)$$

Or  $W^{kN/2}$  ne prend que deux valeurs,  $+1$  et  $-1$ . En effet :

$$W^{kN/2} = e^{-2j\pi k \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{N}} = e^{-j\pi k} = (-1)^k. \quad (1.6.6)$$

Nous avons choisi  $N$  puissance de deux. Comme  $k$  prend les valeurs de l'ensemble  $]0, N[$ , il y a autant de termes  $k$  pairs que de termes  $k$  impairs. Le nombre de termes pairs, ainsi que le nombre de termes impairs, sont aussi des puissances de deux.

$k$  est pair, posons  $k = 2l$  et :

$$g(n) = f(n) + f(n + N/2). \quad (1.6.7)$$

$$\widehat{f}(2l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n) W^{2ln} \quad (1.6.8)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n) (W^2)^{ln}, \quad l = 0, \dots, N/2. \quad (1.6.9)$$

L'expression de droite représente une transformée discrète de Fourier en  $N/2$ .

$k$  est impair, posons  $k = 2l + 1$ , et :

$$y(n) = f(n) - f(n + N/2). \quad (1.6.10)$$

$$\widehat{f}(2l+1) = \frac{1}{2} \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) (W^2)^{ln}, \quad l = 0, \dots, N/2. \quad (1.6.11)$$

Avec

$$h(n) = y(n) W^n. \quad (1.6.12)$$

L'expression de droite représente une transformée discrète de Fourier en  $N/2$ .

Chacune des deux séries de termes pair et impairs peut donc à son tour se décomposer en deux nouvelles séries, l'une paire et l'autre impaire. Le nombre des éléments de ces quatre nouvelles séries sera alors  $N/4 = 2^{L-2}$ .

En itérant ce processus  $L$  fois, le calcul de la transformée discrète de Fourier de dimension  $N$  est ramené au calcul de  $N/2$  transformées discrètes de dimension deux.

# Analyse par ondelettes

---

La transformée de Fourier  $\widehat{f}(x)$  d'un signal  $f(t)$  est une représentation purement fréquentielle masquant malheureusement ainsi, l'aspect temporel du signal. Or il est très important de pouvoir analyser puis de visualiser simultanément les deux aspects temporel et fréquentiel d'un signal. Pour atteindre cet objectif, beaucoup de mathématiciens et de physiciens se sont livrés à la recherche dans cette direction. Nous introduisons, dans ce qui suit, dans un ordre chronologique, les plus importantes de ces transformations à double analyse.

## 2.1 Transformée de Wigner-Ville

J. Ville désirait représenter un signal dans le domaine mixte temps-fréquence.

Soit  $f(t)$  une fonction d'énergie finie<sup>1</sup>, continue pour tout  $t$ . La transformée de Wigner-Ville  $T_W f(b, x_0)$  est donnée par l'expression :

$$T_W f(b, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f\left(b + \frac{\tau}{2}\right) \cdot \overline{f\left(b - \frac{\tau}{2}\right)} \right] e^{-2j\pi x_0 \tau} d\tau. \quad (2.1.1)$$

$T_W f(t, x)$  est une fonction continue et réelle du temps  $b$  et de la fréquence  $x_0$ . La transformation de Wigner-Ville permet une analyse au voisinages de ces valeurs que l'on recherche.

---

<sup>1</sup>L'ensemble d'énergie finie est l'espace  $L^2$ , avec :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$

**Proposition 2.1.1** ([7]) Soit  $f(t)$  une fonction continue pour tout  $t$  et  $T_W f(b, x_0)$  sa transformée de Wigner-Ville. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_W f(b, x_0) dx_0 = \|f(b)\|^2, \quad (2.1.2)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_W f(b, x_0) db = \|\widehat{f}(x_0)\|^2. \quad (2.1.3)$$

Ces deux expressions permettent de lier simplement la transformée de Wigner-Ville à la transformée de Fourier.

## 2.2 Transformée de Gabor (ou transformée à fenêtre glissante)

Denis Gabor, dans les années 1940([7]) propose de construire une base de fonctions analytiques en temps et fréquence à partir d'une fonction dite fenêtre mère de Gabor  $\psi(t)$  :

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (2.2.1)$$

À partir de cette fonction, on pourra construire une famille de fonctions "fenêtres" :

$$\psi_{bx}(t) = \psi(t - b) e^{2j\pi xt}. \quad (2.2.2)$$

Ainsi, si  $f(t)$  est une fonction continue et de carré sommable. alors sa transformée de Gabor (ou de Fourier à fenêtre glissante), est donnée par :

$$T_G f(b, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{\psi_{bx}(t)} dt. \quad (2.2.3)$$

En pratique, on utilise une panoplie de fenêtres comme la fenêtre triangulaire, les fenêtres de Hamming et Hanning (pour  $\alpha = 0.5$  fenêtre de Hamming,  $\alpha = 0.54$  fenêtre de Hanning), et

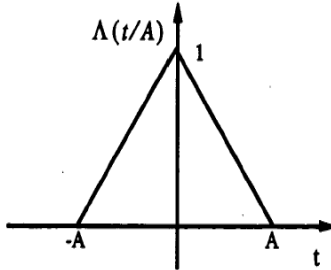


la fenêtre de Gauss.

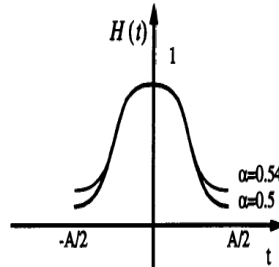
$$\widehat{\Lambda}(x) = A \operatorname{sinc}^2(Ax),$$

$$H(t) = [\alpha + (1-\alpha) \cos(2\pi \frac{t}{A})] \Pi(\frac{t}{A})$$

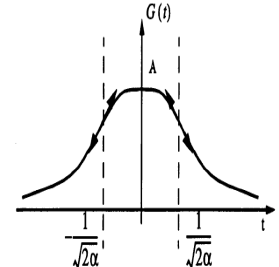
$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi t^2}.$$



Fenêtre triangulaire



Fenêtre de Hamming et Hanning  
(Figure 1)



Fenêtre de Gauss

### Conservation de l'énergie ou théorème de Parseval-Plancherel

**Théorème 2.2.1** ([7]) Soient  $f(t)$  et  $g(t)$ , deux fonctions continues et de carré sommable, et soient  $T_G f(b, x)$  et  $T_G g(b, x)$  respectivement leur transformée de Gabor en utilisant la même fonction fenêtre  $\psi(t)$ . Nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_G f(b, x) \overline{T_G g(b, x)} dx db = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \quad (2.2.4)$$

**Preuve.** La transformée de Gabor peut être vue aussi comme une transformée de Fourier. Nous pouvons appliquer le théorème de Parseval-Plancherel associé à la transformée de Fourier. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_G f(b, x) \overline{T_G g(b, x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) \cdot \overline{\psi(t-b)}] \overline{[g(t) \cdot \overline{\psi(t-b)}]} dt \quad (2.2.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \cdot |\psi(t-b)|^2 dt db \quad (2.2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^2 du \right] \quad (2.2.7)$$

