UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Mémoire de Master
En Mathématique
Analyse fonctionnelle

Thème

Equation Différentielle Abstraite de Deuxième Ordre de Type Elliptique dans $\mathbb{R}_+$

Présenté par

Bekaddour souaad
cherif hayat

Soutenu le ../05/2016.

Devant le jury

Président		**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur		**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	M.Ahmed Medeghri	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Resumé

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Amine Eltaief et Stéphane Maingot concernant l'étude d'une équation différentielle abstraite complète de type elliptique posé dans un espace de Banach complexe X de type UMD ou quelconque.

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$(*) \qquad u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \qquad\qquad x \in (0.R),$$

avec les conditions aux limites :

$$(**) \qquad \begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(+\infty) = 0. \end{cases}$$

A et B deux opérateurs linéaire fermés dans X et le second membre $f \, \epsilon L^{\,p}(0,\infty;X)$ avec $1 < p < +\infty$.

On s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte i.e $u \in W^{2,p}(o,+\infty;X)$, $B\acute{u}$, $Au \in L^p(0,+\infty;X)$, et u vérifie $(*)$, $(**)$, sous l'hypothèse d'ellipticité de Krein.

Remerciements

Nous souhaitons adresser tous notre remerciements aux personnes qui nos avons apprtée leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord à notre encadreur Monsieur Ahmed Medeghri pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

On remerciements s'adressent aussi vivment à Madame Limam Kheira pour l'hounneur qu'il m'a fait en présidant le jury et à Monsieur Kaid Mohamed d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Merci à toute nos familles, qui nos avons soutenu en toutes circonstances.

Nous espérons qu'ils trouvent ici l'expression de notre éternelles reconnaissance.

Un remerciement trés spécial au staff des enseignants qui nos avons accompagnée pendant nos années d'études.

Nous adressons nos chaleureux remerciement à notre mère, notre père et tous notre prouches et amis pour leurs encouragements durant la réalisation de ce mémoire.

Enfin, toute personne ayant aidé de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail est vivement remerciée.

Dédicace

On dédie cette mémoire à nos parents.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Amine Eltaief et Stéphane Maingot concernant l'étude d'une équation différentielle abstraite complète de type elliptique posé dans un espace de Banach complexe X de type UMD ou quelconque.

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \qquad x \in (0.R), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

A et B deux opérateurs linéaire fermés dans X et le second membre $f \epsilon L^p(0,\infty; X)$ avec $1 < p < +\infty$.

On s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte i.e $u \in w^{2,p}(o, +\infty; X)$, $B\acute{u}$, $Au \in L^p(0, +\infty; X)$, et u vérifie $(1), (2)$, sous l'hypothèse d'ellipticité de Krein.

Plusieurs auteurs on étudié le problème $(1), (2)$ dans le cas $f \in L^p(o, R, X)$ avec $R < \infty$ on cite par exemple A.Favini ,R.Labbas, S. Maingot, H.Tanabe et Yagi [5].

Le cas $f \in C^\theta([0, R]; X)$, $0 < \theta < 1$, a été traité par A.Elhail et R. Labbas $[13]$, Tanabe et Yagi $[12]$, A.Favini

Le cas $R = +\infty$ et $B = 0$ a été étudié par Pruss $[8]$.

Dans ce travail $R = +\infty$,

On considère L_1, L_2 des opérateurs dans X tels que :

$$\begin{cases} L_1 - L_2 \subset 2B \\ L_1 L_2 \subset -A, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} D(L_1) = D(L_2) \\ L_1 L_2 = L_2 L_1, \end{cases} \tag{4}$$

$$0 \in \rho(L_1) \cap \rho(L_2), \tag{5}$$

$$0 \in \rho(L_1 + L_2), \tag{6}$$

L_1 et L_2 génèrent des semi groupes analytiques

On construit une formule de représentation explicite de la solution de l'équation :

$$u''(x) + (L_1 - L_2) u'(x) - L_1 L_2 u(x) = f(x). \tag{7}$$

t.q $L_1 L_2$ operateur sur X, on représente la solution sous la forme

$$\begin{cases} u(x) = e^{xL_1}u_0 - e^{xL_2}v_0 + \zeta_1(x) + \zeta_2(x), \\ v_0 = (L_1 - L_2)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{yL_2} f(y)\, dy, \\ \zeta_1(x) = (L_1 - L_2)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{(x-y)L_2} f(y)\, dy, \\ \zeta_2(x) = (L_1 - L_2)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{(y-x)L_1} f(y)\, dy. \end{cases} \tag{8}$$

