REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Hyper-ordre des Solutions des Équations Différentielles Linéaires d'ordre Supérieur à Coefficients Séries Lacunaires

Présenté par :

Belaidouni Rachida et **Guelil Aicha**

Soutenu le : 05/2016

devant le jury composé de :

Dr ANDASMAS Maamar	**Président**	**MCB**	**U. MOSTAGANEM.**
Dr LATREUCH Zinelâabidine	**Examinateur**	**MAA**	**U. MOSTAGANEM.**
Dr BELAÏDI Benharrat	**Encadreur**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2015-2016

Résumé

L'objet de ce mémoire se porte essentiellement sur la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaire à coefficients fonctions entières.
Ce mémoire est composé de deux(2) chapitres dont le premier chapitre est consacré aux notions, définitions, et aux énoncés et démonstrations des différents lemmes utilisés dans ce travail. Dans le deuxième chapitre nous donnerons l'énoncé et les démonstrations des différents théorèmes concernant ce travail.

Une petite conclusion à la fin nous permettra de clore ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mon père(la grâce de dieu) et ma mère , qui sont pour moi le pouvoir car c'est eux qui me donnent de l'espoir, le courage pour continuer, le soutien, les conseils ainsi que leurs prières

À mes frères et sœurs ALI, MOHAMED, CHRIF, FATIMA et KHAIRA

À mon binôme RACHIDA

À tous mes amis et à tout personne qui occupe une place dans ma vie et dans mon cœur ISLAM, OMAR.

À tous mes camarades de la promotion « Mathématique 2015-2016».

AICHA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À ma mère et mon père

Merci pour votre patience et vos encouragements pendant mes années d'études et les moments difficiles. Grâce à mon dieu et à vos efforts et vos conseils, je suis arrivée à mon objectif.

Et aussi je dédie ce mémoire à mes frères (Miloud, Abd rahmen, Mustapha, Hamza, Sadek, Omar) et ma sœurs Kadidja, à mes cousins et cousines, à tous les amis et aux familles

Son oublier ma grand-mère, Amina, Hakima et mon binome AICHA.

RACHIDA

Remerciements

Je tiens à remercier

Monsieur BELAIDI Benharrat professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté de diriger ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail ;

Monsieur ANDASMAS Maamar Maître de conférences B à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur LATREUCH Zinelâabidine Maître Assistant à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être examinateur ;

Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon chemin dans l'université sans oublier les personnels administratifs.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions entière, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudies et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence en particulier avec la théorie analytique des équations différentielles.

Ce travail se compose d'une introduction et deux chapitres.

Dans le premier chapitre on va citer quelques rappels et notions préliminaires dont on aura besoin dans notre travail, comme la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques lemmes et on donne leurs preuves, définitions concernant la croissance d'une fonction entière ou méromorphe.

Le deuxième chapitre de ce mémoire, est basé sur les théorèmes des solutions entières des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients fonctions entières. En utilisant les estimations de la dérivée logarithmique d'une fonction entière transcendante due à Gundersen, on donnera quelques estimations sur l'ordre de croissance, l'hyper-ordre des solutions entière dans le plan complexe $\mathbb{C}$, en appliquant la théorie de la distribution des valeurs de Nevanlinna des fonctions entières de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0, \tag{1.1}$$

où, $A_0, \cdots A_k$ sont des fonctions entières d'ordre fini. On donne aussi quelques évaluations sur l'ordre des solutions entières. On termine notre travail sur quelques résultats sur l'exposant de convergence des zéros des solutions entières de l'équation non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = F, \tag{1.2}$$

où, $A_0, \cdots A_k$, F sont des fonctions entières d'ordre fini.

Chapitre 1

Rappels et Notions Préliminaire et quelques lemmes

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions et notations avec les résultats fondamentaux qui sont utilisés dans les chapitres suivants ; notations de la théorie des fonctions méromorphes Nevanlinna. Afin de décrire la croissance de l'ordre des fonctions entières ou des fonctions méromorphes plus précisément.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 *(Fonction entière)*
Une fonction entière est une fonction analytique dans tout le plan complexe, et développable en série de Taylor de rayon de convergence infini, et on écrit

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

Exemple 1.1.1

1. Soit la fonction $f(z)=\sin z$, comme $f(z)$ est bien définie sur tout le plan complexe et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$, donc elle est entière, et on écrit

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. Les deux fonctions $\cosh z$ et $\sinh z$ sont des fonctions entières, et on a

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Définition 1.1.2 *(Fonction méromorphe)*

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. On dit que f est méromorphe s'il existe une séquence de point $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\{z_n\}$ n'a pas de point limités dans Ω, et

1. f analytique dans $\Omega \backslash \{z_0,\ z_1,\ \cdots\}$
2. f possède des pôles au point $z_0,\ z_1,\ \cdots$

Définition 1.1.3 *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x,\ 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Proposition 1.1.1

1. $\ln x \leq \ln^+ x$.
2. $\ln^+ x \leq \ln^+ y$ Si $(0 < x < y)$.
3. $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$.
4. $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$.
5. $\ln^+(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \ln^+ x_i$.
6. $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln^+ x_i \leq \ln n + \sum\limits_{i=1}^{n} \ln^+ x_i$.