Or l'intégrale entre crochets représente la norme de la fonction porte  $\psi(t)$ . Nous avons donc démontré le théorème de Parseval-Plancherel associé à la transformée de Gabor.  $\square$

**Proposition 2.2.1** ([7]) Il est concevable d'utiliser deux fonctions fenêtres différentes pour la transformée de Gabor de  $f(t)$  et  $g(t)$ , respectivement  $\psi_f(t)$  et  $\psi_g(t)$ . La seule condition

imposée aux deux fonctions fenêtres pour pouvoir utiliser le théorème précédant est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_f(t) \cdot \overline{\psi_g(t)} dt = 1. \quad (2.2.8)$$

**Théorème 2.2.2** ([7]) Soit  $f(t)$ , une fonction continue et de carré sommable, et soit  $T_G f(b, x)$  sa transformée de Gabor en utilisant la fonction fenêtre  $\psi(t)$ . Nous avons la formule de reconstruction de la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_G f(b, x) \cdot \psi(t-b) e^{2j\pi xt} db dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_G f(b, x) \cdot \psi_{bx}(t) db dx \quad (2.2.9)$$

Ou encore, en utilisant la notation du produit scalaire :

$$f(t) = \left\langle T_G f(b, x) \mid \overline{\psi_{bx}(t)} \right\rangle_{L^2} \quad (2.2.10)$$

Preuve([7])

**Proposition 2.2.2** ([7]) Nous avons utilisé la même fonction fenêtre  $\psi(t)$  pour la transformée de Gabor de  $f(t)$  et pour la transformée inverse de Gabor. Or il est concevable d'utiliser deux fonctions fenêtres différentes, respectivement  $\psi(t)$  et  $\tilde{\psi}(t)$ . La seule condition imposée aux deux fonctions fenêtres pour pouvoir utiliser le théorème précédant est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(t)} \cdot \tilde{\psi}(t) dt = 1. \quad (2.2.11)$$

La transformée inverse de Gabor est alors :

$$f(t) = \left\langle T_G f(b, x) \mid \overline{\psi_{bx}(t)} \right\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_G f(b, x) \cdot \tilde{\psi}(t-b) e^{2j\pi xt} db dx, \quad (2.2.12)$$

avec :

$$T_G f(b, x) = \left\langle f(t) \mid \overline{\psi_{bx}(t)} \right\rangle_L. \quad (2.2.13)$$

**Remarque 2.2.1** La transformée de Fourier pourra être considérée comme une transformée de Fourier à fenêtre glissante dont la fenêtre  $\psi(t)$  serait totalement concentrée en fréquence et dont la fonction origine serait totalement répartie dans le temps.

## 2.3 Transformée continue en ondelette

Nombreux signaux comme les signaux sismiques, doivent être décomposés en phase de longueur et de caractéristique variable. C'est après l'étude de tels signaux que J. Morlet propose une méthode nouvelle où la fenêtre varie non seulement par translation, mais aussi par dilatation ou contraction. C'est le début de l'utilisation des ondelettes en traitement des signaux. Soit  $f(t)$  une fonction de  $L^2$ , et soit  $\psi(t)$  une fonction fenêtre de  $L^2$  et  $\widehat{\psi}(x)$  sa transformée de Fourier. On imposera :

$$C_{\widehat{\psi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(x)|}{|x|} dx < \infty. \quad (2.3.1)$$

Par dilatation-contraction et par translation, on génère à partir de  $\psi(t)$ , la famille :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (2.3.2)$$

La variable  $a$  représente le facteur de dilatation-contraction de la fenêtre  $\psi(t)$  et  $b$  représente le facteur de translation. En fait, le facteur  $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$  est introduit de façon à ce que les deux fonctions  $\psi(t)$  et  $\psi_{a,b}(t)$  aient même norme, à savoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt. \quad (2.3.3)$$

En effet :

$$|\psi_{a,b}(t)| = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (2.3.4)$$

En effectuant le changement de variable  $\frac{t-b}{a} \rightarrow T$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\psi_{a,b}(t)| &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(T) \overline{\psi(T)} a dT \\ &= |\psi(t)|. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

La transformée continue en ondelettes  $T_O f(a, b)$  de la fonction  $f(t)$  est alors définie par :

$$T_O f(a, b) = \langle f(t) | \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (2.3.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (2.3.7)$$

**Définition 2.3.1** ([7]) Si  $\psi(t)$  est une fonction oscillante et d'intégrale nulle, et si  $\psi(t)$  génère une base de fonctions, par dilatation et par translation, elle est dite une ondelette mère.

L'expression de la transformée de Fourier de  $\widehat{\psi}_{a,b}(x)$  est donnée par :

$$\widehat{\psi}_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-2j\pi xt} dt \quad (2.3.8)$$

$$= \sqrt{|a|} e^{-2j\pi xb} \widehat{\psi}(ax). \quad (2.3.9)$$

Par contre, on peut aussi utiliser la transformée de Fourier d'une ondelette, non pas par rapport à  $t$ , mais vis à vis du paramètre de translation  $b$ . Dans ces conditions on aura :

$$\widehat{\psi}_{a,b}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot e^{-2j\pi x_0 b} db \quad (2.3.10)$$

$$= \sqrt{|a|} e^{-2j\pi x_0 t} \widehat{\psi}(-ax_0). \quad (2.3.11)$$

Dans la plupart des développements, on utilise la fonction conjuguée  $\overline{\psi(t)}$  au lieu de  $\psi(t)$ . Cela permet d'écrire :

$$\overline{\widehat{\psi}_{a,b}(x_0)} = \sqrt{|a|} \cdot e^{2j\pi x_0 t} \cdot \widehat{\psi}(ax_0). \quad (2.3.12)$$

En ce qui concerne les développements sur les ondelettes, il s'agit d'établir deux relations fondamentales, qui sont :

- La reconstruction du signal original  $f(t)$  à partir de sa transformée en ondelette, soit en utilisant l'ondelette initiale, soit en utilisant une nouvelle ondelette reliée à la première par une relation fonctionnelle connue.
- L'énergie finie d'un signal  $f(t)$  doit donner des décompositions en ondelettes qui sont aussi d'énergie finie. Au fait, il n'y a pas toujours conservation d'énergie.

**Théorème 2.3.1** ([7]) Soit  $\psi(t)$  une fonction de  $L^2$  et qui soit aussi une ondelette mère et soient  $f(t)$  et  $g(t)$  deux fonctions appartenant à  $L^2$ . On a :

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} T_O f(a, b) \cdot T_O g(a, b) \frac{da}{a^2} db = C_{\widehat{\psi}} \langle f(t) | g(t) \rangle. \quad (2.3.13)$$

Preuve ([7])

**Théorème 2.3.2** Cette expression est l'analogue du théorème de Parseval-Plancherel pour la transformation continue en ondelette.

