UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation contrôle et optimisation.

Thème

Stabilité et stabilisation des systèmes linéaires positifs.

Présenté par

Rym Setli et Nadjat Sahnine

Soutenu le 30/05/2016.

Devant le jury

President	**M.Bouagada Djilali**	**Professeur**	**U. MOSTAGANEM**
Examinateur	**M.Fetouch Houari**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	**Mme Bechaoui Khadidja**	**M.A.B**	**U. MOSTAGANEM.**

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires positifs. Dans un premier temps, nous fournissons des conditions nécéssaires et suffisantes pour la stabilité de tels systèmes, tout en basant sur la théorie de Lyapunov pour les deux cas à temps continu et à temps discrets. Dans un second temps, nous étudions un cas particulier des systèmes qui sont les systèmes positifs. Une attention particulière est accordée pour l'étude de la stabilisation par retour d'état, et y appliquons la théorie développée dans la première partie.

Dédicaces

Je dédie le fruit de ce travail :

A la personne qui m'est très chère et qui a pris une vaste place dans mon petit cœur; c'est à vous que j'offre le fruit de mes efforts pour vous faire plaisir chère maman que dieu vous garde pour nous.

A mon père qui a décoré ma vie avec toutes les couleurs d'éducation et apprentissage, et qui m'a protégé contre tout le mal. Je n'ai connu avec lui que la joie et le bonheur.

A mes sœurs : Malika et Assia qui me doivent tout l'amour, avec tous mes vœux de les voir réussir dans leurs vies.

A mes frères : Mustapha et Tahar.

A toute la famille Setli et la famille Aibout .

RYM

Je dédie ce modeste travail à :

Qui m'ont donné la force et le courage pour finir ce travail, mes très chères parents.

Mes frères : Ali, Mohammed

Mes sœurs : Zahia et Chahra..

Et toute la famille Sahnine et Habech.

Mes amies : Rym, Aicha, Halima, Houria,Samiya et Meriem spécialement et les autres étudiants de notre promotion.

NADJAT

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions vivement et en premier lieu, notre encadreur **Mme BECHAOUI Khadidja** pour son aide précieuse, sa gentillesse, ses conseils, son soutien et son enthousiaste.

Nos sincères remerciements à **Mr.BOUAGADA Djilali** et **Mr.FETTOUCH Houari** qui ont bien voulu évaluer ce travail.

Nous remercions Mr **Abbad Yassine** et Mr **Rahis Omar** et **Louay** et tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous nos enseignants, qui ont participé à notre formation.

Table des matières

INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude de fonctionnement des systèmes (Physiques, mécanique, électroniques,...etc) qui a fait l'objet de nombreuses recherches depuis la fin $XIX^{ème}$ siècle et pour cette raison le développement des méthodes mathématiques reste toujours nécessaire pour la résolution des problèmes complexes posés par les différents domaines de la science.

L'objectif de ce mémoire est étudié la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires positifs. Ces derniers sont d'une grande importance en pratique puisque la propriété de positivité apparaît dans de nombreuses applications numériques ou dans la nature elle-même (en physique, en chimie,...etc).

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit :
Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels des notions de base qui sont d'une grande utilité par la suite.
Dans le deuxième chapitre nous caractérisons les systèmes positifs avec quelques applications.
Le troisième chapitre porte sur le problème de stabilité des systèmes dans le cas général et une attention particulière sera accordée à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires positifs, tout en donnant une présentation détaillée de la théorie de Lyapunov. Nous poursuivons ce chapitre par l'étude de stabilisation par retour d'état de ces systèmes.

A la fin nous terminerons notre travail par une conclusion qui couvre tous les éléments de ce mémoire.

Notations :

Dans cette section, nous définissons les notations principales utilisées dans ce mémoire.

$\mathbb{R}$	: Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: Corps des nombres réels non-négatifs.
$\mathbb{R}^n$	: Espace des vecteurs à n entiers réelles.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	: L'espace des matrices carrées de dimension n à entrée dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	: Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	: Espace des matrices à entrées réelles non-négatives .
$\underline{n}$	: L'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls.
A^T	: Transposée de matrice.
I_n	: Matrice identité d'ordre n.
$\mathrm{Re}(\lambda)$	: Partie réelle de λ.
$\sigma(A)$	: Ensemble des valeurs propres de la matrice A.
$A > 0$	: A est une matrice définie positive.
$A < 0$	: A est une matrice définie négative.
$\det(A)$	: Déterminant de A.
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	: Dérivée temporelle.
$[a_{ij}]$	: Matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne est a_{ij}.
$tr(A)$	: Trace d'une matrice carrée A.
$com(A)$	: Commatrice d'une matrice A.
$\|\|x\|\|$	: Norme de x.

Abréviations :

LTI : Linéaire invariant dans le temps.

Chapitre 1

Généralités et notations de base

1.0.1 Matrices non-négatives, positives et de Metzler

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et caractérisations des matrices non-négatives, positives et de Metzler. Nous nous basons pour ce faire aux références [3].

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels. Par la suite, nous notons I_n, la matrice identité d'ordre n ou plus brièvement I, A^T la transposée d'une matrice A, $\underline{n}$. l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, ..., n$.