Définition 1.1.4 *(Fonction caractéristique de R. Nevanlinna)*

Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leqslant t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant t$. On définit

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r,$$

$N(r,f)$ *est appelée la fonction de comptage de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leqslant r$. *On définit*

$$m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,\ \ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

$m(r,f)$ *est appelée fonction de proximité de la fonction* f *au point* a.

Remarque 1.1.1 $m(r,a,f)$ *décrit le taux moyen de convergence de* $f(z)$ *vers* a *quand* $|z| \to \infty$.

$N(r,a,f)$ *décrit la densité moyenne de la distribution des a-points de* $f(z)$.

Définition 1.1.5 *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f *par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.2 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$, *on a* $n(t,f) = 0$ *et* $N(r,f) = 0$.

De plus

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta + ir\sin\theta}\right| d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta = \frac{r}{2\pi} 2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Proposition 1.1.2 *Soit* $f,\ f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$ *des fonctions méromorphes et* $a,\ b,\ c,\ d$ *des constantes complexes telles que* $ad - cb \neq 0$. *Alors*

1. $T(r, \prod\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} T(r, f_k)$.

2. $T(r, f^n) \leq nT(r, f)$.
3. $T(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{K=1}^{n} T(r, f_k) + \ln n$, pour $r \geq 1$.
4. $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + \bigcirc(1)$.

1.2 La croissance des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.2.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.2.1 *On appelle l'ordre de f la borne inférieure de ces nombres*

$$ordf = \inf\{\sigma;\ ordf \leq \sigma\}.$$

Si de tels nombres n'existent pas, alors f est d'ordre infini.

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r, f)}{\log r},$$

où

$$M(r, f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r}.$$

Remarque 1.2.1 *On a*

$$0 \leq \sigma(f) \leq +\infty.$$

Exemple 1.2.1

1. Soit $f(z) = \sin z$. Nous avons $\sigma(\sin z) = 1$.

   En effet,

$$M(r, \sin z) = \max_{|z|=r} |\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}| \leq \max_{|z|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh r.$$

   Pour $z_0 = ir$, on a

$$|f(z_0)| = |\sin ir| = |\frac{e^{i(ir)} - e^{-i(ir)}}{2i}| = \sinh r.$$

   Donc

$$M(r, \sin z) = \sinh r.$$

   Et

$$\sigma(\sin z) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln(\frac{e^r - e^{-r}}{2})}{\ln r} = 1.$$

2. Soit $p(z) = az^n + \cdots$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $f(z) = e^{p(z)}$.

   Alors

$$T(r, f) \rightsquigarrow \frac{|a|}{\pi} r^n, \ (r \to +\infty).$$

   D'où

$$\sigma(e^{p(z)}) = n.$$

   Et particulièrement, on a

$$\sigma(e^{z^2+z}) = 2.$$

Remarque 1.2.2 *Si f est d'ordre fini alors l'hyper ordre de cette fonction est nul.*

Définition 1.2.3 *(La mesure linéaire et la mesure logarithmique).*
La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$, est définie par

$$m(E) = \int_0^{\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E. Et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$, est définie par

$$lm(F) = \int_1^{\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt,$$

où $\chi_F(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble F.

Exemple 1.2.2

1. La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2,6] \subset [0,\infty]$ est
$$m(E) = \int_0^\infty \chi_E(t)dt = \int_2^6 dt = 4.$$
2. La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [1,e^2] \subset [1,\infty]$ est
$$lm(E) = \int_1^\infty \chi_F(t)\frac{dt}{t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2.$$

1.2.2 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.2.4 *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*
$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$
$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$
où
$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right)\log r,$$
tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leqslant r$.

Définition 1.2.5 *On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f respectivement par*
$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$
$$\overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$
où
$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)\log r,$$
tel que $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

Exemple 1.2.3

1. Comme les fonctions e^z et $\exp(e^z)$ n'admettent pas des zéros, alors
$$\lambda(e^z) = 0 = \overline{\lambda}(e^z),$$
et
$$\lambda(\exp(e^z)) = 0 = \overline{\lambda}(\exp(e^z)).$$
2. L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^z - 1$, est égal à 1.