L'étude est faite dans deux cas
1^{ere} **cas** :

$$f \in L^P(0, +\infty; X), \ 1 < P < +\infty,$$

On suppose que $X\ UMD$ et$\exists \theta \in \left]0, \frac{\Pi}{2}\right[, \ -L_{1,-}L_2 \in BIP(\theta, X)$.
Des conditions nécessaires et suffisantes sont obtenues en utilisant les puissances fractionnaires d'operateurs, les semi– groupes, les résultats de Dore– Venni, ainsi que les espaces d'interpolations.
le résultat obtenu dans ce cas est donné par :

Théorème 0.1

$$f \in L^p(0, +\infty; X), \ 1 < p < +\infty.$$

Les deux assertions sont équivalentes.

1. $u_0 \in (D(L_1, L_2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.
2. *Le problème* $(1) - (2)$ *admet une unique solution stricte* (L_1, L_2).

2eme **cas**

$$f \in W^{\theta,p}(0,\infty;X), 0 < \theta < \frac{1}{p} \text{ et } 1 < P < +\infty.$$

i.e : f est réguliére X non UMD
Dans ce cas les résultats sont obtenus en utilisant les même outils et l'approche de Daprato- Grisvard au lieu de celle de Dore –Venni.

Le résultat obtenu dans ce cas est donné par :
Soit X est espace Banach complexe :

Théorème 0.2

$$f \in W^{\theta,p}(0, +\infty; X), 0 < \theta < \frac{1}{p} et\ 1 < p < +\infty.$$

Les deux assertions sont équivalentes :

1. $u_0 \in (D(L_1, L_2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$
2. *Le probléme* $(1) - (2)$ *admet une unique solution stricte* (L_1, L_2).

Ce mémoire est composé d'une introduction et de cinq chapitres

Le premier est consacré à des rappels et des outils mathématiques utilisés : les semi–groupes, les espaces d'interpolation, les operateurs...

Au deuxième chapitre on donne la représentation formelle de la solution du problème en utilisant les puissances fractionnaires d'opérateurs et les semi –groupes

Dans le troisième chapitre on démontre les resultats essentiels d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution stricte de l'équation complète abstraite dans les espaces de Banach, l'analyse de la régularité est faite grace à l'interpolation et aux résultat de Dore –Venni et Daprato Grisvard

Dans le quatrième chapitre on apllique les résultas aux cas :$L_1 = B - \sqrt{B^2 - 1}, L_2 = -B - \sqrt{B^2 - 1}$

Le cinquième chapitre est consacré aux application des résultats abstraits obtenus à des exemples concrets.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs fermés

Un opérateur linaire sur X espace de Banach est une application linéaire A définie dans un sous espace vectoriel $D(A)$ de X à valeurs dans X :

$$\begin{array}{ccc} A & : & D(A) \subset X \longrightarrow X \\ \varphi & \longrightarrow & A\varphi \end{array}$$

Définition 1.1 *On dit que A est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour toute suite $(\varphi)_n \subset D(A)$ et $(\varphi, \psi) \in X \times X$*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_n \longrightarrow \varphi \\ A\varphi_n \longrightarrow \psi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in D(A) \\ A\varphi = \psi \end{array} \right.$$

Définition 1.2 *On dit que A est un opérateur linéaire fermable si pour toute suite $(\varphi)_{n\in N} \subset D(A)$*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_n \longrightarrow 0 \\ A\varphi_n \longrightarrow \psi \end{array} \right. \Longrightarrow \psi = 0$$

Définition 1.3 *A étant un opérateur linéaire fermé sur X, on définit $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \diagup \left(\lambda I - A^{-1} \right) \in L(X) \right\},$$

Si $\lambda \in \rho(A)$; $(\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de l'opérateur A.

