# Table des matières

# Introduction

Le dévelloppement de la théorie du contrôle optimal nécéssite les données suivantes :
**(i)** Un contrôle appartenant à un ensemble $U_{ad}$ (ensemble des contrôles admissibles).

**(ii)** Pour un contrôle donné $u$ , l'état du système à contrôler est donné par la solution :

$$Ay(u) = \psi(f, u),$$

où $\psi$ est donné, généralement linéaire par rapport à $f$ et à $u$ , où $A$ est un opérateur supposé connu ($A$ est le modèle du système ).

**(iii)** L'observation $z(u)$, est une fonction de $y(u)$ , (supposée connue ).
**(iv)** La fonction coût $J(u)$ (fonction économique ) est une fonction numérique. On s'intéresse

à trouver

$$\inf J(u),\ u \in U_{ad}\ .$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le chapitre 1 est un consacré à quelques rappels sur les espaces de Sobolev.
Dans le chapitre 2, on étudie la minimisation d'une forme quadratique définie positive sur un sous ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert, puis on généralise pour l'étude des inégalités variationnelles qui ne représentent pas nécessairement un problème de minimisation. Ce chapitre se termine par des exemples d'applications illustratifs.
Enfin, le chapitre 3 étudie le contrôle optimal des systèmes règis par des équations aux dérivées partielles elliptiques.
Ce travail, est tiré de l'étude faite par J.L.Lions dans son ouvrage intitulé "Contrôle Optimal Des Systèmes Régis Par Des Equations Aux Dérivées Partielles" [1].

**Chapitre 1**

# Rappel sur les espaces de Sobolev

## 1.1 Notations

**1-** On note par $\Omega$ tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ .

**2-** Soit $\alpha = (\alpha_1 ,\ldots ,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, et $\varphi$ est une fonction suffisement differentiable sur $\Omega$. on pose

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Cette expression est appelée dérivées d'ordre $|\alpha|$ de $\varphi$ .
**3-** L'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\Omega$ est noté $C^\infty(\Omega)$ .

**4-** On appelle support d'une fonction $\varphi$ , l'ensemble

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega\ ;\ \varphi(x) \neq 0\}} .$$

**5-** L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et a support compact dans $\Omega$ est noté $D(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ .

### 1.1.1 Les dérivées faibles

**Définition 1.1** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u$ une fonction localement intégrable sur $\Omega$ , s'il existe $g \in L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\int_\Omega u\ D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\ \varphi\ dx .$$

On dit que $g$ est la dérivée faible d'ordre $\alpha$ sur $\Omega$ et on note : $g = D^\alpha u$ .

### 1.1.2 L'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$

**Définition 1.2** *On note par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \ \nabla u \in L^2(\Omega) \right\}$$

*$H^1(\Omega)$ est appelé espace de Sobolev d'ordre 1.*
*L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

**Proposition 1.1** *Muni de la norme :*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

*$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*
*L'expression*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

*est une norme sur $H^1(\Omega)$ , équivalente à sa norme usuelle définie dans (1.1).*

$$D\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ \varphi\,|_{\Omega} : \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

**Proposition 1.2** *L'espace $D\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*
*En d'autres termes :*

$$\forall \ u \in H^1(\Omega), \forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ \varphi \in D(\overline{\Omega}) : \ \|u - \varphi\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

**Proposition 1.3** *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & D\left(\overline{\Omega}\right) & \rightarrow & C^\infty(\Gamma) \\ & u & \rightarrow & u\,|_{\Gamma} \end{array}$$

*se prolonge en une application linéaire, continue et surjective*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega) & \rightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & u & \rightarrow & \gamma_0\, u\ . \end{array}$$

**Définition 1.3** *$\gamma_0 u$ est appelée trace de $u$ sur $\Gamma$.*

**Définition 1.4** *La fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$,*

*on le note : $H^1_0(\Omega)$ .*

**Proposition 1.4** *Si $\Omega$ est un ouvert régulier ($\Gamma$ est lipschitzien) on a :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \ \gamma_0 = 0 \ sur \ \Gamma \ \right\}.$$

Le dual de $H_0^1(\Omega)$ est noté $H^{-1}(\Omega)$ .

**Chapitre 2**

# Minimisation des fonctions et problèmes aux limites unilatéraux

## 2.1 Minimisation des formes coercitives

Soit $U$ un espace de Hilbert réel. Dans les chapitres suivants, l'espace $U$ dèsignera l'espace des contrôles.
Pour le moment, on va supposer les données suivantes :

$$(i) \begin{cases} \pi \ est\ une\ forme\ bilinéaire\ continue\ sur\ U, et\ symétrique : \\ u, v \to \pi(u,v) \quad , \quad \pi(u,v) = \pi(v,u)\ \forall\ u,v \in U, \\ |\pi(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|. \end{cases}$$

$$(ii)\ \{ v \to L(v)\ est\ une\ forme\ linéaire\ continue\ sur\ U.$$

Le but est trouver un minimum sur $U_{ad}$ de la forme quadratique :

$$J(v) = \pi(u,v) - 2L(v) \tag{2.1}$$

où $U_{ad}$ est un convexe fermé de $U$. Cet espace sera appelé, espace des contrôles admissibles.

### 2.1.1 Le cas ou $\pi$ est coercitive

**Définition 2.1** *On dit que la forme bilinéaire $\pi$ est coercitive sur $U$ si*

$$\exists\ \alpha > 0, \quad \pi(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \qquad \forall\ v \in U\ . \tag{2.2}$$

On a le théorème suivant

**Théorème 2.1** *Soit $\pi(u\ ,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercitive sur $U$. Alors il existe un élément unique $u$ dans $U_{ad}$ tel que :*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \tag{2.3}$$

**Preuve.** Comme $\pi$ est coercitive et $L$ est continue alors :

$$J(v) \geq \alpha \|v\|^2 - 2 \|L\| \|v\|, \quad \forall\ v \in U.$$

Mais,

$$2 \|L\| \|v\| = 2 \frac{\|L\|}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha} \|v\| \leq \frac{\|L\|^2}{\alpha} + \alpha \|v\|^2 .$$

Alors,

$$J(v) \geq -\frac{\|L\|^2}{\alpha} \quad \forall\ v \in U_{ad}.$$

$J(v)$ est minorée dans $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inferieure.
Soit

$$d = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)\ .$$

Montrons qu'il existe un unique $u \in U_{ad}$, vérifiant :

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) = d\ .$$

De la caractérisation de la borne inférieure, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists\ u_n \in U_{ad} : \quad d \leq J(u_n) < d + \frac{1}{n}. \tag{2.4}$$