Définition 1.2.6 *(La densité inférieure et la densité supérieure)*
La densité inférieure et la densité supérieure d'un sous ensemble $E \subset [0, +\infty)$ sont définies respectivement par

$$\underline{dens}E = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{\int_0^r \chi_E(t)dt}{r} = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{m(E\cap[0,r])}{r},$$

$$\overline{dens}E = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\int_0^r \chi_E(t)dt}{r} = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{m(E\cap[0,r])}{r}.$$

Exemple 1.2.4 *La densité inférieure et la densité supérieure de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty[$ sont*
$$\underline{dens}E = \overline{dens}E = 0.$$

Définition 1.2.7 *(L'indice centrel)*
Soit $f(r) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| r^n$ est convergente. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0$ et le terme maximal $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central par

$$\upsilon(r, f) = \max\{m :\ |a_m| r^m = \mu(r, f)\}.$$

Exemple 1.2.5 *Soit $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$. Alors, $\mu(r, p) = \max\{|a_j| r^j : j = 0, 1, \cdots, n\} = |a_n| r^n$, r assez grand. Et par conséquent*

$$\upsilon(r, p) = \max\{m :\ |a_m| r^m = |a_n| r^n\} = n.$$

Définition 1.2.8 *(Définition de la série lacunnaire)*

On appelle série entière toute série de fonctions sur $\mathbb{C}$ de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique de nombres complexes. Le qualicatif "entière" trouve son origine dans le fait que les exposants intervenant dans les fonctions monomiales $a_n z^n$, $n \geq 0$, sont des entières. Une telle série de fonctions peut fort bien présenter des lacunes (on parle alors de série lacunaire) lorsque certains coefficients a_n sont nuls.

Exemple 1.2.6 *La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^{n^2}}{n!}$ est une série entière, il suffit de convenir que dans ce cas*

$$a_n = \begin{cases} 0 \ \text{si } n \text{ n'est pas un carré parfait} \\ \frac{1}{p!} \ \text{si } n = p^2, \ p \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Définition 1.2.9 *(Fonction entière transcendante)*

Une fonction entière transcendante est une fonction entière qui n'est pas polynôme.

Définition 1.2.10 *(Fonction meromorphe transcendante)*

Une fonction méromorphe transcendante est une fonction entiére qui n'est pas rationnelle.

1.3 Des lemmes et les preuves

Lemme 1.3.1 *([2]) Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $\alpha > 1$ une constante donnée. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_1 \subset [1, \infty)$, de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui ne dépend pas de α et (i, j) $(i, j \in \{0, \cdots, k\}$ avec $i < j)$, telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, nous avons*

$$|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}| \leq B(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r) \log T(\alpha r, f))^{j-i}. \tag{1.3.1}$$

Lemme 1.3.2 *Soit f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, soit $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$, $(i = 1, 2, \cdots q)$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante donné. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \backslash E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| \geq R_1$ et pour tout $(k, j) \in H$ on ait*

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}| \leq |z|^{(k-j)(\sigma - 1 + \varepsilon)}. \tag{1.3.2}$$

Lemme 1.3.3 *([9]) Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \sigma \leq \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\psi \in [0, 2\pi)\backslash E_2$, alors il existe une constante $R_2 = R_2(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_2$, nous avons*

$$\exp\{-r^{\sigma+\varepsilon}\} \leq |f(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \tag{1.3.3}$$

Preuve. D'après le lemme 1.3.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, alors il existe une
constante $R_1 = R_1(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_1$, on ait

$$|\frac{f'(z)}{f(z)}| \leq |z|^{\sigma-1+\varepsilon}. \tag{1.3.4}$$

En utilisant

$$\log f(re^{i\psi}) = \int_{R_1}^{r} \frac{f'(te^{i\psi})}{f(te^{i\psi})} e^{i\psi} dt + \log f(R_1 e^{i\psi}), \tag{1.3.5}$$

on a

$$|\log f(re^{i\psi})| \leq r^{\sigma+\varepsilon} + c, \tag{1.3.6}$$

où $c(> 0)$ est une constante. Donc il existe une constante $R_2(\psi) \geq R_2$, telle que pour $r \geq R_2(\psi)$ on ait de (1.3.6)

$$|\log |f(re^{i\psi})|| \leq |\log f(r^{i\psi})| \leq r^{\sigma+2\varepsilon}. \tag{1.3.6}$$

D'où

$$-r^{\sigma+2\varepsilon} \leq \log |f(re^{i\psi})| \leq r^{\sigma+2\varepsilon} \tag{1.3.8}$$

i.e (1.3.3) est vérifiée □

Lemme 1.3.4 *([9]) Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière d'ordre fini. Si la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ satisfait (2.1.1), alors pour tout ε $(0 < \varepsilon < 1)$ donné, on a*

$$\log L(r, f) > (1 - \varepsilon) \log M(r, f), \tag{1.3.9}$$

à l'extérieur d'un ensemble E_3 de la densité logarithmique 0, où

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \; L(r, f) = \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

Lemme 1.3.5 *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $0 < \sigma(f) = \sigma < \infty$. Alors pour tout $\beta < \sigma$, il existe un ensemble E_4 avec une densité logarithmique supérieure positive tel que pour tous $|z| = r \in E_4$, nous avons*

$$\log M(r, f) > r^{\beta}, \tag{1.3.10}$$

où

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Preuve. Par la définition d'ordre, il existe une suite $\{r_n\}$ tendant à ∞ telle que pour toute $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$\log M(r_n, f) > r_n^{\sigma-\varepsilon}.$$

