REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–o ◯ o–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Oscillation des Solutions des Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Fonctions Analytiques D'ordre [p,q] Dans Le Disque Unité

Présenté par : **LARACHI Fadhila et LARACHI Fatima Zohra**

Soutenu le : 05 / 2016 devant le jury composé de :

Président :	**Dr Aziz Hamani Karima**	MCA, Université de Mostaganem
Encadreur :	**Dr Belaïdi Benharrat**	Prof., Université de Mostaganem
Examinateur	**Dr Latreuch Zinelâabidine**	MAA., Université de Mostaganem

Remerciements

Tout d'abord nous remercions **Dieu** Tout-Puissant que nous avons réussi dans notre étude pour arriver à ce niveau, et grâce à lui et son aide, nous avons pu accomplir ce mémoire.

Nous remercions **nos parents,** la raison de notre existence et de notre éducation et surtout nous remercions notre frère **Yassine,** qui nous a aidé pour faire ce mémoire, comme nous remercions tous **nos frères.**

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à notre encadreur monsieur **Belaïdi Benharrat** pour son aide et ses conseils.

Nous remerciements s'étendent également à tous nos enseignants pendant toutes les années d'études.

Table des matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, notamment la croissance et l'oscillation des solutions.

En 2000, Heittokangas [10] a étudié les équations différentielles linéaires complexes dans le disque unité à coefficients fonctions analytiques. Après le travail de Heittokangas, plusieurs mathématiciens ont étudié les équations différentielles linéaires complexes dans le disque unité (voir [23]) . En 2010, Tu et al. [22] ont étudié les cas homogènes et non homogènes sur le plan complexe, et les chercheurs, Jin Tu et Hai-Xia Huang en 2015 ont étudié dans [26] l'oscillation des équations différentielles linéaires à coefficients analytiques d'ordre [p ; q] dans le disque unité, lequel représente le but de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxiéme chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna.

Dans le deuxième chapitre, on démontrera quelques résultats dus à Jin Tu et Hai-Xia Huang [26] , sur l'oscillation des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes sous certaines conditions sur les coefficients.

Chapitre 1

Théorie de R. Nevanlinna

Dans ce chapitre on donne quelques définitions et notations, résultats dont on aura besoin par la suite.

1.1 Introduction

Considérons les équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0 \tag{1.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z) \tag{1.1.2}$$

Plusieurs résultats intéressants ont été obtenus lorsque les coefficients $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, $F(z)$ $(k \geq 2)$ dans (1.1.1) où (1.1.2) sont des coefficients analytiques dans le disque unité (voir par exemple $[4-7, 11-18]$). En 2010, Tu et al. [22] ont étudié les équations (1.1.1) et (1.1.2) à coefficients fonctions entières d'ordre $[p, q]$ dans le plan complexe. Après cela, il y a eu un intérêt croissant dans l'interaction entre les coefficients analytiques d'ordre $[p, q]$ et les solutions de (1.1.1) et (1.1.2) (voir $[2, 3, 21]$). Dans ce mémoire, on va étudier la croissance et les zéros des solutions des équations (1.1.1) et (1.1.2) avec des coefficients analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque l'unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$.

1.2 Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Théorème 1.1 [18] *(formule de jensen) Soit f est une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (respectivement $b_1, b_2, \cdots, b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_j|< r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|< r} \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

Définition 1.1 [18] *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Définition 1.2 [18] *Soit f une fonction méromorphe, pour tout $a \in \mathbb{C}$, on désigne par $n(t;a;f)$ le nombre de zéros de $f(z)=a$ dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et on désigne $n(t;\infty;f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le $|z| \leq t$. On définit*

$$N(r;a;f) = N\left(r;\frac{1}{f-a}\right) = \int\limits_0^r \frac{n(t;a;f)-n(0;a;f)}{t}dt + n(0;a;f)\ln r,$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$ et

$$N(r;\infty;\ f) = N(r;\ f) = \int\limits_0^r \frac{n(t;\infty;f)-n(0;\infty;f)}{t}dt + n(0;\infty;f)\ln r$$

$N(r;\infty;f)$ est appelée la fonction de comptage de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Définition 1.3 [18] *(La fonction de proximité) Pour f une fonction méromorphe, on définit la fonction proximité de f par*

$$m(r;\ a;\ f) = m\left(r;\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}d\varphi$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$ et

$$m(r;\infty;\ f) = m(r;\ f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Définition 1.4 [18] *(La fonction caractéristique) Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par*

$$T(r;\ f) = m(r;\ f) + N(r;\ f).$$

Exemple 1.1 *Pour la fonction $f(z) = \frac{\exp z}{z}$, on a $z=0$ est un pôle simple. Alors*

$$\begin{aligned} N(r;\ f) &= \int\limits_0^r \frac{n(t;\infty;\ f)-n(0;\infty;\ f)}{t}dt + n(0;\infty;\ f)\ln r \\ &= \ln r. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r;\ f) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|\frac{e^{re^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}}\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{e^{r\cos\varphi}}{r}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi\ d\varphi - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r\ d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\ln r. \end{aligned}$$

D'où

$$T\left(r;\frac{e^z}{z}\right)=m\left(r;\frac{e^z}{z}\right)+N\left(r;\frac{e^z}{z}\right)=\frac{r}{\pi}+\frac{1}{2}\ln r$$

Théorème 1.2 [18] *(Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna) Soit f une fonction méromorphe et $a\in\mathbb{C}$ tels que*

$$f(z)-a=\sum_{i=m}^{\infty}C_i z^i, C_m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z},$$

est le développement de Laurent de $f(z)-a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r;\frac{1}{f-a}\right)=T(r;f)-\ln|C_m|+\varphi(r;a).$$

avec

$$|\varphi(r;a)|\leq \ln^+|a|+\ln 2.$$

1.3 L'ordre et le type de croissance d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité.

Définition 1.5 [10] *Soit f une fonction analytique sur Δ. Alors l'ordre de f est défini par*

$$\sigma_M(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log^+\log^+ M(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

avec $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Si f est une fonction méromorphe sur Δ. Alors l'ordre de f est défini par

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Exemple 1.2 *Pour la fonction $f(z)=\exp\left\{(1-z)^{-\beta}\right\}$, $\beta>1$,on a*

$$\sigma(f)=\beta-1,\ \ \sigma_M(f)=\beta.$$

Exemple 1.3 *Pour la fonction $f(z)=\exp\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}$, on a*

$$\sigma(f)=0=\sigma_M(f).$$

Définition 1.6 ([10] [19]) *Soit f une fonction méromorphe sur Δ, d'ordre σ $(0<\sigma<\infty)$, on définit le type de f par*

$$\tau(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}(1-r)^{\sigma}T(r,f).$$

Si f est une fonction analytique d'ordre $\sigma_M(0<\sigma_M<\infty)$, on définit le type de f par

$$\tau_M(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}(1-r)^{\sigma_M}\log^+ M(r,f).$$

Exemple 1.4 *Soit la fonction* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^{\beta}}\right\}$, $\beta > 1$. *Alors*

$$\tau_M(f) = 1 \quad et \quad \frac{1}{2^{\beta+1}} \leq \tau(f) \leq 1.$$

Définition 1.7 ([9] [10] [24] [27]) *Soit* f *une fonction méromorphe sur* Δ,*et soit*

$$D(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{T(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $T(r; f)$ *est la fonction caractéristique. Si* f *est analytique sur* Δ, *et soit*

$$D_M(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log M(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $M(r; f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. *Si* $D(f) < \infty$, *on dit que* f *est non-admissible ; si* $D(f) = \infty$, *on dit que* f *est admissible. Si* $D_M(f) < \infty$, *on dit que* f *est de degré fini ; si* $D_M(f) = \infty$, *on dit que* f *est de degré infini.*

1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.8 [19] *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0; \infty)$ *est défini par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt$$

avec $\chi(t)$ *est la fonction indicatrice de l'ensemble* E. *La mesure logarithmique d'un ensemble* E *est défini par*

$$m_l(E) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.5 *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [4, 6] \cup [6, 8] \subset [0, \infty)$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_4^6 dt + \int_6^8 dt = 4.$$

Exemple 1.6 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $E = [1, 6] \subset [0, \infty)$ *est*

$$m_l(E) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt = \int_1^6 \frac{1}{t} dt = \ln 6.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.9 ([8] [19]) *Soit f une fonction méromorphe sur Δ. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log^+ N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$.

Définition 1.10 ([8] [19]) *On définit l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log^+ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros distincts de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$.

Exemple 1.7 *L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$ est égal à 0.*

1.6 La notion d'ordre p- itératif d'une fonction

Pour la définition de l'ordre $p-$itératif d'une fonction méromorphe, on a besoin de définir les expressions suivantes. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r = e^r$ et $\exp_{p+1} r = \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. On définit $\log_1 r = \log r$ et $\log_{p+1} r = \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$, pour tout r assez grand. On a aussi $\exp_0 r = r = \log_0 r$ et $\exp_{-1} r = \log_1 r$.