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.4 *Soit X un espace de Banach. On dit que la famille $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés X constitue un semi-groupe si :*

1. *$G(0) = I$,*
2. *$\forall s,t \geq 0$ $G(t+s) = G(t) \cdot G(s)$.*

Définition 1.5 *On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$ l'application $t \longrightarrow G(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue c'est à dire :*

$$\forall x \in X,\ \lim_{t \longrightarrow 0} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Proposition 1.1 *Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 0$ et $\omega \geq 0$ telle que:*

$$\forall t \geq 0,\ \|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.6 *On appelle générateur infinitésmal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$,l'opérateur A défini par*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in X : \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall x &\in D(A),\ Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \end{aligned}$$

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.7 *Soient $(X_0, \|\cdot\|_0)$ et $(X_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé $\mathcal{F}$, les espaces $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$, munis des normes suivantes*

$$\|\varphi\|_{X_0 \cap X_1} = \|\varphi\|_{X_0} + \|\varphi\|_{X_1} \qquad \text{si } \varphi \in X_0 \cap X_1.$$

$$\|\varphi\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\varphi = \varphi_0 + \varphi_1} \left(\|\varphi_0\|_{X_0} + \|\varphi_1\|_{X_1} \right) \qquad \text{si } \varphi \in X_0 + X_1.$$

Définition 1.8 *Pour $p \in [1,\infty[$ et $\theta \in [0,1]$ on définit l'espace intermédiaire entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$, noté $(X_0 + X_1)_{\theta,\, p}$;par $\varphi \in (X_0,X_1)_{\ \theta,\, p}$ si et seulement si :*

1. $\forall t > 0, \exists (u_0(t),\ u_1(t)) \in X_0 \times X_1$ *tel que :*

$$\varphi = u_0(t) + u_1(t)$$

2. $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)$, $t^{1-\theta} u_1 \in L_*^P(\mathbb{R}_*, X_1)$
où $L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)$ est l'espace des fonctions fortements mesurables $u_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_i$ telle que :

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{L_*^P(\mathbb{R}_+, X_i)} &= \left(\int_0^\infty \|u_i(t)\|_{X_i}^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad && \textit{pour } p \in [1,\infty[\,, \\ \|u_i\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+,\, X_i)} &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|u_i(t)\|_{X_i}\ , && \textit{pour } p = \infty. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. On note*

$$D_A(\theta,p) = (D(A); X)_{1-\theta,\ p}\,.$$

où $p \in [1,\infty[$ et $\theta \in]0,1[$.

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut donner des caractéristiques explicites de $D_A(\theta\,;\,p)$, par exemple

– Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\lambda > 0 : \left\|(A-\lambda I)^{-}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{\lambda}\,.$$

alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X \ : t^{\,\theta} A(A-\lambda I)^{-1}\varphi \in L_*^p(\mathbb{R}; X)\right\}.$$

– Si A génére un semi-groupe fortement continu et borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X \ : t^{\,\theta}\left(e^{At} - I\right)^{-1}\varphi \in L_*^p(\mathbb{R}; X)\right\}.$$

– Si A génére un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X \ : t^{\,1-\theta} A e^{tA}\varphi \in L_*^p(\mathbb{R}; X)\right\}$$

Théorème de lions si A g.i du c_0-semi groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$

$$x \in (D_A; E)_{\theta,\ p} \iff \begin{cases} 1)\ x \in E \\ 2)\dfrac{G(t)\,x - x}{t^{\,1-\theta}} \in L_*^p(E) \end{cases}$$

La norme $\|x\|_{\theta,p} = \|x\|_E + \left[\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\|G(t)\,x - x\|}{t^{1-\theta}}\right)^p \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{p}}$