Depuis $\beta < \sigma$, nous pouvons choisir ε (suffisamment faible) et α à satisfaire $1 < \alpha < \frac{\sigma-\varepsilon}{\beta}$. Ensuite, pour tous $r \in [r_n, r_n^{\alpha}]$ $(n \geq 1)$, on a

$$\log M(r, f) \geq \log M(r_n, f) > r_n^{\sigma-\varepsilon} \geq r^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\alpha}} > r^{\beta}.$$

Réglage $E_4 = \cup_{n=1}^{\infty}[r_n, r_n^{\alpha}]$, nous avons

$$\overline{\log dens} E_4 \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{lm(E_4 \cap [1, r])}{\log r} \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{lm(E_4 \cap [1, r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{lm([r_n, r_n^{\alpha}])}{\log r_n^{\alpha}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} > 0.$$

Ainsi, le lemme 1.3.5 est prouvé. □

Lemme 1.3.6 *Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière d'ordre $(0 < \sigma(f) = \sigma < \infty)$. Si la suite d'exposants $\{\lambda_n\}$ satisfait (2.1.1), alors pour tout $\beta < \sigma(f)$, il existe un ensemble E_5 avec densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout $|z| = r \in E_5$, nous avons*

$$\log L(r, f) > r^{\beta}, \tag{1.3.11}$$

où

$$L(r, f) = \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

Preuve. Par le lemme 1.3.4, pour tout $(\varepsilon > 0)$ donné, il existe un ensemble E_3 avec $\underline{\log dens} E_3 = 1$ tel que pour tout $r \in E_3$, on a (1.3.9). Par le lemme 1.3.5, il existe un ensemble E_4 avec $\overline{\log dens} E_4 > 0$ tel que pour tout $r \in E_4$, nous avons

$$\log M(r,f) > r^{\sigma-\varepsilon} \tag{1.3.12}$$

Alors pour tout $\beta < \sigma$, nous pouvons choisir ε pour satisfaire $0 < \varepsilon < \min\{\sigma(f) - \beta, 1\}$. Par (1.3.9) et (1.3.12), nous avons que pour tout $r \in E_3 \cap E_4$,

$$\log L(r,f) > (1-\varepsilon)\log M(r,f) > (1-\varepsilon)r^{\sigma-\varepsilon} > r^{\beta}.$$

Notons que l'ensemble $E_5 = (E_3 \cap E_4)$ a une densité logarithmique supérieure positive. En fait, nous avons

$$\overline{\log dens}(E_3 \cap E_4) + \overline{\log dens}(E_3 \cup E_4) \geq \underline{\log dens} E_3 + \overline{\log dens} E_4.$$

Par conséquent, nous avons

$$\overline{\log dens}(E_5) \geq \underline{\log dens} E_3 + \overline{\log dens}(E_4) - 1 > 0.$$

Ainsi, le lemme 1.3.6 est prouvé. □

Lemme 1.3.7 *([12]) Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. Alors, il existe un ensemble $E_6 \subset [1,+\infty)$, de mesure logarithmique finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_6$ et $|f(z)| = M(r,f)$, nous avons*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq 2r^s, \ s \in \mathbb{N}. \tag{1.3.13}$$

Preuve. De la théorie Wiman - Valiron (voir [10, 11, 13, 16]), nous avons

$$\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^s(1+0(1)). \tag{1.3.14}$$

où $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, $E \subset (1,\infty)$ est d'une mesure logarithmique finie de telle sorte que $|f(z)| = M(r,f)$ et $\nu(r)$ désigne l'index central de $f(z)$. Comme f est transcendantale, $\nu(r) \to \infty (r \to \infty)$. Par conséquent, lorsque z satisfait $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r,f)$, de (1. 3.14) , nous obtenons (1. 3.13). □

Lemme 1.3.8 *([3,11]) Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante et soit z un point avec $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r,f)$. Alors pour tout $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble de E_7 de r de mesure logarithmique finie, nous avons*

$$\frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{r}\right)^i(1+o(1)), \ i \in \mathbb{N}, \ r \notin E_7, \tag{1.3.15}$$

où $v_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Lemme 1.3.9 *Soit $\nu(r)$ l'indice central de f. Alors*

(i)

$$\log\mu(r) = \log|a_0| + \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}dt,\ \ a_0 \neq 0.$$

(ii) Pour $r < R$,

$$M(r,f) < \mu(r)\left\{\nu(R) + \frac{R}{R-r}\right\}.$$

Lemme 1.3.10 *([15]) Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini satisfaisant $\sigma_2(f) = \sigma$. Alors*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 v_f(r)}{\log r} = \sigma, \tag{1.3.16}$$

où $v_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Preuve. Posons $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $|a_n| \neq 0$. Par (i) du lemme 1.3.9, le terme maximal $\mu(r)$ de f vérifie

$$\log\mu(2r) = \log|a_0| + \int_0^{2\pi}\frac{\nu(t)}{t}dt \geq \log|a_0| + \nu(r)\log 2. \tag{1.3.17}$$