Définition 1.11 ([11] [26]) *Soit f une fonction méromorphe sur Δ. On définit l'ordre $p-$itératif de la fonction f par*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_p T(r, f)}{-\log(1-r)}.$$

Pour f une fonction analytique sur Δ, l'ordre $p-$itératif de la fonction f est défini par

$$\sigma_{M,p}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{-\log(1-r)}.$$

Remarque 1.1 *Si $p = 1$,on note $\sigma_1(f) = \sigma(f)$ et $\sigma_{M,1}(f) = \sigma_M(f)$, et nous avons $\sigma(f) \leq \sigma_M(f) \leq \sigma(f) + 1$ (voir [27]) et $\sigma_{M,p}(f) = \sigma_p(f)$ pour $p > 1$(voir [5] [11]).*

Définition 1.12 [19] *Soit f une fonction méromorphe sur Δ, d'ordre $p-$itératif $\sigma_p(f)\,(0<\sigma_p<+\infty)$. Alors le type $p-$itératif de f est définit par*

$$\tau_p\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p-1}T(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_p}}\ \ (p\geq 1 \text{est un entier}).$$

Si f est une fonction analytique sur Δ, d'ordre $p-$itératif $\sigma_{M,p}(f)\,(0<\sigma_{M,p}<+\infty)$. Alors le type $p-$itératif de f est défnit par

$$\tau_{M,p}\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p}M(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_{M,p}}}\ \ (p\geq 1 \text{ est un entier}).$$

Définition 1.13 [11] *Soit f une fonction méromorphe sur Δ. On définit l'exposant $p-$itératif de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_p\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p}N(r,\frac{1}{f})}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

On définit l'exposant $p-$itératif de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_{M,p}\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p}\overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Exemple 1.8 *L'exposant $p-$itératif de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z)=\exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$ est égal à 0.*

1.7 La notion d'ordre $[p,q]$- itératif d'une fonction

Définition 1.14 ([2] [3] [26])*Soit $1\leq q\leq p$ ou $2\leq q=p+1$, et f est une fonction méromorphe sur Δ. Alors le $[p,q]-$ordre de $f(z)$ est défini par*

$$\sigma_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p}T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Soit f est analytique sur Δ.On définit $[p,q]-$ordre de $f(z)$ par

$$\sigma_{M,[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p+1}M(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Exemple 1.9 *Pour $p=2$ et $q=1$ et $f(z)=\exp_2\left\{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right\}$*

D'où

$$\sigma_{[p,q]}(f)=2.$$

Remarque 1.2 *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe satisfaisant $0<\sigma_{[p,q]}<\infty$, alors*

(i) $\sigma_{[p-n,q]}=\infty\ (n<p)\,,\ \sigma_{[p,q-n]}=0\ (n<q)\,,\ \sigma_{[p+n,q+n]}=1\ (n<p)$ *pour* $n=1,2,\cdots$

(ii) *Si $[p',q']$ sont deux nombres entiers satisfaisant $q'=p'+q-p$ et $p'<p$, alors $\sigma_{[p',q']}=0$ si $0<\sigma_{[p,q]}<1$ et $\sigma_{[p',q']}=\infty$ si $1<\sigma_{[p,q]}<\infty$.*

(iii) $\sigma_{[p',q']} = \infty$ *pour* $q' - p' > q - p$ *et* $\sigma_{[p',q']} = 0$ *pour* $q' - p' < q - p$.

Définition 1.15 ([3] [26])*Soit* $1 \leq q \leq p$ *ou* $2 \leq q = p + 1$, *et* $f(z)$ *est une fonction méromorphe sur* Δ. *Alors le* $[p, q]$ *−ordre inférieur de* $f(z)$ *est défini par*

$$\mu_{[p,q]}(f) = \underline{\lim}_{r \to 1^-} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Pour $f(z)$ *une fonction analytique sur* Δ, *on définit le* $[p, q]$ *−ordre inférieur de* $f(z)$ *par*

$$\mu_{M,[p,q]}(f) = \underline{\lim}_{r \to 1^-} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Définition 1.16 ([2] [3] [26])*Soit* $1 \leq q \leq p$ *ou* $2 \leq q = p + 1$,*et soit* f *une fonction méromorphe sur* Δ. *On définit le* $[p, q]$- *exposant de convergence des zéros de la fonction* f *par*

$$\lambda_{[p,q]}^{N}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t; \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq r$. *On définit le* $[p, q]$*-exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}^{\overline{N}}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Exemple 1.10 *Soit* $f(z) = e^z - 1$

$$\lambda_{[1,1]}^{N}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_1 N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_1 \left(\frac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_1 \left(\frac{r}{\pi}\right)}{\log_1 \left(\frac{1}{1-r}\right)} = 0.$$

Donc le $[p, q]$ *−exposant de convergence des zéros de la fonction* $f(z) = e^z - 1$*est égale* $\lambda_{[1,1]}^{N}(f) = 0$.

Exemple 1.11 *Soit* $f(z) = \frac{1}{2} \exp \frac{1}{1-z} \exp\left(\exp \frac{1}{1-z}\right)$. *Alors*

$$\lambda_{[2,1]}^{N}(f) = 0.$$

Donc le $[p, q]$ *−exposant de convergence des zéros de la fonction* $f(z) = \frac{1}{2} \exp \frac{1}{1-z} \exp\left(\exp \frac{1}{1-z}\right)$ *est égale* 0.

Définition 1.17 ([3] [26]) *Soit $1 \leq q \leq p$. Alors le $[p,q]-$type de la fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre $[p,q]$ sur Δ avec $0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_1 < \infty$ est défini par*

$$\tau_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_1}}.$$

Soit $f(z)$ une fonction analytique d'ordre $[p,q]$, avec $0 < \sigma_{M,[p,q]}(f) = \sigma_2 < \infty$ sur Δ, le $[p,q]-$type est défini par

$$\tau_{M,[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_{p} M(r,f)}{\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_2}}.$$

Remarque 1.3 *Dans les Définitions 1.14-1.16, nous divisons la paire de nombre entier positif (p,q) en deux cas : (i) $p \geq q \geq 1$ et (ii) $2 \leq q = p+1$, et nous pouvons obtenir des résultats différents dans ces deux cas .*

Proposition 1.1 [26] *Soit $f(z)$ est une fonction analytique d'ordre $[p,q]$ sur Δ. Alors les cinq assertions sont vérifiées*

(i) *Si $p = q = 1$, alors $\sigma(f) \leq \sigma_M(f) \leq 1 + \sigma(f)$.*

(ii) *Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) < 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq 1$.*

(iii) *Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \geq 1$, ou $p > q \geq 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f)$.*

(iv) *Si $p \geq 1$ et $\sigma_{[p,p+1]}(f) > 1$, alors $D(f) = \infty$; si $\sigma_{[p,p+1]}(f) < 1$, alors $D(f) = 0$.*

(v) *Si $p \geq 1$ et $\sigma_{M,[p,p+1]}(f) > 1$, alors $D_M(f) = \infty$; si $\sigma_{M,[p,p+1]}(f) < 1$, alors $D_M(f) = 0$.*

Preuve. (i), (iv) et (v) sont évident, on démontre que (ii),(iii) et (ii) par l'inégalité voir([8, 28])

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{1+3r}{1-r} T\left(\frac{1+r}{2}, f\right) (0 < r < 1)$$

d'où

$$\log_p T(r,f) \leq \log^+_{p+1} M(r,f) \leq \max\left\{\log_p\left(\frac{4}{1-r}\right), \log_p T\left(\frac{1+r}{2}, f\right)\right\} \tag{1.7.1}$$

si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) < 1$, de (1.7.1) nous avons

$$\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq 1.$$

(iii) Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) \geq 1$, ou $p > q \geq 1$, d'après (1.7.1) nous avons

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f).$$

■

Proposition 1.2 [26] *Soit $f(z)$ une fonction analytique d'ordre $[p,q]$ sur Δ. Alors les trois assertions sont vérifiées*

(i) *Si $p = q = 1$, alors $\mu(f) \leq \mu_M(f) \leq 1 + \mu(f)$.*

(ii) *Si $p = q \geq 2$ et $\mu_{[p,q]}(f) < 1$, alors $\mu_{[p,q]}(f) \leq \mu_{M,[p,q]}(f) \leq 1$.*

(iii) *Si* $p = q \geq 2$ *et* $\mu_{[p,q]}(f) \geq 1$, *ou* $p > q \geq 1$, *alors* $\mu_{[p,q]}(f) = \mu_{M,[p,q]}(f)$.

Proposition 1.3 [26] *Par la proposition 1.1 (iii), si* $p = q \geq 2$ *et* $\sigma_{[p,q]}(f) > 1$, *ou* $p > q \geq 1$, *alors* $\tau_{[p,q]}(f) = \tau_{M,[p,q]}(f)$.

Proposition 1.4 [26] *Soit* $f(z)$ *une fonction analytique d'ordre* $[p, q]$ *sur* Δ. *Alors les trois assertions sont équivalentes*

(i) *si* $p > q \geq 1$, *alors* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,q]}(f) = \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,q]}(f)$.

(ii) *si* $p = q = 1$, *alors* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}(f) \leq \overline{\lambda}^{\overline{n}}(f) \leq \overline{\lambda}^{\overline{N}}(f) + 1$.

(iii) *si* $p = q \geq 2$, *alors* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f) \leq \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,p]}(f) \leq \max\left\{\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f), 1\right\}$. *En outre, nous avons* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f) = \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,p]}(f)$ *si* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f) \geq 1$, *et* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f) \leq \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,p]}(f) \leq 1$ *si* $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,q]}(f) < 1$.

Preuve. On suppose que $f(0) \not\equiv 0$, et soit $0 < r < R < 1$. Par $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} dt$, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(R, \frac{1}{f}\right) &= \int\limits_0^R \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt \\
&\geq \int\limits_r^R \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Si on pose $R = r + \frac{1-r}{2}$.