Définition 1.0.1 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$:*

- *A est une matrice **non-négative** si $\forall i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$: $a_{ij} \geq 0$, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par : $A \geq 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.*

Exemple 1.0.1 *Soit la matrice A :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

est une matrice non-négative.

Définition 1.0.2 • *A est une matrice **positive** si A est non-négative et $\exists k \in \underline{n}$, $\exists l \in \underline{m}$: $a_{kl} \geq 0$, c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.*

- *A est une matrice* ***strictement positive*** *si* $\forall i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$: $a_{ij} > 0$, *i.e. toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par :* $A >> 0$. *Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension* n, $n \geq 2$. *Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif* $a >> 0$ *coïncide avec* $a > 0$.
- *A est une matrice de* ***Metzler*** *si* $\forall i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$, $i \neq j$: $a_{ij} \geq 0$ *i.e. toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.*

Exemple 1.0.2 *La matrice A suivante est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

1.0.2 Le polynôme caractéristique et valeurs propres

Pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on appelle **polynôme caractéristique** de la matrice A le polynôme $P_A(\lambda)$ d'ordre n défini par

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Ce polynôme admet donc p racines $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ qui peuvent être simples ou multiples. Ces racines sont appelées **valeurs propres** de A. On peut alors écrire

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}...(\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

avec m_i la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ_i, et $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$.

Exemple 1.0.3 *Soit la matrice A suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.

Définition 1.0.3 *Une matrice carrée M d'ordre n est dite définie positive si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^T M x > 0.$$

Exemple 1.0.4 *La matrice suivante :*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

est définie positive.

En effet :

Pour tout x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,

on a $x^T M x$:

$$\begin{aligned} x^T M x &= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3 \\ &= x_1^2 + (x_{1-} x_2)^2 + (x_{2-} x_3)^2 + x_3^2 > 0. \end{aligned}$$

1.0.3 La transformée de Laplace

Définition 1.0.4 *Soit f une fonction réelle définie $\forall t \geq 0$. La transformée de Laplace de f, $\mathcal{L}(f(t))$ est :*

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Si $\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace, on a $F = \mathcal{L}(f)$ et $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

On peut définir la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}(f(t)) = f(t).$$

Tableau résumé de la transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles :

Les fonctions	Les transformés de Laplace
a	$\frac{a}{s}$, $a \in \mathbb{R}$
at	$\frac{a}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin\,(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$, $w \in \mathbb{R}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$e^{-at}\sin\,(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$

1.0.4 Théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème 1.0.1 *Toute matrice carrée A satisfait son équation caractéristique :*

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I_n = 0,$$

avec les a_i, $i = 1, ..., n$ constantes réelles.

On déduit du théorème la relation suivante :

$$\begin{aligned} A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - ... - a_1A - a_0I_n \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i. \end{aligned}$$

1.0.5 Exponentielle d'une matrice :

Définition 1.0.5 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. L'exponentielle de A notée exp(A) ou e^A est la matrice définie par :*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{K\geq 0} \frac{A^K}{K!}. \tag{1.0.1}$$

Propriétés Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $e^{A+B} = e^A.e^B$ si $AB = BA$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- $\det e^A = e^{tr(A)}$.

1) **Calcul de e^A pour des matrices A particulières :**

- S'il existe une matrice P inversible et une matrice quelconque J telles que la matrice A se décompose de la manière suivante :

$$A = P^{-1}JP.$$

Alors :

$$e^A = P^{-1}e^J P.$$

- Si A une matrice nilpotente ($A^q = 0$ pour un entier q) alors, l'exponentielle d'une matrice A se calcule directement à partir de son développement en série, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{q} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

Exemple 1.0.5 *La matrice suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

A est nilpotente d'indice 2, car $A^2 = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} e^A &= I + A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Si A est une matrice diagonale telle que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{alors :} \quad e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.0.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textit{alors :}\ e^A = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

- Si A est une matrice de Jordan d'ordre n telle que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{alors : } e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{t\lambda} & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & te^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.0.7

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textit{alors : } e^B = \begin{bmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

- Calcul exponentiel d'une matrice par la **Transformée de Laplace** :

Si A est une matrice d'ordre n, alors

$$e^A = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}.$$

On doit suivre les étapes suivantes pour ce calcule :

1) Calculer $(sI - A)$.
2) Calculer $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} Com(A)^T$.
3) Calcul de la transformée de Laplace inverse de $(sI - A)^{-1}$.

Exemple 1.0.8 *Soit la matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.
Calculons $(sI - A)^{-1}$:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ -2 & s+3 \end{vmatrix} = (s-1)(s+3) + 4 = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)^2} & \frac{-2}{(s+1)^2} \\ \frac{2}{(s+1)^2} & \frac{s-1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse : Une simple décomposition en éléments simples nous permet d'écrire :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} & \frac{-2}{(s+1)^2} \\ \frac{2}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \end{bmatrix}. \tag{1.0.2}$$

La transformée de Laplace inverse de (1.0.2) nous donne alors :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t}+2te^{-2t} & -2te^{-2t} \\ 2te^{-2t} & e^{-t}-2te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

- Calcul par le **théorème de Cayley-Hamilton :**

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$

Où les scalaires $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1} \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n} \end{cases}$$

avec λ_i, $i = 1, ..., n$ les valeurs propres de A.