Application du théorème de lions

$$E = L^p(\mathbb{R})\,,\ D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$$

si :

$$f \in D(A)\,,\ Af = f\prime$$

$$(D_A,\, E)_{\theta,p} = \left(W^{1,P}(\mathbb{R})\,, L^P(\mathbb{R})\right)_{\theta,\ p}$$

$$f \in \left(W^{1,p}(\mathbb{R})\,,\ L^p(\mathbb{R})\right) \iff \begin{cases} 1)\ f \in L^p(\mathbb{R})_{\theta,\ p} \\ 2)\dfrac{G(t)\,f - f}{t^{1-\theta}} \in L_*^p(\mathbb{R}_+,\ L^p(\mathbb{R})) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1)\ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ 2)\int_0^{+\infty} \left\| \dfrac{G(t)f - f}{t^{1-\theta}} \right\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1)\ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ 2)\int_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \dfrac{f(t+x) - f(x)}{t^{1-\theta}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}\cdot p} \frac{dt}{t} < +\infty \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1)\ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ 2)\ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t+x)-f(x)}{t^{1-\theta}} \right|^p dx\ \frac{dt}{t} < +\infty \end{array} \right.$$

on pose $t + \varkappa = y \implies dt = dy$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1)\ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ 2)\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dfrac{|f(y) - f(\varkappa)|^p}{(y-x)^{1-p(1-\theta)}} dxdy < +\infty \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow f \in W^{1-\theta,p}(\mathbb{R})$$

$$\left(W^{1-\theta,P}(\mathbb{R}),\ L^p(\mathbb{R})\right)_{\theta,p} = W^{1-\theta,p}(\mathbb{R})$$

1.4 Somme d'opérateurs

1.4.1 Somme de Daprato-Grisvard

Soint A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ dans un espace de Banach X, on se propose de résoudre l'équation

$$Au + Bu - \lambda u = f\ , \qquad \text{ou}$$

$\lambda > 0$

on suppose que A et B vérifient les hypotheses suivantes

$$(DG_1) \left\{ \begin{array}{c} \rho(A) \supset \{z \in \mathbb{C}^*,\ |\arg z| < \pi - \theta_A\} \\ \left\|(A - zI)^{-1}\right\| \leq \frac{C_A(\phi)}{|z|} \\ \forall z \in \theta \qquad \text{avec } \phi = \arg|z| \\ \rho(B) \supset \{z \in \mathbb{C}^*,\ |\arg z| < \pi - \theta_B\} \\ \left\|(B - zI)^{-1}\right\| \leq \frac{C_B(\phi)}{|z|} \end{array} \right.$$

$$(DG_2) \left\{ \begin{array}{c} \forall \lambda \in \rho(A), \quad \forall \mu \in \rho(B) \\ (A - \lambda I)^{-1}(B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} \end{array} \right.$$

Le résultat principal de Daprato-Grisvard est donné par le théorème suivant

Théorème 1.1 *Soit A et B vérifient (DG_1) et (DG_2) alors $\forall f \in D_B(\theta,\infty)$ il existe une unique solution stricte u de :*

$$Au + Bu - \lambda u = f$$

vérifiant :

1. $(A-\lambda)\,u \in D_B\,(\theta,\infty)\,.$
2. $Bu \in D_B\,(\theta,\infty)\,.$
3. $Bu \in D_A\,(\theta,\infty)\,.$

1.4.2 Somme de Dore–Venni

Les espaces UMD

Définition 1.9 *Un espace de Banach X possède la propriété UMD si seulement si $\exists p \in \left]1,\infty\right[$ et $C\,(p)$ telle que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},\ X)} \leq C\,(p) \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},\ X)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=1,\ldots,n}$ et pour toute suite $(\zeta_k) \in \{-1,1\}^N$
Transformation de Hilbert
Soit $\zeta \in \left]0,\,1\right[$, $p \in \left]1,\infty\right[$, $\forall f \in L^P\,(\mathbb{R})$

$$Hf = \lim_{\zeta \longrightarrow 0} H_\zeta\,(f)\,(x) = \lim_{\zeta \longrightarrow 0} \int\limits_{\zeta<|s|<\frac{1}{\zeta}} \frac{f\,(x-s)}{s} ds$$

Théorème 1.2 *Soit X un espace de Banach et $p \in \left]1,\infty\right[$ alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *X est UMD,*
2. $\lim\limits_{\zeta \longrightarrow 0} H_\zeta f$ *existe dans* $L^p\,(\mathbb{R},X) \qquad \forall f \in L^p\,(\mathbb{R},X)\,.$