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(R, \frac{1}{f}\right) &\geq \int\limits_r^R \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt \geq \int\limits_r^{r+\frac{1-r}{2}} \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt \\
&\geq \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \int\limits_r^{r+\frac{1-r}{2}} \frac{dt}{t} \geq \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \log\left(1 + \frac{1-r}{2r}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1-r}{2r}\right)} \overline{N}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{1}{f}\right).$$

On a $\log\left(1 + \frac{1-r}{2r}\right) \sim \frac{1-r}{2r} (r \to 1^-)$, on obtient

$$\varlimsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leq \max\left\{ \varlimsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p \overline{N}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{1}{f}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \varlimsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p\left(\frac{2r}{1-r}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} \right\}.$$

Par l'inégalité ci-dessus, on obtient

(i) si $p > q \geq 1$, alors $\overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,q]}(f) \leq \overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,q]}(f)$;

(ii) si $p=q=1$, alors $\overline{\lambda}^{\overline{n}}(f) \le \overline{\lambda}^{\overline{N}}(f)+1$;
(iii) si $p=q\ge 2$, alors $\overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,p]}(f) \le \max\{\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,p]}(f),1\}$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\frac{1}{f}) &= \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt \\ &= \int_0^{r_0} \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt + \int_{r_0}^{r} \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt \\ &= \overline{N}\left(r_0,\frac{1}{f}\right) + \int_{r_0}^{r} \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt \\ &\le \overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \overline{N}\left(r_0,\frac{1}{f}\right) \quad (0<r_0<r<1),\end{aligned}$$

On obtient $\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,q]}(f) \le \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,q]}(f)$ $(p\ge q\ge 1)$. D'où, on a

$$\overline{\lambda}^{\overline{N}}_{[p,q]}(f) = \overline{\lambda}^{\overline{n}}_{[p,q]}(f).$$

■

Remarque 1.4 *Les conclusions de la Proposition 1.4 sont également valables pour* $\lambda^{n}_{[p,q]}(f)$ *et* $\lambda^{N}_{[p,q]}(f)$.

1.8 Préliminaire lemmes

Lemme 1.1 ([10], [27]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe sur* Δ, *et soit* $k\ge 1$ *un nombre entier. Alors*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f),$$

où $S(r,f)=O\{\log^+ T(r,f)+\log(\frac{1}{1-r})\}$, *éventuellement à l'extérieur d'un ensemble* $E_1\subset[0,1)$ *avec* $\int_{E_1}\frac{dt}{1-t}<\infty$.

Lemme 1.2 *Soient* $1\le q\le p$ *et* $k\ge 1$ *des nombres entiers, si* $f(z)$ *est une fonction méromorphe sur* Δ *telle que* $\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma_6$ $(0<\sigma_6<\infty)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Si* $p>q\ge 1$, *alors* $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_6+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right)$,

(ii) *Si* $p=q\ge 2$ *et* $\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma_6>1$, *alors* $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_6+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right)$,

(iii) *Si* $p = q \geq 2$ *et* $0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_6 < 1$, *ou* $p = q = 1$, *alors* $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}$, *soit* $\varepsilon > 0$ *et* $r \to 1^-$, *éventuellement à l'extérieur d'un ensemble* $E_1 \subset [0,1)$ *avec* $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$.

Preuve. Par le Lemme 1.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$ telle que

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log^+ T(r,f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} (r \notin E_1). \tag{1.8.1}$$

Par la Définition 1.14, nous avons

$$T(r,f) \leq \exp_p\left\{(\sigma_6 + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \tag{1.8.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \to 1^-$. D'après (1.8.1) et (1.8.2) on obtient

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_6 + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \quad (r \notin E_1). \tag{1.8.3}$$

(i) Si $p > q \geq 1$,d'après (1.8.3) nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_6 + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right).$$

(ii) Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_6 > 1$, de (1.8.1), nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log^+ T(r,f)\right\} (r \notin E_1),$$

alors $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_6 + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) (r \notin E_1)$. ■

(iii) Si $p = q = 1$, d'après (1.8.3) nous avons $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}$ $(r \notin E_1)$. Si $p = q \geq 2$ et $0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_6 < 1$, d'après (1.8.1) on obtient $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}$, pour $r \to 1^-$, éventuellement à l'extérieur d'un ensemble $E_1 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$.

Lemme 1.3 [7] *Soient* k *et* j *sont des nombres entiers satisfaisant* $k > j \geq 0$, *et soient* $\varepsilon > 0$ *et* $d \in (0,1)$. *Si* f *est une méromorphe sur* Δ *telle que* $f^{(j)}$ *n'est pas identiquement nulle, alors*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{2+\varepsilon} . \max\left\{\log\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \ , \ T\left(s(|z|), f\right)\right\}\right)^{k-j} \quad (|z| \notin E_1),$$

avec $s(|z|) = 1 - d(1-|z|)$.

Lemme 1.4 [13] *Soit f une solution de (1.1.1) sur $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, avec $0 < R \leq \infty$, et soit $n_c \in \{1, \cdots, k\}$ est le nombre des coefficients non nuls $A_j(z)$, $j = 0, \cdots, k-1$, et soient $\theta \in [0, 2\pi)$ et $\varepsilon > 0$. Si $z_\theta = \nu e^{i\theta} \in D_R$ telle que $A_j(z_\theta) \not\equiv 0$ pour $j = 0, \cdots, k-1$, alors pour tout $\nu < r < R$,*

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq M \exp\left(n_c \int_\nu^r \max_{j=0,\cdots,k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right), \tag{1.8.4}$$

où $M > 0$ est une constante satisfaisant

$$M \leq (1+\varepsilon) \max_{j=0,\cdots,k-1} \left(\frac{\left|f^{(j)}(z_\theta)\right|}{(n_c)^j \max\limits_{n=0,\cdots,k-1} |A_n(z_\theta)|^{j/(k-n)}}\right). \tag{1.8.5}$$

Preuve. Soit $\nu < r < R$, et on note

$$h_\theta(x) = \max_{j=0,\cdots,k-1} \left|A_j(xe^{i\theta})\right|^{1/(k-j)}. \tag{1.8.6}$$

On prend ϱ telle que $r < \varrho < R$, et soit $\varepsilon_0 > 0$. Alors h_θ est une fonction de Riemann intégrable sur $[\nu, \varrho]$, et donc il existe une partition $P := \{\nu = x_0, x_1, \cdots., x_{n-1}, x_n = \varrho\}$ de $[\nu, \varrho]$ telle que $x_j \neq r$ pour tout $j = 0, \cdots, n$, et

$$U(P, h_\theta) - \int_\nu^\varrho h_\theta(s)\, ds < \varepsilon_0, \tag{1.8.7}$$

avec $U(P, h_\theta)$ est la somme supérieure de Riemann de h_θ, correspondant à la partition P. On définit la fonction auxiliaire $g_\theta : [\nu, \varrho] \to \mathbb{R}$,

$$g_\theta(t) := \left(n_c. \sup_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} h_\theta(x)\right), \quad x_j \leq t \leq x_{j+1}, \quad j = 0, \cdots, n-1.$$

Alors $g_\theta(t)$ est une fonction qui satisfait $g_\theta(t) \geq n_c.\ h_\theta(t)$ pour tout $t \in [\nu, \varrho]$. De plus

$$U(P, h_\theta) = \frac{1}{n_c} \int_\nu^\varrho g_\theta(s)\, ds,$$

et donc, par (1.8.7),

$$\frac{1}{n_c} \int_\nu^r g_\theta(s)\, ds < \int_\nu^r h_\theta(s)\, ds + \varepsilon_0. \tag{1.8.8}$$

Ensuite, nous définissons la fonction auxiliaire

$$V(t) := \exp\left(\int_\nu^t g_\theta(s)\, ds\right)$$

sur $[\nu,\varrho)$ et la constante

$$\delta_j := \begin{cases} 0, & \text{si } A_j(z)=0, \\ 1, & \text{sinon}, \end{cases}$$

avec $j=0,\cdots,k-1$. Alors comme $g_\theta^{(l)}(t)=0$ pour tout $t\in[\nu,\varrho)\backslash P$ avec $l\geq 1$, alors $V(t)$ satisfait l'équation

$$V^{(k)}-\frac{1}{n_c}g_\theta(t)\,\delta_{k-1}V^{(k-1)}-\cdots-\frac{1}{n_c}g_\theta(t)^{k-1}\delta_1 V'-\frac{1}{n_c}g_\theta(t)^k\delta_0 V=0$$

sur $[\nu,\varrho)\backslash P$. Comme $g_\theta(\nu)\neq 0$, alors la constante

$$C_0 := \max_{j=0,\cdots,k-1}\left(\frac{\left|f^{(j)}(z_\theta)\right|}{g_\theta(\nu)^j}\right)$$

est bien définie. En outre,

$$C_0 \leq \max_{j=0,\cdots,k-1}\left(\frac{\left|f^{(j)}(z_\theta)\right|}{(n_c)^j \max\limits_{j=0,\cdots,k-1}\left|A_n(z_\theta)\right|^{j/(k-n)}}\right), \tag{1.8.9}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\nu e^{i\theta}\right)\right| &\leq C_0V(\nu)=C_0,\\
\left|f'\left(\nu e^{i\theta}\right)\right| &\leq C_0V'(\nu)=C_0g_\theta(\nu),\\
&.\\
&.\\
&.\\
\left|f^{(k-1)}\left(\nu e^{i\theta}\right)\right| &\leq C_0V^{(k-1)}(\nu)=C_0g_\theta(\nu)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\upsilon(t)=f\left(te^{i\theta}\right)$. On résoud l'équation

$$\upsilon^{(k)}-p_{k-1}(t)\,\upsilon^{(k-1)}-\cdots-p_0(t)\,\upsilon=0,$$

avec $p_j(t)=e^{i(k-j)\theta}A_j\left(te^{i\theta}\right)$, $j=0,\cdots,k-1$. On a

$$|p_j(t)|=\left|A_j\left(te^{i\theta}\right)\right|\leq\frac{1}{n_c}g_\theta(t)^{k-j}\delta_j.$$