Preuve ([7])

**Proposition 2.3.1** ([7]) *Dans le cas particulier où  $f(t)$  est égale à  $g(t)$ , nous avons :*

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} |T_O f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} = C_{\widehat{\psi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.3.14)$$

**Proposition 2.3.2** ([7]) *Il est conservable d'utiliser deux ondelettes différentes, respectivement  $\psi_f(t)$  et  $\psi_g(t)$  pour la transformée continue en ondelette de  $f(t)$  et  $g(t)$ . La seule condition imposée aux deux ondelettes pour pouvoir utiliser le théorème précédent est :*

$$C_{\widehat{\psi}_{fg}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\psi}_f(x) \cdot \overline{\widehat{\psi}_g(x)}}{|x|} dx \leq \infty. \quad (2.3.15)$$

**Proposition 2.3.3** ([7]) *En utilisant le fait que les transformées de Fourier de  $f(t)$  et  $\psi(t)$  existent, on peut aisément montrer :*

$$\widehat{f}(x) \cdot \sqrt{|a|} \cdot \overline{\widehat{\psi}(ax)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T_O f(a, b) e^{-2j\pi bx} db. \quad (2.3.16)$$

**Preuve.** Reprenons l'expression (2.3.7) :

$$T_O f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{\psi_{a,b}(t)} dt. \quad (2.3.17)$$

On peut appliquer le théorème de Parseval pour la transformée de Fourier aux deux fonctions sous l'intégrale :

$$T_O f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \cdot \overline{\widehat{\psi}_{a,b}(x)} dx. \quad (2.3.18)$$

En utilisant l'expression (2.3.9), on obtient :

$$T_O f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \cdot \overline{\sqrt{|a|} e^{-2j\pi bx} \widehat{\psi}_{a,b}(ax)} dx \quad (2.3.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \widehat{f}(x) \cdot \sqrt{|a|} \overline{\widehat{\psi}_{a,b}(ax)} \right] \cdot e^{2j\pi bx} dx. \quad (2.3.20)$$

Or l'intégrale n'est autre que l'expression d'une transformée inverse de Fourier, non plus par rapport à  $t$ , mais par rapport à  $b$ , la transformée de Fourier donne ainsi :

$$\left[ \widehat{f}(x) \cdot \sqrt{|a|} \overline{\widehat{\psi}_{a,b}(ax)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T_O f(a, b) \cdot e^{-2j\pi bx} db. \quad (2.3.21)$$

□

**Théorème 2.3.3** ([7]) *Transformée inverse continue en ondelette-Formule de reconstruction.*

Soit  $f(t)$  une fonction de  $L^2$  et soit  $T_O f(a, b)$  sa transformée continue en ondelette par l'ondelette mère  $\psi(t)$ . On a :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\widehat{\psi}}} \int \int_{-\infty}^{+\infty} T_O f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \cdot \frac{da}{a^2}. \quad (2.3.22)$$

**Proposition 2.3.4** ([7]) *On peut utiliser deux ondelettes mères différentes pour la transformée continue en ondelette de  $f(t)$  et pour la transformée inverse, respectivement  $\psi(t)$  et  $\widetilde{\psi}(t)$ .*

La seule condition imposée aux deux ondelettes pour pouvoir utiliser le théorème précédent est :

$$C_{\widehat{\psi}\widetilde{\psi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\widehat{\psi}(x)} \cdot \widehat{\psi}(x)}{|x|} dx \leq \infty. \quad (2.3.23)$$

La transformée continue inverse en ondelette est alors :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\widehat{\psi}\widetilde{\psi}}} \int \int_{-\infty}^{+\infty} T_O f(a, b) \cdot \widetilde{\psi}_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}, \quad (2.3.24)$$

avec :

$$T_O f(a, b) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (2.3.25)$$

**Remarque 2.3.1** *En traitement de signal, seules les fréquences de valeurs positives sont utilisées. Dans ce cas, le facteur de dilatation-contraction  $a$ , ne peut prendre que des valeurs positives et non nulles. Si l'on veut tenir compte de cette exigence, alors pour  $a > 0$ , les expressions précédentes doivent être intégrées de zéro à l'infini. Dans ces conditions, en refaisant les calculs, on aboutit à la condition :*

$$\widehat{\psi}^2(x) = \widehat{\psi}^2(-x). \quad (2.3.26)$$

Il est nécessaire d'imposer une autre condition plus restrictive à l'ondelette mère :

$$\int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(x)|^2}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-x)|^2}{x} dx, \quad (2.3.27)$$

$$= \frac{1}{2} C_{\widehat{\psi}} < \infty. \quad (2.3.28)$$

## 2.4 Transformée discrète en ondelette

**Définition de discrétisation de l'échelle ou transformée en ondelettes dyadique**

**Définition 2.4.1** ([3]) *Pour discrétiser la transformée en ondelette  $T_O f(a, b)$ , nous devons discrétiser tels que deux paramètres  $a$  et  $b$ . En discrétisant le paramètre échelle  $a$  sans le paramètre de translation  $b$ , nous obtenons la transformée en ondelette dyadique :*

$$T_O^d f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left( \frac{t-b}{2^j} \right) dt, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.1)$$

Cette définition implique le résultat important suivant :

**Théorème 2.4.1** ([3]) *Supposons qu'il existe deux constantes positives  $A$  et  $B$  tels que :*

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^j w) \right|^2 \leq B, \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (2.4.2)$$

alors

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{C_\psi}{2^j} \|T_O^d f\|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (2.4.3)$$

relativement à la norme  $L^2$ .

Preuve ([3])

**Remarque 2.4.1** *Ce théorème montre que la discrétisation du seul paramètre d'échelle à rend la transformée en ondelettes similaire à une frame.*

## 2.5 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

L'approche multiéchelle consiste à approcher  $L^2(\mathbb{R})$  par une suite croissante de sous espaces notés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Ces espaces vont du plus grossier ( $j \rightarrow -\infty$ ) au plus fin ( $j \rightarrow +\infty$ ). C'est ce que traduit la définition d'analyse multirésolution ci-dessous.

**Définition 2.5.1** ([11]) *Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite d'espace vectoriel  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ , avec :*

1.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,
2.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
3.  $V_j \subset V_{j+1}$ ,
4.  $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$ ,
5.  $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$ ,
6. Il existe  $\varphi \in V_0$  telle que  $\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ .

**Théorème 2.5.1** ([11]) *Il existe une fonction  $\psi$  telle que  $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  soit une base de  $W_0$ . De plus, il existe un algorithme de calcul pour obtenir  $\psi$  lorsque  $\varphi$  est donnée.*

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.5.1)$$

donc

$$V_{j+1} = V_0 \oplus \left( \bigoplus_{k=0}^j W_k \right). \quad (2.5.2)$$

Preuve ([11])

**Remarque 2.5.1** *L'inclusion des différents espaces  $V_j$  ne permet pas de regrouper les  $\varphi_{j,k}$  pour former une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ . C'est pour cela que nous construisons un autre système  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés. L'espace  $W_j$  est le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  défini par :*

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j. \quad (2.5.3)$$



# Noyaux d'ondelettes de Jacobi

---

De manière analogue à la théorie des séries de Fourier, les ondelettes sont principalement utilisées pour la décomposition de fonctions. La décomposition d'une fonction en ondelettes consiste à l'écrire comme une somme pondérée de fonctions obtenues à partir d'opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée ondelette mère  $\psi$ . Ces opérations consistent en des translations et dilatations de la variable.