Par l'inégalité de cauchy, on obtient

$$\mu(2r) \leq M(2r,f). \tag{1.3.18}$$

Cela et (1.3.17) engendrent

$$\nu(r)\log 2 \leq \log M(2r,f) + c \tag{1.3.19}$$

ou $c(c>0)$ est une constante. On en déduit

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\nu(r)}{\log r} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r} = \sigma_2(f) = \sigma. \tag{1.3.20}$$

Par ailleurs, par (ii) du lemme 1.3.9, on a

$$M(r,f) < \mu(r)\{\upsilon(2r)+2\} = |a_{\upsilon(r)}|r^{\upsilon(r)}\{\upsilon(2r)+2\}. \tag{1.3.21}$$

D'où

$$\log M(r,f) \leq \upsilon(r)\log r + \log\upsilon(2r) + c_1,$$

□

Lemme 1.3.11 *([1]) Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini. Désignons $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre suffisamment grand $\lambda > 0$, et tout $r \in E \subset (1, \infty)$*

$$M(r,f) > c_1 exp\{c_2 r^\lambda\},$$

où $m_l E = \infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 1.3.12 *Supposons, $A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont toutes des fonctions entières d'ordre fini vérifiant $\max\{\sigma(A_j), \sigma(F), j = 0, 1, \cdots, k-1\} \leq \sigma$, $k \geq 2$. Alors chaque solution de f d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = F,$$

satisfait $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Preuve. Nous réécrivons l'équation

$$\frac{f^{(k)}}{f} = \frac{F}{f} - \sum_{j=1}^{k-1} A_J \frac{f^{(j)}}{f} - A_0.$$

Etant donné que $\varrho := max\{\sigma(A_j), \sigma(F), j = 0, 1, ..., K-1\}$, en vertu de [2], pour un nombre positif ε $(0 < \varepsilon < \sigma(F) + 1)$ et $r \notin [0,1] \cup E_1$, nous avons

$$|A_j(z)| \leq exp\{r^{\varrho+\varepsilon}\}, \ |F(z)| \leq exp\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\}, \ j = 0, 1, \ ..., \ K-1.$$

D'après le lemme 1.3.5, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ satisfaisant $m_l E_2 < \infty$, en prenant z satisfaisant

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = (\frac{\upsilon_f(r)}{z})^j (1 + 0(1)) \ (j = 0, 1, ..., \ k).$$

Depuis $\sigma(f) = \infty$, du lemme 1.3.8, il existe $|z| = r \in H_1 \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_2)$ satisfaisant $|f(z)| = M(r,f)$, pour $\lambda > 2\sigma(F) + 1$, nous avons

$$(\frac{\upsilon_f(r)}{|z|})^k (1 + 0(1)) \leq \frac{1}{c_1} \exp\{r^{\sigma(F)+\varepsilon} - c_2 r^\lambda\} + exp\{r^{\varrho+\varepsilon}\}(\sum_{j=0}^{k-1} (\frac{\upsilon_f(r)}{|z|})^j (1 + 0(1)) + 1).$$

Ainsi, nous avons

$$\limsup_{r \to \infty, \ r \in H_1 \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_2)} \frac{\log \log \upsilon_f(r)}{\log r} \leq \varrho + \varepsilon.$$

Par la définition de l'hyper-ordre, nous pouvons obtenir $\sigma_2(f) \leq \varrho$.

Par conséquent, nous complétons la preuve de ce lemme. □

Lemme 1.3.13 *Soit* $A_j(z)$ $(j = 0, \cdots, k-1)$, $F(z)$ *des fonctions entières satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j), j = 0, \ \cdots, \ k-1, \ \sigma(F(z)\} \leq \sigma < \infty$. *Si* $f(z)$ *est une solution de (1.1), alors* $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Preuve. *Par les Lemmes 1.3.8, 1.3.10 et les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 1.3.13, nous pouvons facilement obtenir le Lemme 1.3.14.* □

Chapitre 2

Des théorèmes et les preuves

2.1 Résultats principaux

Dans ce chapitre on va citer les théorèmes principaux de ce mémoire et donner leurs démonstrations.

Théorème 2.1.1 *([8]) Soit $A_0, \cdots A_{k-1}$, F des fonctions entières. Supposons qu'il existe un $A_d(0 \leq d \leq k-1)$ de telle sorte que*

$$\max\{\sigma(A_j), j \neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d) \leq \frac{1}{2}.$$