Pour tout $j=0,\cdots,k-1$, et

$$\begin{aligned}
|\upsilon(\nu)| &\leq C_0V(\nu),\\
|\upsilon'(\nu)| &\leq C_0V'(\nu),\\
&.\\
&.\\
&.\\
\left|\upsilon^{(k-1)}(\nu)\right| &\leq C_0V^{(k-1)}(\nu),
\end{aligned}$$

Nous avons, par (1.8.8),

$$\begin{aligned}\left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| &= |\upsilon(r)| \leq C_0 V(r) = C_0 \exp\left(\int_{\nu}^{r} g_\theta(s)\, ds\right) \\ &\leq C_0 \exp\left(\int_{\nu}^{r} n_c.h_\theta(s)\, ds + n_c \varepsilon_0\right) = M \exp\left(n_c \int_{\nu}^{r} h_\theta(s)\, ds\right),\end{aligned}$$

avec, par (1.8.9) et on choisit ε_0 pour r suffisamment petit, M satisfait (1.8.5). Comme $\nu < r < R$ est arbitraire. ■

Lemme 1.5 [3] *Soient* $1 \leq q \leq p$ *sont des nombres entiers. Si* $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *sont des fonctions analytiques d'ordre* $[p, q]$ *sur le disque unité, alors chaque solution de* f *de (1.1.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) | j = 0, 1, \cdots, k-1\}.$$

Preuve. Soit $\sigma_1 = \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\}$. Et soit $f(z) \not\equiv 0$ une solution de (1.1.1) et soit $\theta \in [0, 2\pi)$ telle que $\left|f(re^{i\theta})\right| = M(r, f)$. Par le Lemme 1.4, on a

$$\begin{aligned}M(r,f) &\leq M \exp\left(n_c \int_{\upsilon}^{r} \max_{j=0,\cdots,k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right) \\ &\leq M \exp\left(n_c \int_{\upsilon}^{r} \max_{j=0,\cdots,k-1} (M(r, A_j))^{1/(k-j)} dt\right) \\ &\leq M \exp\left(n_c (r - \upsilon) \max_{j=0,\cdots,k-1} \{M(r, A_j)\}\right).\end{aligned} \tag{1.8.10}$$

D'après la Définition 1.14, pour tout $\varepsilon > 0$ donné

$$M(r, A_j) \leq \exp_{p+1}\left\{(\sigma_1 + \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \quad (j = 0, \cdots, k-1). \tag{1.8.11}$$

D'après (1.8.10) et (1.8.11) on obtient

$$\sigma_{M,[p+1,q]}(f) \leq \sigma_1 + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on trouve par Proposition 1.1 (iii)

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p+1,q]}(f) \leq \sigma_1 = \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) |\ j = 0, 1, \cdots, k-1\}.$$

■

Remarque 1.5 *Le Lemme 1.5 est également valable pour le cas :* $2 \leq q = p + 1$.

Lemme 1.6 *Soient* $1 \leq q \leq p$ *ou* $2 \leq q = p + 1$ *et* $f(z)$ *une fonction analytique sur* Δ *satisfaisante* $\mu_{M,[p,q]}(f) < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $E_2 \subset [0, 1)$ *avec* $\int\limits_{E_2} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ *telle que pour tout* $r \in E_2$, *nous avons*

$$M(r, f) < \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \varepsilon \right) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}.$$

Preuve. Par Définition 1.15, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$ satisfaisante $r_n < 1 - \frac{1-r_{n+1}}{d} (0 < d < 1)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$M(r_n, f) < \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \log_q \left(\frac{1}{1-r_n} \right) \right\}.$$

Il existe $n_1 (\in \mathbb{N})$ tel que pour tout $n \geq n_1$ et $r \in \left[1 - \frac{1-r_n}{d}, r_n\right]$, nous avons

$$\begin{aligned} M(r, f) &\leq M(r_n, f) < \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \log_q \left(\frac{1}{1-r_n} \right) \right\} \\ &\leq \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \log_q \left(\frac{1}{d(1-r)} \right) \right\} \\ &< \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \varepsilon \right) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Soit l'ensemble $E_2 = \cup_{n=n_1}^{\infty} \left[1 - \frac{1-r_n}{d}, r_n\right]$. Pour tout $r \in E_2$, nous avons

$$M(r, f) < \exp_{p+1} \left\{ \left(\mu_{M,[p,q]}(f) + \varepsilon \right) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\},$$

avec

$$m_l\, E_2 = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int\limits_{1-\frac{1-r_n}{d}}^{r_n} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log \frac{1}{d} = +\infty.$$

■

Lemme 1.7 *Soit* $1 \leq q \leq p$ *ou* $2 \leq q = p + 1$ *et* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *sont des fonctions analytiques sur* Δ *satisfaisant* $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) \middle|\ j = 0, \cdots, k-1\right\} < \infty$. *Alors chaque solution* $f(z)$ *de (1.1.1) satisfait*

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \leq \max\{\mu_{M,[p,q]}(A_0),\ \sigma_{M,[p,q]}(A_j) |\ j = 1, \cdots, k-1\}.$$

Preuve. Par le Lemme 1.4, soit $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ telle que $\left|f(re^{i\theta_0})\right| = M(r, f)$. Alors

$$\begin{aligned} M(r, f) &\leq M \exp \left(n_c \int\limits_{v}^{r} \max_{j=0,\cdots,k-1} \left|A_j(te^{i\theta_0})\right|^{1/(k-j)} dt \right) \\ &\leq M \exp \left(n_c \int\limits_{v}^{r} \max_{j=0,\cdots,k-1} (M(r, A_j))^{1/(k-j)} dt \right) \\ &\leq M \exp \left(n_c \max_{j=0,\cdots,k-1} \{M(r, A_j)\} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le Lemme 1.6, nous avons

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max\{\mu_{M,[p,q]}(A_0), \sigma_{M,[p,q]}(A_j)|\ j = 1, \cdots, k-1\}.$$

■

Lemme 1.8 *Soit* $1 \leq q \leq p$ *ou* $2 \leq q = p+1$ *et soit* $f(z)$ *une fonction analytique sur* Δ *satisfaisant* $0 \leq \sigma_{[p,q]}(f)$*(ou* $\sigma_{M,[p,q]}(f)) = \sigma_7 \leq \infty$*. Alors il existe un ensemble* $E_3 \subset [0,1)$ *satisfaisant* $\int\limits_{E_3} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ *telle que pour tout* $r \in E_2$*, nous avons*

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_7 \left(\lim_{r\to 1^-} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_7\right).$$

Preuve. Par la Définition 1.14 il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$ satisfaisant $1 - d(1-r_n) < r_{n+1} (0 < d < 1)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)} = \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_7.$$

Par conséquent, il existe un $n_2 (\in \mathbb{N})$ tel que $n \geq n_2$ et pour tout $r \in [r_n, 1-d(1-r_n)]$, nous avons

$$\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} \geq \frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-[1-d(1-r_n)]}\right)} = \frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{d(1-r_n)}\right)}.$$

Par conséquent

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_7.$$

Soit l'ensemble $E_3 = \cup_{n=n_2}^{\infty} [r_n, 1-d(1-r_n)]$. Pour tout $r \in E_3$, nous avons

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_7,$$

où

$$m_l E_3 = \sum_{n=n_2}^{\infty} \int\limits_{r_n}^{1-d(1-r_n)} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \log\frac{1}{d} = +\infty.$$

Nous pouvons également montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_7 (r \in E_3) \text{ de manière similaire.}$$

■

Lemme 1.9 [22] *Soit* $1 \leq q \leq p$ *(ou* $2 \leq q = p+1$*) et* $1 \leq q^{'} \leq p^{'}$ *(ou* $2 \leq q^{'} = p^{'} + 1$*), et soit* $f_1(z)$*,* $f_2(z)$ *des fonctions analytiques dans* Δ *satisfaisant* $\sigma_{[p,q]}(f_1) = \sigma_8 > 0$ *et* $\sigma_{[p',q']}(f_2) = \sigma_9 < \infty$*. Si* $\sigma_{[p,q]}(f_1)$ *et* $\sigma_{[p',q']}(f_2)$ *satisfont l'une des conditions suivantes*

(i) $p^{'} - p = q^{'} - q = 0$ *et* $\sigma_{[p^{'},q^{'}]}(f_2) < \sigma_{[p,q]}(f_1)$;

(ii) $p^{'} - p < q^{'} - q$;

(iii) $p^{'} - p = q^{'} - q > 0$, $\sigma_{[p^{'},q^{'}]}(f_2) < 1$;

(iv) $p^{'} - p = q^{'} - q < 0$, $\sigma_{[p,q]}(f_1) > 1$;

alors il existe un ensemble $E_4 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_4} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ tel que pour tout $r \in E_4$, nous avons

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0.$$

Preuve. (i) Par la Définition 1.14, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et lorsque $|z| = r \to 1^-$, nous avons

$$T(r,f_2) \leq \exp_p \left\{ (\sigma_9 + \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}. \tag{1.8.12}$$

Par $\sigma_{[p,q]}(f_1) = \sigma_8$ et Lemme 1.8, il existe un ensemble $E_4 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_4} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ satisfaisant

