REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de find'études

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Master En Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

THEME :Spectre des extensions autoadjointes d'un opérateur symétrique

présenté par :

DOUBABA FOUZIA & TAHRI HOURIA

Soutenu le /05/2016

	Président	**M.A**	**U. MOSTAGANEM**
	Examinateur	**M.A**	**U. MOSTAGANEM**
Mme H.BENDAHMANE	**Encadreur**	**M.A**	**U. MOSTAGANEM**

Année Universitaire 2015 -2016

Table des matières

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à la construction puis à l'étude du spectre des extensions autoadjointes d'un opérateur symétrique. Nous nous proposons de revoir la méthode de J. Neumann utilisant la transformée de Cayley qui est le prélude à d'autres concepts qui sont d'actualité.

REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remerçions ALLAH le tout puissant de nous avoir offert la volonté et la force pour realiser ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à notre encadreur, **Mme.H.Bendahmane** pour son aide et ses conseils.

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements aux membres du jury **Mme. Ould Ali** (présidente), **Mme. Saidani** (examinatrice) qui nous ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Merci à nos professeurs de département de Mathématiques et Informatique pour leurs orientations, et tous nos enseignants du primaires jusqu'a l'université.

Enfin nous remerçions tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

INTRODUCTION

Dû à son importance dans l'étude de certains problèmes tels en mécanique quantique (voir [5], [8]), Sturm-Liouville (voir [7]) ; la théorie de l'extension d'un opérateur symétrique en un opérateur autoadjoint, ainsi que la description du spectre des ces extensions a pris une grande ampleur ces 20 à 30 dernières années. La méthode courament utilisée aujourd'hui est celle des triplets limites et leurs fonctions de Weil associées (voir par exemple [13], [14], [15], [2],[3]).

Ce mémoire présente le classique concept qui repose sur la théorie de J. Neumann pour la construction des extensions en passant par la transformée de Cayley d'un opérateur symétrique, puis quelques résultats relatifs au spectre des extensions auto-adjointes obtenues. Ce dernier se décompose comme suit ;

Dans le chapitre 1, sont résumés les principales notions de bases utilisées dans la construction et la description des extensions, l'accent est mis sur le spectre, en particulier celui d'un opérateur autoadjoint et d'un opérateur symétrique.

Le chapitre 2 est quant à lui consacré à la construction des extensions par la transformation de Cayley ainsi que les deux formules de Neumann.

Enfin, le chapitre 3 relate certains résultats démontrés qui permettent de decrire le spectre des extensions autoadjointes obtenues.

Il est à remarquer que les espace utilisés tout au long de ce travail, sont $\mathbb{C}-$hilbertiens.

Chapitre 1

Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce chapitre sont présentées les principales définitions et propriétés des opérateurs non bornés, fermés, symétriques et auto-adjoints, ainsi que la notion du spectre plus particulièrement celui des deux derniers opérateurs qui viennnent d'être cités.

1.1 Définitions des opérateurs non bornés

Définition 1.1.1 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur T dans H est une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D(T) \subset H$ et dont l'image est contenue dans H. On suppose par la suite que $D(T)$ est dense dans H, c'est à dire que $\overline{D(T)} = H$.*

– On appelle $G(T)$ graphe de l'opérateur T le sous-espace de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{(x,\ Tx) \text{ tel que } x \in D(T)\}.$$

– On appelle $N(T)$ noyau de l'opérateur T le sous-espace de H défini par :

$$N(T) = \{x \in D(T) \text{ tel que } Tx = 0\}.$$

– On appelle $R(T)$ image de l'opérateur T le sous-espace de H défini par :

$$R(T) = \{y \in H,\ \exists x \in D(T) :\ y = Tx\}.$$

– On note par $L(H) = L(H,\ H)$ l'ensemble des opérateurs dans H.

Définition 1.1.2 *Un opérateur linéaire T défini de H dans H est dit borné si et seulement si ;*

$$\exists c>0;\ \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall x\in H$$

Exemple 1.1.1 *1)L'opérateur,*

$$\begin{aligned} I: H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto I(x)=x \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire borné.
2) On considère dans $L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur T défini sur $D(T)=\{f\in L^2(\mathbb{R})/Tf\in L^2(\mathbb{R})\}$ par l'équation,

$$Tf=i\frac{df}{dx}.$$

T est un opérateur non-borné.

Définition 1.1.3 *Un opérateur $T\in L(H)$ est appelé isométrie si pour tout $x\in H$*

$$\|Tx\|=\|x\|,$$

ou bien

$$\forall\ x,\ y\in H\ \langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle$$

Définition 1.1.4 *Un opérateur $T\in L(H)$ est dit unitaire si T est une isométrie pour laquelle $R(T)=H$.*

Définition 1.1.5 *Deux opérateurs T et S sont dits égaux, et on note $T=S$, si*

$$D(T)=D(S)\ \text{ et }\ Tx=Sx\quad (i.e.)\quad G(T)=G(S)$$

L'opérateur S est une extension de l'opérateur T ou bien T est la restriction de S si

$$D(T)\subset D(S)\quad \text{et}\quad Tx=Sx,\ \forall\ x\in D(T)\qquad (i.e.)\ \ G(T)\subset G(S),$$

On écrit $T\subset S$.

Opérations algébriques :

–La somme

$(S+T)(x) = Sx + Tx$ avec

$$D(S+T) = D(S) \cap D(T).$$

–Le produit :

$(S.T)(x) = S(T(x))$ avec

$$D(S.T) = \{x \in D(T) \text{ tel que} : T(x) \in D(S)\}.$$

–Les lois usuelles d'associativité

$$(R+S)+T = R+(S+T),\ (RS)T = R(ST)$$

–Les lois de distributivité :

$$(R+S)T = RT+ST,\ T(R+S) \supset TR+TS.$$

Car il se peut que $(R+S)x \in D(T)$ même si Rx ou Sx n'est pas dans $D(T)$.

–Multiplication par scalaire :

Si $\alpha = 0$ Alors $D(\alpha T) = H$ et $\alpha T = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ Alors $D(\alpha T) = D(T)$ et $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ pour $x \in D(T)$.

1.2 Opérateurs fermés

Définition 1.2.1
1. *Un opérateur T définit dans un espace de Hilbert H est dit fermé si et seulement si son graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de $H \times H$, c'est à dire : $G(T) = \overline{G(T)}$.*
2. *L'opérateur T est dit fermable si $\overline{G(T)}$ représente le graphe d'un opérateur.*

Remarque 1.2.1 *Si T est un opérateur fermable, alors il existe d'aprés 2.de la définition 1.2.1 un opérateur $\overline{T}$ tel que $G\left(\overline{T}\right) = \overline{G(T)}$, ce dernier est unique et il est évident que $\overline{T}$ est fermé. Comme $G(T) \subset \overline{G(T)} = G\left(\overline{T}\right)$, on voit que $\overline{T}$ est une extension de T, c'est même la plus petite extension de T qu'on appelle "fermeture de T"*

Proposition 1.2.1

1. *On dit que T est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ convergente vers x telle que la suite des images $(Tx_n)_n$ converge vers y dans H, on a*

$$x \in D(T) \text{ et } y = Tx.$$

2. *Un opérateur T est fermable, si pour chaque suite : $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ pour laquelle la suite des images $(Tx_n)_n$ soit convergente on a,*

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = 0.$$

Proposition 1.2.2 *Si l'opérateur T est fermé, alors tout opérateur $(T-\lambda I)$ est fermé pour $\lambda \in \mathbb{C}$. De plus, si l'opérateur T est fermé et T^{-1}existe, alors T^{-1} est fermé.*

1.3 Adjoint d'un opérateur non-borné.

Définition 1.3.1 *Soit T un opérateur linéaire défini sur $D(T)$ tel que $\overline{D(T)} = H$. On définit l'opérateur adjoint $T^* : H \to H$ comme suit, on pose*

$$D(T^*) = \{y \in H \ / \ \exists\ h \in H : \ \langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ h\rangle\,,\ \forall x \in D(T)\}\,.$$

Alors, la relation $T^*y = h$ définit ainsi un opérateur comme suit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,,\ \forall x \in D(T),\ \forall y \in D(T^*).$$

On appelle T^* l'opérateur adjoint de T.

Théorème 1.3.1 *Soit T un opérateur non borné densément défini. Alors ;*

1. *si S est un opérateur non borné densément défini et TS est aussi densement défini alors on a $S^*T^* \subset (TS)^*$.*
2. *si S est borné alors $S^*T^* = (TS)^*$.*

Théorème 1.3.2 *Soint S et T deux opérateurs de H_1dans H_2*

1. *Si T est densement défini, alors on a $(aT)^* = \overline{a}T^*, \overline{a}$ étant le conjugué de $a \in \mathbb{C}^*$.*
2. *Si $T+S$ est densement défini, alors $T^* + S^* \subset (T+S)^*$*

3. Si S est borné et T dense dans H, alors on a $T^* + S^* = (T+S)^*$

Définition 1.3.2 *On dit qu'un opérateur T à domaine dense est autoadjoint si $T^* = T$, (i.e.): $D(T) = D(T^*)$ et $Tx = T^*x$, $\forall x \in D(T)$.*

Proposition 1.3.1 *Soient T, S deux opérateurs autoadjoints tels que $T \subset S$, alors $T = S$.*

Proposition 1.3.2 *Si T est un opérateur linéaire densement défini dans H pour lequel T^{-1} existe et $\overline{D(T^{-1})} = H$. Alors,*

$$\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$$

Théorème 1.3.3 *Pour chaque opérateur T à domaine $D(T)$ dense dans H, le complèment orthogonal de l'image est le noyau de l'adjoint (i.e.) :*

$$R(T)^{\perp} = N(T^*) \text{ et } \overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$$

si de plus $R(T)$ est fermé alors,

$$R(T) = N(T^*)^{\perp}$$

(i.e.) L'équation $Tx = y$ admet une solution x si et seulement si, $y \in N(T^*)^{\perp}$.