La suite $(u_n)$ est appelée suite minimisante.
Sachant que

$$4a \left( \frac{u_n + u_m}{2}\ , \frac{u_n + u_m}{2} \right) = a\,(u_n, u_n) + a\,(u_m, u_m) + 2a\,(u_n, u_m)$$

et donc

$$-2a\,(u_n\ , u_m) = a\,(u_n, u_n) + a\,(u_m, u_m) - 4a \left( \frac{u_n + u_m}{2}\ , \frac{u_n + u_m}{2} \right)$$

alors, de la coercivité de la forme bilinéaire $a\,(u, v)$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u_n - u_m\|^2 &\leq a\,(u_n - u_m\ , u_n - u_m) \\ &\leq a\,(u_n, u_n) + a\,(u_m, u_m) - 2a\,(u_n, u_m)\ . \\ &\leq 2a\,(u_n, u_n) + 2a\,(u_m, u_m) - 4a \left( \frac{u_n + u_m}{2}\ , \frac{u_n + u_m}{2} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$-4L(u_n) - 4L(4u_m) + 8L\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = 0 \ ,$$

alors,

$$\alpha \left\|v_n - v_m\right\|^2 \leq 2J(u_n) + 2J(u_m) - 4J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right),$$

Comme $U_{ad}$ est convexe alors

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in U_{ad},$$

et donc

$$J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \geq d.$$

On a alors :

$$0 \leq \alpha \left\|u_n - u_m\right\|^2 \leq 4d + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4d = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \ .$$

On déduit alors que la suite $(u_n)$ est de cauchy dans $U$ , alors elle converge vers un élément $u \in U$. Comme $U_{ad}$ est fermé alors $u \in U_{ad}$ .
De plus, du fait que la fonction

$$v \to J(v) = a(v, v) - 2L(v)$$

est continue sur $U$ alors

$$J(u_n) \to J(u) \,.$$

De la double inégalité (2.4) on obtient :

$$J(u) = d = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \,.$$

**L'unicité :** Supposons que le problème (2.3) admet deux solutions $u_1$ et $u_2$. Le même raisonnement que précédemment, donne :

$$\alpha \left\|u_1 - u_2\right\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 2J(u_1) + 2J(u_2) - 4J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq 0.$$

Car, le fait que $U_{ad}$ est convexe, $\dfrac{u_1 + u_2}{2} \in U_{ad}$.
et donc

$$J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq J(u_i), \ i = 1, 2.$$

Ce qui donne $u_1 = u_2$.

**Exemple 2.1** *Prenons*

$$\pi(u,v) = (u,v) \quad \textit{Produit scalaire dans } U,$$

$$L(v) = (g,v)_U, \qquad g \in U$$

*Alors,*

$$J(u) = \|g-v\|_U^2 - \|g\|_U^2,$$

*et l'unique élément de $u \in U_{ad}$ tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

*est défini par :*

$$\|g-u\|_U \leq \|g-v\|_U \quad \forall v \in U_{ad}\,;$$

*l'élément $u$ est donc la projection de $g$ sur $U_{ad}$.*

### 2.1.2 La caractérisation de l'élément minimum

**Inégalités variationnelles**

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses du théorème 2.1, l'élément minimum $u$ donné par le théorème 2.1, est caractérisé par :*

$$u \in U_{ad}\ ; \qquad \pi(u, v-u) \geq L(v-u),\ \forall v \in U_{ad}. \tag{2.5}$$

**Preuve.** **(⇒)** Supposons que

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall\ v \in U_{ad}$$

et montrons que

$$\pi(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall\ v \in U_{ad}.$$

Soit $v \in U_{ad}$. Du fait que $U_{ad}$ est convexe alors

$$w = u + t(v-u)\ \in U_{ad},\ \forall\ t \in [0,1]\,,$$

alors,

$$J(u) \leq J(w).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
J(w) &= \pi(w,w) - 2L(w) \\
&= \pi(u+t(v-u),\ u+t(v-u) - 2L\left(u+t(v-u)\right) \\
&= \pi(u,u) + 2t\pi(u,v-u) + t^2\pi(v-u,v-u) - 2L(u) - 2tL(v-u).
\end{aligned}$$

Donc
$$J(w) - J(u) \geq 0 \Leftrightarrow 2t\pi(u, v - u) + t^2\pi(v - u, v - u) - 2tL(v - u) \geq 0,$$
on simplifie par $t$ puis on fait tendre $t$ vers 0 on obtient
$$\pi(u, v - u) - L(v - u) \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad}.$$
**(⇐)** Soit $v \in U_{ad}$ quelconque, on a :
$$\begin{aligned}
J(v) - J(u) &= J(v - u + u) - J(u) \\
&= \pi(v - u + u, v - u + u) - 2L(v - u + u) - \pi(u, u) + 2L(u) \\
&= \pi(v - u, v - u) + 2\pi(u, v - u) - 2L(v - u) - 2L(u) + \pi(u, u) - \pi(u, u) + 2L(u) \\
&= \pi(v - u, v - u) + 2\left[\pi(u, v - u) - L(v - u)\right] \geq 0
\end{aligned}$$
car
$$\pi(v - u, v - u) \geq \alpha \left\|v - u\right\|^2 \geq 0.$$
Et
$$\pi(u, v - u) - L(v - u) \geq 0 \quad \textit{par hypothèse}.$$

### 2.1.3 Autres formes d'inégalités variationnelles

Les résultats suivants sont très utiles dans un sens technique :

**Théorème 2.3** *Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites. Alors, la caractérisation (2.5) est équivalente à :*
$$u \in U_{ad}; \quad \pi(v, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.6}$$

**Preuve.** **(⇒)** On a :
$$\pi(v, v - u) = \pi(v - u, v - u) + \pi(u, v - u) \geq L\,(v - u)$$
car
$$\pi(v - u, v - u) \geq \alpha \left\|v - u\right\|^2 \geq 0.$$
**(⇐)** Supposons que
$$\pi(v, v - u) \geq L\,(v - u) \quad \forall\, v \in U_{ad}.$$
Pour $v \in U_{ad}$ , on a
$$w = u + t\,(v - u) \in U_{ad} \;\; \textit{car } U_{ad} \textit{ est convexe}$$
alors :
$$\pi\,(w, w - u) \geq L\,(w - u)$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi\left(u+t\left(v-u\right),t\left(v-u\right)\right)\geq tL\left(v-u\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$t\pi\left(u,v-u\right)+t^{2}\pi(v-u,v-u\right)\geq tL\left(v-u\right).$$

On simplifie par $t$ puis on fait tendre $t$ vers 0,on obtient :

$$\pi\left(u,v-u\right)\geq L\left(v-u\right)\quad\forall\ v\in U_{ad}.$$

## 2.2 Solutions directes de certaines inégalités variationnelles

### 2.2.1 Enoncé du problème

Soit $\pi(u\ ,v)$ une forme bilinéaire donnée sur $U$ qui n'est pas nécessairement symétrique et $L$ est une forme linéaire continue sur $U$ ; on cherche $u\in U_{ad}$ qui satisfait

$$\pi(u,v-u)\geq L(v-u)\qquad\forall\ v\in U_{ad}.\tag{2.7}$$

Notons que lorsque $\pi$ est non symétrique, (2.7) ne correspond pas à un problème de calcul de variations, de la recherche d'extrema d'une fonctionnelle. En dépit de cela, les inégalités du type (2.7) sont désignées comme des inégalités variationnelles.