Alors chaque solution de (1.2) est soit un polynôme ou une fonction entière d'ordre infini. Par la définition de hyper l'ordre, nous pouvons facilement obtenir $\sigma(f) = \infty$, si $\sigma_2(f) > 0$ et la croissance des solutions de (1.2) d'ordre infini peuvent être estimés avec plus de précision. Ensuite, le problème ci-dessus devient que sous quelles conditions peut-on obtenir le résultat $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$ pour chaque solution transcendante de (1.2) si il existe un coefficient $A_d(z)(1 \leq d \leq k-1)$ satisfaisant $\max\{(A_j), j \neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d)$. En 2000, Chen et Yang ont donné une estimation plus précise de hyper l'ordre des solutions de (1,2) et ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.1.2 *([14]) Soit $A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières. Supposons qu'il existe un certain indice $d \in \{0, \cdots, k-1\}$ tel que la fonction entière transcendante $A_d(z)$ satisfait*

$$\max\{\sigma(F), \sigma(A_j)(j \neq d)\} < \sigma(A_d) \leq \frac{1}{2}.$$

Alors chaque solution transcendante de (1.2) satisfait $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$. *En outre, si* $F(z) \neq 0$, *alors* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_d)$. *D'après le Théorème 2.1.2, nous avons* $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$ *pour chaque solution transcendante de (1.2), si* $\max\{\sigma(A_j), j \neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d) \leq \frac{1}{2}$. *Afin de supprimer la condition* $\sigma(A_d) < \frac{1}{2}$, *nous introduisons la série lacunaire dans ce qui suit.*

Théorème 2.1.3 *Soit* $A_d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *une série lacunaire d'ordre fini, où la séquence des exposants* $\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \cdots\}$ *est une suite croissante d'entiers positifs satisfaisant la condition Fabry*

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty, \ n \to \infty. \tag{2.1.1}$$

En 2009, Tu et Liu ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 2.1.4 *([5]) Soit* $A_0, \cdots A_d, \cdots A_{k-1} (k \geq 2, 1 \leq d \leq k-1)$ *des fonctions entières satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j), \ j \neq d\} < \sigma(A_d)$. *Supposons que* $A_d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction d'ordre régulièr de telle sorte que la séquence des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie (2.1.1), puis si* $F(z) = 0$, *alors chaque solution transcendante* $f(z)$ *de (1.1) satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

Preuve. supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de (1.2). Pour (1.2), nous avons

$$|A_d| \leq |\frac{f^{(k)}}{f^{(d)}}| + ...|A_{d+1}||\frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}}| + |\frac{f}{f^{(d)}}|(|A_{d-1}||\frac{f^{(d-1)}}{f}| + ...|A_0|). \tag{2.1.2}$$

Pour le lemme 1.3.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [1, \infty)$ avec mesure logarithmique finie et un constant $B > 0$, tel que $\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}| \leq B(T(2r, f))^{2k}, 0 \leq i < j \leq k$. Est valable pour tous $|z| = r \notin E_1$ et pour r assez grand. Depuis $max\{\sigma(A_j), j \neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d)$, nous choisissons α, β satisfait $max\{\sigma(A_j), j \neq d, \sigma(F)\} < \alpha_1 < \beta_1 < \sigma(A_d)$. Par le lemme 1.3.3, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ et pour r assez grande, nous avons

$$|A_j(z)| \leq exp\{r^{\alpha}\}, \ j \neq d. \tag{2.1.3}$$

Depuis A_d l'évolution régulière, pour le lemme 1.3.4 il existe un ensemble $E_3 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, nous avons

$$|A_d(z)| \geq \min |A_d(z)| \geq (M(r, A_d))^{\frac{1}{2}} \geq \exp\{\frac{1}{2} r^{\beta}\}. \tag{2.1.4}$$

Pour le lemme 1.3.12, il existe un ensemble $E_4 \subset [0, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_4$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$|\frac{f(z)}{f^{(d)}(z)}| \leq 2r^d. \tag{2.1.5}$$

Ainsi à partir de (2.1.2) - (2.1.5), pour tout z satisfaisant à $|z| = r \in E_3 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_4)$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$exp\{\frac{1}{2}r^{\beta}\} \leq kBr^M \exp\{r^{\alpha}\} \bullet (T(2r, f))^{2k}. \tag{2.1.6}$$

Depuis β est arbitrairement proche de $\sigma(A_d)$, par (2.1.6), nous avons

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq \sigma(A_d).$$

D'autre part, par le lemme 1.3.13, nous avons $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_d)$. Par conséquent, $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$. □

Théorème 2.1.5 *([5]) Soit* $F \neq 0$, $A_0, \cdots A_d, \cdots, A_{k-1} (k \geq 2, 1 \leq d \leq k-1)$ *des fonctions entières satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j), j \neq d\} < \sigma(A_d)$. *Supposons que* $A_d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une fonction d'ordre régulièr de telle sorte que la séquence des exposants* $\{\lambda_n\}$ *vérifie (2.1.1), alors chaque solution transcendante* $f(z)$ *de (1.2) satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

Preuve. supposons que $f(z)$ est une solution transcendente de (1.2). Pour (1.2), nous avons

$$|A_d| \leq |\frac{f^{(k)}}{f^{(d)}}| + ... + |A_{d+1}||\frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}}| + |\frac{f}{f^{(d)}}|(|A_{d-1}||\frac{f^{(d-1)}}{f}| + ... + |A_0| + \frac{F}{f}). \tag{2.1.7}$$

Pour tout z satisfaisant $|f(z)| = M(r, f)$ et pour suffisament grand r, nous avons $|f(z)| > 1$.