Exemple 1.0.9 *Soit la matrice:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$
On a donc

$$e^{A} = \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$

Où les $(\alpha_i)_{i=0;1}$ *sont les solutions de système suivant :*

$$\begin{cases} e^{\lambda_1} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{1} = \alpha_0 + \alpha_1 \\ e^{2} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{cases}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{e^2-e^1}{\lambda_2-\lambda_1} = e^2 - e^1 \\ \alpha_0 = 2e - e^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} e^{A} &= (2e-e^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(e^2-e^1\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & e^2-e^1 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.0.6 Systèmes et représentations d'état :

Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être linéaire ou non-linéaire.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la classe des systèmes linéaires invariants dans le temps. Nous nous plaçons dans les deux cas continu et discret.

Le système linéaire est défini par :

Cas continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.0.3}$$

avec $x(0) = x_0$, où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle (la commande) du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système,

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimension appropriées tel que ;

A : matrice d'état,

B : matrice de commande (d'entrée),

C : matrice de mesure (sortie),

D : matrice de transfert direct,

$x(t)$: vecteur d'état,

$u(t)$: vecteur d'entrée,

$y(t)$: vecteur de sortie.

- **Trajectoire d'états** : Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire. L'équation homogène associée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t).$$

Sa solution est :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0).$$

Où $t = t_0$ est l'instant initial.

La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\
e^{-At}\frac{dx}{dt} &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) \\
&= Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Bu(t).
\end{aligned}$$

D'où

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu(t) \\
&\Longrightarrow \quad e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}Bu(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

- Réponse du système :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau).$$

Dans le cas discret : Un système L.T.I à temps discret est un système qui a la forme d'un espace d'état d'écrit par les équations :

$$\begin{cases} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i + Du_i \end{cases} \tag{1.0.4}$$

où x_i sont les états du système, u_i les contrôles du système, y_i les sorties du système.

- Trajectoire d'états :

Pour $k = 0$, $x_1 = Ax_0 + Bu_0$.

Pour $k = 1$, $x_2 = Ax_1 + Bu_1$

$$= A\left[Ax_0 + Bu_0\right] + Bu_1$$

$$= A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1.$$

Pour $k = 2$, $x_3 = Ax_2 + Bu_2$

$$\begin{aligned} &= A\left[A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1\right] + Bu_2 \\ &= A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2 \\ &= A^3x_0 + \sum_{k=0}^{3-1} A^{3-(k+1)}Bu_k. \end{aligned}$$

$\vdots$

Pour $k = i$, $x_k = A^ix_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)}Bu_k.$

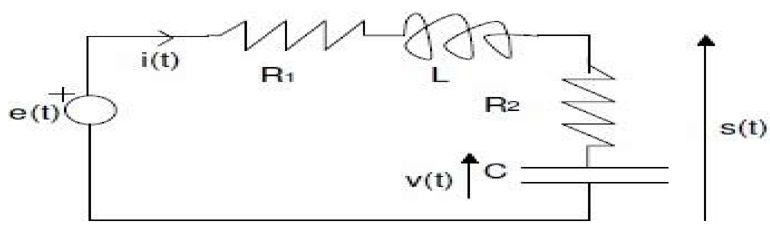
$$x_k = A^ix_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)}Bu_k. \qquad k > 0.$$

- Réponse du système :

$$y_k = CA^kx_0 + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)}Bu_i.$$

Nous proposons dans ce qui suit un exemple d'application.

Exemple 1.0.10 *On considère le système RLC*



Exemple d'un système électronique

L'équation physique de ce système électronique est comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C\frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2i(t) + v(t) \end{cases}.$$

Avec R_1, $R_2 > 0$ et L, $C > 0$.

Suite à l'application des lois physiques notamment lois de Kirchhoff on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{R_1+R_2}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) \end{cases}$$

On pose : $x_1(t) = i(t)$ *et* $x_2(t) = v(t)$*. Et après modélisation, il s'écrit le modèle :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{1.0.5}$$

ceci est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right.$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \ \textit{et } D = 0.$$

Chapitre 2

Systèmes positifs

Dans ce qui suit nous allons s'intéresser à la notion de positivité concernant un système définit :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{array}\right. \tag{2.0.1}$$

Définition 2.0.6 *Un système est dit positif si à toute entrée positive et condition initiale positive, correspond un état positif et une sortie positive.*

Alors, le système (2.0.1) est par définition dit **positif** si et seulement si

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+ \ \forall u \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x(t) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.0.2}$$

2.0.7 Condition de positivité :

Cas continu :

Nous nous plaçons dans la classe des systèmes à temps continu, pour caractériser la positivité. Des conditions nécessaires et suffisantes serait cependant établies.
Nous nous basons sur [1], [3] et [4].
Soit le système continu suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0\end{array}\right. \tag{2.0.3}$$

De tels systèmes sont identifiés par le triplet (A, B, C)

Théorème 2.0.2 *[4]Un système linéaire à temps continu* (A, B, C) *est positif si et seulement si la matrice* A *est une matrice de Metzler et* $B \geq 0, C \geq 0$.