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log_p T(r,f_1)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)} = \sigma_8 \quad (r \in E_4),$$

donc

$$T(r,f_1) \geq \exp_p \left\{ (\sigma_8 - \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\} \ (r \to 1^-,\ r \in E_4), \tag{1.8.13}$$

avec $0 < 2\varepsilon < \sigma_8 - \sigma_9$, Par (1.8.12) et (1.8.13), pour $1 \leq q \leq p$ $(ou\ 2 \leq q = p+1)$ on obtient

$$\frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} \leq \frac{\exp_p \left\{ (\sigma_9 + \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r}\right) \right\}}{\exp_p \left\{ (\sigma_8 - \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r}\right) \right\}} \to 0 \quad (r \to 1^-,\ r \in E_4),$$

donc

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0 \ (r \in E_4).$$

(ii) Comme $\sigma_{[p,q]}(f_1) = \sigma_8 > 0$, $\sigma_{[p^{'},q^{'}]}(f_2) = \sigma_9 < \infty$ et $p^{'} - p < q^{'} - q$, par la Remarque 1.2 nous avons $\sigma_{[p^{'},q^{'}]}(f_1) = \infty$, alors d'après une preuve similaire du cas (i), nous avons

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0 \ (r \in E_4).$$

(iii) Comme $p^{'} - p = q^{'} - q > 0$ et $\sigma_{[p^{'},q^{'}]}(f_2) < 1$, par la Remarque 1.2 nous avons $\sigma_{[p,q]}(f_2) = 0$, alors d'après une preuve similaire du cas (i), nous avons

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)} = 0 \ (r \in E_4).$$

(iv) Comme $p^{'}-p=q^{'}-q<0$ et $\sigma_{[p,q]}(f_1)<\infty$, par Remarque 1.2 nous avons $\sigma_{\left[p^{'},q^{'}\right]}(f_1)=\infty$, alors d'après la preuve similaire du cas (i), nous avons

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{T(r,f_2)}{T(r,f_1)}=0\ (r\in E_4).$$

■

Lemme 1.10 [22] *Soient $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$, $F(z)\not\equiv 0$ des fonctions analytiques dans Δ. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Si $p\geq q\geq 1$, $f(z)$ est une solution de (1.1.2) satisfaisant* $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j),\ \sigma_{[p,q]}(F)|\ j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{[p,q]}(f)$, *alors* $\overline{\lambda}^{N}_{[p,q]}(f)=\lambda^{N}_{[p,q]}(f)=\sigma_{[p,q]}(f)$.

(ii) *Si $p\geq 1$, $f(z)$ est une solution de (1.1.2) satisfaisant* $\max\{\sigma_{[p,p+1]}(A_j),\ \sigma_{[p,p+1]}(F),1|\ j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{[p,p+1]}(f)$, *alors* $\overline{\lambda}^{N}_{[p,p+1]}(f)=\lambda^{N}_{[p,p+1]}(f)=\sigma_{[p,p+1]}(f)$.

Preuve. (i) Supposons que $f(z)$ est une solution de (1.1.2). Par (1.1.2), nous obtenons

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_0\right). \tag{1.8.14}$$

Si f possède un zéro au point z_0 d'ordre $\alpha(\alpha>k)$, et $A_0,\cdots,A_{k-1}$ sont des fonctions analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha-k$, donc

$$n\ \left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{n}\ \left(r,\frac{1}{f}\right)+n\ \left(r,\frac{1}{F}\right),$$

et

$$N\ \left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{N}\ \left(r,\frac{1}{f}\right)+N\ \left(r,\frac{1}{F}\right). \tag{1.8.15}$$

Par le Lemme 1.1 et (1.8.14), nous avons

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,A_j\right)+O\left\{\log^+T\left(r,f\right)+\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\ \ (r\notin E_1). \tag{1.8.16}$$

Par (1.8.15) et (1.8.16), on obtient

$$\begin{aligned}T\left(r,f\right) &= T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O\left(1\right)\leq k\overline{N}\ \left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,F\right)+\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,A_j\right) \\ &\quad +O\left\{\log^+T\left(r,f\right)+\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\ \ (r\notin E_1).\end{aligned} \tag{1.8.17}$$

Comme $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j),\ \sigma_{[p,q]}(F)|j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{[p,q]}(f)$, par le Lemme 1.9, il existe un ensemble E_5 avec $\int_{E_5}\frac{dt}{1-t}=+\infty$ tel que

$$\max\left\{\frac{T\left(r,F\right)}{T\left(r,f\right)},\frac{T\left(r,A_j\right)}{T\left(r,f\right)}\right\}\to 0\ \ (r\to 1^-,r\in E_5,\ j=0,\cdots,k-1). \tag{1.8.18}$$

Par (1.8.17) et (1.8.18), pour tout $|z| = r \in E_5 \setminus E_1$,nous avons

$$(1 - o(1))\, T(r, f) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + O\left\{\log^+ T(r, f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\},$$

alors on obtient $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \overline{\lambda}^{N}_{[p,q]}(f)$. Par conséquent, $\overline{\lambda}^{N}_{[p,q]}(f) = \lambda^{N}_{[p,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(f)$. ■
(ii) D'après une preuve similaire du cas (i), nous pouvons facilement obtenir la conclusion du cas (ii) .

Lemme 1.11 *Soit* $1 \leq q \leq p$ *et soit* $f(z)$ *une fonction analytique sur* Δ *satisfaisant* $\sigma_{M,[p,q]}(f) = \sigma_{10}\,(0 < \sigma_{10} < \infty)$ *et* $0 < \tau_{M,[p,q]}(f) = \tau_1 \leq \infty$. *Alors pour tout* $\beta_1 < \tau_1$, *il existe un ensemble* $E_6 \subset [0,1)$ *satisfaisant* $\int\limits_{E_6} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ *tel que pour tout* $r \in E_6$,*nous avons*

$$\log_p M(r, f) > \left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{10}}.$$

Preuve. Si $q = 1$, alors on le Lemme 1.11 est vérifié, voir [25] . Si $q \geq 2$, par la Définition 1.17 nous pouvons choisir une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$ satisfaisant $1 - d(1 - r_n) < r_{n+1}$ $(0 < d < 1)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_p M(r_n, f)}{\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{\sigma_{10}}} = \tau_1.$$

Ensuite, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \tau_1 - \beta_1)$, il existe un n_3 $(n_3 \in \mathbb{N})$ tel que pour $n \geq n_3$ et pour $r \in [r_n, 1 - d(1 - r_n)]$, on obtient

$$\log_p M(r_n, f) > (\tau_1 - \varepsilon)\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{\sigma_{10}}. \tag{1.8.19}$$

Comme $q \geq 2$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)}{\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 1.$$

Pour tout donné $\beta_1 < \tau_1 - \varepsilon$, il existe un n_4 $(n_4 \in \mathbb{N})$ tel que, pour $n \geq n_4$, nous avons

$$\begin{aligned}\left[\frac{\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)}{\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right]^{\sigma_{10}} &> \frac{\beta_1}{\tau_1 - \varepsilon}, \text{ i.e.,} (\tau_1 - \varepsilon)\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{\sigma_{10}} \\ &> \beta_1\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{10}}.\end{aligned} \tag{1.8.20}$$

Soit $n_5 = \max\{n_3, n_4\}$ et $E_6 = \cup_{n=n_5}^{\infty}[r_n, 1 - d(1 - r_n)]$, par $(1.8.19 - 1.8.20)$, pour tout $r \in E_6$, nous avons

$$\begin{aligned}\log_p M(r, f) &\geq \log_p M(r_n, f) > (\tau_1 - \varepsilon)\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{\sigma_{10}} \\ &> \beta_1\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{10}},\end{aligned}$$

avec

$$m_l E_6 = \sum_{n=n_5}^{\infty} \int_{r_n}^{1-d(1-r_n)} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_5}^{\infty} \log\frac{1}{d} = +\infty.$$

■

Lemme 1.12 [1] *Soient $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ et $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ en dehors d'un ensemble exceptionnel $E_1 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$. Alors il existe une constante $d \in (0,1)$ telle que si $s(r) = 1 - d(1-r)$, alors $g(r) \leq h(s(r))$ pour tout $r \in [0,1)$.*

Preuve. Par hypothèse, il existe E_1 avec $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} = \sigma < +\infty$ pour tout $r \in [0,1)$ et $r \notin E_1$, nous avons $g(r) \leq h(r)$. Maintenant, si on fixe $\varphi(r) = (1-r)\left(1 - e^{-(\sigma+1)}\right)$, alors pour tout $r \in [0,1)$, il est facile de vérifier que l'intervalle $J_r = [r, r + \varphi(r)]$ est inclus dans $[0,1)$, et l'intégrale $\int_{J_r} \frac{dt}{1-t} = \sigma + 1$. Donc J_r ne peut pas être contenu dans E_1 il existe t dans $[r, r+\varphi(r)]$ telle que $g(t) \leq h(t)$. Par la monotonicité de g et h, on obtient $g(r) \leq h(r+\varphi(r))$. Si on fixe $d = e^{-(\sigma+1)}$, alors $r + \varphi(r) = s(r)$. ■

Lemme 1.13 ([9] [24]) *On suppose que $f(z)$ est méromorphe sur Δ avec $f(0) = 0$. Alors*

$$m(r,f) \leq \left[1 + \varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right] T(R, f') + N(R, f'), \tag{1.8.21}$$

avec $0 < r < R < 1$, $\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t}$.