## 3.1 Ondelettes de Jacobi

### 3.1.1 Les polynômes orthogonaux

**Définition 3.1.1** ([5]) *Une famille de polynômes orthogonaux est une suite infinie de polynômes  $P_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  ... à coefficients réels, dans laquelle chaque  $P_n(t)$  est de degré  $n$ , et telle que ces polynômes sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire de fonctions donné.*

Le produit scalaire de fonctions le plus simple est l'intégrale du produit de ces fonctions, sur un intervalle borné :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (3.1.1)$$

Plus généralement, on peut introduire une fonction poids  $w(t)$  dans l'intégrale, avec  $w$  doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégrale du produit de la fonction poids par

un polynôme doit être finie :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) w(t) dt \quad (3.1.2)$$

Avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro. Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications.

### 3.1.2 Polynômes de Jacobi

Soient  $\alpha, \beta > -1$ . Nous définissons les polynômes de Jacobi par l'équation suivante :

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}}{(-1)^n \times 2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((1-t)^\alpha (1+t)^\beta (1-t^2)^n). \quad (3.1.3)$$

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux pour la fonction de poids  $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

$$\int_{-1}^1 t^m J_n^{(\alpha, \beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = 0, \quad \text{pour } m < n. \quad (3.1.4)$$

Si  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ , alors les polynômes de Jacobi sont appelés les polynôme de **Tchebychev**.

Dans le cas particulier  $\alpha = \beta = 0$ , les

$$J_n^{(0,0)}(t) = \frac{1}{(-1)^n \times 2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((1-t^2)^n), \quad (3.1.5)$$

sont appelés les polynômes de **Legendre**.

### Polynômes d'Hermite et de Laguerre

Deux autres grandes familles de polynômes orthogonaux possèdent des propriétés semblables aux polynômes de Jacobi. On les appelle les polynômes d'Hermite  $H_n(t)$ , et les polynômes de Laguerre  $L_n(t)$ .

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad \text{avec le poids } w(t) = e^{-t^2}, \quad (3.1.6)$$

et

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n), \quad \text{avec le poids } w(t) = \sqrt{t} e^{-t}. \quad (3.1.7)$$

### 3.1.3 Ondelettes de Jacobi

Elles sont générées à partir d'un polynôme de Jacobi  $J_m^{\alpha,\beta}$ .

Les ondelettes de Jacobi sont définies sur  $[0, 1]$  par

$$\psi_{n,m}^{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_n}} \times 2^{\frac{j+1}{2}} \times J_m^{\alpha,\beta}(2^{j+1}t - 2n + 1) & \text{si } \frac{n}{2^j} \leq t \leq \frac{n+1}{2^j} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (3.1.8)$$

avec

$$h_n = \left\{ \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2 \times n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \right\}, \quad (3.1.9)$$

avec

$$\Gamma : \alpha \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

où  $n$  et  $j$  sont des entiers positifs représentent le nombre de niveau de la décomposition,  $m$  est le degré du polynôme de Jacobi, et le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{h_n}}$  assure la normalisation.

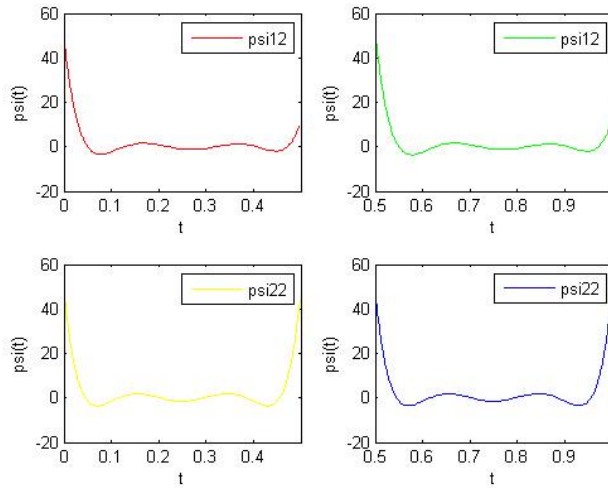
L'ensemble des ondelettes de Jacobi forme une base orthonormale de  $L^2([0, 1])$

#### Algorithme de la construction de $\psi$

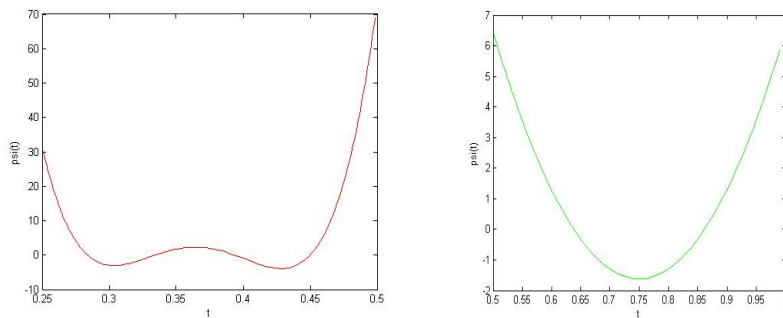
On veut construire une ondelette de Jacobi à partir de polynôme de Jacobi, tout d'abord on va calculer le coefficient de la normalisation  $h_n$ . Ensuite, on calcule les fonction  $\psi_{j,n}^{\alpha,\beta}$  et ces intervalle associé.

**Exemple 3.1.1** *La figure ci-dessous représente quelques graphes d'ondelette de Jacobi avec*

$m = 6$  ,  $j = 1$  et  $n = 1, 2$ .