Nous proposons dans ce qui suit un exemple d'application.

Exemple 2.0.11 *On considère le système RLC représenté par l'exemple* (1.0.10) .
Le système (1.0.5) est positive car :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \text{ est une matrice de Metzler}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ et } C = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Cas discret :

Soit le système discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.0.4}$$

$$\text{positivité des systèmes (2.0.4)} \iff \forall x_0 \geq 0, \forall u(i) \geq 0, \text{ alors } \forall i \text{ , } x(i) \geq 0 \text{ et } y(i) \geq 0.$$

Théorème 2.0.3 *Un système linéaire* (A, B, C) *à temps discret est positif si et seulement si* $A \geq 0,\ B \geq 0$ *et* $C \geq 0$.

2.1 Positivité des systèmes linéaires

Nous proposons quelques définitions de positivité externe et de positivité interne. Nous présentons la relation existente entre ces deux notions.

2.1.1 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité des systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 2.1.1 *Un système linéaire* (A, B, C) *est dit* ***externement positif*** *si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour* $x_0 = x(0) = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, *on a* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, *pour* $t \geq 0$.

2.1.2 Positivité interne

Nous citons la seconde définition de positivité, qui est appelée positivité interne.

Définition 2.1.2 *Un système linéaire (A, B, C) est dit* ***internement positif :***

si pour $x_0 = \mathbb{R}_+^n$ et tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$ on a $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$pour $t \geq 0$.
Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négative $\mathbb{R}_+^n$ (frontière incluse) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 2.1.1 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

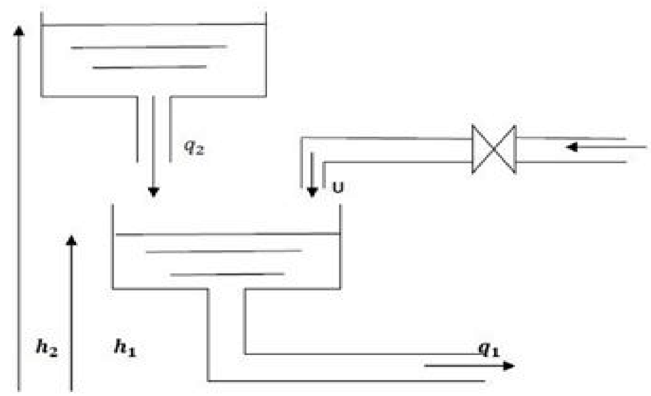
Théorème 2.1.1 *Le système linéaire (A, B, C) est dit* ***internement positif*** *si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.*

2.1.3 Quelques applications :

Les applications sont nombreuses, on cite quelques exemples :

- Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits, concentrations,...).
- Modèles à compartiments : applications en médecine, cinétique chimique, ...
- Modèles économiques (Leontieff, ...).
- Modèles de dynamiques de population.
- Circuit RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques,...

Exemple 2.1.1 *Problème de b.acs*



Dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{2.1.1}$$

Avec $x_1(t) = h_1(t),$ *et* $x_2(t) = h_2(t).$
Le systéme (2.1.1) est positive car $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *est une matrice de Metzler et* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *est une matrice non-négative.*

2.1.4 Propriétés principales :

Si l'état initial est positif (ou au moins non négatif) alors, la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non négatif.

Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces vectoriels.

En conséquence :

Certaines propriétés connues des systèmes linéaires ne peuvent être appliquées pour les systèmes positifs.

Pour **les systèmes linéaires classiques** parmi les tests :

- Contrôlabilité :

$$rang\left[B, AB, ...A^{n-1}B\right] = n.$$

- Contrôlabilité $\longrightarrow$ stabilité.
- Fonction de transfert avec dénominateur de degré n $\longrightarrow$ réalisation d'ordre n.
- Il existe des réalisations sympathiques : formes canoniques, Jordan, ...

- Résultats très similaires en continu et en discret.
- Vérification de propriétés des méthodes d'algèbre linéaire (Matlab).

2.1.5 Les quelques difficultés :

- L'atteignabilité, contrôlabilité.
- Stabilité, stabilisation par retour d'état...

Chapitre 3

Stabilité et stabilisation

3.1 Notion sur la stabilité des systèmes linéaires

3.1.1 Concepts de stabilité :

Dans ce chapitre, nous étudions, la stabilité des systèmes linéaires positifs. Mais tout d'abord, nous citons quelques définitions de stabilité dans le cas général.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Définition 3.1.1 ***(Point équilibre)***

L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (3.1.1) si $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq t_0$. En d'autres termes, x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.

Remarque 3.1.1 *On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine* 0 *puisque si x vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$, la dérivée de z est donnée par*

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \overset{déf}{=} g(z), \text{ et } g(0) = 0.$$

L'origine est bien un point d'équilibre du système $\dot{z} = g(z)$.