Lemme 1.14 ([22] [28]) *Soit $f(z)$ une fonction analytique d'ordre $[p,q]$ sur Δ. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *Si $p \geq q \geq 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(f')$.*

(ii) *Si $3 \leq q = p+1$, alors $\sigma_{[p,p+1]}(f') \leq \max\left\{\sigma_{[p,p+1]}(f), 1\right\}$ et*

$$\sigma_{[p,p+1]}(f) \leq \max\left\{\sigma_{[p,p+1]}(f'), 1\right\}.$$

(iii) *Si $p = 1$, $q = 2$, alors $\sigma_{[1,2]}(f') \leq \max\left\{\sigma_{[1,2]}(f), 1\right\}$ et $\sigma_{[1,2]}(f) \leq 1 + \sigma_{[1,2]}(f')$ (voir [16]).*

Preuve. Par le Lemme 1.1, nous avons

$$T(r,f') \leq 2T(r,f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 3T(r,f) + O\left\{\log\frac{1}{1-r}\right\} \quad (0 < r < 1,\ r \notin E_1). \tag{1.8.22}$$

Par (1.8.22) et le Lemme 1.12, on a $\sigma_{[p,q]}(f') \leq \sigma_{[p,q]}(f)$ $(p \geq q \geq 1)$ et $\sigma_{[p,p+1]}(f') \leq \max\left\{\sigma_{[p,p+1]}(f), 1\right\}$. D'autre part, soit $R = \frac{1+r}{2}$, $0 < r < 1$, par le Lemme 1.13, nous avons

$$T(r,f) < \left(3 + \log\frac{4}{(1-r)}\right) T\left(\frac{1+r}{2},\ f'\right). \tag{1.8.23}$$

D'après (1.8.23), si $p \geq q \geq 1$, alors $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f^{'})$ et si $3 \leq q = p+1$, alors $\sigma_{[p,p+1]}(f) \leq \max\left\{\sigma_{[p,p+1]}(f^{'}), 1\right\}$. Nous pouvons facilement obtenir la conclusion (iii) par (1.8.22) et (1.8.23). ■

Chapitre 2

Oscillation des Solutions des Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Fonctions Analytiques D'ordre [p,q] Dans Le Disque Unité

2.1 Introduction et résultats

Le but principal de ce chapitre est d'étudier l'oscillation des solution des équations différentielles à coefficients analytiques d'ordre $[p,q]$ dans le disque unité des équations homogènes et non homogènes de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z)$$

où $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, $F(z) (k \geq 2)$ sont des coefficients analytique dans le disque unité. On va démontrer les résultats de J. Tu, H.-X. Huang [26].

Théorème A [22] Soient $A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions entières satisfaisant $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) |\ j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$. Alors chaque solution de $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème B [22] Soient $A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions entières satisfaisant

$$\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) |\ j = 1, \cdots, k-1\right\} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$$

et

$$\max\left\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0\right\} < \tau_{[p,q]}(A_0).$$

Alors chaque solution de $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème C [11] Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\sigma_3 \geq 0$. Alors toutes les solutions de (1.1.1), où les coefficients $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ sont analytiques sur Δ, satisfont $\sigma_{M,p+1}(f) \leq \sigma_3$ si et seulement si $\sigma_{M,p}(A_j) \leq \sigma_3$ pour tout $j = 0, \cdots, k-1$. En outre $s \in \{0, \cdots ., k-1\}$ est le plus grand indice pour lequel $\sigma_{M,p}(A_s) = \max_{0 \leq j \leq k-1} \{\sigma_{M,p}(A_j)\}$, puis il y a au moins $k - s$ solutions linéairement indépendantes de (1.1.1) telles que

$$\sigma_{M,p+1}(f) = \sigma_{M,p}(A_s).$$

Théorème D [22] Soient $F(z) \not\equiv 0$, $A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions entières satisfaisant $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j), \sigma_{[p+1,q]}(F) | \; j = 1, \cdots, k-1\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Alors chaque solution $f(z)$ de (1.1.2) satisfait

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \lambda_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 2.1 *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ sur Δ. Alors les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) [20] *Si $p \geq q \geq 1$ et $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) | \; j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

(ii) *Si $\max\left\{\sigma_{[p,p+1]}(A_j), 1 | \; j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,p+1]}(A_0)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,p+1]}(f) \geq \sigma_{[p,p+1]}(A_0).$$

(iii) *Si $p > q \geq 1$ et $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) | \; j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ ou $p \geq 2$ et*

$$\max\left\{\sigma_{[p,p]}(A_j) | \; j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,p]}(A_0) (\geq 1),$$

alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 2.2 *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, .., k-1)$ des fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ sur Δ. Alors les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) *Si $1 \leq q \leq p$, $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) | \; j \neq 0\right\} < \mu_{M,[p,q]}(A_0)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{M,[p,q]}(A_0).$$

(ii) *Si $2 \leq q = p+1$, $\max\left\{\sigma_{M,[p,p+1]}(A_j), 1 | \; j \neq 0\right\} < \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\sigma_{[p+1,p+1]}(f) = \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0).$$

(iii) *Si $2 \leq q = p+1, \max\left\{\sigma_{M,[p,p+1]}(A_j), 1 | \; j \neq 0\right\} < \mu_{M,[p,p+1]}(A_0)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\mu_{M,[p+1,p+1]}(f) = \mu_{M,[p,p+1]}(A_0).$$

Corollaire 2.1 *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots ., k-1)$ des fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ sur Δ. Alors les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) *Si $1 \leq q \leq p$, $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) |\ j \neq 0\right\} < \mu_{M,[p,q]}(A_0) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0) = \sigma_4$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{M,[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p+1,q]}(f) = \sigma_4.$$

(ii) *Si $2 \leq q = p+1$, $\max\left\{\sigma_{M,[p,p+1]}(A_j), 1 |\ j \neq 0\right\} < \mu_{M,[p,p+1]}(A_0) = \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0) = \sigma_4^{'}$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\mu_{[p+1,p+1]}(f) = \mu_{M,[p+1,p+1]}(f) = \sigma_{[p+1,p+1]}(f) = \sigma_{M,[p+1,p+1]}(f) = \sigma_4^{'}.$$

Théorème 2.3 *Soient $1 \leq q \leq p$ et $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions analytiques sur Δ satisfaisant*

$$\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) |\ j \neq 0\right\} \leq \sigma_{M,[p,q]}(A_0) < \infty$$

et

$$\max\left\{\tau_{M,[p,q]}(A_j) | \sigma_{M,[p,q]}(A_j) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0),\ j \neq 0\right\} < \tau_{M,[p,q]}(A_0),$$

alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$.

Théorème 2.4 *Soient $1 \leq q \leq p$ et $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions analytiques sur Δ. Soit $s \in (0, \cdots, k-1)$ le plus grand indice pour lequel $\sigma_{M,[p,q]}(A_s) = \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) |\ 0 \leq j \leq k-1\right\}$ Alors, il ya au moins $k - s$ solutions linéairement indépendantes $f(z)$ de (1.1.1) telles que $\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_s)$. En outre, tous les solutions de (1.1.1) satisfont $\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \sigma_5$ si et seulement si $\sigma_{M,[p,q]}(A_j) \leq \sigma_5$ pour tout $j = 0, 1, \cdots, k-1$.*

Théorème 2.5 *Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ sur Δ. Alors les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) *Si $1 \leq q \leq p$, $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j), \sigma_{M,[p+1,q]}(F) |\ j = 1, \cdots, k-1\right\} < \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$, alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait*

$$\overline{\lambda}^{N}_{[p+1,q]}(f) = \lambda^{N}_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0),$$

avec une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant

$$\sigma_{[p+1,q]}(f_0) \leq \sigma_{M,[p,q]}(A_0).$$

(ii) *Si $2 \leq q = p+1$, et*

$$\max\left\{\sigma_{M,[p,p+1]}(A_j), \sigma_{M,[p+1,p+1]}(F), 1 |\ j = 1, \cdots, k-1\right\} < \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0),$$

alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\overline{\lambda}^{N}_{[p+1,p+1]}(f) = \lambda^{N}_{[p+1,p+1]}(f) = \sigma_{[p+1,p+1]}(f) = \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0),$$

avec une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant

$$\sigma_{[p+1,p+1]}(f_0) < \sigma_{M,[p,p+1]}(A_0).$$

Remarque 2.1 *En général, les Théorèmes 2.3 et 2.4 ne sont pas vrais pour le cas $2 \leq q = p+1$.*

2.2 Preuve du Théorème 2.1

(i) Si $f(z) \not\equiv 0$, on peut écrire (1.1.1) sous la forme

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{2.2.1}$$

Par (2.2.1), nous pouvons obtenir

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \tag{2.2.2}$$

Comme $\max\left\{\sigma_{[p,q]}(A_j) \mid j \neq 0\right\} < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors par le Lemme 1.9, il existe un ensemble $E_4 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_4} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_4$, nous avons

$$\frac{m(r, A_j)}{m(r, A_0)} \to 0 \ \left(r \to 1^-, r \in E_4, \ j = 1, \cdots, k-1\right). \tag{2.2.3}$$

Par le Lemme 1.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left\{\log^+ T(r, f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}. \tag{2.2.4}$$

Par (2.2.2)-(2.2.4), pour tout $r \in E_4 \setminus E_1$ suffisamment grand, nous avons

$$\frac{1}{2} m(r, A_0) \leq O\left\{\log^+ T(r, f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}. \tag{2.2.5}$$

Par conséquent

$$\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f)(1 \leq q \leq p).$$

(ii) Par (2.2.5), nous avons $\sigma_{[p,p+1]}(A_0) \leq \max\left\{\sigma_{[p+1,p+1]}(f), 1\right\}$, et puisque $\sigma_{[p,p+1]}(A_0) > 1$, il est facile de voir que

$$\sigma_{[p,p+1]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,p+1]}(f).$$

Par conséquent, chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p,p+1]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,p+1]}(f).$$