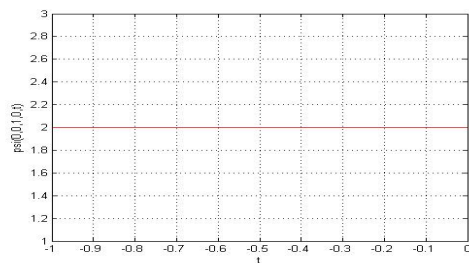


Une famille d'ondelettes de Jacobi  
(Figure 2)



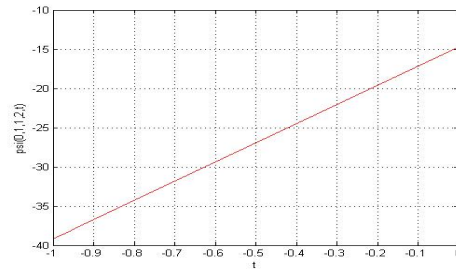
Ondelette de Jacobi  $\psi_{2,2}^{3,2}(t)$       Ondelette de Jacobi  $\psi_{2,1}^{1,1}(t)$   
(Figure 3)

**Remarque 3.1.1** *On remarque que quand le degré de polynôme de Jacobi devient grand alors l'ondelette de Jacobi devient plus oscillante.*

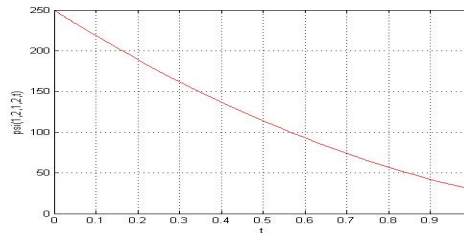


Ondelette de Jacobi  $\psi_{0,0}^{1,0}(t)$

(Figure 4)

Ondelette de Jacobi  $\psi_{0,1}^{1,2}(t)$ 

(Figure 5)

Ondelette de Jacobi  $\psi_{1,2}^{1,2}(t)$ 

(Figure 6)

### 3.1.4 Application à l'analyse du signal

L'analyse d'une fonction de carré sommable en ondelettes de Jacobi consiste à calculer l'ensemble de ses produits scalaires avec les ondelettes de la famille  $\{\psi_{j,n}^{\alpha,\beta}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ . Les nombres obtenus sont appelés coefficients d'ondelettes, où  $\psi_{j,n}^{\alpha,\beta}(t)$  est une ondelette de Jacobi,  $n$  est le facteur de translation et  $j$  le facteur de dilatation-contraction.

**Théorème 3.1.1** ([4]) *Toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se décompose sous la forme*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{j,n} \psi_{j,n}^{\alpha,\beta}. \quad (3.1.10)$$

Les coefficients  $\{\langle f, \psi_{j,n}^{\alpha,\beta} \rangle\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$  sont les transformées en ondelettes de Jacobi de la fonction  $f$ , avec

$$\langle f, \psi_{j,n}^{\alpha,\beta} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{j,n}^{\alpha,\beta}(t) dt. \quad (3.1.11)$$

On veut décomposer un signal quelconque  $f$  par les ondelettes de Jacobi, à savoir :

$$C_{jn} = \left\langle f(t), \psi_{jn}^{\alpha, \beta}(t) \right\rangle \quad (3.1.12)$$

### Programme

Ce programme sous Matlab permet de calculer les ondelettes de Jacobi d'indice  $\alpha, \beta > -1$ . Nous avons écrit un code qui génère le travail de M<sup>elle</sup> Lakhel([8]), pour n'importe quelle valeur de  $\alpha, \beta > -1$  et  $m \in \mathbb{N}$ , et nous avons utilisé ces ondelettes pour la décomposition de quelques signaux simples.

```

clc, clear all, syms t,
m = input('donner m =')
n = input('donner n =')
alpha = input('donner alpha =')
beta = input('donner beta =')
f = input('donner f =')
c = input('donner c =')
d = input('donner d =')
j = input('donner j =')
% La fonction d'ondelette
J = simplify(((1 - t)^(-alpha)*(1 + t)^(-beta)/((-1)^(m) * (2^(m))*gamma(m + 1)))
    *diff((1 - t)^(alpha) * (1 + t)^(beta)*(1 - t^2)^m, m);
for k = 1 : j
    for l = 1 : n
        h(1, l) = ((2^(alpha+beta+1))*gamma(l+alpha+1)*gamma(l+beta+1))/
            ((2 * l+alpha+beta+1)*gamma(l + 1)*gamma(l+alpha+beta+1));
        psi(k, l) = simplify(1/sqrt(h(1, l)))*2^((k + 1)/2) * tt(J, (2^(k + 1)) * t - 2 * l + 1);
        a(k, l) = (l - 1)/(2^k);
        b(k, l) = l/(2^k);
    end
end
end
psi

```

```

% La décomposition du signal f
G = f.*psi
for k = 1 : j
    for l = 1 : n
        MMa(k,l) = max(a(k,l),c);
        mmb(k,l) = min(b(k,l),d);
        C = int(G,MMa(k,l),mmb(k,l));
    end
end
C

```

### Sous programmes

---

```

function [y] = tt(f,a)
syms t
f = inline(f);
y = f(a);
end

```

**Exemple 3.1.2** Soit  $f(t) = \sin(t)$ , pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ .

$$C_{jn} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{jn}^{\alpha, \beta}(t), \quad (3.1.13)$$

Il nous reste donc à calculer les  $C_{jn}$ , pour  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $m = 6$ .

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \begin{cases} 0.0153 & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
 C_{12} &= \begin{cases} -0,6653 & \text{si } 0.5 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
 C_{21} &= \begin{cases} 0,6559 & \text{si } 0 \leq t \leq 0.25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
 C_{22} &= \begin{cases} -0,1904 & \text{si } 0.25 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

## 3.2 Noyaux d'ondelettes de Jacobi

Notre objectif est de construire une base d'ondelettes localisées et comme toute ondelette se définit par la fonction échelle et la fonction ondelette, on commence par trouver une base de fonctions échelles.

### 3.2.1 Noyaux polynômiaux

**Définition 3.2.1** ([5]) *On appelle noyau polynômial une fonction à deux variables ayant la forme suivante :*

$$k_n(t, x) := \sum_{k=0}^n P_k(t) P_k(x), \quad (3.2.1)$$

avec  $P_k(t)$  polynôme d'ordre  $k$ .

### 3.2.2 Fonctions Echelles localisées

Soient  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ,  $n$  polynômes orthogonaux. On considère leur enveloppe linéaire fermée :

$$V_n = \overline{\text{span}} \{P_1, P_2, \dots, P_n\}. \quad (3.2.2)$$

Il est clair que  $\{P_r\}_{r=0}^n$  forme une base pour  $V_n$ .

**Définition 3.2.2** ([5]) *Les fonctions échelles sont définies comme les noyaux polynômiaux :*

$$\varphi_{n,r}(t) = \varphi_n(t; x_r^{(n+1)}) := k_n(t, x_r^{(n+1)}), \quad r = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.3)$$

relativement à un ensemble convenable de paramètres :

$$x_0^{(n+1)} < x_1^{(n+1)} < \dots < x_n^{(n+1)}, \quad (3.2.4)$$

### 3.2.3 Fonctions Echelles de Jacobi localisées

Les fonctions échelles de Jacobi sont définies comme suit :

$$\varphi_{n,r}^{\alpha,\beta}(t) = \varphi_n^{\alpha,\beta}(t; x_r^{(n+1)}) := k_n(t, x_r^{(n+1)}) = \sum_{k=0}^n J_k^{\alpha,\beta}(t) J_k^{\alpha,\beta}(x), \quad r = 0, 1, \dots, n$$