Définition 3.1.2 *L'équilibre x_e du système (3.1.1) est dit* ***stable*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (3.1.1) on ait*

$$||x(0)|| < \eta \Longrightarrow \forall t \geq 0, ||x(t)|| < \varepsilon.$$

Définition 3.1.3 *L'équilibre x_e du système (3.1.1) est dit* ***attractif*** *s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (3.1.1) on ait*

$$||x(0)|| < r \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Définition 3.1.4 *L'équilibre x_e du système (3.1.1) est dit* ***asymptotiquement stable*** *si :*

– *La condition de stabilité simple est vérifiée.*

– *La condition d'attractivité est vérifiée.*

Définition 3.1.5 *L'équilibre x_e du système (3.1.1) est dit* ***globalement attractif*** *si pour toute solution $x(t)$ de (3.1.1) on a $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.*

Définition 3.1.6 *L'équilibre x_e du système est dit* ***exponentiellement stable*** *s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait*

$$||x(0)|| < r \Rightarrow ||x(t)|| \leq M||x(0)||e^{-\alpha t}, \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Définition 3.1.7 *L'équilibre x_e du système (3.1.1) est dit* ***globalement exponentiellement*** *stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (3.1.1), on a*

$$||x(t)|| \leq M||x(0)||e^{-\alpha t} \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Théorème 3.1.1 *Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec n valeurs propres distinctes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et x_e point d'équilibre*

1) si $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, alors l'équilibre x est instable.

2) si $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, alors :

i) si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, alors l'équilibre x est asymptotiquement stable.

ii) si λ est un pôle tel que $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$,et la multiplicité est 1, alors l'équilibre x_e est stable.

iii) si un pôle tel que $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$,et la multiplicité est > 1 alors,

a) si J_j^i associés à λ_i sont scalaire alors l'équilibre x_e est stable.

b) si J_j^i associés à λ_i non scalaire alors l'équilibre x_e est instable.

Exemple 3.1.1 *Pour le système LTI représenté par la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comme $\lambda_2 < 0, \lambda_1$ et λ_3 sont positive, alors le système est instable.

3.1.2 La stabilité et théorie de Lyapunov

1) **Fonctions de Lyapunov**

Les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons le système

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.1.2}$$

Tel que $f(0) = 0$, admettant $x_e = 0$ comme équilibre. Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x), f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

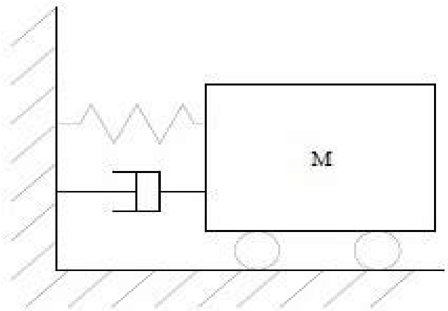
Définition 3.1.8 *On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1.2) en $x_e = 0$ dans Ω, si pour tout $x \in \Omega$ on a*

- *$V(x) > 0$ sauf en $x = 0$ où $V(0) = 0$.*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$.*

Théorème 3.1.2

1. *S'il existe une fonction de Lyapunov pour (3.1.2) en $x = 0$ dans un voisinage Ω de 0, alors $x = 0$ est stable.*
2. *Si de plus $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*
3. *Si de plus $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \to \infty$ quand $||x|| \to \infty$ alors $x = 0$ est globalement asymptotique stable.*

Exemple 3.1.2 *Le système masse-ressort-amortisseur*



Système masse-ressort

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au centre de gravité de la masse, on obtient :

1- Equation du mouvement :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + |\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0.$$

2- Représentation d'état :

$$\text{En posant} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{array} \right. \qquad \text{on obtient} \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m} x_2 |x_2| - \frac{k_0}{m} x_1 - \frac{k_1}{m} x_1^3 \end{array} \right. .$$

3- Point d'équilibre : $(0, 0)$

La question est de savoir si ce point d'équilibre est stable. La masse est tirée loin de sa position d'équilibre, (longueur naturelle du ressort), puis lâchée. Reprendra-t-elle sa position d'équilibre ?

Etude de l'énergie mécanique totale :

– *Energie cinétique :*

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2.$$

– *Energie potentielle :*

$$E_{pot} = \int_0^x \left(k_0 \beta + k_1 \beta^3 \right) d\beta = \frac{1}{2} k_0 x_1^2 + \frac{1}{4} k_1 x_1^4.$$

– *Energie totale :*

$$E_m = V(x) = \frac{1}{2} k_0 x^2 + \frac{1}{4} k_1 x^4 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

– *Le point d'énergie mécanique nulle est le point d'équilibre.*

– *La stabilité asymptotique implique la convergence de l'énergie vers* 0.

– *L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie mécanique.*

On peut donc supposer que :

– *L'énergie mécanique reflète indirectement l'amplitude du vecteur d'état.*

– *Les propriétés de stabilité peuvent être caractérisées par la variation de l'énergie mécanique au cours du temps.*

Etude de la variation :

$$\dot{V}(x) = \left(m\ddot{x} + k_0 x + k_1 x^3\right)\dot{x} = -b|\dot{x}|^3 < 0.$$

Donc l'équilibre est stable.