Preuve. Soit $z \in R(T)^{\perp}$, alors

$$\langle z,\ Tu \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Et on a,

$$\langle Tu,\ z \rangle = \langle u, T^*z \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

D'où,

$$T^*z = 0 \text{ c'est à dire } z \in N(T^*).$$

Soit $z \in N(T^*)$. Alors $T^*z = 0$ et,

$$\langle u, T^*z \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Et on a

$$\langle u, T^*z \rangle = \langle Tu,\ z \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Ce qui implique que

$$z \in R(T)^{\perp}$$

Si $R(T)$ est fermé alors : $R(T) = R(T)^{\perp\perp} = N(T^{*})^{\perp}$. □

Graphes et opérateur symétrique

Si H est un espace de Hilbert, alors $H \times H$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert en définissant le produit scalaire suivant, pour $(a, b)\,,\ (c, d) \in H \times H$ par ;

$$\langle (a, b)\,, (c, d) \rangle_{1} = \langle a, c \rangle + \langle b, d \rangle$$

En particulier la norme dans $H \times H$ donné par ;

$$\|(a, b)\|_{1}^{2} = \|a\|^{2} + \|b\|^{2}$$

A patir de ce dernier, on définit le produit scalaire suivant sur $D(T)$ comme suit ; pour tout $f,\, g \in D(T)$:

$$\begin{cases} \langle f, g \rangle_{D(T)} = \langle (f, T(f))\,, (g, T(g)) \rangle_{1} = \langle f, g \rangle + \langle Tf, Tg \rangle \\ \|f\|_{D(T)}^{2} = \|f\|^{2} + \|Tf\|^{2} \end{cases}$$

Puis à présent ;

$$J(a,\ b) = (-b,\ a)\ \ / (a,\ b) \in H^{2}$$

Alors J est un opérateur unitaire sur $H \times H$ et ;

$$J^{2}(a,\ b) = J.J(a,\ b) = J(-b,\ a) = -(a,\ b)$$

Donc $J^{2} = -I$

Si M est un sous-espace quelconque de $H \times H$. Alors $J^{2}M = -M$.

Théorème 1.3.4 *T est fermé si est seulement si $\left(D(T),\ \langle , \rangle_{D(T)} \right)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.3.5 *Tout opérateur borné est fermable. Un opérateur borné T est fermé si est seulement si $D(T)$ est fermé. Si T est borné alors $D\left(\overline{T}\right) = \overline{D(T)}$; $\overline{T}$ est une extension (d'opérateur borné) de T sur $\overline{D(T)}$.*

Théorème 1.3.6 *Un opérateur T est fermable si est seulement s'il admet une extension fermé.*

Théorème 1.3.7 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, alors :*

$$G(T^*) = [JG(T)]^{\perp}$$

Le supplémentaire orthogonal de $JG(T)$ dans $H \times H$. (Si $G(T^*)$ est connu, il est de même pour $D(T^*)$ et T^*).

Théorème 1.3.8 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, Alors T^* est un opérateur fermé. En particulier les opérateurs autoadjoints sont fermés.*

Théorème 1.3.9 *Si T est un opérateur fermé à domaine dense dans H, alors :*

$$H \times H = JG(T) \oplus G(T^*).$$

Théorème 1.3.10 *Si T un opérateur à domaine dense dans H, alors : $D(T^*)$ est dense dans H et $T^{**} = T$.*

Définition 1.3.3 *Un opérateur T à domaine dense est dit symétrique si $T \subset T^*$, (i.e). :*

$$D(T) \subset D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x;\ \forall x \in D(T)$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(T),\ \forall y \in D(T)\ \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle .$$

Exemple 1.3.1 *On considère l'opérateur T défini par l'équation : $Tf \ = if'$ avec $H = L^2\,[0,1]$ et $D(T) = \{f \in C_0\,[0,1] : f(0) = f(1) = 0\} \subset H^1$.*
Montrons que l'opérateur T est symètrique c'est à dire que

$$\forall\ f,\ g \in D(T):\ \ \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$$

on a

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 Tf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 if'\overline{g(x)}dx$$

[1]Cet ensemble est dense Dans H , (voir [12],[6])

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \left(i\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)\right) - i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\left(\overline{ig'(x)}\right)dx = \langle f, Tg\rangle\,.\end{aligned}$$

Donc, T est un opérateur symétrique.

Théorème 1.3.11 *Soit T un opérateur défini sur H dans H, si T est symétrique alors $\langle Tx,\ x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in D(T)$.*

Preuve. On a pour tout $x \in D(T)$;

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

□

Propriétiés 1.3.1

1. *Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque $D(T) \subset D(T^*)$ est dense.*
2. *Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T avec $T \subset T^{**} \subset T^*$.*
3. *Si T est un opérateur symétrique fermé alors $T = T^{**} \subset T^*$.*
4. *Si T est un opérateur autoadjoint alors $T = T^{**} = T^*$.*

Théorème 1.3.12 *Tout opérateur symétrique T est fermable, de plus $\overline{T}$ est aussi symétrique.*

Remarque 1.3.1 *C'est pourquoi, on peut souvent supposer que T est un opérateur symétrique fermé.*

1.4 Spectre et résolvante

Définition 1.4.1 (valeur propre) *Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé* valeur propre *de l'opérateur linéaire T s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$. L'ensemble ;*

$$E_\lambda = \{x \in D(T) : Tx = \lambda x.\}$$

est appelé sous-espace propre de l'opérateur T associé à λ.

Définition 1.4.2 *Soient* $T \subset L(H)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on appelle* spectre *de l'opérateur* T *l'ensemble :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T - \lambda I) \ \text{n'est pas inversible}\}$$

Lemme 1.4.1 *Si* λ *est une valeur propre de* T *alors* $\lambda \in \sigma(T)$

Preuve. Comme λ est une valeur propre de T alors

$$\exists\ x \neq 0_H \ \text{ tel que } Tx = \lambda x$$

d'où

$$\exists\ x \neq 0 : (T - \lambda)x = 0$$

Donc $ker\ (T - \lambda I\ ) \neq \{0_H\}$, c'est à dire que $(T - \lambda I\ )$ n'est pas injectif et donc pas bijectif.

□

Définition 1.4.3 (résolvante) *Soit* T *un opérateur à domaine dense dans* H. *L'opérateur* $\Re_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$*qui dépend du paramètre* λ *est appelé la résolvante de l'opérateur* T, *il est défini pour tout* λ *pour lequel* $(T - \lambda I)^{-1}$ *est défini dans* H *et y est borné.*

Remarque 1.4.1 λ *est dans ce cas appelé* "point régulier"*. L'ensemble des points réguliers est appelé* ensemble résolvant *et est défini comme suit ;*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \ \text{est inversible d'inverse borné}\}$$

Il est évident que $\rho(T) = \mathbb{C}/\sigma(T)$

Théorème 1.4.1 *L'application* $T - \lambda I : D(T) \longrightarrow R(T - \lambda I)$ *détermine un opérateur bijectif si et seulement si* λ *n'est pas une valeur propre de* T.

Preuve. On montre que si λ n'est pas une valeur propre de T, alors $T - \lambda I : D(T) \longrightarrow R(T - \lambda I)$ est bijectif . Par contraposée : si $T - \lambda I$ n'est pas bijectif, alors c'est une surjection par définition ;

$$\exists x_1, x_2 \in D(T)\,(x_1 \neq x_2) : (T - \lambda I)(x_1) = (T - \lambda I)(x_2)$$

et donc,

$$T(x_1 - x_2) = \lambda (x_1 - x_2)$$

Autrement dit ; en posant $x = x_1 - x_2$

$$\exists x \in D(T)\,(x \neq 0) : Tx = \lambda x \tag{1.4.1}$$

Ce qui signifie que λ est une valeur propre de T.

Inversment, Si λ est une valeur propre de T, alors la propriété 1.4.1 est vérifiée, se qui veut dire que ;

$$\exists x \in D(T)\,(x \neq 0) : (T - \lambda I)\,x = 0$$

$(T - \lambda I)$ n'est pas injectif et donc pas bijectif. □

Théorème 1.4.2 *Pour chaque deux points réguliers λ et μ de l'opérateur T, on a :*

$$\Re_\mu - \Re_\lambda = (\mu - \lambda)\Re_\mu \Re_\lambda$$

Cette équation est appelée la "relation de Hilbert".

En effet, on a :

$$\Re_\lambda h = \Re_\mu (T - \mu I)\Re_\lambda h$$

et aussi

$$\Re_\mu h = \Re_\mu (T - \lambda I)\Re_\lambda h$$

Et par soustraction on obtient :

$$\begin{aligned} \Re_\mu h - \Re_\lambda h &= \Re_\mu (T - \lambda I)\Re_\lambda h - \Re_\mu (T - \mu I)\Re_\lambda h \\ &= \Re_\mu T \Re_\lambda h - \lambda \Re_\mu \Re_\lambda h - \Re_\mu T \Re_\lambda h + \mu \Re_\mu \Re_\lambda h \\ &= (\mu - \lambda)\,\Re_\mu \Re_\lambda h. \end{aligned}$$

1.4.1 Classification du spectre

Définition 1.4.4 *On appelle,*

1. *spectre ponctuel de T, l'ensemble des valeurs propres de T, il est noté $\sigma_P(T)$.*

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists\, x \neq 0_H : \ Tx = \lambda x\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T - \lambda I) \ \textit{n'est pas injectif}\}$$

2. *spectre continu de T, l'ensemble noté par $\sigma_C(T)$ et défini comme suit,*

$$\sigma_C(T) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \ \textit{est injectif et } D(\Re_\lambda) = R\,(T - \lambda I) \ \textit{est densement défini} \\ \textit{mais non borné} \end{array} \right\}$$

3. *spectre résiduel de T, l'ensemble noté par $\sigma_R(T)$ et défini comme suit,*

$$\sigma_R(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ est injectif et } \overline{D(\Re_\lambda)} = \overline{R(T - \lambda I)} \neq H, \text{ borné ou pas } \right\}$$

Le spectre de T est la réunion disjointes des trois ensembles ;

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T).$$

Remarque 1.4.2 *Si H est de dimension finie, alors $\sigma(T) = \sigma_P(T)$ seulement.*

1.4.2 Spectre et résolvante des opérateurs autoadjoints et symétriques

Théorème 1.4.3 *Le spectre d'un opérateur autoadjoint $(T, D(T))$ est toujours réel (i,e) : $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\lambda = a + ib \,/\, a, b \in \mathbb{R}$. On montre que pour $\lambda \in \mathbb{C} \diagup \mathbb{R}$ $(\operatorname{Im} \lambda = b \neq 0)$; l'opérateur $(T - \lambda I)$ est bijectif d'inverse borné.