(iii) D'après (2.2.5), nous avons $\sigma_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p+1,q]}(f)$. Si $p = q \geq 2$ et $\sigma_{[p,q]}(A_0) \geq 1$ ou $p \geq q \geq 1$, par la Proposition 1.1 (*iii*) et le Lemme 1.5, nous avons

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) \mid j = 0, 1, \cdots, k-1\right\} = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Par conséquent, chaque solution de $f(z) \not\equiv 0$ (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

2.3 Preuve du Théorème 2.2

Supposons $f \not\equiv 0$ est une solution analytique de (1.1.1). D'après (1.1.1) nous obtenons

$$|A_0| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{2.3.1}$$

Par le Lemme 1.3, pour $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^M . \max\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right), T\left(s\left(r\right), f\right)\right\}\right)^j \quad (\ j = 1, \cdots, k). \tag{2.3.2}$$

Posons

$$\sigma_{11} = \max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j)|\ j \neq 0\right\} < \mu_{M,[p,q]}(A_0) = \mu_1.$$

Par les Définition 1.14 et Définition 1.15, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu_1 - \sigma_{11})$, on a

$$M\left(r, A_j\right) \leq \exp_{p+1}\left\{(\sigma_{11} + \varepsilon) \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \ (r \to 1^-,\ j = 1, \cdots, k-1), \tag{2.3.3}$$

et

$$M\left(r, A_0\right) > \exp_{p+1}\left\{(\mu_1 - \varepsilon) \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \ (r \to 1^-). \tag{2.3.4}$$

Par (2.3.1)-(2.3.4), pour tout z satisfaisant $|A_0(z)| = M\left(r, A_0\right)$ et $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\begin{aligned} \exp_{p+1}\left\{(\mu_1 - \varepsilon) \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \quad &\leq \quad k. \exp_{p+1}\left\{(\sigma_{11} + \varepsilon) \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \\ &\quad . \left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^M . \max\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right), T\left(s\left(r\right), f\right)\right\}\right)^k . \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.12, on obtient

$$\mu_1 \leq \mu_{[p+1,q]}(f).$$

D'autre part, par le Lemme 1.7, nous avons

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\mu_{M,[p,q]}(A_0), \sigma_{M,[p,q]}(A_j)|\ j \neq 0\right\} = \mu_{M,[p,q]}(A_0) = \mu_1.$$

vérifiée pour toutes les solutions de (1.1.1), par conséquent, toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{M,[p,q]}(A_0).$$

$(ii - iii)$ Par une preuve similaire au cas (i), nous pouvons facilement obtenir les conclusions des cas $(ii - iii)$.

2.4 Preuve du Théorème 2.3

Si $A_j(z)(j=0,\cdots,k-1)$ satisfont $\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j)\mid j=1,\cdots,k-1\right\}<\sigma_{M,[p,q]}(A_0)$ on a le Théorème 2.3. Ainsi, on suppose qu 'au moins l'un des $A_j(z)(j=0,\cdots,k-1)$ satisfait $\sigma_{M,[p,q]}(A_j)=\sigma_{M,[p,q]}(A_0)$.On choisit β_2,β_3 tels que

$$\max\{\tau_{M,[p,q]}(A_j)|\sigma_{M,[p,q]}(A_j)=\sigma_{M,[p,q]}(A_0),j\neq 0\}<\beta_2<\beta_3<\tau_{M,[p,q]}(A_0)=\tau_2.$$

On pose $\sigma_{M,[p,q]}(A_0)=\sigma_{12}$, et par la Définition 1.17, nous avons

$$M\left(r,A_j\right)\leq \exp_p\left\{\beta_2\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{12}}\right\}\ \ \left(r\to 1^-\right) \tag{2.4.1}$$

Par le Lemme 1.11, il existe un ensemble E_6 avec $\int\limits_{E_6}\frac{dt}{1-t}=+\infty$ tel que pour $|z|=r\in E_6$, on a

$$M\left(r,A_0\right)>\exp_p\left\{\beta_3\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{12}}\right\}. \tag{2.4.2}$$

Par (2.3.1), (2.3.2), (2.4.1) et (2.4.2), pour tout z satisfaisant $|A_0(z)|=M\left(r,A_0\right)$ et $|z|=r\in E_6\setminus E_1$, on a

$$\begin{aligned}\exp_p\left\{\beta_3\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{12}}\right\} &\leq k.\exp_p\left\{\beta_2\left[\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{\sigma_{12}}\right\}\\ &\quad .\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^M.\max\left\{\log\left(\frac{1}{1-r}\right),T\left(s\left(r\right),f\right)\right\}\right)^k.\end{aligned}$$

Par l'inégalité et le Lemme 1.12 ci-dessus, nous avons

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_{12}.$$

D'autre part, par le Lemme 1.5 nous aura

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)\leq\max.\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j)\mid j=0,\cdots,k\right\}=\sigma_{M,[p,q]}(A_0)=\sigma_{12}.$$

Alors chaque solution $f(z)\not\equiv 0$ de (1.1.1) satisfait

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)=\sigma_{M,[p,q]}(A_0).$$

2.5 Preuve du Théorème 2.4

Nous divisons la preuve en deux parties .

(i) Si $s=0$, alors d'après le Théorème 2.3, on a le Théorème 2.4. Si $1\leq s\leq k-1$, on doit prouver que (1.1.1) possède s solutions linéairement indépendantes de $f(z)$ vérifiant

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)<\sigma_{M,[p,q]}(A_s).$$

Supposons le contraire, que (1.1.1) possède $s+1$ solutions linéairement indépendantes $f_{0,1},..,f_{0,s+1}$ telles que $\sigma_{[p+1,q]}(f_{0,j}) < \sigma_{M,[p,q]}(A_s)(j=1,\cdots,s+1)$, et on applique la procédure standard de réduction de l'ordre (voir [19 , p . 61]), nous avons donc que $f_{0,1},..,f_{0,s+1}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$y^{(k)} + A_{0,k-1}(z)y^{(k-1)} + \cdots + A_{0,0}(z)y = 0,$$

Ici, nous utilisons $A_{0,0},\cdots,A_{0,k-1}$ au lieu de $A_0,\cdots,A_{k-1}$. Pour $1 \leq m \leq s$, et

$$f_{m,j} = \left(\frac{f_{m-1,j+1}}{f_{m-1,1}}\right)' (j=1,\cdots,s+1-m).$$

Tableau 1 Relation entre les coefficients et solutions

	k	$k-1$	$k-s$	s	$s-1$	1	0	*solution*
f_0	1	$A_{0,k-1}$	$A_{0,k-s}$	$A_{0,s}$	$A_{0,s-1}$	$A_{0,1}$	$A_{0,0}$	$f_{0,1},\cdots,f_{0,s+1}$
f_1		1	$A_{1,k-s}$	$A_{1,s}$	$A_{1,s-1}$	$A_{1,1}$	$A_{1,0}$	$f_{1,1},\cdots,f_{1,s}$
f_{s-1}			$A_{s-1,k-s}$	$A_{s-1,s}$	$A_{s-1,s-1}$	$A_{s-1,1}$	$A_{s-1,0}$	$f_{s-1,1}, f_{s-1,2}$
f_s			1	$A_{s,s}$	$A_{s,s-1}$	$A_{s,1}$	$A_{s,0}$	$f_{s,1}$

Par la procédure standard de réduction de l'ordre, après les étapes de réduction de la m du tableau 1, nous savons que $f_{m,1},\ f_{m,2},\cdots,\ f_{m,s+1-m}$ sont les solutions analytiques linéairement indépendantes de

$$y^{(k-m)} + A_{m,k-m-1}(z)y^{(k-m-1)} + \cdots + A_{m,0}(z)y = 0,$$

Avec

$$A_{m,j}(z) = \sum_{n=j+1}^{k-m+1} \binom{n}{j+1} A_{m-1,n}(z)\frac{f_{m-1,1}^{(n-j-1)}(z)}{f_{m-1,1}(z)} \ (j=0,\cdots,k-1)$$

et $A_{n,k-n} \equiv 1$ pour tout $n=0,1\cdots,m$. Par conséquent

$$|A_{m,j}(z)| \leq M.\,|A_{m-1,n}(z)| \left|\frac{f_{m-1,1}^{(n-j-1)}(z)}{f_{m-1,1}(z)}\right| \quad (j=0,\cdots,k-1,\ n=j+1,\cdots,k-m+1). \tag{2.5.1}$$

Nous choisissons β_4, β_5 telle que

$$\max\left\{\sigma_{M,[p,q]}(A_{0,j})|\ j=s+1,\cdots,k-1,\ \sigma_{[p+1,q]}(f_{0,1}),\cdots,\sigma_{[p+1,q]}(f_{0,s+1})\right\} < \beta_4 < \beta_5 < \sigma_{M,[p,q]}(A_s).$$

Par le Lemme 1.3 et (2.5.1), pour chaque $0 \leq n \leq s$, on obtient

$$M(r, A_{n,l}) \leq \exp_{p+1}\left\{\beta_4 \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \quad (r \notin E_1,\ l=s+1-n,\cdots,k-n-1)\,. \tag{2.5.2}$$

Par le Lemme 1.8, il existe un ensemble $E_3 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_6} \frac{dt}{1-t} = +\infty$ tel que pour tout $r \in E_3$, nous avons

$$M(r, A_{0,s}) \geq \exp_{p+1}\left\{\beta_5 \log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}. \tag{2.5.3}$$

Par (2.5.1)-(2.5.3), pour tout $r \in E_3$, on a

$$M(r, A_{n,s-n}) \geq \frac{1}{2} \exp_{p+1} \left\{ \beta_5 \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\} \ (n = 1, \cdots, s). \tag{2.5.4}$$