### 2.2.2 Théorème d'existence et d'unicité

**Théorème 2.4** *Supposons que la forme bilinéaire (non nécessairement symétrique) $\pi(u\ ,v)$ satisfait*

$$\exists\ \alpha>0;\qquad\pi(v_1-v_2,v_1-v_2)\geq\alpha\|v_1-v_2\|^2,\qquad\forall\ v_1,v_2\in U_{ad}.$$

*Alors il existe un $u$ unique dans $U_{ad}$ qui satisfait (2.7) .*

**Preuve.** **1-** Si $\pi$ est symetrique, alors

$$(2.7)\Leftrightarrow\quad u\in U_{ad}:\quad J\left(u\right)=\inf_{v\in U_{ad}}J\left(v\right)$$

et donc (2.7) admet un $u\in U_{ad}$ unique, d'aprés le théorème 2.1.
**2-** Si $\pi$ n'est pas symétrique, on pose :

$$a(u,v)=\frac{1}{2}\left(\pi(u,v)+\pi(v,u)\right)\quad et\quad b(u,v)=\frac{1}{2}\left(\pi(u,v)-\pi(v,u)\right)$$

$$\pi_t(u,v)=a(u,v)+tb(u,v).$$

On remarque que
**(i)** $\pi(u\ ,v) = a(u\ ,v) + a(u\ ,v)$
**(ii)** la forme bilinéaire $a$ est continue et symetrique
**(iii)** $\pi(v\ ,v) = a(v\ ,v) \quad \forall\ v \in U.$
Du point **(iii)** on déduie que si $\pi$ est coercitive alors $a$ est coercitive ; en effet

$$a(v,v) = \pi(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 .$$

Comme $a$ est symetrique alors, pour toute forme $L$ linéaire et continue sur $U$ , il existe un unique $u \in U_{ad}$ :

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall\ v \in U_{ad}\ ,$$

où $u$ est solution de

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

Pour la suite de la démonstration, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.1** *Si pour* $s \in [0,1]$ *, le problème (2.7) est rèsolu pour* $\pi_s(u\ ,v)$ *et pour tout* $L \in U'$ *, alors il est rèsolu pour* $\pi_t(u,v)$ *où* $s \leq t \leq t+\tau$ *,*
*avec ;* $0 < \tau < \frac{\alpha}{M}$ *et* $M = \sup \dfrac{|b(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} < \infty$ .

**Preuve.** Définissons l'application :

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & U \rightarrow U_{ad} \\ & w \rightarrow u = Tw \end{aligned}$$

comme suit :

$$u \in U_{ad}\ : \pi_s(u, v-u) \geq L_t\,(v-u) \quad \forall\ v \in U_{ad} \tag{2.8}$$

où

$$L_t(v) = L(v) - (t-s)\, b(w,v) \qquad s \leq t.$$

$L_t$ est bien une forme linéaire et continue sur $U$ donc, par hypothèse le problème(2.8) admet une unique solution $u \in U_{ad}$. L'application $T$ est donc bien définie. Montrons que $T$ est contractante pour $t-s$ bien choisi.
Soit

$$u_1 = Tw_1 \qquad et \qquad u_1 = Tw_1.$$

On a :

**(a)** $$\pi_s\,(u_1, v-u_1) \geq L(v-u_1) - (t-s) b\,(w_1, v-u_1) \qquad \forall\ v \in U_{ad}.$$

**(b)** $$\pi_s\,(u_2, v-u_2) \geq L(v-u_2) - (t-s) b\,(w_2, v-u_2) \qquad \forall\ v \in U_{ad}.$$

En posant $v = u_2$ dans **(a)** et $v = u_1$ dans **(b)** on aura :

$$\begin{cases} \pi_s\,(u_1, u_1-u_2) \leq L(u_1-u_2) - (t-s) b\,(w_1, u_1-u_2) \\ \\ \pi_s\,(-u_2, u_1-u_2) \leq -L(u_1-u_2) - (t-s) b\,(-w_2, u_1-u_2)\,. \end{cases}$$

En faisant la somme, on obtient :

$$\pi_s\left(u_1-u_2,u_1-u_2\right) \leq (t-s)b\left(w_1-w_2,u_1-u_2\right).$$

De la coercivité de $\pi_s$ et la continuité de la forme bilinéaire $b(u\ ,v)$ on obtient :

$$\alpha\left\|u_1-u_2\right\|^2 \leq (t-s)\,M\left\|w_1-w_2\right\|.$$

En posant $\tau = t-s$ , l'application $T$ est contractante pour $\tau\dfrac{M}{\alpha} < 1$. Alors, $T$ admet un point fixe unique $u \in U_{ad}$ ,

$$u = Tu\ .$$

Cet élément vérifie

$$\pi_s\left(u,v-u\right) \geq L\left(v-u\right)-(t-s)\,b\left(u,v-u\right)$$

$$\Leftrightarrow \pi_s\left(u,v-u\right)+(t-s)b\left(u,v-u\right) \geq L\left(v-u\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(u,v-u\right)+sb\left(u,v-u\right)+(t-s)b\left(u,v-u\right) \geq L\left(v-u\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(u,v-u\right)+tb\left(u,v-u\right) \geq L(v-u)$$

$$\Leftrightarrow \pi_t\left(u,v-u\right) \geq L\left(v-u\right).$$

Le lemme est ainsi démontré pour tout $t$ tel que: $s \leq t \leq s+\tau$.
Comme, pour

$$t=0, \qquad \pi_0(u,v)=a(u,v)$$

et on a vu que le problème est résolu pour la forme $a(u\ ,v)$, alors, le problème est résolu pour

$$\pi_t\left(u,v\right)\ ;\quad 0 \leq t \leq \tau,$$

puis il est résolu

$$\pi_{2\tau}\left(u,v\right),$$

on refait $n$ fois le procèdé jusqu'a :

$$n\tau \geq 1.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

# 2.3 Exemples

## 2.3.1 Exemples de problèmes aux limites

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a_{i,j}$ ,$i$ ,$j = 1 \ldots\ldots\ldots n$ , des fonctions sur $\Omega$ vérifiant les propriétés

$$a_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega) \text{ (à valeurs réelles)} \tag{2.9}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\left(\zeta_1^2+\zeta_2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\zeta_n^2\right). \quad \alpha>0,\ \forall\zeta\in\mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

presque partout sur $\Omega$ .

$$a_0 \in L^{\infty}(\Omega) \quad avec \quad a_0(x) \geq \alpha > 0, \ \ presque\ partout\ sur\ \Omega. \tag{2.11}$$