- $(T - \lambda I)$ est injectif. On a pour tout $x \in D(T)$

$$\begin{aligned}
\| (T - \lambda I)\, x \|^2 &= \| (T - (a + ib)\, I)\, x \|^2 = \| (T - aI)\, x - ibx \|^2 \\
&= \langle (T - aI)\, x - ibx, (T - aI)\, x - ibx \rangle \\
&= \langle (T - aI)\, x, (T - aI)\, x \rangle - ib \langle x, (T - aI)\, x \rangle + ib \langle (T - aI)\, x, x \rangle + b^2 \langle x, x \rangle \\
&= \| (T - aI)\, x \|^2 + b^2 \| x \|^2 \geq b^2 \| x \|^2
\end{aligned}$$

implique que

$$\| (T - \lambda I)\, x \| \geq | b | \| x \| \tag{1.4.2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\| (T - \lambda I)\, x \| \neq 0 \textit{ pour } x \neq 0 \\
&\Longrightarrow (T - \lambda I)\, x \neq 0 \textit{ pour } x \neq 0
\end{aligned}$$

- $R(T - \lambda I)$ est un fermé : soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $R(T - \lambda I)$ convergente vers un élément $y \in H$. On montre que $y \in R(T - \lambda I)$.

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in R(T - \lambda I)$$

Alors,

$$\exists\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T) : \ y_n = (T - \lambda I)\, x_n$$

de (1.4.2). On déduit pour $n, m \in \mathbb{N}$ que

$$\| y_m - y_n \| = \| (T - \lambda I)(x_m - x_n) \| \geq | b | \| x_m - x_n \| \tag{1.4.3}$$

or, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy dans H, de (1.4.3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans H.

Comme T est fermé et $(x_n, Tx_n) = (x_n, y_n + \lambda x_n)$ converge vers $(x, y + \lambda x)$. On déduit que $x \in D(T)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x) = y + \lambda x$$

Enfin,

$$T(x) = y + \lambda x \Longrightarrow y = (T - \lambda I)x \in R(T - \lambda I)$$

- $R(T - \lambda I)$ est danse dans H c'est à dire $\overline{R(T - \lambda I)} = H$

On montre pour cela le seul élément orthogonal à $R(T - \lambda I)$ est l'élément nul. Soit $y \in R(T - \lambda I)^{\perp}$

$$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad D(T) : \langle (T - \lambda I)x, y\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \langle Tx, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \overline{\lambda} y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \end{aligned}$$

Il s'en suit que $y \in D(T^*) = D(T)$ et que $T^* y = Ty = \overline{\lambda} y$

Enfin, de (1.4.2)on a, en posant $\bar{\lambda}$ à la place de λ :

$$0 = \| \left(T - \overline{\lambda} I\right) y \| \geq | b | \| y \| \Longrightarrow \| y \| = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Conclusion : $R(T - \lambda I)$ est dense dans H et comme c'est un fermé il découle que $R(T - \lambda I) = H$ et que $(T - \lambda I)$ est inversible.

Pour finir

$$(T - \lambda I)x = y; x \in D(T) \Longleftrightarrow x = (T - \lambda I)^{-1} y$$

En remplaçant dans(1.4.2), il advient que

$$\forall y \in H : \| (T - \lambda I)^{-1} y \| \leq \frac{1}{| b |} \| y \|$$

c'est à dire $(T - \lambda I)^{-1}$ est borné et $\lambda \in \rho(T)$. □

Théorème 1.4.4 *Le spectre d'un opérateur autoadjoint est un ensemble fermé.*

Preuve. Sera proposé en corollaire (corollaire 3.1.1) au chapitre 3. □

Théorème 1.4.5 *Soit T un opérateur symétrique et λ un élément du spectre résiduel de T. Alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.*

Preuve. soit $\lambda \in \sigma_R(T)$. Alors $R(T-\lambda I)$ n'est pas dense dans H et donc, $\exists\, y \in R(T-\lambda I)^{\perp}$ non nul vérifiant,

$$\begin{aligned} \forall x &\in D(T) : \langle (T-\lambda I)x, y\rangle = \left\langle x, \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) y\right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) y = 0 \\ &\Rightarrow T^* y = \overline{\lambda} y \text{ } et \text{ } y \neq 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.1 *Si T est autoadjoint, alors $\sigma_R(T) = \emptyset$.*

Preuve. On a déja vu que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Il s'en suit que si $\lambda \in \sigma_R(T)$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.
D'aprés le théorème précédent $\overline{\lambda} = \lambda \in \sigma_P(T^*) = \sigma_P(T)$
c'est à dire λ est une valeur propre de T ce qui est impossible car $\sigma_R(T) \cap \sigma_P(T) = \emptyset$. □

Théorème 1.4.6 *Le nombre λ est une valeur propre de l'opérateur autoadjoint T si et seulement si, $\overline{R(T-\lambda I)} \neq H$.*

Preuve. Si $\overline{R(T-\lambda I)} \neq H$,alors $\lambda \in \sigma(T) = \sigma_C(T) \cup \sigma_P(T)$ et comme λ ne peut pas appartenir à $\sigma_C(T)$ (voir définition), on déduit que $\lambda \in \sigma_P(T)$.
Inversement, supposons que λ est une valeur propre de T, il existe alors $x \neq 0$:

$$(T-\lambda I)x = 0$$

mais dans ce cas,

$$\forall y \in D(T) : \langle (T-\lambda I)x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda I)^* y\rangle = \langle x, (T-\lambda I) y\rangle = 0$$

et donc $\overline{R(T-\lambda I)} \neq H$. □

Théorème 1.4.7 *Soit λ une valeur propre d'un opérateur symétrique T. Alors, $\lambda \in \mathbb{R}$ et ,*

$$m \leq \lambda \leq M \text{ où } m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, \; M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$$

De plus, les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux les uns aux autres

Preuve. Soit λ une valeur propre de T et $y \neq 0$ son vecteur propre associé. On pose $x = \dfrac{y}{\| y \|}$. Il évident que $\| x \|= 1$ et que x est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre λ. De plus,

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda$$

comme $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et évidement

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle = \lambda \leq \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \Longrightarrow m \leq \lambda \leq M$$

Soient à présent λ, μ deux valeurs propres distinctes de T et x_λ, x_μ leurs vecteurs propres respectifs. On a

$$\begin{aligned} \lambda\langle x_\lambda, x_\mu\rangle & = \langle \lambda x_\lambda, x_\mu\rangle = \langle Tx_\lambda, x_\mu\rangle = \langle x_\lambda, Tx_\mu\rangle = \mu\langle x_\lambda, x_\mu\rangle \\ & \Longrightarrow (\lambda - \mu)\langle x_\lambda, x_\mu\rangle = 0 \\ & \Longrightarrow \langle x_\lambda, x_\mu\rangle = 0 \text{ puisque } \lambda \neq \mu \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.2 *Pour tout opérateur symétrique T ; $\sigma_P(T) \subset \mathbb{R}$.*

Théorème 1.4.8 *Soit T un opérateur symétrique. Alors $\sigma_C(T) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons que $\lambda \in \sigma_C(T)$, alors $R(T - \lambda I) = H$. Un raisennement analogue au théorème(1.4.3) permet de conclure que

$$\forall x \in D(T) : \| (T - \lambda I)x \| \geq |b| \| x \|$$

avec $\lambda = a + ib$ / $a, b \in \mathbb{R}$ et encore que $(T - \lambda I)$ est inversible d'inverse borné pour $b \neq 0$ ce qui contredit $\lambda \in \sigma_C(T)$. D'où forcement $b = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Remarque 1.4.3 *On comprend de ce qui précède que seul le spectre résiduel d'un opérateur symétrique peut contenir des éléments non-réels.*

Chapitre 2

Extension d'un opérateur symétrique

Ce chapitre traite de la construction des extensions d'un opérateur symétrique.

Rappel : Si B est une extension d'un opérateur symétrique T alors : $T \subset B$ et $B^* \subset T^*$ mais si B est un opérateur symétrique : $B \subset B^*$ donc

$$T \subset B \subset B^* \subset T^*$$

(i.e.) chaque extension symétrique d'un opérateur T est une restriction de l'opérateur T^*.

2.1 Espaces de défaut d'un opérateur symétrique

Définition 2.1.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. On note*

$$R(T - \lambda I) = R_\lambda \text{ et } R(T - \overline{\lambda} I) = R_{\overline{\lambda}}$$

R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont deux sous-espaces de H et on note par $\aleph_\lambda = H \ominus R_\lambda$, $\aleph_{\overline{\lambda}} = H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ les compléments orthogonaux de R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$, ces derniers sont appelé les espaces de défaut de l'opérateur T.

Proposition 2.1.1 *Les espaces de défaut $\aleph_\lambda$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$sont les espaces de solutions de l'opérateur T^* associés aux valeurs propres $\overline{\lambda}$ et λ respectivement.*

Preuve. Si $x \in \aleph_\lambda$ alors pour chaque vecteur $y \in D(T)$, on a :$\langle Ty - \lambda y, x\rangle = 0$, donc;

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^* x\rangle$$

Alors,

$$\langle y, T^*x\rangle = \langle y, \overline{\lambda}x\rangle$$

Et par la définition de l'opérateur T^*

$$x \in D(T^*) \ \ et \ T^*x = \overline{\lambda}x$$

Si, inversement, l'équation $T^*x = \overline{\lambda}x$ est vérifiée, alors pour un $y \in D(T)$ arbitraire on a :

$$\langle y, T^*x\rangle = \langle y, \overline{\lambda}x\rangle$$

Alors,

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, \overline{\lambda}x\rangle$$

Donc :

$$\langle Ty - \lambda y, x\rangle = 0 \ (i.e) \ x \in \aleph_\lambda$$

□

2.2 Transformation de CAYLEY

Définition 2.2.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. L'opérateur :*

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda}I)^{-1}$$

est appelé la transformation de CAYLEY de l'opérateur T.