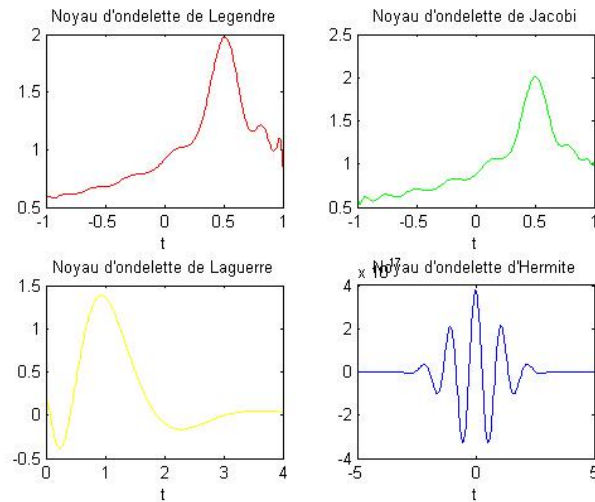
### Le programme qui calcule la fonction d'échelle localisée

Ce programme sous Matlab permet de calculer les noyaux polynômiaux de Jacobi pour n'importe quelle valeur de  $n \in \mathbb{N}$ . Afin de faire des figures. Le code est utilisé ici pour calculer la fonction d'échelle  $\varphi$  pour une solution particulière.

**Remarque 3.2.1** *On peut utiliser ce programme pour calculer les noyaux polynômiaux d'Hermite, Laguerre, et Legendre. Il suffit de changer le polynôme orthogonal.*

```
-----
clc, clf, clear all, syms t,
n =input('donner n =')
% Les polynômes de Jacobi avec  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.8$ 
for i = 1 : 2 * n
    l(i, 1) = ((1 - t)^(-0.5) * (1 + t)^(-0.8)/((-1)^(i) * (2^(i))*gamma(i + 1)))
    *diff((1 - t)^(-0.5) * (1 + t)^(0.8) * (1 - t^2)^i, i);
end
L = [1;simplify(l)]
w = (1 - t)^(-0.5) * (1 + t)^(-0.8);
%%% La fonction d'échelle %%%
h = 0;
for j = 1 : n + 1
    d(j) =tt(L(j), 0.5);
    h = h + L(j) * d(j);
end
ph(1) = h;
end
phi = ph * w
% Le graphe
fplot(inline(phi),[-1 1], 'r')
title('la fonction d échelle phi(t)')
y =ylabel('phi(t, 0.5)'); x =xlabel('t');
-----
```

Les figures ci-dessous représentent des noyaux polynômiaux de certaines polynômes orthogonaux pour  $n = 16$ .



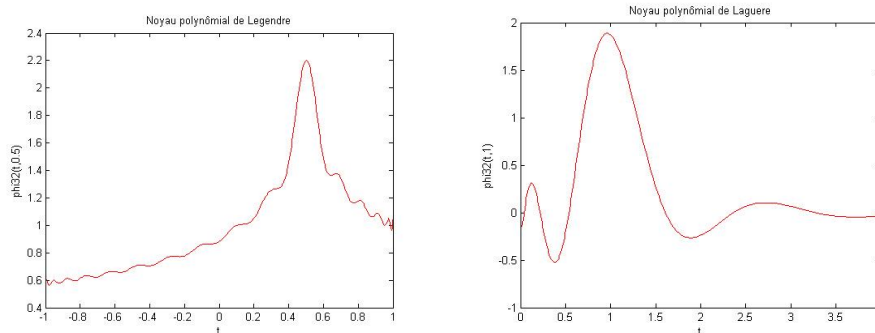
Les fonctions échelles pour  $n=16$

Figure 7

La fonction poids de Legendre :  $w(t) = 1$ ,  $\varphi_{16}(t;0.5)$ , la fonction poids Jacobi  $w(t) = (1 - t)^{-0.5} (1 + t)^{-0.8}$ ,  $\varphi_{16}(t;0.5) \cdot w(t)$ , La fonction poids de Laguerre :  $w(t) = \sqrt{t}e^{-t}$ ,  $\varphi_{16}(t;1) \cdot w(t)$ , la fonction poids JaScobi :  $w(t) = e^{-t^2}$ ,  $\varphi_{16}(t;1) \cdot w(t)$ .

Au fait, on peut voir les fonctions échelles  $\varphi_{n,r}$ , d'une part, comme fonctions de base polynômiales dans un espace  $L^2$  à poids (i.e.,  $\varphi_{n,r} \in L^2_w$ ) et d'autre part, comme fonctions de base pondérées dans un espace  $L^2$  sans poids (i.e.,  $\varphi_{n,r} \cdot w \in L^2$ ). Dans le résultat suivant, nous énumérons quelques propriétés fondamentales des fonctions échelles.

La figure représente les fonctions échelles pour  $n = 32$ .



La fonction échelle de Legendre et Laguerre

Figure 8

**Théorème 3.2.1** ([5])

1. Le produit scalaire des fonctions échelles peut être évalué comme suit :

$$\langle \varphi_{n,r}, \varphi_{n,s} \rangle = \varphi_{n,r}(x_s^{(n+1)}), \quad r, s = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2.5)$$

2. La fonction échelle  $\varphi_{n,r}$  est localisée autour de  $x_r^{(n+1)}$ .

3. Les  $\varphi_{n,r}$  forment une base pour  $V_n$ , i.e.,

$$V_n = \overline{\text{span}} \{ \varphi_{n,0}, \varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n} \}. \quad (3.2.6)$$

### 3.2.4 Ondelettes de Jacobi centrées

Dans cette section, nous définissons notre ondelette et nous discutons de ses propriétés.

On a, d'après l'analyse multirésolution

$$W_n := V_{2n} \ominus V_n = \text{span} \{ P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{2n} \} \quad (3.2.7)$$

Notre but est d'identifier les fonctions ondelettes qui définissent une base localisée pour  $W_n$ .

**Définition 3.2.3** ([5]) *Nous définissons les ondelettes en termes de noyau polynômial comme suit :*

$$\begin{aligned} \psi_{n,r}^{\alpha,\beta}(t) &= \psi_n^{\alpha,\beta}(t; z_r^{(n)}) := K_{2n}(t; z_r^{(n)}) - K_n(t; z_r^{(n)}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} J_k^{\alpha,\beta}(z_r^{(n)}) J_k^{\alpha,\beta}(t), \quad (r = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

pour un ensemble approprié de paramètres

$$z_0^{(n)} < z_1^{(n)} < \dots < z_{n-1}^{(n)}. \quad (3.2.9)$$

Notons que :