Pour $u$ ,$v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\pi(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx + \int_{\Omega} a_0 uv\ dx. \tag{2.12}$$

On a ainsi défini une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)$ et en vertu de (2.10) et (2.11)

$$\pi(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ v\in H^1(\Omega)\ .$$

On choisie $U$ sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ et $L$ une forme linéaire continue sur $U$.
Du fait que $\pi(v\ ,v) \geq \alpha\|v\|^2$ , $\alpha > 0$ , $\forall\ v \in U$ on obtient, d'aprés le théorème de Lax-Milgram

$$\begin{cases} il\ existe\ un\ unique\ u\in U\ tel\ que \\ \\ \qquad \pi(u,v) = L(v),\ \forall\ v\in U. \end{cases} \tag{2.13}$$

**Exemple 2.2** *Dans le cas où $U_{ad} = H_0^1(\Omega)$ l'équation précédente est équivalente à :*

$$\begin{cases} \quad Au = f\ ,\ dans\ \Omega \\ \\ u = 0 \quad sur\ \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

*où l'opérateur $A$ est donné par :*

$$Av = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + a_0(x)v. \tag{2.15}$$

*En effet; Pour $U = H_0^1(\Omega)$, l'équation (2.13) est équivalente à*

$$\pi(u,\varphi) = L(\varphi).\ \ \forall\varphi\in D(\Omega)\,.$$

*Ce qui donne, après une intégration par parties :*

$$\langle Au, \varphi \rangle_{D'(\Omega)*D(\Omega)} = \int_{\Omega} f\varphi \qquad \forall\ \varphi \in D(\Omega)$$

*et donc*

$$Au = f \quad \textit{au sens des distributions.}$$

*Du fait que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *alors* $u|_{\Gamma} = 0$;*On obtient alors le problème (2.14).*
*Le problème (2.14) est un problème du type Dirichlet homogène.*

**Exemple 2.3** *Soit* $U = H^1(\Omega)$ *; les coefficients* $a_{ij}$, $a_0$ *sont régulières dans* $\overline{\Omega}$ *(par exemple,* $a_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, *on choisie* $L(v)$ *de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} L(v) = \int_{\Omega} fvdx + \langle g, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)*H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \ , \\ \\ \qquad\qquad f \in L^2\left(\Omega\right),\ g \in H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right). \end{array} \right. \tag{2.16}$$

*Notons que* $L(v)$ *définie par (2.16) est une forme linéaire continue sur* $H^1(\Omega) = U$, *car l'opèrateur (trace) :*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \textit{est linéaire et continu.}$$

*De même, pour* $v = \varphi \in D(\Omega)$ , *(2.13) donne* $[Au = f \quad \textit{dans}\ \Omega]$ . *Le fait que*

$$u \in H^1(\Omega), et\ Au \in L^2(\Omega)$$

*alors*

$$\frac{\partial u}{\partial v_A} = \sum a_{ij\frac{\partial u}{\partial xj}} \cos(n, x_j) \ \ sur\ \Gamma$$

*est un élément de* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *La formule de Green donne alors :*

$$\int_{\Omega} (Au)\, vdx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A}, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)*H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \pi(u, v).$$

*D'après la forme (2.13), on obtient*

$$\int_{\Omega} fvdx = \int_{\Omega} (Au)\, vdx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A}, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)*H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \pi(u, v),$$

*d'où*

$$\int_{\Omega} (Au)vdx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A}, \gamma_0 v \right\rangle = \int_{\Omega} fvdx + \langle g, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)*H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \qquad \forall\ v \in H^1(\Omega),$$

*Ce qui donne*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A} - g, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) * H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0.$$

*Du fait que l'application :*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

*est surjective, on déduie :*

$$\frac{\partial u}{\partial v_A} = g \ sur\ \Gamma.$$

*On obtient, le problème*

$$\begin{cases} Au = f \quad dans\ \Omega, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial v_A} = g \ sur\ \Gamma. \end{cases} \tag{2.17}$$

*Ce problème est du type Neumann non homogène.*

### 2.3.2 Problèmes aux limites Unilatéraux

Jusqu'à présent, on a appliqué la théorie générale dans le cas où il n'y a pas de contraintes ; avec $U_{ad} = U$.
La forme bilinéaire $\pi(u\ ,v)$ est la même que dans (2.12) mais $U_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé de $U$.
On considére d'abord le cas où $U = H^1(\Omega)$ et

$$U_{ad} = \left\{ v \mid \ v \in U, \ \ v|_{\Gamma} \geq 0 \right\}. \tag{2.18}$$

**Remarque 2.1** *L'ensemble $U_{ad}$ défini par (2.18) est un cône convexe fermé de sommet $\{0\}$.*

**Remarque 2.2** *Dans ce cas, du fait que $U_{ad}$ est un cône convexe fermé de sommet $\{0\}$, la solution $u$ donnée par le théorème 2.2 est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \pi(u, v) \geq L(v)\ \forall\ v \in U_{ad}, \\ \\ \pi(u, u) = L(u). \end{cases} \tag{2.19}$$

**Preuve.** En effet
soit $v \in U_{ad}$, comme $u \in U_{ad}$ et $U_{ad}$ est convexe alors

$$tu + (1-t)\, v \in U_{ad} \quad \forall\ t \in\ ]0, 1[$$

or $U_{ad}$ est un cône de sommet $\{0\}$ alors,

$$w = \frac{1}{t}\left[tu + (1-t)\, v\right] = u + \frac{1-t}{t} v \in U_{ad} \quad \forall\ t \in ]0, 1[.$$

Comme

$$\pi(u, w-u) \geq L(w-u)$$

alors

$$\frac{1-t}{t}\pi(u,v) \geq \frac{1-t}{t}L(u,v) \Rightarrow \pi(u,v) \geq L(v) \quad \forall\ v \in U_{ad},$$

car $\frac{1-t}{t} > 0$ .
Pour obtenir l'égalité

$$\pi(u,u) = L(u)$$

il suffit de prendre $w = 0 \in U_{ad}$ puis $w = 2u \in U_{ad}$, on aura

$$\pi(u,u) \geq L(u) \text{ et } \pi(u,u) \leq L(u)\ .$$

Interprétons le problème défini par (2.19)

Soit $v = \pm\varphi$ ,$\varphi \in D(\Omega)$ (car $v \in U_{ad}$). on a alors

$$\pi(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \tag{2.20}$$

et donc

$$Au = f \ \ dans\ \Omega. \tag{2.21}$$

Multipliant (2.21) par $v \in U_{ad}$ , la formule de Green, donne :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A} - g, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) * H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \pi(u,v) \ = \int_\Omega fv\ dx$$

et à partir de l' inégalité de (2.19), on en déduit

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A} - g, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) * H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \geq 0. \tag{2.22}$$