Cette définition a un sens car : $\overline{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de T donc $(T - \overline{\lambda}I)^{-1}$ existe.

Proposition 2.2.1
1. *La transformation de CAYLEY V d'un opérateur symétrique T est un opérateur isométrique avec $D(V) = R_{\overline{\lambda}}$ et $R(V) = R_\lambda$.*
2. *L'ensemble de $Vy - y$ (ou $y - Vy$) tel que $y \in D(V)$ est dense dans H.*
3. *Chaque opérateur V qui vérifie la $2^{ème}$ condition est la transformation de CAYLEY d'un opérateur symétrique $T = \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)(I - V)^{-1}$.*

Théorème 2.2.1 *Soient T_1, T_2 deux opérateurs symétriques et V_1, V_2 respectivement leurs transformation de CAYLEY. Alors T_2 est une extension de T_1 si et seulement si V_2 est une extension de V_1.*

Remarque 2.2.1 *De ce théorème, le problème de l'extension d'un opérateur symétrique T se réduit au problème de l'extension d'un opérateur isométrique qui est sa transformation de CAYLEY.*

Théorème 2.2.2 *Un opérateur symétrique T est fermé si et seulement si sa transformation de CAYLEY V est une isométrie fermée (c'est le cas si et seulement si $R_{\overline{\lambda}}$et R_{λ}sont fermés).*

2.2.1 Domaine de définition d'un opérateur adjoint

Définition 2.2.2 *On dit que les sous-espaces $M_1,\ M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants,*
Si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ pour $x_k \in M_k$ et $k = \overline{1,n}$ alors :

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

– *Si les sous-espaces $M_1,\ M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants, il est possible de former leurs somme directe $M_1 \oplus\ M_2 \oplus .... \oplus M_n$ alors ;*
chaque $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n$ peut être représenté d'une façon unique sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

tel que $x_k \in M_k$ et $k = \overline{1,n}$.
– *S'il existe une autre représentation $x = x_1' + x_2' + ... + x_n'$ tel que $x_k' \in M_k$ et $k = \overline{1,n}$, donc ;*

$$0 = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') + ... + (x_n - x_n')$$

avec $x_k - x_k' \in M_k$ et $k = \overline{1,n}$.
Mais $M_1,\ M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants alors ;
$(x_k - x_k') = 0$ donc $x_k = x_k'$ pour $k = \overline{1,n}$.

Théorème 2.2.3 *Si T est un opérateur symétrique fermé, alors $D(T), \aleph_{\overline{\lambda}}, \aleph_{\lambda}$ sont linéairement indépendants et :*

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\lambda}.$$

Preuve. Montrons l'indépendance linéaire :

Soit $x+y+z=0$ tel que $x \in D(T)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$, $z \in \aleph_{\lambda}$.

Appliquant l'opérateur $(T^{*}-\overline{\lambda}I)$ on obtient ;

$$(T^{*}-\overline{\lambda}I)(x+y+z)=0$$

Donc :

$$Tx+\lambda y+\overline{\lambda}z-\overline{\lambda}x-\overline{\lambda}y-\overline{\lambda}z=0$$

Alors

$$(T-\overline{\lambda}I)x+\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y=0$$

Mais $(T-\overline{\lambda}I)x \in R_{\overline{\lambda}}$, et $\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$ et on sait que $R_{\overline{\lambda}}$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont orthogonaux donc $(T-\overline{\lambda}I)x+\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y=0$ est possible seulement si $(T-\overline{\lambda}I)x=0$ et $\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y=0$.

Donc $x=0$ et $y=0$ ($x=0$ car $\overline{\lambda}$ est non-réel ne peut pas être une valeur propre de T qui est symétrique), et aussi $z=0$ car

$$x+y+z=0, x=0 \text{ et } y=0 \text{ impliquent } z=0.$$

(*) Montrons que

$$D(T^{*})=D(T)\oplus\aleph_{\overline{\lambda}}\oplus\aleph_{\lambda}$$

1-On a $D(T)$, $\aleph_{\overline{\lambda}}$, $\aleph_{\lambda}$ sont inclus dans $D(T^{*})$ donc $D(T)\oplus\aleph_{\overline{\lambda}}\oplus\aleph_{\lambda}\subset D(T^{*})$

2-Soit $u \in D(T^{*})$. Montrons que u peut être représenté sous la forme

$$u=x+y+z$$

où $x \in D(T)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$, $z \in R_{\overline{\lambda}}$.

Comme T est fermé alors $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé. Sachant que$\aleph_{\lambda}$ est son complément orthogonal ; on peut écrire

$$R_{\overline{\lambda}}\oplus\aleph_{\overline{\lambda}}=H$$

Chaque $\upsilon \in H$ peut alors être représenté sous la forme

$$\upsilon=\upsilon'+\upsilon'' \text{ où } \upsilon' \in R_{\overline{\lambda}} \text{ et } \upsilon'' \in \aleph_{\overline{\lambda}}$$

Sachant que les éléments de $R(T^* - \overline{\lambda}I)$ décrivent l'image de tous les élements de $D(T^*)$. On essaye de représenter υ sous forme

$$\upsilon = (T^* - \overline{\lambda}I)u$$

$\upsilon^{'} \in R_{\overline{\lambda}}$ alors ;

$$\upsilon^{'} = (T - \overline{\lambda}I)x \quad \text{où} \quad x \in D(T).$$

Posant $\upsilon^{''} = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y, \; y \in \aleph_{\lambda}$. On obtient

$$(T^* - \overline{\lambda}I)u = (T - \overline{\lambda}I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y$$

Et pour $T^*y = \lambda y, \; T^*x = Tx$ (car $x \in D(T)$)

$$\begin{aligned}(T^* - \overline{\lambda}I)u &= T^*x - \overline{\lambda}x + T^*y - \overline{\lambda}y \\ &= (T^* - \overline{\lambda}I)x + (T^* - \overline{\lambda}I)y \\ &= (T^* - \overline{\lambda}I)\,(x+y)\end{aligned}$$

Donc

$$(T^* - \overline{\lambda}I)\,(u - x - y) = 0$$

On pose

$$z = u - x - y$$

alors $z \in \aleph_{\lambda}$ et

$$u = x + y + z$$

où $x \in D(T), \; y \in \aleph_{\overline{\lambda}}, \; z \in \aleph_{\lambda}$ ce qui nous donne

$$T^*u = Tx + \lambda y + \overline{\lambda}z$$

$\square$

Corollaire 2.2.1 *Un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si* $\aleph_{\lambda} = \{0\}\,, \; \aleph_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ *dans ce cas* $D(T) = D(T^*)$.

Formule de Neumann

On a $D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\lambda}$, pour $\lambda = -i$ on obtient :

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_i \oplus \aleph_{-i}$$

cette formule est appelée : **"formule de Neumann"**. Chaque $x \in D(T^*)$ a la représentation unique :

$$x = x^0 + x^- + x^+ \text{ où } x^0 \in D(T),\ x^- \in \aleph_i,\ x^+ \in \aleph_{-i}$$

Montrons que ;

$$\operatorname{Im}\langle T^*x, x\rangle = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2$$

$$\begin{aligned}
\langle T^*x, x\rangle &= \left\langle Tx^0 - ix^- + ix^+, x^0 + x^- + x^+\right\rangle \\
&= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^0\right\rangle + \left\langle Tx^0, x^- + x^+\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^- + x^+\right\rangle
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\left\langle Tx^0, x^- + x^+\right\rangle = \left\langle x^0, T^*\left(x^- + x^+\right)\right\rangle = \left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle T^*x, x\rangle &= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^0\right\rangle + \left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle - i\left\|x^-\right\|^2 + i\left\|x^+\right\|^2 \\
&\quad -i\left\langle x^-, x^+\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle \\
&= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + 2\operatorname{Re}\left[\left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle\right] + i\left(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\operatorname{Im}\langle T^*x, x\rangle = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2$$

On décompose $D(T^*)$ en trois sous-ensembles : ε^+, ε^-, ε^0 tel que :
$\operatorname{Im}\langle T^*x, x\rangle > 0,\ < 0,\ = 0$ respectivement donc : chaque $x \in D(T^*)$ est dans ε^+ ou ε^-ou ε^0.

Corollaire 2.2.2 $D(T) \subset \varepsilon^0,\ \aleph_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\},\ \aleph_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$.

Preuve. Pour $x \in D(T)$: $x^- = x^+ = 0$ donc :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = 0$$

Donc $x \in \varepsilon^0$.

Pour $x \neq 0$:

Si $x \in \aleph_i$ donc $x^0 = x^+ = 0$ donc $x = x^-$. Alors :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = -\left\|x^-\right\|^2 \prec 0$$

Donc $x \in \varepsilon^- \subset \varepsilon^- \cup \{0\}$.

Si $x \in \aleph_{-i}$ donc $x^0 = x^- = 0$ donc $x = x^+$. Alors :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = \left\|x^+\right\|^2 \succ 0$$

Donc $x \in \varepsilon^+ \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$.

Enfin $0 \in D(T)$, $0 \in \varepsilon^- \cup \{0\}$, $0 \in \varepsilon^+ \cup \{0\}$.