$$\psi_n(z_r^{(n)}) > 0, \quad \text{avec } n > 1. \quad (3.2.10)$$

**Le programme qui calcule la fonction d'ondelette localisée**

---

```
clc, clf, clear all, syms t,
n = input('donner n =')
```

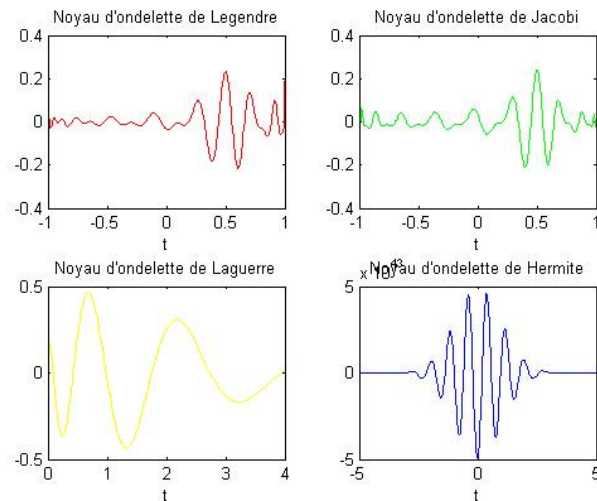
```

% Les polynômes de Jacobi avec  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.8$ 
for  $i = 1 : 2 * n$ 
     $l(i, 1) = ((1 - t)^{-0.5} * (1 + t)^{-0.8}) / ((-1)^i * (2^i) * \text{gamma}(i + 1))$ 
    *diff((1 - t)^(-0.5) * (1 + t)^(0.8) * (1 - t^2)^i, i);
end
L = [1;simplify(l)]
w = (1 - t)^(-0.5) * (1 + t)^(-0.8)
% La fonction d'ondelette
p = 0;
for  $j = n + 2 : 2 * n + 1$ 
     $s(j) = \text{tt}(L(j), 0.5)$ ;
p = p + L(j) * s(j);
ps(1) = p;
end
psi = ps * w
% Le graphe
fplot(inline(psi),[-1 1],'b')
title('la fonction ondelette psi(t)')
y = ylabel('psi(t, 0.5)'); x = xlabel('t');

```

---

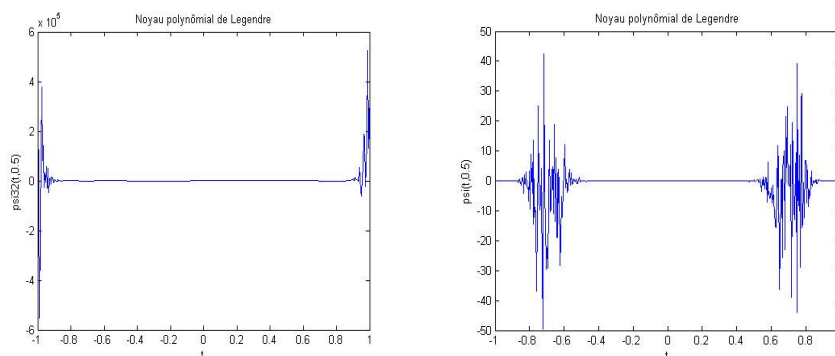
Les figures ci-dessous représentent les fonctions ondelettes pour  $n = 16$ .



Les fonctions d'ondelettes pour  $n=16$   
(Figure 9)

La fonction poids de Legendre :  $w(t) = 1, \psi_{16}(t; 0.5)$ ; la fonction poids Jacobi  $w(t) = (1 - t)^{-0.5} (1 + t)^{-0.8}, \psi_{16}(t; 0.5) \cdot w(t)$ , la fonction poids de Laguerre :  $w(t) = \sqrt{t}e^{-t}, \psi_{16}(t; 1) \cdot w(t)$ , la fonction poids Jacobi :  $w(t) = e^{-t^2}, \psi_{16}(t; 1) \cdot w(t)$ .

La figure représente les fonction d'ondelettes pour  $n = 32$  et  $n = 64$ .



Noyau d'ondelette de Legendre pour  $n=32$     Noyau d'ondelette de Legendre pour  $n=64$   
(Figure 10)

Le théorème suivant donne certaines propriétés des ondelettes  $\psi_{n,r}$  (3.2.8).

**Théorème 3.2.2** ([5])

1. Le produit scalaire des fonctions ondelettes peut être évalué comme suit :

$$\langle \psi_{n,r}, \psi_{n,s} \rangle = \psi_{n,r}(z_s^{(n)}), (r, s = 0, 1, \dots, n - 1). \tag{3.2.11}$$

2. La fonction d'ondelette est localisée autour  $z_r^{(n)}$ .

3. Les  $\psi_{n,r}$  forment une base pour  $W_n$ , i.e.,

$$W_n = \text{span} \{ \psi_{n,0}, \psi_{n,1}, \dots, \psi_{n,n-1} \}. \quad (3.2.12)$$

4. La fonction échelle et la fonction d'ondelette sont orthogonales les unes aux autres

$$\langle \psi_{n,r}, \varphi_{n,s} \rangle = 0, \quad (r, s = 0, 1, \dots, n-1).$$

### Programme

Ce programme sous Matlab permet de calculer les noyaux polynômiaux de Legendre pour n'importe quelle valeur de  $n \in \mathbb{N}$ . Nous avons utilisé la fonction (LegendrePoly.m) qui est créée par (David Terr, Raytheon, en 5-10-04) pour extraire les coefficients de polynômes de Legendre et cela nous aide à trouver leurs racines. Afin de faire les figures. Ce code est utilisé pour calculer les fonctions d'échelles  $\varphi_{n,r}(t)$  qui forment la base  $V_n$  et les fonctions d'ondelettes  $\psi_{n,r}(t)$  qui forment la base  $W_n$ .

```
-----
clc, clf, clear all, syms t,
n = input('donner n =')
% Les polynômes de Legendre
for i = 1 : 2 * n
    l(i,1) = (1/((gamma(i+1)) * (2^i)) * (diff((t^2 - 1)^i), i));
end
L = [1; l]
% Les racines des polynômes de Legendre
x = sort(roots(LegendrePoly(n+1)))
y = sort(roots(LegendrePoly(n)))
% La fonction d'échelle
for i = 1 : length(x)
    h = 0;
    for j = 1 : n + 1
        d(j) = tt(L(j), x(i,1));
        h = h + L(j) * d(j);
    end
end
```

```

        end
        phi(i,1) = h;
end
phi
% La fonction d'ondelette
for i = 1 : length(y)
    p = 0;
    for j = n + 2 : 2 * n + 1
        s(j) = tt(L(j), y(i));
        p = p + L(j) * s(j);
    end
    psi(i,1) = p;
end
psi
-----
function pk = LegendrePoly(n)
if n == 0
    pk = 1;
elseif n == 1
    pk = [1 0];
else
    pk2 = zeros(n + 1, 1);
    pk2(n + 1) = 1;
    pk1 = zeros(n + 1, 1);
    pk1(n) = 1;
    for k = 2 : n
        pk = zeros(n + 1, 1);
        for e = n - k + 1 : 2 : n
            pk(e) = (2 * k - 1) * pk1(e + 1) + (1 - k) * pk2(e);
        end
    end
end

```

```

pk(n + 1) = pk(n + 1) + (1 - k)*pkm2(n + 1);
pk = pk/k;
if k < n
    pkm2 = pkm1;
    pkm1 = pk;
end
end
end
end

```

### 3.2.5 Noyaux d'ondelettes de Jacobi

Ils sont générés à partir de noyau d'ondelette de Jacobi  $\psi_m^{\alpha,\beta}(t)$ .