Dans (2.22), $v \in U_{ad}$ et par conséquent $v \geq 0$ sur $\Gamma$ alors (2.22)
est équivalente à

$$\frac{\partial u}{\partial v_A} - g \geq 0 \ sur\ \Gamma\ (au\ sens\ de\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.23}$$

De (2.19) et (2.22) on déduie

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial v_A} - g, \gamma_0 u \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) * H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0,$$

qui, combiné avec (2.23) et le fait que $u \geq 0$ sur $\Gamma$ montre que

$$u(\frac{\partial u}{\partial v_A} - g) = 0 \ sur \ \Gamma.$$

on a montré l'existence de l'unique $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{c} Au = f \quad dans \ \Omega \\ \\ u \geq 0 \ sur \ \Gamma, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial v_A} - g \geq 0 \ sur \ \Gamma, \\ \\ u(\frac{\partial u}{\partial v_A} - g) = 0 sur \ \Gamma, \end{array} \right. \tag{2.24}$$

**Remarque 2.3** *Les conditions aux limites (2.24) sont appelées conditions aux limites unilatérales.*

**Chapitre 3**

# Contrôle des systèmes gouvernés par des E.D.P. Elliptiques

## 3.1 Contrôle des problèmes variationnels elliptiques

### 3.1.1 Enoncé du probème

Soient $V$ et $H$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et supposons que :

$$V \subset H, \ l'injection\ de\ V\ sur\ H\ est\ continue,\ V\ est\ dense\ dans\ H. \tag{3.1}$$

$H$ sera identifié avec son dual. Si $V'$ est le dual de $V$, on a :

$$V \subset H \subset V', \tag{3.2}$$

avec,

$V$ est dense dans $H$ et $H$ est dense dans $V'$ et les injections correspondantes sont continues .
Soit $a(u\ ,v)$ une forme bilinéaire continue sur V, et coercitive (c.f. (2.2) ).

**Remarque 3.1** *La forme bilinéaire $a(u\ ,v)$ n'est pas nécessairement symétrique .*

Pour $f \in V'$ , on considère $L$ la forme linéaire continue sur $V$ définie par :

$$L(v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in V, \tag{3.3}$$

Où
$\langle ., .\rangle$ est le croché de dualité entre $V'$ et $V$.

**Théorème 3.1** *Supposons que (2.2) est satisfaite. Pour $f$ donnée dans $V'$, il existe un unique $y \in V$ tel que :*

$$a(y, \psi) = \langle f, \psi \rangle \qquad \forall\ \psi \in V. \tag{3.4}$$

*On peut interpréter (3.4) de la manière suivante : Pour tout $u \in V$ fixé la forme $v \to a(u\ ,v)$ étant linéaire et continue alors l'application*

$$\varphi_u : v \to a(u, v) \tag{3.5}$$

*est une forme linéaire et continue sur $V$ et donc $\varphi_u \in V'$.*
*Soit alors*

$$\begin{array}{rcl} A\ : V & \to & V' \\ u & \to & Au = \varphi_u. \end{array}$$

*L'opérateur $A$ est un isomorphisme de $V$ sur $V'$ et vérifie*

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{V' * V}\,, \qquad \forall\ \ u, v \in V. \tag{3.6}$$

*Donc l'équation (3.4) est équivalente à*

$$Ay = f, \quad dans\ V'.$$

Soit $U$ l'espace de Hilbert des contrôles et un opérateur,

$$B \in \mathcal{L}(U, V').$$

Le fait que $A$ est un isomorphisme de $V$ sur $V'$ alors, pour tout $f \in V'$ et tout $u \in U$ le problème

$$Ay = f + Bu,$$

admet une unique solution, $y \in V$.

On note que $y$ dépend de $u$, on écrit alors :

$$Ay(u) = f + Bu, \quad y(u) \in V. \tag{3.7}$$

Soit $H$ un espace de Hilbert, espace des observations, et un opérateur $C \in \mathcal{L}(V\ ,H)$. On se donne aussi une équation d'observation

$$z(u) = Cy(u). \tag{3.8}$$

Finalement, on se donne une forme hermitienne sur $U$, $(Nu\ ,v)_U$ vérifiant :

$$\exists\ \mu > 0; \qquad (Nv, v) \geq \mu \|v\|_U^2, \quad \forall\ v \in U. \tag{3.9}$$

A tout contrôle $u \in U$ , on associe la fonction coût

$$J(u) = \|Cy(u) - z_d\|_H^2 + (Nu, u)_U \tag{3.10}$$

où $z_d$ est un élément donné de $H$.
Soit $U_{ad}$ un sous ensemble convexe et fermé de $U$.
Le but est de trouver $u \in U_{ad}$ qui minimise la fonction $J$.

**Définition 3.1** *L'élément $u \in U_{ad}$ tel que :*

$$J(u) = \min_{v \in U_{ad}} J(v) \tag{3.11}$$

*est appelé contrôle optimal.*

Ecrivons $J(u)$ sous la forme

$$J(u) = \|C[y(u) - y(0)] + Cy(0) - z_d\|_H^2 + (Nu, u)_U$$

et posons :

$$\pi(u, v) = (C[y(u) - y(0)], C[y(v) - y(0)])_H + (Nu, v)_U \tag{3.12}$$

et

$$L(v) = (z_d - Cy(0)\ ,\ C[y(v) - y(0)])_H\,. \tag{3.13}$$

On a :
**1**- La forme $\pi(u\ ,v)$ est bilinéaire, continue et, du fait que

$$\|C[y(u) - y(0)]\|^2 \geq 0$$

alors,

$$\pi(v, v) = \|C\,(y(v) - y(0))\|_H^2 + N(v, v) \geq \mu\|v\|_U^2 \quad \forall\ v \in U.$$

**2**- La forme $L$ est linéaire et continue sur $H$.
**3**- On a :

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|z_d - Cy(0)\|_H^2.$$

Comme $\|z_d - Cy(0)\|_H^2$ est constante par rapport à $v$ alors il suffit de minimiser la fonction :

$$J(v) = \pi(u, v) - 2L(v).$$

On a le thèoreme suivant,

**Théorème 3.2** *Supposons que l'hypothèse (3.9) et satisfaite et que l'état du système est donnée par (3.7) alors il existe un élément unique $u \in U_{ad}$ tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

La preuve est la même que celle du théoreme 1.1.