Donc $D(T) \subset \varepsilon^0$, $\aleph_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\}$, $\aleph_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$. □

Proposition 2.2.2 *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors les espaces de défaut $\aleph_{-i}$, $\aleph_i$ de l' opérateur T et $\aleph'_{-i}$, $\aleph'_i$ de l'opérateur $S = \alpha T + \beta I$ ont les mêmes dimensions.*

Preuve. On a : $D(T) = D(S)$. Et aussi :

$$\begin{aligned} \langle S^* x, x\rangle &= \langle (\alpha T + \beta I)^* x, x\rangle \\ &= \langle \alpha T^* + \beta x, x\rangle \\ &= \alpha \langle T^* x, x\rangle + \beta \langle x, x\rangle, \end{aligned}$$

et

$$\beta \langle x, x\rangle = \beta \|x\|^2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$\operatorname{Im}\langle S^* x; x\rangle = \alpha \left(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2\right),$$

et $\alpha > 0$ donc ε^+, ε^- sont les mêmes pour les deux opérateurs T et S et $\dim \aleph_i = \dim \aleph'_i$ et $\dim \aleph_{-i} = \dim \aleph'_{-i}$. □

Théorème 2.2.4 *Pour chaque nombre complexe λ du demi-plan supérieur :*

$$\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i} \qquad et \qquad \dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_{i}$$

Preuve. On pose : $\lambda = a + ib$ et λ dans le demi-plan supérieur donc : $b > 0$, on note par $\aleph_i^{'}$ et$\aleph_{-i}^{'}$ les deux espaces de défaut de l'opérateur :

$$S = b^{-1}(T - aI)$$

Pour

$$\begin{aligned} x &\in \aleph_i^{'} \Leftrightarrow x \in D(S^*) \ \ telque \ S^* x = -ix \\ &\Leftrightarrow \ x \in D(S^*) \ \ telque \ b^{-1}(T^* - aI)x + ix = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x \in D(T^*) \ \ telque \ b^{-1}(T^* x - ax + ibx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x \in D(T^*) \ \ telque \ b^{-1}(T^* x - (a - ib)x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x \in D(T^*) \ \ telque \ b^{-1}\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x \in D(T^*) \ \ telque \ T^* x = \overline{\lambda} x \\ &\Leftrightarrow \ x \in \aleph_{\lambda}. \end{aligned}$$

Donc ;

$$\aleph_i^{'} = \aleph_{\lambda}.$$

De la même façon on montre que $\aleph_{-i}^{'} = \aleph_{\overline{\lambda}}$.
Et de la proposition précédente, les opérateurs T et $S = b^{-1}(T - aI) = b^{-1}T - b^{-1}aI$ où $b \succ 0$ et $b^{-1}a \in \mathbb{R}$ ont les mêmes indices de défaut, c'est à dire $\dim \aleph_i = \dim \aleph_i^{'}$ et $\dim \aleph_{-i} = \dim \aleph_{-i}^{'}$, en résumé

$$\dim \aleph_i = \dim \aleph_i^{'} = \dim \aleph_{\lambda} \ et \ \dim \aleph_{-i} = \dim \aleph_{-i}^{'} = \dim \aleph_{\overline{\lambda}},$$

donc

$$\dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_i \ \ et \ \dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i}.$$

□

Les indices de défaut On pose : $m = \dim \aleph_i$, $n = \dim \aleph_{-i}$, $m,\ n$ sont appelés les indices de défaut de l'opérateur T.

Du théorème précédent :$m = \dim \aleph_\lambda, n = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}$ si $Im\lambda > 0$.

Proposition 2.2.3 *Un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si et seulement si $m = 0$ et $n = 0$.*

Théorème 2.2.5 *Si T est un opérateur symétrique fermé et si S est un opérateur borné, hermitien et défini sur toute H alors, les deux opérateurs T et $T + S$ ont les mêmes indices de défaut.*

Preuve. On a : $(T + S)^* = T^* + S$ donc :

$$D\left((T + S)^*\right) = D\left(T^*\right),$$

et pour $x \in D\left(T^*\right)$:

$$\begin{aligned} \langle (T + S)^* x, x\rangle &= \langle (T^* + S) x, x\rangle \\ &= \langle T^*x, x\rangle + \langle Sx, x\rangle \end{aligned}$$

et tant que $\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ alors :

$$\operatorname{Im} \langle (T + S)^* x, x\rangle = \operatorname{Im} \langle T^*x, x\rangle .$$

Donc ε^+ des opérateurs T et $T + S$ coïncide et aussi ε^- donc de la proposition 2.2.2 : T et $T + S$ ont les même indices de défaut. □

2.2.2 Construction de l'extension d'opérateurs symétriques

Soit T un opérateur symétrique fermé et soit $\widetilde{T}$ une extension symétrique fermée de T .On note par V et $\widetilde{V}$ les transformations de CAYLEY de T et $\widetilde{T}$ respectivement. On a : $V \subset \widetilde{V}$ alors ;

$$D\left(V\right) \subset D(\widetilde{V})\ et\ R\left(V\right) \subset R(\widetilde{V}).$$

On pose

$$P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V)\ et\ Q = R(\widetilde{V}) \ominus R(V),$$

donc ;

$$P \perp D(V) = R_{\overline{\lambda}} \ et \ Q \perp R(V) = R_{\lambda},$$

alors $P \subset H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ donc $P \subset \aleph_{\overline{\lambda}}$ et

$Q \subset H \ominus R_{\lambda}$ donc $Q \subset \aleph_{\lambda}$.

Définissant l'opérateur U par :

$$U : x \to Ux = \widetilde{V}x \text{ pour } x \in P,$$

tant que $\widetilde{V} : D(\widetilde{V}) \ \to R(\widetilde{V})$ est une isométrie alors $\widetilde{V} : P \ \to Q$ est aussi une isométrie et $U : P \to Q$ l'est aussi.

Inversement

On suppose un opérateur isométrique

$U : P \subset \aleph_{\overline{\lambda}} \to Q \subset \aleph_{\lambda}$ donné ($P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V)$). Donc ;

$$D(\widetilde{V}) = P \oplus D(V)$$

Si on pose pour $y \in D(V)$; $z \in P$; $\widetilde{V}(y+z) = Vy + Uz$ on obtient un opérateur isométrique $\widetilde{V}$ qui représente une extension de V et par conséquent $\widetilde{V}$ est la transformation de CAYLEY d'une certaine extension symétrique fermée de l'opérateur T.

Construction de T (à l'aide de U)

De la proposition concernant la transformation du CAYLEY (chaque opérateur isométrique V qui vérifie la $2^{ème}$ condition, est la transformation de CAYLEY de certain opérateur symétrique),

$$\widetilde{T} = (\lambda I - \overline{\lambda}\widetilde{V})(I - \widetilde{V})^{-1} \ \text{ d'où } D(\widetilde{T}) = R(I - \widetilde{V}),$$

donc pour $y + z \in D(\widetilde{V}), \ x' \in D(\widetilde{T})$,

$$x' = (y+z) - \widetilde{V}\,(y+z) = y + z - (Vy + Uz)$$

avec $\widetilde{V} = V$ sur $D(V), \ y \in D(V), \ z \in P$.

Posant ;

$$x = y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\widetilde{x} \text{ tel que : } \widetilde{x} \in D\,(T)\,,$$

$D(\widetilde{T})$ consiste en tous les vecteurs de la forme

$$x^{'} = x + z - Uz \text{ tel que } x \in D\left(T\right),\ z \in P,\ Uz \in Q.$$

Et tant que : $\widetilde{T} \subset T^{*}$ où $z \in \aleph_{\overline{\lambda}}, Uz \in \aleph_{\lambda}$ il découle que

$$\widetilde{T}x^{'} = Tx + \lambda z - \overline{\lambda}Uz,$$

et de la définition de $\widetilde{T}$, ces espaces de défaut sont donnés par ;

$$\aleph_{\overline{\lambda}}^{'} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \ et \ \aleph_{\lambda}^{'} = \aleph_{\lambda} \ominus Q.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.2.6 *chaque extension symétrique fermé $\widetilde{T}$ d'un opérateur symétrique fermé T est déterminée par un certain opérateur isométrique U tel que $D(U) = P$; un sous espace fermé de $\aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q = R(U)$ est un sous espace fermé de $\aleph_{\lambda}$. Et*

$$\begin{aligned} D(\widetilde{T}) &= \left\{x^{'} :\ x^{'} = x + z - Uz \text{ tel que } x \in D\left(T\right),\ z \in P\right\} \\ &= D(T) \oplus \left(I - U\right) P \end{aligned}$$

avec ;

$$\widetilde{T}x^{'} = Tx + \lambda z - \overline{\lambda}Uz$$

Inversement : *Pour chaque opérateur U avec les formules ci-dessus détermine un extension symétrique fermée $\widetilde{T}$ de l'opérateur T, ses espaces de défaut sont :*

$$\aleph_{\overline{\lambda}}^{'} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \ et \ \aleph_{\lambda}^{'} = \aleph_{\lambda} \ominus Q.$$

Remarque 2.2.2 *Pour $\lambda = -i$, on obtient la $2^{ème}$ formule de Neuman.*

Proposition 2.2.4 *Une extension $\widetilde{T}$ de T est autoadjointe si et seulement si,*

$$\aleph_{\overline{\lambda}}^{'} = \{0\},\ \aleph_{\lambda}^{'} = \{0\}$$

(i.e.) *Si et seulement si $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q = \aleph_{\lambda}$.*

Donc pour que l'opérateur U existe, il est nécessaire et suffisant que $\aleph_{\lambda}$, $\aleph_{\overline{\lambda}}$ aient la même dimension.(i.e.) *si et seulement si :*

$$P = \aleph_{\overline{\lambda}} \ et \ Q = \aleph_{\lambda}$$

Théorème 2.2.7 *Une extension $\widetilde{T}$ est autoadjointe si et seulement si ;*

$$D(U) = \aleph_{\overline{\lambda}} \text{ et } R(U) = \aleph_{\lambda}.$$

Théorème 2.2.8 *Un opérateur T admet une extension autoadjointe $\widetilde{T}$ si et seulement si $\aleph_{\overline{\lambda}}$, $\aleph_{\lambda}$ ont la même dimension (i.e.) ces indices de défaut sont égaux.*

Chapitre 3

Spectre d'extension autoadjointe d'opérateur symétrique

Ce dernier chapitre met en évidence certains résultats décrivants le spectre des extensions autoadjointes obtenues par la méthode présentée dans le chapitre précédent.