On a

$$|\frac{F(z)}{f(z)}| \leq |F(z)|. \tag{2.1.8}$$

Dans (2.1.7)-(2.1.8), et de même arguments que dans le théorème 2.1.3 et le lemme 1.3.12, on peut avoir $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$. En outre, si $F \neq 0$, de même reasonant que dans le théorème 2.1.3, on obtient $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f)$ est valable pour tous solution transcendante f de (2.1.1). Ainsi, est complète le preuve du théorème 2.1.4. □

Théorème 2.1.6 *Soit $A_j(z)(j=0,\ 1\ ,\cdots,\ k-1)$, $F(z)$ des fonctions entières satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j), j\neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d) < \infty(1\leq d\leq k-1)$. *Supposons que* $A_d(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ *est une série lacunaire de telle sorte que la séquence des exposants* $\{\lambda_n\}$*vérifie (2.1.1). Alors*

1. *Chaque solution de transcendante $f(z)$ de (1.2) satisfait $\sigma_2(f)=\sigma(A_d)$.*
2. *Si $F(z)\neq 0$, alors chaque solution transcendante $f(z)$ de (1.2) vérifie* $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_d)$.
3. *Si $f(z)$ est une solution polynômiale de (1.2), alors $f(z)$ doit être un polynôme de degré inférieur à d.*
4. *Si $d=1$, alors pour chaque solution non constante $f(z)$ de (1.2) satisfait $\sigma_2(f)=\sigma(A_d)$.*

Preuve. 1. Supposons que $f(z)$ est la solution transcendante de (1.2). Par (1.2), nous avons

$$|A_d| \leq |\frac{f^{(k)}}{f^{(d)}}| + ... + |A_{d+1}||\frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}}| + |\frac{f}{f^{(d)}}|(|A_{d-1}||\frac{f^{(d-1)}}{f}| + ... + |A_0| + |\frac{F}{f}|). \tag{2.1.9}$$

Par le lemme 1.3.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [1,\infty)$, de mesure logarithmique finie et une constante $B>0$ tel que

$$|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}| \leq B(T(2r,f))^{2k}, 0\leq i<j\leq k. \tag{2.1.10}$$

Est valable pour tous $|z|=r\notin E_1$ et pour r assez grand. Depuis $max\{\sigma(A_j), j\neq d, \sigma(F)\} < \sigma(A_d)$,nous choisissons α_1, β_1 satisfait $max\{\sigma(A_j), j\neq d, \sigma(F)\} < \alpha_1 < \beta_1 <$
Par le lemme 1.3.3, il existe un ensemble $E_2 \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_2$ et pour r assez grande, nous avons

$$|A_j(z)| \leq exp\{r^{\alpha_1}\}. \tag{2.1.11}$$

Depuis $A_d(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ et $\{\lambda_n\}$ satisfait (2.1.1), par le lemme 1.3.6, il existe un ensemble $E_5 \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique infinie, telle que pour tout z satisfaisant $|z|=r\in E_5$, nous avons

$$|A_d(z)| \geq \inf_{|z|=r} |A_d(z)| \geq \exp\{r^{\beta_1}\}. \tag{2.1.12}$$

Par lemmes 1.3.3 et 1.3.7, il existe deux ensembles $E_6, E_2 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin (E_6 \cup E_2)$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$|\frac{f(z)}{f^{(d)}(z)}| \leq 2r^d, |\frac{F(z)}{f(z)}| \leq |F(z)| \leq \exp\{r^{\alpha_1}\}. \tag{2.1.13}$$

Ainsi à partir de (2.1.9) - (2.1.13), pour tout z satisfaisant à $|z| = r \in E_5 \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_6)$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$exp\{r^{\beta_1}\} \leq (k+1)r^d \exp\{r^{\alpha_1}\} \bullet (T(2r, f))^{2k}. \tag{2.1.14}$$

Depuis β_1 est arbitrairement proche de $\sigma(A_d)$, par (2.1.14), nous avons

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r} \geq \sigma(A_d).$$

D'autre part, par le lemme 1.3.12, nous avons $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_d)$. Par conséquent, $\sigma_2(f) = \sigma(A_d)$.

2. Supposons que si $f(z)$ est une solution transcendante de (1.2), par (1.), nous avons $\sigma_2(f) = \sigma(Ad)$. Ensuite, nous montrons que $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f)$ si $F \neq 0$. De (1.2), nous avons

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ...A_0. \tag{2.1.15}$$

Par (2.1.15), il est facile de voir que si $f(z)$ a un zéro à z_0 d'ordre $m > k$, alors F doit avoir un zéro à z_0 d'ordre $m - k$. Ainsi nous obtenons

$$N(r, \frac{1}{f}) \leq k\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{F}). \tag{2.1.16}$$

En outre par (2.1.15), nous avons

$$m(r, \frac{1}{f}) \leq \sum_{j=1}^{k} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + m(r, \frac{1}{F}). \tag{2.1.17}$$