### 3.1.2 L'ensemble des inégalités définissant le contrôle optimal

Si $u$ est un contrôle optimal (Theorem 1.2, chapitre1), alors il est caractérisé par :

$$u \in U_{ad}; \quad \pi(u, v-u) \geq L(v-u) \qquad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{3.14}$$

L'inégalité (3.14) s'écrit :

$$\langle Cy(u) - z_d, C[y(v) - y(u)] \rangle_H + (Nu, v-u)_U \geq 0 \qquad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{3.15}$$

Mais du fait que l'opérateur $A$ est un isomorphisme de $V$ sur $V'$ alors (3.7) donne

$$y(u) = A^{-1}(f + Bu),$$

et donc

$$y(v) - y(u) = A^{-1}B(v-u).$$

Alors, l' inégalité (3.15) s'écrit :

$$\left\langle Cy(u) - z_d \ , \ CA^{-1}B(v-u) \right\rangle_H + (Nu, v-u)_U \geq 0, \qquad \forall\, v \in U_{ad} \ . \tag{3.16}$$

Introduisons le dual $H'$ de $H$ et

$$\Lambda = isomorphisme\ canonique\ de\ H\ sur\ H'.$$

défini par :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_H = \langle \Lambda\varphi, \psi \rangle_{H' * H} \qquad \forall\, \varphi, \psi \in H.$$

En introduisant l'opérateur $\Lambda$ , l' inégalité (3.16) devient

$$\left\langle \Lambda[Cy(u) - z_d], CA^{-1}B(v-u) \right\rangle_{H' * H} + (Nu, v-u)_U \geq 0.$$

L'adjoint $C^* \in \mathcal{L}(H'; V')$ est défini par :

$$\langle C^* g, f \rangle_{V' * V} = \langle g, Cf \rangle_{H' * H} \ , \quad \forall\, g \in H, \ \forall\, f \in V.$$

En utilisant cet opérateur on aura :

$$\left\langle C^* \Lambda[Cy(u) - z_d], A^{-1}B(v-u) \right\rangle_{V' * V} + (Nu, v-u)_U \geq 0, \tag{3.17}$$

Soit

$$A^* \in \mathcal{L}(V'', V') = \mathcal{L}(V, V'),$$

l'adjoint de l'opérateur $A$.
Pour un contrôle $u \in U_{ad}$ , l'adjoint $p(u) \in V$ est défini par :

$$A^* p(u) = C^* \Lambda [Cy(u) - z_d].$$

L' inégalité (3.17) devient

$$\left\langle A^* p(u), A^{-1} B(v-u) \right\rangle_{V' * V} + (Nu, v-u)_U \geq 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\left\langle p(u), AA^{-1} B(v-u) \right\rangle_{V * V'} + (Nu, v-u)_U \geq 0$$

et donc,

$$\langle p(u), B(v-u) \rangle_{V * V'} + (Nu, v-u)_U \geq 0. \tag{3.18}$$

Si $B^* \in \mathcal{L}(V \ , U')$ , est l'adjoint de $B$, on obtient de (3.18) :

$$\langle B^* p(u), v-u \rangle_{U' * U} + (Nu, v-u)_U \geq 0. \tag{3.19}$$

Soit

$$\begin{array}{l} \Lambda_U \quad : \quad U \to U' \ \ \textit{l'isomorphisme cannonique} \\ \langle v, w \rangle_U = \langle \Lambda_U v, w \rangle_{U' * U} \end{array}$$

et $\Lambda_U^{-1}$ son inverse.
L' inégalité (3.19) devient

$$\left\langle \Lambda_U^{-1} B^* p(u), v-u \right\rangle_U + (Nu, v-u)_U \geq 0. \tag{3.20}$$

On obtient alors :

$$\left\langle \Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v-u \right\rangle_U \geq 0 \qquad \forall\ v \in U_{ad}. \tag{3.21}$$

Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant :

**Théorème 3.3** *Supposons que la condition de coercivité (3.9) est satisfaite et la fonction coût étant donnée par (3.10).*
*la condition nécessaire et suffisante pour que u soit un contrôle optimal est que les équations et les inégalités suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{cases} u \in U_{ad} \\ Ay(u) = f + Bu, \\ A^*p(u) = C^*\Lambda[Cy(u) - z_d], \\ \left\langle \Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u \right\rangle_U \geq 0 \qquad \forall\ v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{3.22}$$

## 3.2 Applications

### 3.2.1 Système Régi par le problème de Dirchlet

On commençe par le cas le plus simple ; soit $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0(x) \varphi dx \tag{3.23}$$

on choisie

$$\begin{cases} a_{ij},\ a_0 \in L^\infty(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \qquad \alpha > 0, \\ \alpha_0(x) \geq \alpha. \end{cases} \tag{3.24}$$

On definit l'opérateur elliptique $A$ du second ordre par :

$$A\varphi = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) + a_0 \varphi.$$

et

$$U = H = L^2(\Omega),$$

Dans ce cas on dit que le contrôle est distribué (sur $\Omega$).
Du fait que

$$V = H_0^1 \subset H = U = L^2(\Omega) = H' \subset V' = H^{-1}(\Omega)$$

on a donc
**(i)** $B \in \mathcal{L}(U\ ,V')$ est l'injection (identité) de $U$ dans $V'$
**(ii)** $C \in \mathcal{L}(V\ ,H)$ est l'injection de $V$ dans $H$
**(iii)** $H = H'$ alors l'isomorphisme $\Lambda$ est l'identité.
L'état $y(u)$ , par conséquent, est donné par la solution du problème de Dirchlet

$$\begin{cases} Ay(u) = f + u, \\ y(u) \in H_0^1(\Omega) \qquad (donc\ y(u) = 0\ sur\ \Gamma). \end{cases} \tag{3.25}$$

On veut trouver :

$$\inf_{v \in U_{ad}} \left[ \int_\Omega (y(v) - z_d)^2 dx + (Nv, v) \right] \tag{3.26}$$

où $U_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé de $U$.

**Remarque 3.2** *La solution du problème (3.25) est une fonction de $x$ et de $u$.*

$$x \stackrel{y(u)}{\longrightarrow} y(x; u).$$

En vertu de (3.24), on peut appliquer le théorème 2.3.
Le problème adjoint :

$$A^* p(u) = C^* \Lambda \left[ Cy(u) - z_d \right]$$

devient

$$A^* p(u) = y(u) - z_d.$$

De plus, comme $B$ est l'injection de $U$ dans $V'$ alors l' inégalité (3.20) devient

$$\langle p(v), v - u \rangle_{U' * U} + (Nu, v - u)_U \geq 0.$$

De plus comme $U = U' = L^2(\Omega)$ alors $\Lambda_U$ est l'identité
l'équation (3.21) devient

$$(p(u), v - u)_U + (Nu, v - u)_U \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad (p(u) + Nu, v - u)_U \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (p(u) + Nu)\,(v - u)\,du \geq 0$$

on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} Ay(u) = f + u \quad dans\ \Omega, \ \ y(u) = 0 \ \ sur\ \Gamma, \\ \\ A^*p(u) = y(u) - z_d \ \ dans\ \Omega, \quad p(u) = 0 \quad sur \ \ \Gamma, \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (p(u) + Nu)(v - u)dx \geq 0 \qquad \forall\ v \in U_{ad}, \\ \\ \qquad\qquad u \in U_{ad}, \end{array}\right. \tag{3.27}$$