3.1 Domaine de régularité et noyau spectral d'un opérateur

Définition 3.1.1 *Un nombre λ est appelé* point de type régulier *de l'opérateur T s'il existe $k = k(\lambda) > 0$ tel que*

$$\forall x \in D(T) : \quad \| (T - \lambda I)\, x \| \geq k \| x \|$$

autrement dit $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné mais pas necessairement défini sur tout H.
L'ensemble des points de type régulier de l'opérateur T est appelé "domaine de régularité" *que l'on note $\Gamma(T)$.*
Il s'en suit que,

1. *λ est un point régulier de $T \Rightarrow \lambda$ est un point de type régulier de T.*
   En effet, si λ est un point régulier, alors $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné dans tout H.
2. *Les valeurs propres de T ne peuvent pas être des points de type régulier (car $(T - \lambda I)$ n'est pas injectif et donc $(T - \lambda I)^{-1}$ ne peut pas être défini).*

Remarque 3.1.1 *Si λ est un point de type régulier, alors $(T-\lambda I)$ est injectif. Supposons le contraire. Alors*

$$\exists x \in D(T): \ x \neq 0 \ \text{et} \ (T-\lambda I)x = 0$$

mais alors,

$$0 = \| 0 \| = \| (T-\lambda I)x \| \geq k \| x \|$$

et comme $k > 0$, alors $\| x \| = 0$ c'est à dire $x = 0$ ce qui est une contradiction.
Puisque $(T-\lambda I)$ est injectif, on peut définir l'opérateur $(T-\lambda I)^{-1}$ sur

$$D\left((T-\lambda I)^{-1}\right) = R\left((T-\lambda I)\right).$$

Et alors

$$\forall \ y \in R(T-\lambda I): y = (T-\lambda I)x \Leftrightarrow x = (T-\lambda I)^{-1} y$$

et

$$\| (T-\lambda I)x \| \geq k \| x \|$$

donne

$$\| y \| \geq k \| (T-\lambda I)^{-1} y \| \Rightarrow \| (T-\lambda I)^{-1} y \| \leq \frac{1}{k} \| y \|$$

ce qui exprime que $(T-\lambda I)^{-1}$ est borné (sur $R(T-\lambda I)$).

Définition 3.1.2 (Opérateur régulier) *Un opérateur symétrique T est dit* "régulier" *si chaque point réel est un point de type régulier.*

Définition 3.1.3 *Le spectre d'un opérateur autoadjoint T est appelé discret si $\sigma(T) = \sigma_P(T)$ (i.e.) $\sigma_C(T) = \sigma_R(T) = \emptyset$*

Proposition 3.1.1 *Le domaine de régularité est un ensemble ouvert.*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un point de type régulier. On montre que pour tout $\lambda \in V(\lambda_0)$ ($V(\lambda_0)$ est un voisinage de λ_0), λ l'est aussi.
λ_0 un point de type régulier. Alors, $\exists k = k(\lambda_0) \succ 0$:

$$\forall x \in D(T): \| (T-\lambda_0 I)x \| \geq k \| x \|$$

soit donc $| \lambda - \lambda_0 | \leq \delta \leq \frac{1}{2} k(\lambda_0)$

Alors, $\forall x \in D(T)$ on a :

$$\begin{aligned} \| (T-\lambda I)x \| &= \| (T-\lambda_0 I)x - (\lambda-\lambda_0)x \| \\ &\geq | \| (T-\lambda_0 I)x \| - |\lambda-\lambda_0| \| x \| | \\ &\geq \| (T-\lambda_0 I)x \| - |\lambda-\lambda_0| \| x \| \\ &\geq k \| x \| - \tfrac{1}{2}k \| x \| = \tfrac{1}{2}k \| x \| \end{aligned}$$

Donc chaque λ dans le voisinage du λ_0 :

$$|\lambda-\lambda_0| \leq \delta$$

est un point de type regulier. □

Proposition 3.1.2 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \neq 0$*
Alors, λ est un point de type régulier.

Preuve. Découle directement de l'équation (1.4.2). □

Proposition 3.1.3 *Un point de type régulier est un point régulier de T si seulement si*

$$D\left((T-\lambda I)^{-1}\right) = H$$

(car $R(T-\lambda I) = D\left((T-\lambda I)^{-1}\right)$).

Remarque 3.1.2 $\Gamma(T)$ *contient l'ensemble des points réguliers, c'est à dire $\rho(T)$ mais aussi des points du spectre de T.*

Définition 3.1.4 *On appelle le complementaire du domaine de régularité $\Gamma(T)$,* "noyau spectral de l'opérateur T". *On le note par $S(T)$:*

$$S(T) = \mathbb{C}/\Gamma(T)$$

Il est évident que $S(T) \subset \sigma(T)$ puisque $\rho(T) \subset \Gamma(T)$.

Théorème 3.1.1 *Soit T un opérateur symétrique fermé. Alors,*

(a) $S(T) \subset \mathbb{R}$.

(b) Si $\widetilde{T}$ est une extension fermée de T. Alors $S(T) \subset S\left(\widetilde{T}\right)$ et $\Gamma\left(\widetilde{T}\right) \subset \Gamma(T)$.

(c) Si T est autoadjoint, alors $S(T) = \sigma(T)$ et $\Gamma(T) = \rho(T)$.

Preuve. **(a)** On a vu que pour $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. λ est un point de type régulier

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\mathbb{R} \subset \ & \Gamma(T) \Rightarrow (\Gamma(T))^C \subset (\mathbb{C}/\mathbb{R})^C \\ & \Rightarrow S(T) \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) On montre que $\Gamma\left(\widetilde{T}\right) \subset \Gamma(T)$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un point de type régulier pour $\widetilde{T}$. alors $\exists k \succ 0$,

$$\forall x \in D\left(\widetilde{T}\right) : \| \left(\widetilde{T} - \lambda I\right) x \| \geq k \| x \|$$

mais comme $\widetilde{T}$ est une extension fermée de T. Alors

$$D(T) \subset D\left(\widetilde{T}\right)$$

et

$$\left(\widetilde{T} - \lambda I\right) x = (T - \lambda I) x$$

pour tout $x \in D(T)$ .D'où, $\forall x \in D(T)$

$$\| (T - \lambda I) x \| = \| \left(\widetilde{T} - \lambda I\right) x \| \geq k \| x \|$$

Donc, λ est un point de type régulier pour T et enfin,

$$\Gamma\left(\widetilde{T}\right) \subset \Gamma(T)$$

$S(T) \subset S\left(\widetilde{T}\right)$ s'obtient en passant au complémentaire.

(c) On doit vérifier que $\Gamma(T) \subset \rho(T)$, ou bien que,

$$\lambda \text{ est un point de type régulier} \Longrightarrow \lambda \text{est un point régulier}$$

(l'implication réciproque est toujours vérifiée)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ On distingue deux cas;

(*)$\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ (c'est à dire $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$), alors λ est un point de type régulier et comme $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (car T est autoadjoint), alors forcement λ est un point régulier.

(*)$\lambda \in \mathbb{R}$. Comme λ est un point de type régulier, alors $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné sur $R(T - \lambda I)$. Il suffit alors de montrer que $R(T - \lambda I) = H$

λ ne peut être une valeur propre de T (car point de type régulier) et comme T est autoadjoint, alors $\overline{R(T - \lambda I)} = H$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} T \text{ est fermé (car autoadjoint)} &\Longrightarrow (T-\lambda I) \text{ est fermé} \\ &\Longrightarrow (T-\lambda I)^{-1} \text{ est fermé} \end{aligned}$$

Alors $D\left((T-\lambda I)^{-1}\right)$ est aussi fermé.

Or,

$$D\left((T-\lambda I)^{-1}\right) = R(T-\lambda I)$$

ce qui implique que $R(T-\lambda I)$ est fermé et enfin,

$$R(T-\lambda I) = \overline{R(T-\lambda I)} = H$$

□

Corollaire 3.1.1 *On vient de voir que pour un opérateur autoadjoint T*

$$\Gamma(T) = \rho(T)$$

et comme $\Gamma(T)$ est un ensemble ouvert (proposition 3.1.1), on déduit que l'ensemble résolvant de T est ouvert.

3.1.1 Classification du noyau spectral

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et,

$$E_\lambda = \{x \in D(T) : \; Tx = \lambda x\}$$

E_λ est le sous espace propre associé à λ, dans le cas où λ est une valeur propre de T, et $E_\lambda = \{0\}$ si λ n'est pas une valeur propre de T. L'ensemble des valeurs propres de T constitue la *"partie discrète"* du nyau spectral

Soit à présent T_λ la restriction de T à $H \ominus E_\lambda$, sachant que

$$(T_\lambda - \lambda I)(H \ominus E_\lambda) \subset (H \ominus E_\lambda)$$

Alors,

$$(T_\lambda - \lambda I) : \;\; (H \ominus E_\lambda) \to (H \ominus E_\lambda)$$

de plus l'opérateur $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ existe.

L'ensemble des points pour lesquels l'opérateur $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ n'est pas borné appartient évidement au noyau spectrale, il est appelé "*partie continue du noyau spectral*".