2) **Stabilité et théorie de Lyapunov dans le cas linéaire :**

Cas continu :

Dans cette partie, nous étudions d'abord les propriétés de stabilité de l'équilibre $x_e = 0$ des systèmes homogènes linéaires autonomes :

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.1.3}$$

Remarque 3.1.2 *Le système LTI (3.1.3) peut avoir :*

– *Un point d'équilibre unique $x_e = 0$ si A est inversible.*

– *Une infinité des points d'équilibre si A n'est pas inversible.*

Théorème 3.1.3 *L'origine x_e de (3.1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive Q il existe une matrice définie positive P telle que*

$$A^T P + PA = -Q. \tag{3.1.4}$$

Preuve :

– **Condition suffisante :**

Il suffit d'observer que $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour (3.1.3) en $x_e = 0$. En effet :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Q x.$$

Donc le théorème de Lyapunov s'applique et montre que $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

– **Condition nécessaire :**

Supposons que toutes les valeurs propres de A vérifiant $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, et considérons la matrice P définie par

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T s} Q e^{As} ds.$$

Cette intégrale et bien définie. La matrice P est clairement symétrique.

En remplaçant l'équation de P dans (3.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^{+\infty} \left[A^T e^{A^T s} Q e^{As} + e^{A^T s} Q e^{As} A \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} (e^{A^T s} Q e^{As}) ds \\ &= e^{sA^T} Q e^{sA} |_0^{+\infty} \\ &= -Q. \end{aligned}$$

Il reste maintenant de montrer qu'elle est définie positive. Supposons le contraire, il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $x^T px = 0$. Comme la matrice e^{As} est inversible pour tout $t \geq 0$, il vient que

$$\begin{aligned} x^T Px &= 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} x^T e^{A^T s} Q e^{As} x ds = 0 \\ &\Rightarrow e^{As} x = 0, \ \forall s \geq 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que P est définie positive

Ce qui montre que P est bien une solution de l'équation (3.1.4), appelée l'équation matricielle de Lyapunov.

Remarque 3.1.3 *Pour construire une fonction de Lyapunov pour le système (3.1.3) il faut procéder de la manière suivante :*

- Choisir une matrice définie positive Q (par exemple $Q = I_n$).
- Résoudre l'équation de Lyapunov (3.1.4). Si on a choisi Q symétrique, alors P sera symétrique aussi.
- Vérifier que P est définie positive.

Exemple 3.1.3 *Soient*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad et \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad et\ P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix},$$

on doit résoudre

$$\begin{bmatrix} -2p_1 & 3p_1 - p_2 - 2p_4 \\ 3p_1 - 3p_3 & 3p_2 + 3p_3 - 4p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

d'où la solution

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cas discret :

Considérons le système linéaire discret suivant :

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{3.1.5}$$

Théorème 3.1.4 *[2]le système (3.1.5) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P symétrique $\left(P = P^T\right)$ tq :*

$$A^T PA - P < 0.$$

Exemple 3.1.4 *Soit le système linéaire à temps discret suivant :*

$$x_{k+1} = Ax_k \ ,$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, *on a*

$$\begin{aligned} A^T PA - P &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Donc $\exists P$ symetrique telle que $A^T PA - P < 0$. D'où le système est stable.

3.2 Stabilité des systèmes linéaires positifs

3.2.1 Cas continu :

On considère le système linéaire à temps continu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3.2.1}$$

Dans ce qui suit, nous citons quelques résultats concernants la stabilité asymptotique des systèmes linéaires positifs.

Théorème 3.2.1 *[4](**Relation entre stabilité asymptotique et polynôme caractéristique**)*
Le système positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ tel que

$$P_A(\lambda) = \det[\lambda I_n - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

sont positifs, i.e. $a_k > 0$ pour $k = 0, 1; ..., n-1$.

Théorème 3.2.2 *[5]Le système positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les mineurs principaux Δ_i, $i = 1, \cdots, n$ de la matrice $(-A)$ sont positifs, i.e.*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -a_{11} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det[-A] > 0. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Théorème 3.2.3 *[5]Le système positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales de la matrice A sont négatives.*

Théorème 3.2.4 *Le système positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales de la matrice triangulaire supérieure (inférieure)*

$$\tilde{A}_s = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & ... & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & \tilde{a}_{21} & ... & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix}, \tag{3.2.3}$$

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & ... & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,1} & \tilde{a}_{n,2} & ... & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

sont négatives.

Théorème 3.2.5 *Le système positif avec la matrice (3.2.4) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales de cette matrice sont négatives.*

Preuve : Les valeurs propres de la matrice (3.2.4) sont égales à ses entrées diagonales $\tilde{a}_{11}, ..., \tilde{a}_{n,n}$ et le système positif est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales sont négatives.

Théorème 3.2.6 *Le système linéaire positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :*
i) Les entrées diagonales de la matrice

$$A_{n-k}^{(k)} \qquad \textit{pour } k = 1, ..., n-1. \tag{3.2.5}$$

sont négatives, où $A_{n-k}^{(k)}$ sont définis comme suite :

$$A_n^{(0)} = A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & ... & a_{1,n}^{(0)} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n,1}^{(0)} & ... & a_{n,n}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} \\ c_{n-1}^{(0)} & a_{n,n}^{(0)} \end{bmatrix}, \tag{3.2.6}$$