$$\psi_{n,j}^{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_n}} \times 2^{\frac{j+1}{2}} \times \psi_m^{\alpha,\beta}(2^{j+1}t - 2n + 1) & \text{si } \frac{n}{2^j} \leq t \leq \frac{n+1}{2^j} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (3.2.13)$$

avec

$$h_n = \left\{ \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{(2 \times n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \right\}, \quad (3.2.14)$$

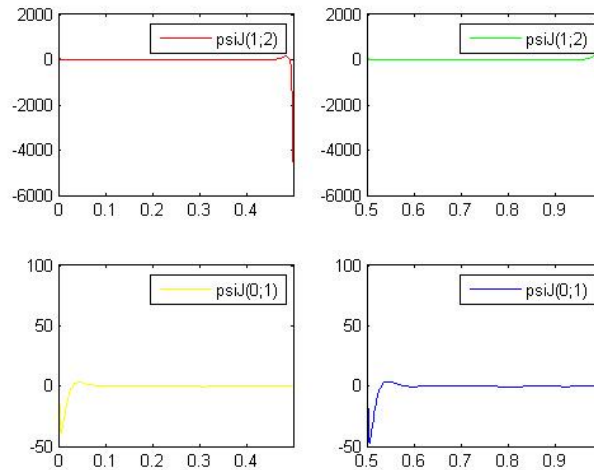
où  $n$  est le paramètre de translation,  $j$  est le paramètre de dilatation-contraction, et qui sont des entiers positifs avec  $n \times j$  est le nombre de niveau de la décomposition.

$m$  est représenté le degré d'ondelette de Jacobi.

**Exemple 3.2.1** *La figure représente quelques graphes d'ondelettes de Jacobi avec  $m = 6$ ,*



$j = 1$  et  $n = 1, 2$ .



Noyaux d'ondelettes de Jacobi de différents d'indice  
(Figure 11)

### 3.2.6 Application à l'analyse du signal

D'après le théorème 3.1.1 on veut décomposer un signal  $f$  par les noyaux d'ondelettes de Jacobi, à savoir :

$$C_{jn} = \left\langle f(t), \psi_{jn}^{\alpha, \beta}(t) \right\rangle. \quad (3.2.15)$$

#### Programme

Ce programme sous Matlab permet de calculer les noyaux d'ondelettes de Jacobi d'indice  $\alpha$ ,  $\beta > -1$  pour n'importe quelle valeur de  $\alpha$ ,  $\beta > -1$  et  $n, m, j \in \mathbb{N}$ . Et nous avons utilisés ces ondelettes pour la décomposition de quelques signaux simples.

```
clc, clf, clear all, syms t,
m = input('donner m =')
n = input('donner n =')
alpha = input('donner alpha=')
beta = input('donner beta=')
f = input('donner f =')
c = input('donner c =')
d = input('donner d =')
jj = input('donner jj =')
```

```

% La fonction poids
w = (1 - t)^(-alpha)*(1 + t)^(-beta);
% Les polynômes de Jacobi
for i = 1 : 2 * m
l1(i, 1) = (((1 - t)^(-alpha)*(1 + t)^(-beta)/((-1)^(i) * (2^(i))*gamma(i + 1)))
            *diff((1 - t)^(alpha)*(1 + t)^(beta)*(1 - t^2)^i, i);
end
L = [1;simplify(l1)]
% La fonction d'ondelette
p = 0
for j = m + 2 : 2 * m + 1
    s(j) =tt(L(j, 1), 0.5);
    p = p + L(j) * s(j);
end
PJ= simplify(p * w);
for k = 1 : jj
    for l = 1 : n
        h(1, l) = ((2^(alpha+beta+1))*gamma(l+alpha+1)*gamma(l + beta+1))/
            ((2 * l+alpha+beta+1)*gamma(l + 1)*gamma(l+alpha+beta+1));
        psiPJ(k, l) = simplify(1/sqrt(h(1, l))) * 2^((k + 1)/2)*tt(PJ, (2^(k + 1))
            *t - 2 * l + 1);
        a(k, l) = (l - 1)/(2^k);
        b(k, l) = l/(2^k);
    end
end
end
psiPJ
% La décomposition du signal f (i.e., les coefficients)
G = f.*psiPJ
for k = 1 : jj
    for l = 1 : n

```

```

MMa(k, l) = max(a(k, l), c);
mmb(k, l) = min(b(k, l), d);
C = int(G, MMa(k, l), mmb(k, l));
end
end
C

```

**Exemple 3.2.2** Soit  $f(t) = t$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Il nous reste donc à calculer les coefficients de  $f(t)$  à partir de la fonction  $\psi_{j_n}^{0,0}(t)$ , pour  $m = 3$ .

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \begin{cases} 0.0022 & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{12} &= \begin{cases} 9.4315 & \text{si } 0.5 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{21} &= \begin{cases} 234.6462 & \text{si } 0 \leq t \leq 0.25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{22} &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0.25 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Soit  $f(t) = t^2$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ . Pour  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $m = 3$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \begin{cases} -\frac{697}{4194304} & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{12} &= \begin{cases} -\infty & \text{si } 0.5 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{21} &= \begin{cases} 47.6938 & \text{si } 0 \leq t \leq 0.25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \\
C_{22} &= \begin{cases} +\infty & \text{si } 0.25 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.
\end{aligned}$$

---

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous avons présenté les différentes méthodes du traitement de signal, et nous avons construit les ondelettes de Jacobi et ces noyaux, puis nous avons appliqué ces ondelettes pour la décomposition de quelques signaux connus.



---

# BIBLIOGRAPHIE

---

# Bibliographie

- [1] Abdul J., integral and discrete transforms with application and error analysis, M. Dekker Inc., 1992.
- [2] Charles. K. Chui., An introduction to wavelets, Academic Press., 1992.
- [3] Christensen O., Four short courses on harmonic analysis wavelets, Frames, Time-Frequency to Signal and Image Analysis
- [4] Daubechies I, Ten lectures on wavelets, Siam., 1992.
- [5] Fischer B. and Prestin J., Wavelets Based on Orthogonal Polynomials, Math. Comp., Vol 66, N°220, 1997, 1593-1618.
- [6] Ficher B., polynomial based iteration methods for symmetric linear systems, Massa., Chichester., 1996.
- [7] Grossetie J. Hohenadel M., Elements d'analyse du Signal par Ondelettes, Rapport EUR., 1995.
- [8] Lakhel Z., Matrices opérationnelles de dérivation fractionnaire des ondelettes de Jacobi d'indice (0,2), Mémoire fin d'étude., 2014.
- [9] Magalie P., Polynômes orthogonaux et polynômes de Macdonald., 2006 ;
- [10] Meyer Y., Les ondelettes, algorithmes et applications, Armand Colin., 1992.
- [11] Pouliot M., La détermination des coefficients des ondelettes de Daubechies, Mémoire de maîtrise, Université Laval Québec., 2009.

—————