Par (2.1.16), (2.1.17) et le lemme de dérivée logarithmique, on obtient que

$$T(r, f) \leq k\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + M(\log(rT(r, f))) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j), r \notin E, \tag{2.1.18}$$

où $E \subset (0, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie, $M > 0$ est une constante, pas nécessairement le même à chaque apparition. Pour suffisamment grand $r \notin E$ et pour toute $\varepsilon > 0$ donnée, nous avons

$$M(\log(rT(r, f))) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \tag{2.1.19}$$

$$T(r,F)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)\leq(k+1)r^{\sigma(A_d)+\varepsilon}. \tag{2.1.20}$$

Par (2.1.19) et (2.1.20), nous avons

$$T(r,f)\leq 2k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+2(k+1)r^{\sigma(A_d)+\varepsilon}, \tag{2.1.21}$$

par conséquent, $\sigma_2(f)\leq\overline{\lambda}_2(f)$ par (2.1.21). Par conséquent, $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)$.

3. On suppose que $f(z)$ est un polynôme de solution (1.2) avec un degré non inférieur à d. Par (1.2), nous avons

$$|A_d f^{(d)}(z)|\leq|f^{(k)}(z)|+...+|A_{(d+1)}f^{(d+1)}(z)|+...+|A_0 f(z)|+|F(z)|. \tag{2.1.22}$$

Par la preuve de (1.), nous avons qu'il existe un ensemble E_5 avec mesure logarithmique infinie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\in E_5$, nous avons

$$|A_d f^{(d)}(z)|\geq r^M\exp\{r^{\beta_1}\}. \tag{2.1.23}$$

D'autre part, étant donné que $max\{\sigma(A_j),j\neq d,\sigma(F)\}<\alpha_1$, le lemme 1.3.3 et (2.1.22), pour suffisamment grand $|z|=r\notin E_2$, nous avons

$$|A_d f^{(d)}(z)|\leq|f^{(k)}(z)|+...+|A_{(d+1)}f^{(d+1)}(z)|+...+|A_0 f(z)|+|F(z)|\leq r^M\exp\{r^{\alpha_1}\}. \tag{2.1.24}$$

Depuis le $\alpha_1<\beta_1$, (2.1.23) est une contradiction avec (2.1.24), ainsi, le degré de $f(z)$ doit être inférieure à d.

4. Si $d=1$ et $f(z)$ est une solution polynomiale de (1.2), par (3.), on n'obtient que $f(z)$ doit être une constante. De plus, pour (1.), on obtient que chaque f de (1.2) satisfait $\sigma_2(f)=\sigma(A_d)$. □

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à J. Tu et J. Liu [5] concernant la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0,$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z),$$

ayant un coefficient dominant $A_d = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière d'ordre régulier tel que la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ vérifie la condition d'écart de Fabry

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty \ (n \to \infty).$$

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions entières d'ordre $p-$itératif ?

2.2 Bibiographie

[1] **C.-H. Li, Y.-X. Gu**, On the oscilation of differential equation f" + eazf' + Q(z)f = F(z), Acta Math. Sci. 25A(2)(2005) : 192-200.

[2] **G. GUNDERSEN.** Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function plus similar estimates. J. London Math. Soc. 1998,**37**(2) : 88-104.

[3] **G. JANK, L. VOLKMANN.** Einfűhrung in die Theorie des ganzen und meromorphen Function mit Anwendungen auf Differentialgliechungen. Birkhäu

[4] **Hongxun YI, Chungchun YANG.** Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing, 1995. (in Chinese)

[5] **Jin TU, Jie LIU.** Growth of a class of higher order linear differential equations with coefficients being gap series. J. Math. Res. Exposition, 29(3) : 563-567.

[6] **L. G. BERNAL.** *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations. Proc. Amer. Math. 1987,* ***101****(2) : 317-322.*

[7] **Lo YANG.** The value Distribution and Its New Research. Science Press, Beijing, 1982. (in Chinese)

[8] **S. HELLERSTEIN, J. ROSSI.** On the growth of solutions of certain linear differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1992, **17**(2) : 343-365.

[9] **W. H. J. FUCHS.** Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series. Illinois J. Math. 1963, **7**(4) : 661-667.

[10] **W. K. HAYMAN.** Meromorphic Functions. Clarendon Press. Oxford, 1964.

[11] **W. K. HAYMAN.** The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method. Canad. Math. Bull. 1974, **17**(3) : 317-358.

[12] **Zongxuan CHEN**. *On the hyperd-ordre of solutions of higher order differential equations. Chinese Ann. Math. ser. B, 2003,* ***24****(4) : 501-508.*]

[13] **Zongxuan CHEN**. *On the hyperd-ordre of solutions of some second-ordre linear differential equations. Acta Math. Sin.(Engl. Ser.), 2002,* ***18****(1) : 79-88.*

[14] **Zongxuan CHEN.** Changchan YANG. Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations. Complex Variables Theory Appl. 2000, **42**(2) : 119-133.

[15] **Zongxuan CHEN.** Changchan YANG. Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second ordre linear differential equations. Kodia Math. J. 1999, **22**(2) : 273-285.