On pose $m = s$, après s étapes de réduction, nous avons que $f_{s,1}$ est une solution analytique de

$$y^{(k-s)} + A_{s,k-s-1}(z) y^{(k-s-1)} + \cdots + A_{s,0}(z) y = 0,$$

et satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(f_{s,1}) < \sigma_{M,[p,q]}(A_s)$, aussi nous avons

$$|A_{s,0}(z)| \leq \left| \frac{f_{s,1}^{(k-s)}(z)}{f_{s,1}(z)} \right| + |A_{s,k-s-1}(z)| \left| \frac{f_{s,1}^{(k-s-1)}(z)}{f_{s,1}(z)} \right| + \cdots + |A_{s,1}(z)| \left| \frac{f_{s,1}'(z)}{f_{s,1}(z)} \right|. \tag{2.5.5}$$

Par (2.5.2), (2.5.5) et le Lemme 1.3, nous avons

$$M(r, A_{s,0}) \leq M. \exp_{p+1} \left\{ \beta_4 \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\} \quad (r \notin E_1),$$

ce qui est une contradiction avec (2.5.4) pour $n = s$. Par conséquent, (1.1.1) possède s solutions linéairement indépendantes $f(z)$ vérifiant

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) < \sigma_{M,[p,q]}(A_s).$$

(ii) Par le Lemme 1.5, il est facile de voir que toutes les solutions de (1.1.1) satisfont $\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) | \ j = 0, \cdots, k\} \leq \sigma_5$ si $\sigma_{M,[p,q]}(A_j) \leq \sigma_5$ pour $j = 0, 1, \cdots, k-1$.

D'autre part, on suppose que toutes les solutions de (1.1.1) satisfont $\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \sigma_5$ et qu'il y a au moins un coefficient $A_j(z)$ de (1.1.1) tel que $\sigma_{M,[p,q]}(A_j) > \sigma_5$. Maintenant, si $s \in \{0, \cdots, k-1\}$ est le plus grand indice tel que

$$\sigma_{M,[p,q]}(A_s) = \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j) | \ j = 0, \cdots, k-1\},$$

d'après la preuve du cas (i), l'équation (1.1.1) a au moins $k - s \geq 1$ solutions linéairement indépendantes $f(z)$ telle que $\sigma_{[p+1,q]}(f) > \sigma_5$. Ceci est une contradiction, donc $\sigma_{M,[p,q]}(A_j) \leq \sigma_5$ pour tout $j = 0, 1, \cdots, k-1$.

2.6 Preuve du Théorème 2.5

(i) Supposons que f est une solution de (1.1.2), par la théorie élémentaire des équations différentielles, toutes les solutions de (1.1.2) ont la forme

$$f = f^* + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_k f_k,$$

avec C_1, $C_2, \cdots, C_k$ des constantes complexes, $\{ f_1, \cdots, f_k\}$ est une base de solutions de (1.1.1), f^* est une solution de (1.1.2) et s'écrit

$$f^* = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \cdots + D_k f_k, \tag{2.6.1}$$

où $D_1,\ D_2, \cdots, D_k$ sont des fonctions analytiques sur Δ satisfaisant

$$D_j' = F.G_j\left(f_1, \cdots, f_k\right).W\left(f_1, \cdots, f_k\right)^{-1} \quad (j = 1, \cdots, k), \tag{2.6.2}$$

où $G_j(f_1, \cdots, f_k)$ sont des polynômes différentiels en $f_1, \cdots, f_k$ et leurs dérivées avec des coefficients constants, et $W\left(f_1, \cdots, f_k\right)$ est le Wronskian de $f_1, \cdots, f_k$. Par le Lemme 1.14 et d'après le Théorème A, nous avons

$$\sigma_{[p+1,q]}\left(f_j\right) = \sigma_{[p,q]}\left(A_0\right) (j = 1, \cdots, k)$$

et par (2.6.1) et (2.6.2), on obtient

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\{\sigma_{[p+1,q]}(f_j), \sigma_{[p+1,q]}(F) |\ j = 1, \cdots, k\} = \sigma_{M,[p,q]}(A_0).$$

Nous affirmons que (1.1.2) ne peut posséder au plus une solution exceptionnelle de f_0 satisfaisant $\sigma_{[p+1,q]}(f_0) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$. En fait, si f^* est une autre solution satisfaisant $\sigma_{[p+1,q]}(f^*) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$, alors

$$\sigma_{[p+1,q]}(f_0 - f^*) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0).$$

Mais $f_0 - f^*$ est une solution de (1.1.1) qui satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(f_0 - f^*) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$, cela est une contradiction. Alors,

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$$

est valable pour toutes les solutions de (1.1.2) avec f_0 une solution exceptionnelle satisfaisant $\sigma_{[p+1,q]}(f_0) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$. Par le Lemme 1.10, nous obtenons

$$\lambda^N_{[p+1,q]}(f) = \lambda^N_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$$

pour toutes les solutions satisfaisant

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(A_0)$$

avec f_0 une solution exceptionnelle satisfaisant

$$\sigma_{[p+1,q]}(f_0) < \sigma_{M,[p,q]}(A_0).$$

(ii) Par une preuve similaire au cas (i), nous pouvons obtenir la conclusion du cas (ii) .

conclusion

Plusieurs chercheurs ont étudié l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients analytiques et à coefficients entières dans le disque unité ou dans le plan complexe.

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à J. Tu, H.-X. Huang [26] concernant l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients analytiques d'ordre [p ; q] dans le disque unité de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z),$$

avec $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z),\ F(z)(k \geq 2)$ des coefficients fonctions analytiques dans le disque unité. Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions méromorphes ?

Bibliographie

[1] Bank, S. : A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations. Compos. Math. 25, 61–70 (1972)

[2] Belaïdi, B. : Growth and oscillation theroy of [p, q]-order analytic solutions of linear equations in the unit disc. J. Math. Anal. 3(1), 1–11 (2012)

[3] Belaïdi, B. : Growth of solutions to linear equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc. Electron. J. Diff. Equ. 156, 1–11 (2011)

[4] Benbourenane, D., Sons, L.R. : On global solutions of complex diffenrential equations in the unit disk. Complex Var. Ell. Equ. 49, 913–925 (2004)

[5] Cao, T.B., Yi, H.X. : The growth of solutions of complex differential equations in the unit disc. J. Math. Anal. Appl. 319, 278–294 (2006)

[6] Chen, Z.X., Shon, K.H. : The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the unit disc. J. Math. Anal. Appl. 297, 285–304 (2004)

[7] Chyzhykov, I., Gundersen, G., Heittokangas, J. : Linear differential equations and logarithmic derivate of estimates. Proc. Lond. Math. Soc. 86, 735–754 (2003)

[8] Hayman, W. : Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford (1964)

[9] Hayman, W. : On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals. Acta Math. 112, 181–214 (1964)

[10] Heittokangas, J. : On complex differential equations in the unit disc. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122, 1–54 (2000)

[11] Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J. : Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc. Results Math. 49, 265–278 (2006)

[12] Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J. : Generalized logarithmic derivative estimates of Gol'dberg–Grinshtein type. Bull. Lond. Math. Soc. 36,105–114 (2004)

[13] Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J. : Growth estimates for solutions of linear differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1 29, 233–246 (2004), 34-35

[14] Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J. : Linear differential equations with coefficients in weighted bergman and hardy space. Trans. Am. Math. Soc. 360, 1035–1055 (2008)

[15] Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J. : Linear differential equations with solutions in dirichlet type subspace of the hardy space. Nagoya Math. J. 187, 91–113 (2007)

[16] Heittokangas, J.,Wen, Z.T. : Functions of finite logarithmic order in the unit disc, part I. J. Math. Anal. Appl. 415(1), 435–461 (2014)

[17] Korhonen, R., Rättyä, J. : Finite order solutions of linear differential equations in the unit disc. J. Math. Anal. Appl. 349, 43–54 (2009)

[18] Laine, I. : Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin (1993)

[19] Laine, I. : Complex differential equations, Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.

[20] Latreuch, Z., Belaïdi, B. : Linear differential equations with analytic coefficients of [p, q]-order in the unit disc. Sarajevo J. Math. 9(21), 71–84 (2013)

[21] Li, L.M., Cao, T.B. : Solutions for linear differential equations with meromorphic coefficients of (p, q)-order in the plane. Electron. J. Diff. Equ. 2012(195), 1–15 (2012)

[22] Liu, J., Tu, J., Shi, L.Z. : Linear differential equations with coefficients of (p, q)-order in the complex plane. J. Math. Anal. Appl. 372, 55–67 (2010)

[23] Pommerenke, Chr. : On the mean growth of the solutions of complex linear differential equations in the disc. Complex Var. Ell. Equ. 1(1), 23–38 (1982)

[24] Shea, D., Sons, L.R. : Value distribution theory for meromorphic functions of slow growth in the disk. Houston J. Math. 12(2), 249–266 (1986)

[25] Tu, J., Deng, G.T. : Growth of solutions of higher order linear differential equations with coefficient A0 being dominant. Acta Math. Sci. Ser. A. 30(4), 945–952 (2010) (in Chinese)

[26] Tu,J., H.-X.Huang : Complex oscillation of linear differential equations with analytic coefficients of [p, q]-order in the unit disc

[27] Tsuji, M. : Potential Theory in Modern FunctionTheory. Reprint of the 1959 edition. Chelsea Publishing Co., New York (1975)

[28] Wittich, H. : Zur Theorie linearer Differentialgleichungen im Komplexen. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 379(1), 1–18 (1966).