$$A_{n-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & ... & a_{1,n-1}^{(0)} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(0)} & ... & a_{n-1,n-1}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$b_{n-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{1,n}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n}^{(0)} \end{bmatrix}, \; c_{n-1}^{(0)} = . \begin{bmatrix} a_{n,1}^{(0)} & ... & a_{n,n-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\textit{Et } A_{n-k}^{(k)} = A_{n-k}^{(k-1)} - \frac{b_{n-k}^{(k-1)} c_{n-k}^{(k-1)}}{a_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & ... & a_{1,n-k}^{(k)} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n-k,1}^{(k)} & ... & a_{n-k,n-k}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-k-1}^{(k)} & b_{n-k-1}^{(k)} \\ c_{n-k-1}^{(k)} & a_{n-k,n-k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$A_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & ... & a_{1,n-k-1}^{(k)} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n-k-1,1}^{(k)} & ... & a_{n-k-1,n-k-1}^{(k)} \end{bmatrix},\ b_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,n-k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n-k-1,n-k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$c_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{n-k,1}^{(k)} & ... & a_{n-k,n-k-1}^{(k)} \end{bmatrix},\ pour\ k = 1, ..., n-1$$

ii) les entrées diagonales de la matrice triangulaire inférieure (3.2.4) sont négatives, i.e.

$$\tilde{a}_{kk} < 0\ pour\ k = 1, ..., n \tag{3.2.7}$$

Preuve : Pour simplifier la notation, nous allons montrer l'équivalence des conditions (3.2.2) et (3.2.5) pour $n = 3$. D'après le théorème (3.2.2) pour $n = 3$, nous avons

$$-\Delta_1 = a_{11} < 0, \tag{3.2.8}$$

$$(-1)^2\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

$$(-1)^3\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$= a_{33} \det \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= a_{33} \det \left\{ \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \end{bmatrix} \right\} < 0$$

Par la condition i) du théorème (3.2.6) pour $n = 3$ entrées diagonales des matrices

$$A_2^{(1)} = A_2^{(0)} - \frac{b_2^{(0)}c_2^{(0)}}{a_{33}^{(0)}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

$$= \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{(2)} = A_1^{(1)} - \frac{b_1^{(1)}c_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \bar{a}_{11} - \frac{\bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} = \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}}.$$

Sont négatives. Notez que la condition (3.2.8) est équivalente aux conditions (3.2.9) à partir de $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, 3$ et les inégalités

$$\bar{a}_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{33}} < 0, \ \bar{a}_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}{a_{33}} < 0 \text{ et } \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} < 0,$$

sont satisfaites si et seulement si

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{et } \det \left\{ \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \end{bmatrix} \right\} < 0.$$

Pour montrer l'équivalence des conditions (3.2.5) et (3.2.7) noter que le calcul de la matrice $A_{n-1}^{(0)}$ par l'utilisation de (3.2.6) pour $k = 1$ est équivalente à la réduction à zéro des entrées $a_{j,n}$, $j = 1, ..., n-1$ de la matrice (3.2.3) par des opérations élémentaires sur les lignes puisque

$$A_{n-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{n,n}} \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

Notez que $-\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}} > 0$ pour $i = 1, ..., n-1$ et $-\frac{a_{n,i}a_{1n}}{a_{n,n}} > 0$ pour $i = 1, ..., n-1$ depuis $a_{n,n} < 0$ et $a_{i,j} \geq 0$ pour $i \neq j$.

Ainsi, la matrice $A_{n-1}^{(1)}$ est une matrice de Metzler. Poursuivant cette procédure après n étapes, on obtient la matrice triangulaire inférieure de Metzler (3.2.4). Par conséquent, les conditions (3.2.5) et (3.2.7) sont équivalentes.

Exemple 3.2.1 *Considérons le système positif (3.2.1) avec la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

Vérifions la stabilité asymptotique de ce système

Méthode 1 :

En calculant les mineurs principaux pour la matrice(3.2.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \\ \Delta_3 &= \det[-A] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème (3.2.2) *sont satisfaites, donc le système positif (3.2.1) avec la matrice (3.2.11) est asymptotiquement stable.*

Méthode 2 : *En calculant les entrées diagonales des matrices*

$$A_{n-k}^{(k)} \qquad \text{pour } k = 1, 2.$$

pour la matrice (3.2.11) définie dans le théorème (3.2.6), *nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
A_2^{(1)} &= A_2^{(0)} - \frac{b_2^{(0)} c_2^{(0)}}{a_{33}^{(0)}} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}. \\
A_1^{(2)} &= A_1^{(1)} - \frac{b_1^{(1)} c_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -2 + \frac{0.5}{0.5} = -1.
\end{aligned}$$

Les conditions (3.2.5) du théorème (3.2.6) *sont satisfaites et donc le système positif (3.2.1) avec la matrice (3.2.11) est asymptotiquement stable.*

Théorème 3.2.7 *[4](**Théorème de Lyapunov pour les systèmes positifs**)*
Le système positif (3.2.1) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale strictement positif P de telle sorte que la matrice $A^T P + PA$ est définie négative.

3.2.2 Cas discret :

Considérons le système linéaire à temps discret

$$x(k+1) = Ax(k). \tag{3.2.12}$$

Théorème 3.2.8 *(**stabilité asymptotique et polynôme caractéristique**)*
Le système positif (3.2.12) est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique $P_\lambda(A)$ sont positifs.