**Exemple 3.1** *Cas sans contraintes :* $U_{ad} = U$.
*Dans ce cas, du fait que* $U$ *est un espace vectoriel, la dernière condition de (3.27) se réduit à*

$$P(u) + Nu = 0.$$

*On peut alors éliminer* $u$ *:* $(u = -N^{-1}p))$ *, on obtient le contrôle optimal de la manière suivante :*
*On résout le système d'équations aux dérivées partielles suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{ll} Ay + N^{-1}p = f & dans\ \Omega, \\ \\ A^*p - y = -z_d & dans\ \Omega, \\ \\ y = 0, \quad p = 0 & sur\ \Gamma, \end{array}\right. \tag{3.28}$$

*alors, le contrôle optimal* $u$ *est donné par :*

$$u = -N^{-1}p. \tag{3.29}$$

***Cas particulier*** *: Si* $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ *et* $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ *alors, l'opérateur* $A$ *se réduit à* $-\Delta + \lambda I$ *et le système (3.28) devient :*

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta y + \lambda y + Np = f \quad dans\ \Omega, \\ \\ -\Delta p + \lambda p - y = -z_d \quad dans \quad \Omega, \\ \\ y = 0, \quad p = 0, \ \ sur \quad \Gamma. \end{array}\right.$$

*et*

$$u = -N^{-1}p. \tag{3.30}$$

*Supposons que les coéfficients de* $A$ *sont réguliers dans* $\overline{\Omega}$*. Alors, en utilisant la régularté de solutions des problèmes elliptiques on déduie que la solution* $p$ *de l'équation*

$$A^*p = y - z_d, \qquad p\mid_\Gamma = 0,$$

*appartient à* $H^2(\Omega)$.

$$p \in H^2(\Omega). \tag{3.31}$$

*Si de plus l'opérateur* $N^{-1} : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ *, le contrôle* $u$ *appartient donc à* $H^2(\Omega)$.

**Exemple 3.2** *Considérons maintenant le cas où*

$$U_{ad} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega\}.$$

D'aprés, la remarque 1.1, on obtient

$$\begin{cases} Ay = f + u \quad dans\ \Omega,\ y = 0\ sur\ \Gamma, \\ A^* p(u) = y(u) - z_d\ dans\ \Omega,\ \ p(u) = 0\ sur\ \Gamma, \\ y \geq 0 \quad presque\ partout\ dans\ \Omega, \\ p(u) + Nu \geq 0\ \ presque\ partout\ dans\ \Omega, \\ u(p(u) + Nu) = 0 \quad presque\ partout\ dans\ \Omega. \end{cases} \tag{3.32}$$

En posant $u = Ay - f$ , et en éliminant $u$, on obtient les équations et inégalités suivantes :

$$\begin{cases} Ay - f \geq 0 \quad dans\ \Omega, \\ A^* p - y = z_d\ \ dans\ \Omega, \\ p + N(Ay - f) \geq 0\ \ dans\ \Omega, \\ (Ay - f)\left[p + N\left(Ay - f\right)\right] = 0\ \ dans\ \Omega, \\ y|_{\Gamma} = 0, \qquad p|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

En résolvant ce système on déduie le contrôle optimal

$$u = Ay - f.$$

De l'équation

$$u(p(u) + Nu) = 0,$$

on a, soit : $u = 0$ ou $p + Nu = 0$ ou $u$ et $p + Nu$ égal à zéro. Dans le dernier cas, on a :

$$Ay = f \quad et\ y = z_d$$

donc

$$Ay = z_d.$$

Comme (dans le cas générale)

$$Az_d \neq f \quad presque\ partout\ dans\ \Omega.$$

On obtient à deux cas possibles :

**(i)** $u = 0$ dans $\Omega_0$ et $p > 0$.

**(ii)** $u > 0$ dans $\Omega_1$ et $p + Nu = 0$.

Pour simplifier supposons que

$$N = \mu I, \quad \mu > 0.$$

Par conséquent, à partir de (**i**) et (**ii**) on déduie :

$$u = -\frac{1}{\mu}\inf(0, p). \tag{3.34}$$

**Conclusion**

Le contrôle optimal est donné par (3.34), où $p$ est la solution du problème aux limites (non linéaire).

$$\begin{cases} Ay + \dfrac{1}{\mu}\inf(0, p) = f, \\ \\ A^* p - y = z_d, \\ \\ y|_\Gamma = 0, \quad p|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{3.35}$$

### 3.2.2 Système Régi par le problème de Neumann

On prend :

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega)$$

La forme $a(\varphi, \psi)$ est donnée par (3.23) et (3.24).

Dans ce cas si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $V = H^1(\Omega)$ alors le dual $V'$ de $V$ ne peut pas être identifié à un sous espace de $D'(\Omega)$. Ce pendant, pour $h \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on peut définir des élément de $V'$ comme suit :

$$L_1(\psi) = \int_\Omega h\ \psi\ dx, \quad h \in L^2(\Omega), \tag{3.36}$$

$$L_2(\psi) = \langle g, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) * H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{3.37}$$

L'isomorphisme $A$ de $V$ sur $V'$ doit être interprété sous la forme variationnelle ; pour une forme linéaire continue $f$ sur $V$, il existe un unique $y$ tel que :

$$a(y, \psi) = f(\psi) \quad \forall\ \psi \in V. \tag{3.38}$$

On suppose maintenant que :

$$U = L^2(\Omega),$$

$$B = \textit{opérateur identité},$$

$$C = \textit{opérateur d'injection de } V \textit{ dans } H.$$

Dans (3.7), on choisie $f$ comme,

$$f(\psi) = \int_{\Omega} f_1\, \psi\, dx + \langle g, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} * H^{\frac{1}{2}}} \qquad f_1 \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{3.39}$$

L'état du système $y(u)$ est donné par la solution de

$$a(y(u), \psi) = f(\psi) + \int_{\Omega} u\, \psi\, dx \qquad \forall\, \psi \in H^1(\Omega), \tag{3.40}$$

ce qui peut être interprété comme (chapitre 1, problème de Neumann)

$$\begin{cases} Ay(u) = f_1 + u & \textit{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial v_A} = g & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.41}$$

La fonction coût $J(v)$ est identique à celle donnée par (3.26). L'état adjoint est donné par la solution du problème adjoint du problème Neumann,

$$\begin{cases} A^* p(u) = y(u) - z_d & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial v_{A^*}}(u) = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.42}$$

Le contrôle optimal $u$ est donnée par la solution de (3.41), (3.42) avec

$$u \in U_{ad} : \int_{\Omega} (p(u) + Nu)(v - u)\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{3.43}$$

## 3.3 Le cas $N = 0$

Soit $V$ un espace de Hilbert, $V'$ son dual,

$$U = V' \tag{3.44}$$

$$B = Id : V' \to V' \quad ; \quad C = Id : V \to V. \tag{3.45}$$

L'équation :

$$Ay(u) = f + u \tag{3.46}$$

avec

$$A : V \to V' \;\; isomorphisme \tag{3.47}$$

et l'observation est :

$$z(u) = y(u) \; dans \; V. \tag{3.48}$$

La fonction côut est :

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|_V^2 \, ; \;\; z_d \in V. \tag{3.49}$$

**Théorème 3.4** *Sous les hypothèses(3.44)-(3.48), il existe un unique élement u (contrôle optimal) tel que :*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

*De plus l'élement u est donné par tes équations et les inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} u \in U_{ad} : \quad Ay(u) = f + u \\ A^* p(u) = \Lambda(y(u) - z_d) \\ \langle p(u), \, v - u \rangle_{V*V'} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \end{cases}$$

**Preuve.** On pose

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) = \left(A^{-1}v, A^{-1}u\right)$$

alors,

$$\pi(u, v) = \left\|A^{-1}u\right\| \geq \alpha \, \|u\|_V^2 \;\; .$$

Alors, on peut appliquer la théorie générale.