Remarque 3.1.3 *Les deux ensembles qui viennent d'être définis ne sont pas forcement disjoints.*

Remarque 3.1.4 *Si $\widetilde{T}$ est une extension fermée de T. Alors il est facile de voir que la partie discrète (resp. continue) du noyau de T est incluse dans celle de $\widetilde{T}$.*

Théorème 3.1.2 *Soit T un opérateur autoadjoint. Alors la partie discrète (resp. continue) du noyau spectrale coïncide avec le spectre ponctuel (resp. continu) de T.*

Preuve. Il est évident que $\sigma_P(T)$ est égale à la partie discrète du noyau spectral de T.On montre que la partie continue du noyau spectral de T coïncide avec $\sigma_C(T)$ (et donc les deux parties du noyau spectral sont disjointes).
Si $\lambda \in \sigma_C(T)$, alors λ n'étant pas une valeur propre de T, $E_\lambda = \{0_H\}$ et $H \ominus E_\lambda = H$. Il s'en suit que $T_\lambda = T$ et,

$$T_\lambda - \lambda I = T - \lambda I$$

Mais dans ce cas, $\overline{R(T - \lambda I)} = H$ (voir théorème 1.4.6), et forcement $(T_\lambda - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ n'est pas borné (car sinon, λ serait un point régulier de T). Il résulte que λ est dans la partie continue du noyau spectral de T. Inversement, supposons que λ est dans la partie continue du noyau spectral de T, donc dans le spectre de T et rappellons tout d'abord que $T_\lambda = T|_{H \ominus E_\lambda}$ et qu'il est invariant pour $H \ominus E_\lambda$.
On montre que T_λ est aussi autoadjoint. $\forall x, y \in H \ominus E_\lambda$;

$$\langle T_\lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, T_\lambda y\rangle$$

Comme λ n'est pas une valeur propre de T_λ par définition et $(T_\lambda - I)^{-1}$ n'est pas borné, alors $\lambda \in \sigma_C(T_\lambda) \subset \sigma_C(T)$ □

Remarque 3.1.5 *La première égalité n'est pas suffisante, en effet on voit par exemple que,*

$$\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \;\; et \;\; \{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{2,3,4\}$$

3.1.2 Spectre de l'extension autoadjointe d'un opérateur symétrique

Théorème 3.1.3 *soit T un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut (m, m) et $\widetilde{T}$ une extension autoadjointe. Alors, la croissance du degré de multiplicité de chaque valeur propre de $\widetilde{T}$ ne dépasse pas m.*

En particulier, la multiplicité d'une valeur propre de $\widetilde{T}$ qui n'en n'est pas une pour T ne dépasse pas m.

Preuve. Soit T un opérateur symétrique fermé d'indice (m, m), λ une valeur propre de T de multiplicité p et $\widetilde{T}$ une extension autoadjointe de T.

Il est claire que λ est aussi une valeure propre de $\widetilde{T}$ et que le sous espase vectoriel propre de T pour λ est inclus dans celui de $\widetilde{T}$ pour λ.

On note $(p + q)$ la multiplicité de λ pour $\widetilde{T}$ et on suppose que $q > m$.

Gràce à l'inclusion citée plus-haut ; on peut choisir un système linéairement indépendant de solutions

$$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}\}$$

Pour l'équation $\widetilde{Tx} - \lambda x = 0$ tel que $x_k \in D(T)$ pour $k = \overline{1, p}$

Or,

$$\dim \left(D\left(\widetilde{T}\right) \diagup D(T) \right) = m \text{ et } q > m$$

Alors $\exists \alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, q}$ pas tous nuls tels que

$$\alpha_1 x_{p+1}, \alpha_2 x_{p+2}, ..., \alpha_q x_{p+q} \in D(T)$$

Or, $\{x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}\}$ sont des vecteurs propres de $\widetilde{T}$ pour λ

Alors $x = \alpha_1 x_{p+1}, \alpha_2 x_{p+2}, ..., \alpha_q x_{p+q}$ est aussi un vecteur propre de $\widetilde{T}$ pour λ et comme $x \in D(T)$, il l'est aussi pour T et λ.

Ainsi donc, x est un vecteur propre de T pour λ linéairement indépendant de $x_1, x_2, ..., x_p$, ce qui veut dire que λ est une valeur propre de T de multiplicité supérieure à $p(\geq p + 1)$. Contradiction. Finalement, $q \leq m$.

Maintenant, si λ n'est pas une valeur propre de T mais l'est pour $\widetilde{T}$. Alors dans ce cas $p = 0$, ce qui fait que la multiplicité de λ pour $\widetilde{T}$ est égale à $q \leq m$. □

Théorème 3.1.4 *Dans les ensembles connectés du domaine de régularité d'un opérateur symétrique ; les indices de défaut n_λ sont constants.*
(En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda > 0$; $n_\lambda = n_i$ et $n_{\overline{\lambda}} = n_{-i}$).

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin de ces quelques notions suivantes.

Définition 3.1.5 *Un ensemble connecté est un ensemble qui ne peut pas s'écrire sous la forme de la réunion de deux (ou plus de deux) ensembles disjoints.*

Théorème 3.1.5 *, [6]Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et T et S deux opérateurs définis de H_1 dans H_2 tels que*

$$D(T) \subset D(S) \, et \parallel Sf \parallel \leq c \parallel Tf \parallel \ \ pour \ f \in D(T), \ c \geq 0.$$

Si pour tout $k \in \mathbb{C}$, P_k désigne la projection orthogonale de H_2 sur $\overline{R(T + kS)}$. Alors

$$\parallel P_k - P_0 \parallel \longrightarrow 0 \ pour \ k \longrightarrow 0.$$

Définition 3.1.6 ("écartement" ou "ouverture" de deux sous-espaces) *[12], [6]Soient M_1,M_2 deux sous-espaces fermés et P_1, P_2 les projections orthogonales sur M_1, M_2 respectivement. On appelle "écartement" ou "ouverture" de M_1, M_2, l'élément noté $\theta(M_1, M_2)$ et défini comme suit,*

$$\theta(M_1, M_2) = \parallel P_1 - P_2 \parallel .$$

On a alors,

Théorème 3.1.6 *, [12],[6]Si $\theta(M_1, M_2) < 1$. Alors* $\dim M_1 = \dim M_2$.

Preuve. [du théorème3.1.4] Nous allons démontrer que n_λ est locallement constant dans $\Gamma(T)$.
Autrement dit, soit $\lambda_0 \in \Gamma(T)$. Alors pour tout

$$\lambda \in \Gamma(T) : \lambda \longrightarrow \lambda_0 \Longrightarrow n_\lambda = n_{\lambda_0}$$

A cette fin, nous allons démontrer, d'aprés le théorème(3.1.6) que

$$\parallel P_\lambda - P_{\lambda_0} \parallel < 1$$

ou P_λ désigne la projection de H sur $R(T-\lambda I)^{\perp}$.

On pose dans le théorème(3.1.5) $(T-\lambda_0 I)$ à la place de T et I à la place de S, on remarque alors que

$$D(T-\lambda_0 I) = D(T) \subset D(I) = H$$

de plus, puis que $\lambda_0 \in \Gamma(T)$. Alors

$$\| (T-\lambda_0 I) f \| \geq k \| f \| \Rightarrow \| I(f) \| = \| f \| \leq \frac{1}{k} \| (T-\lambda_0 I) f \|$$

Alors pour $k = (\lambda_0 - \lambda) \in \mathbb{C}$:

$$\| Q_{(\lambda_0-\lambda)} - Q_0 \| \longrightarrow 0 \text{ pour } (\lambda_0 - \lambda) \longrightarrow 0$$

où ;

$Q_{(\lambda_0-\lambda)}$ désigne la projection orthogonale sur

$$\overline{R((T-\lambda_0 I) + (\lambda_0-\lambda) I)} = \overline{R(T-\lambda_0 I)}$$

et Q_0 désigne la projection orthogonale sur $\overline{R(T-\lambda_0 I)}$.

Soit à présent P_λ la projection orthogonale sur

$$R(T-\lambda I)^{\perp} = \overline{R(T-\lambda I)}^{\perp}$$

Alors,

$$\begin{cases} P_\lambda = Id - Q_{(\lambda_0-\lambda)} \\ P_{\lambda_0} = Id - Q_0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| &= \| (I - P_{\lambda_0}) - (I - P_\lambda) \| = \| Q_0 - Q_{(\lambda-\lambda_0)} \| \\ &= \| Q_{(\lambda-\lambda_0)} - Q_0 \| \longrightarrow 0 \text{ pour } \lambda \longrightarrow \lambda_0 \end{aligned}$$

et donc

$$\textit{pour tout } \varepsilon > 0; [| \lambda - \lambda_0 | < \varepsilon \Rightarrow \| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| \longrightarrow 0]$$

Il existe alors $\varepsilon_1 > 0 : [| \lambda - \lambda_0 | < \varepsilon_1 \Rightarrow \| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| < 1]$ □

Corollaire 3.1.2 *Si λ_0 est un réel dans le domaine de régularité d'un opérateur symétrique T alors les indices de défaut sont égaux à n_{λ_0}.*

Preuve. En effet, dans ce cas $\Gamma(T) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ et alors les éléments $\lambda \in \Gamma(T)$: $\operatorname{Im}\lambda \prec 0, \operatorname{Im}\lambda = 0$ et $\operatorname{Im}\lambda \succ 0$ constituent un ensemble connecté. Il en résulte que,

$$n_i = n_{-i} = n_{\lambda_0}$$

□

Corollaire 3.1.3 *Soit T un opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut (m, m). Si pour un réel λ_0, l'indice de défaut $n_{\lambda_0} < m$, alors λ_0 est dans le spectre de chaque extension autoadjointe $\widetilde{T}$ de T.*
De plus si λ_0 n'est pas une valeur propre de T alors, λ_0 est dans la partie continue du spectre de l'extension autoadjointe $\widetilde{T}$ de T.

Preuve. λ_0 est dans le noyau spectral de T car $n_{\lambda_0} \neq m$, donc λ_0 est aussi dans le spectre de $\widetilde{T}$.
Si en même temps λ_0 n'est pas une valeur propre de T alors, λ_0 est dans la partie continue du noyau spectral de T donc dans la partie continue du noyau spectral de $\widetilde{T}$ qui est aussi le spectre continu de $\widetilde{T}$ (car $\widetilde{T}$ est autoadjoint). □

Théorème 3.1.7 *Soit T un opérateur symétrique fermé avec les indices de défauts (m, m) Si λ est un réel et un point de type régulier de T alors, il existe une extension autoadjointe $\widetilde{T}$ de T pour laquelle λ est une valeur propre de multiplicité m.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\aleph_\lambda = \{x \in D(T^*) : \ T^*x = \lambda x\}$$

les sous espace propre de T^* pour λ.
λ un réel et un point de type régulier de T. Alors $\dim \aleph_\lambda = n_\lambda = m$. Ce qui signifie que λ est une valeur propre pour T^* de multiplicité m. On va contruire une extension $\widetilde{T}$ satisfaisant au conditions du théoreme.
1^{er}*étape* : Remarquons d'abord que $D(T)$ et $\aleph_\lambda$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons le contraire. Alors

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 &\in D(T), \exists\, x_2 \in \aleph_\lambda \text{ non nuls : } x_1 + x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_2 = -x_1 \in D(T) \end{aligned}$$

et alors,

$$T^* x_2 = T x_2 = \lambda x_2$$

x_2 est un vecteur propre de T pour λ ce qui contredit que λ est un point de type régulier de T.