Théorème 3.2.9 *Le système positif (3.2.12) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les mineurs principaux $\hat{\Delta}_i$, $1, \cdots, n$ de la matrice $\hat{A} = I - A = [\hat{a}_{ij}]$ sont positifs, i.e.*

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_1 &= \hat{a}_{11} > 0, \\
\hat{\Delta}_2 &= \begin{vmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \\
&\vdots \\
\hat{\Delta}_n &= \det \left[\hat{A} \right] > 0.
\end{aligned}$$

Théorème 3.2.10 *Le système positif (3.2.12) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales de la matrice A sont inférieures à* 1.

Théorème 3.2.11 *[4](**Théorème de Lyapunov pour les systèmes positifs**)*
Le système positif (3.2.12) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale strictement positif P de telle sorte que la matrice $A^T PA - P$ est définie négative.

3.3 Stabilisation

Dans cette section, nous allons étudier la stabilisation des systèmes linéaire positifs.
Considérons le système

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{3.3.1}$$

Définition 3.3.1 *On appelle bouclage d'état linéaire (ou régulateur linéaire) du système (3.3.1) une loi de commande du type*

$$u = Kx,$$

où K matrice $m \times n$ est dite matrice de gain. Une telle loi est dite stabilisante si l'origine du système en boucle fermée

$$\dot{x} = (A + BK)x.$$

est asymptotiquement stable.

Définition 3.3.2 *On dit que (3.3.1) est complètement stabilisable si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0,\ \exists K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad tq : ||e^{(A+BK)t}|| \leq N_\varepsilon e^{-\varepsilon t},$$

ou encore

$$||e^{(A+BK)t} x_0|| \leq N_\varepsilon e^{-\varepsilon t} ||x_0||.$$

$e^{(A+BK)t} x_0 = x(t)$ *est solution de*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)\, x \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Pour (3.3.1) : $\forall \varepsilon > 0, \exists u(t) = Kx(t).\, (\exists K)$ tq :$\dot{x} = (A + BK)\, x$ est asymptotiquement stable avec un arbitraire (qui est ε).

Proposition 3.3.1 *Si le système (3.3.1) est complètement stabilisable alors il est stabilisable. La réciproque est fausse.*
Soit A tq $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda / \operatorname{Re} \lambda < 0\} \Rightarrow$ asymptotiquement stable et prenons le système (3.3.1) avec $B = 0$ i.e. pas de commande $(\dot{x} = Ax)$.
(3.3.1) est stabilisable : $||x(t)|| = ||e^{At}x_0|| \leq Ne^{-\varepsilon t}||x_0||$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\sigma(A + BK) = \sigma(A).$$

3.3.1 Positivité d'un système obtenu par retour d'état

Condition nécessaire : Pour la positivité

$$\dot{x} = (A + BK)x, \tag{3.3.2}$$

le système (3.3.2) est positif si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m,n}$ telle que $(A + BK)$ de Metzler.

Définition 3.3.3 *Un système linéaire LTI positif est positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $(A + BK)$ soit une matrice de Metzler stable.*

Exemple 3.3.1 *considérons le système positif LTI d'écrit par l'équation :*

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{3.3.3}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Testons la stabilité de ce système.
Calculons les valeurs propres de la matrice A :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

d'où : $\lambda = 0,\ \lambda = 2$ et $\lambda = 1$.
Comme A admet des valeurs propres positives,alors le système (3.3.3) est instable.

– *La question qui se pose maintenant, existe-il une matrice K, telle que $(A+BK)$ est de Metzler stable ?*

Soit

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

La matrice en boucle fermée résultante est alors donnée par

$$\begin{aligned} A+BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est clairement une matrice de Metzler stable.

On déduit donc que le système (3.3.3) est stabilisable.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion de stabilité des systèmes linéaires positifs pour les deux classes à temps continu et à temps discret, nous fournissons les conditions nécessaires et suffisantes ,en citant les différents types de stabilité avec une illustration par des exemples d'applications. Tous en basant sur la théorie de Lyapunov.

Nous avons aussi s'intéressé à la stabilisation de ces systèmes par retour d'état.

On fait la remarque que certaines propriétés connues pour les systèmes linéaires ne peuvent être appliquées pour les systèmes positifs du fait que la trajectoire d'état se situe entierement dans l'orthant non-négatif.

Bibliographie

[1] Panos J.Anasaklis and Anthony N.Michel "A Linear Systems primer " 2007 Birkhauser-L.C.control.

[2] D. BOUAGADA "Theorie de contrôle" cours pour M1 :MCO et L3 : CAS.

[3] D. BOUAGADA "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs ". Thèse de Doctorats d'état.

[4] L. Farina, S. Rinaldi, Positive linear Systems ,theory and applications,J.Wiley, New york 2000.

[5] Tadeusz Kaczorek, "New Stability Tests Of Positive $1D$ And $2D$ Linear Systems". Article-June 2011.

[6] Tadeusz Kaczorek, Positive And Stable Time-Varying ContIinuoustime Linear Systems And Electrical Circuits. Poznan University of technology Academic Journals.2015.

[7] C. LOBRY ET T. SARI, Introduction a la théorie du contrôle.