### 3.3.1 Applications

On pose : $V = H_0^1(\Omega)$ , muni de la norme

$$\|u\|_V^2 = \int\limits_\Omega |u|^2 \, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

$V' = H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $V$ et l'opérateur

$$\Lambda = -\Delta + I \ : \quad H_0^1 \to H^{-1}(\Omega) \ \ \textit{est un isomorphisme.}$$

La fonction côut est

$$J(v) = \int\limits_\Omega |y(v) - z_d|^2 \, dx + \int\limits_\Omega |\nabla \left(y(v) - z_d\right)|^2 \, dx.$$

Posant

$$\pi(u, v) = \langle y(u) - y(0), y(v) - y(0) \rangle_V$$

et

$$L(v) = \langle z_d - y(0), y(v) - y(0) \rangle_V$$

on aura :

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|z_d - y(0)\|^2 .$$

Comme $\pi$ est coercitive alors il existe un unique élément $u \in U_{ad}$, tel que :

$$J\left(u\right) = \inf_{v \in U_{ad}} J\left(v\right); \quad U_{ad} = \ \textit{convexe fermé de } U = V'.$$

De plus, l'élément $u$ est caractérisé par :

$$\pi(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall \ v \in U_{ad}.$$

ce qui donne :

$$\langle y(u) - z_d \ , \ y(v) - y(u) \rangle_V \geq 0 \qquad \forall \ v \in U_{ad} \ .$$

Utilisant l'isomorphisme $\Lambda = -\Delta + I : V \to V'$ , on obtient :

$$\langle (-\Delta + I) \left[ y(u) - z_d \right], y(v) - y(u) \rangle_{V' * V} \geq 0 \quad \forall \ v \in U_{ad} \tag{3.50}$$

comme

$$Ay\left(u\right) = f + u$$

alors

$$y(v) - y(u) = A^{-1}(v-u).$$

L' inégalité (3.50) devient :

$$\left\langle (-\Delta + I)(y(u) - z_d) \ , \ A^{-1}(v-u) \right\rangle_{V'*V} \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{3.51}$$

Soit $A^* \in \mathcal{L}(V'', V') = \mathcal{L}(V'', V')$ l'adjoint de $A$.
On pose :

$$\begin{cases} A^*p(u) = (-\Delta + I)(y(u) - z_d), \\ \\ p(u) \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.52}$$

L'inégalité (3.51) devient :

$$\left\langle A^*p(u) \ , \ A^{-1}(v-u) \right\rangle_{V'*V} \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad},$$

ce qui donne :

$$\langle p(u) \ , \ v-u \rangle_{V*V'} \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{3.53}$$

Le contrôle optimal est défini par les équations et les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{y(u)}{\partial x_i}\right) + a_0 y(u) = f + u. \\ \\ u \in U_{ad}\,; \\ \\ -\sum\limits_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial p(u)}{\partial x_j}\right) + a_0 p(u) = (-\Delta + I)(y(u) - z_d) \\ \\ y(u) \in H_0^1(\Omega), \quad p(u) \in H_0^1(\Omega) \\ \\ \langle p(u) \ , \ v-u \rangle_{H^1(\Omega)\, * H^{-1}(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall\, v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{3.54}$$

**Cas particulier**
**1-** Si $U_{ad} = U = H^{-1}(\Omega)$ (sans contrainte).
Dans ce cas, l'inégalité de (3.54) devient

$$\langle p(u), v \rangle_H = 0.$$

De l'équation (3.52) on déduie que

$$y(u) - z_d = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ay(u) = Az_d.$$

Le contrôle optimal est donné par :

$$\begin{cases} u \in H_0^{-1}(\Omega), \quad y(u) = f + u, \; y \in H_0^1(\Omega), \\ A^* p(u) = (-\Delta + I)(y(u) - z_d), \\ u = Az_d - f. \end{cases}$$

**2-**

$$U_{ad} = \left\{ v \in H^{-1}(\Omega); \; v \geq 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

Dans ce cas, $U_{ad}$ est un cône fermé de $u$, le contrôle optimal est donné par :

$$\begin{cases} \pi(u, v) \geq L(v) \quad \forall \, v \in U_{ad}. \\ \pi(u, u) = L(u). \end{cases}$$

On déduit alors :

$$\begin{cases} \langle p(u), v \rangle_{V * V'} \geq 0 \quad \forall \, v \in U_{ad} & (\mathbf{i}) \\ \langle p(u), u \rangle_{V * V'} = 0. & (\mathbf{ii}) \end{cases}$$

Comme $v \geq 0$ sur $\Omega$ ,$\forall \, v \in U_{ad}$ alors

$$(\mathbf{i}) \Rightarrow p(u) \geq 0 \; sur \; \Omega.$$

D'aprés, (**ii**) on a :

$$p(u) \geq 0, u \geq 0 \; et \; \langle p(u) \; ,u \rangle = 0.$$

Alors,

$$u \; p(u) = 0.$$

Dans ce cas, le contrôle optimal est donné par le système

$$\begin{cases} Ay(u) = f + u, \quad y \in H_0^1 \\ A^* p(u) = (-\Delta + I)(y(u) - z_d), \; p(u) \in H_0^1(\Omega) \\ u \geq 0 \; sur \; \Omega. \\ p(u) \geq 0 \; sur \; \Omega. \\ up(u) = 0. \end{cases}$$

Le système précédent s'écrit aussi

$$\begin{cases} Ay - f \geq 0 \; dans \; \Omega \\ \\ A^*p - (-\Delta + I)y = \Delta z_d - z_d \\ \\ p \geq 0 \\ \\ y|_\Gamma = 0, \quad p|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Le contrôle optimal est donné par :

$$u = Ay - f.$$

# Bibliographie

[1] :J.L.Lions. Controle Optimal Des Systèmes Règis Par Des Equations Aux Dérivées Partielles. Spinger-New york 1971.

[2] : H.Brezis. Analyse Fonctionnelle Théorie Et Application. Masson. Paris 1983.