La somme $D(T) \oplus \aleph_\lambda$ est alors directe. On pose $D = D(T) \oplus \aleph_\lambda$ et on définit l'opérateur suivant (on voit que $D \subset D(T^*)$) $D\left(\widetilde{T}\right) = D$ et $\widetilde{T} = T^*|_D$.

Il est claire que λ est une valeur propre de $\widetilde{T}$ de multiplicité m. Il reste à montrer que $\widetilde{T}$ est autoadjoint ce qui se fera dans les deux étapes suivantes

$2^{ème}$*étape* : On montre que $\widetilde{T}$ est symétrique

$$\forall x, y \in D\left(\widetilde{T}\right) : \langle \widetilde{T}x, y\rangle = \langle x, \widetilde{T}y\rangle$$

On pose

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2,\ x_1 \in D(T),\ x_2 \in \aleph_\lambda \\ y = y_1 + y_2,\ y_1 \in D(T),\ y_2 \in \aleph_\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{T}x, y\rangle &= \langle \widetilde{T}(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle = \langle \widetilde{T}x_1 + \widetilde{T}x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle \widetilde{T}x_1, y_1\rangle + \langle \widetilde{T}x_2, y_1\rangle + \langle \widetilde{T}x_1, y_2\rangle + \langle \widetilde{T}x_2, y_2\rangle \\ &= \langle Tx_1, y_1\rangle + \langle \lambda x_2, y_1\rangle + \langle x_1, \widetilde{T}^* y_2\rangle + \langle \lambda x_2, y_2\rangle \\ &= \langle Tx_1, y_1\rangle + \lambda\langle x_2, y_1\rangle + \lambda\langle x_1, y_2\rangle + \lambda\langle x_2, y_2\rangle \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

de même,

$$\begin{aligned} \langle x, \widetilde{T}y\rangle &= \langle x_1 + x_2, \widetilde{T}(y_1 + y_2)\rangle = \langle x_1 + x_2, \widetilde{T}y_1 + \widetilde{T}y_2\rangle \\ &= \langle x_1, \widetilde{T}y_1\rangle + \langle x_2, \widetilde{T}y_1\rangle + \langle x_1, \widetilde{T}y_2\rangle + \langle x_2, \widetilde{T}y_2\rangle \\ &= \langle x_1, Ty_1\rangle + \langle \widetilde{T}^* x_2, y_1\rangle + \langle x_1, \lambda y_2\rangle + \langle x_2, \lambda y_2\rangle \\ &= \langle x_1, Ty_1\rangle + \lambda\langle x_2, y_1\rangle + \lambda\langle x_1, y_2\rangle + \lambda\langle x_2, y_2\rangle \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

puisque(3.1.1)=(3.1.2) il s'en suit que $\widetilde{T}$ est symétrique

$3^{ème}$*étape* : On montre que T est autoadjoint.

De la 2^{nde} formule de Neuman

$$D\left(\widetilde{T}\right) = D(T) \oplus (I - U) P$$

Alors

$$\dim\left(D\left(\widetilde{T}\right) \diagup D(T)\right) = \dim (I - U) P = \dim P$$

car $I - U$ est bijectif de P à $(I - U) P$ (surjectif par définition et injectif car somme d'isométries) .

comme

$$\dim\left(D\left(\widetilde{T}\right)\diagup D\left(T\right)\right)=\dim\aleph_\lambda=m$$

Alors

$$\dim P=m \text{ et } P=\aleph_\lambda=Q \text{ (ici } \lambda=\bar{\lambda})$$

P et Q étant définis dans la construction de l'extension $\widetilde{T}$ (chapitre 2).

D'où, T est autoadjoint. □

Théorème 3.1.8 *Soit T un opérateur symétrique fermé d'indice de défaut (m,m) et λ un nombre réel n'appartenant pas au spectre ponctuel de T. Alors, l'équation $T^*x-\lambda x=0$ admet au plus m solutions linéairement indépendantes*

Preuve. Soit $\aleph_\lambda$ le sous espace des vecteurs propre de T^* pour la valeur propre λ. On construit l'opérateur $\widetilde{T}$ par,

$$\begin{cases} D\left(\widetilde{T}\right)=D\left(T\right)\oplus\aleph_\lambda \\ \widetilde{T}x=T^*x \text{ pour } x\in D\left(\widetilde{T}\right)\end{cases}$$

Le même raisonnement suivit par la preuve du théorème (3.1.7) permet de conclure que $\widetilde{T}$ est une extension symétrique vérifient

$$\begin{cases} \dim\left(D\left(\widetilde{T}\right)\diagup D\left(T\right)\right)=\dim\aleph_\lambda \\ \dim\left(D\left(\widetilde{T}\right)\diagup D\left(T\right)\right)=\dim P\end{cases} \tag{3.1.3}$$

Or

$$P\subset\aleph_{\overline{\lambda}}\Rightarrow\dim P\leq\dim\aleph_{\overline{\lambda}}=m$$

de (3.1.3) $\dim\aleph_\lambda\leq m$ □

Théorème 3.1.9 *Si T est un opérateur symétrique fermé avec des indices de défaut finis (m,m) et si l'opérateur adjoint T^* admet une valeur propre réelle λ. Alors, il existe une extension autoadjointe $\widetilde{T}$ de T pour laquelle λ est aussi une valeur propre.*

Preuve. Soit $\aleph_\lambda$ le sous espace propre de T^* pour λ. On définit l'opérateur B par

$$\begin{cases} D\left(B\right)=D\left(T\right)\oplus\aleph_\lambda \\ B\left(x_1+x_2\right)=Tx_1+\lambda x_2 \\ x_1\in D\left(T\right),\ x_2\in\aleph_\lambda\end{cases}$$

$B \subset T^*$. Il est évident que λ est une valeur propre de B. De plus, B est un opérateur symétrique fermé d'indices de défauts finis et égaux.

Alors, B admet une extension auto-adjointe $\widetilde{T}$ pour laquelle λ est une valeur propre.

Enfin, On a le résultat vu que $T \subset B \subset \widetilde{T}$. $\square$

CONCLUSION

Le but de cette présentation, mis à part les résultats proposés, est aussi d'introduire la théorie des extensions et de compléter les connaissances acquises en ce domaine, afin nottament de bien assimiler la notion du spectre pour pouvoir aller plus loin, et pourquoi pas, étudier d'autres types d'extensions commes celles de Friedich par exemple ou bien s'initier aux triplets limites qui, comme dits précédement, sont un outil indispensable, dans cette théorie aujourd'hui.

Bibliographie

[1] **A. Derdoukh .** Sur la méthode de Fourier pour l'étude d'une classe d'équations operatorielles, (mémoire de magistère), université Mantouri de Constantine, Algérie. bu.umc.edu.dz/theses/math/DER5913.pdf

[2] **A. Dijksma, H. V. S. de Snoo**, *Symmetric and selfadjoint relations in Krein space 1, Operator Theory : Advances and Applications* **24**, Birkhäuser, Basel (1987), 145-166.

[3] **A. Dijksma, H. V. S. de Snoo.** Self-adjoint extensions of symmetric subspaces, Pacific J. Math., 54, N°1, 71-100 (1974).

[4] **B. Aouatef.** Spectre étandus, images numériques et interactions, (mémoire de master académique), université Hamma Lakhdar d'Eloued (année universitaire 2014-2015). www.univ-eloued.dz/images/memoir/file/M.T-131-01.pdf

[5] **D.Gitman, L.Tyutin, , and B. Voronov,** Self-adjoint extensions as a quantization problem (Birkhauser, Basel etc., 2006).

[6] **Joachim Weidmann :** linear operators in Hilbert spaces, Springer-Verlag, New York Inc, (1980).

[7] **Jussi Behrndt, Carsten Trunk.** Sturm–Liouville operators with indefinite weight functions and eigenvalue depending boundary conditions, Journal of Differential Equations, Volume 222, Issue 2, 15 March 2006, Pages 297–324.

[8] **K. Huang, Quarks.** leptons, and gauge fields. (World Scientific, Singapoure, 1982).

[9] **K. Yosida.** Functionnal Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123, Springer Verlag Heindelberg New York, 1985.

[10] **Leif Mejlbro :** Hilbert spaces and operators on Hilbert spaces,Ventus Publishing APS (2009)

[11] **M.A Naimark** . On self-adjoint extensions of the second kind of a symmetric operator, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 4 (1940), 1, 53-104.

[12] **N. I. Akhiezer and I. M. Glazman :** Theory of linear operators in Hilbert space, vols 1 and 2, New York, Frederik Ungar 1961 and 1963.

[13] **V. A. Derkach, M. M. Malamud**, *generalized resolvents and the boundary value problem for hermitian operator with gaps*, J. Funct. Anal. **95** (1991), 1-95.

[14] **V. A. Derkach, M. M. Malamud**, *The extension theory of hermitian operators and the moment problems*, J. Math. Sci. (New-York) **73**, (1995), 141-242.

[15] **V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud, H. V. S. de Snoo**, *Generalized resolvents of symmetric operators and Admissibility,* Methods Funct. Anal. Topology **6** (3), 24-55, (2000).

[16] **S. Makhelouf** Sur la construction d'une extension autoadjointe d'un opérateur symérique, (mémoire de master académique), université Abdelhamid Ibnbadis de Mostaganem (année universitaire 2014-2015).

[17] **S. Şuhubi Erdoğan.** Functional analysis, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (2003)