Exemple 1.1 *Si X UMD et $1 < p < +\infty$ alors $L^p\,(0,1,X)$ UMD.*

Remarque 1.2 *C, C^θ ne sont pas UMD.*

Approche de DORE-VENNI

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D\,(A)$ et $D\,(B)$ inclus dans un espace de Banach X de type UMD, on considère l'équation $Au + Bu = f$

on suppose que A et B vérifient les hypothéses suivantes

$$(DV_1) \left\{ \begin{array}{c} 1)\ \rho\,(A) \supset \left]-\infty,0\right] \text{ et } \exists M_A > 0 \\ \forall \lambda \geq 0 : \ \left\| (A+\lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{M_A}{1+\lambda} \\ 2)\ \rho\,(B) \supset \left]-\infty,0\right] \text{ et } \exists M_B > 0 \\ \forall \lambda \geq 0 : \ \left\| (B+\lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{M_B}{1+\lambda} \end{array} \right.$$

$$(DV_2) \left\{ \begin{array}{c} 3)\ \forall \lambda \in \rho\,(-A)\,, \qquad \forall \mu \in \rho\,(-B) \\ (A+\lambda I)^{-1}\,(B+\mu I)^{-1} = (B+\mu I)^{-1}\,(A+\lambda I)^{-1} \end{array} \right.$$

$$(DV_3)\left\{\begin{array}{c} 4)\ \forall s\in\mathbb{R},\ A^{is}\in\mathcal{L}\left(X\right) \\ \exists\zeta_0>0,\exists\theta_A\in[0,\pi[\ :\ \ \|A^{is}\|_{L(X)}\leq\zeta_0 e^{|s|\theta_A} \\ 5)\ \forall s\in\mathbb{R},\ B^{is}\in\mathcal{L}\left(X\right) \\ \exists\zeta_1>0,\exists\theta_B\in[0,\pi[\ :\ \ \|B^{is}\|_{L(X)}\leq\zeta_1 e^{|s|\theta_B} \end{array}\right.$$

Remarque 1.3 *L'opérareur A vérifiant (1) et (4) est dit BIP (θ_A).*

Le résultat principal de Dore-Venni est donné par le théorème suivant

Théorème 1.3 *Soit X UMD et sous les hypothèses (DV_1) (DV_2) et (DV_3), l'opérateur $(A+B)$ est fermé inversible et son inverse est défini par*

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{2i}\int_{\delta}\frac{A^{-z}B^{\ z-1}}{\sin\pi z}dz$$

Application de Dore-Venni

Etude du problème de Cauchy

Soit X un espace de Banach UMD et on considère le problème

$$\left\{\begin{array}{c} \acute{u}\left(t\right)+Au\left(t\right)=f\left(t\right) \\ u\left(0\right)=0 \end{array}\right.$$

$f\in X=L^p\left(0,T\,;X\right)$ et $A:D\left(A\right)\longrightarrow X$ un opérateur lineaire fermé de domaine dense tele que

$\left\|\left(A+\lambda I\right)^{-1}\right\|\leq\frac{C}{1+\lambda}\quad\forall\lambda\geq0$

et $\zeta\longrightarrow A^{is}$ groupe fortement continu dans $L\left(X\right)$ avec $\left\|A^{i\ \zeta}\right\|\leq ce^{\theta A|\zeta|}$ et $0\leq\theta_A\leq\frac{\pi}{2}$

1) on écrit ce problème sous la forme d'une équation somme d'opérateurs

$$\begin{aligned} D\left(B\right) &= \left\{u\in W^{1,p}\left(\left(0,T\right),X\right),u\left(0\right)=0\right\} \\ Bu &= \acute{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\kappa\right) &= \left\{u\in L^p,\ \left(\left(0,T\right),X\right)\ u\left(t\right)\in D\left(A\right)\right\} \\ \left(\kappa u\right) &= Au\left(t\right) \end{aligned}$$

$$Bu+\kappa u=f\quad\text{dans } X$$

On utilise l'approche Dore-Venni car X UMD $\Longrightarrow Y$ UMD et (DV_1) ,(DV_2),$(DV3)$ sont verifiées

Ona B lineaire fermé $\left\|\left(\lambda I-B\right)^{-1}\right\|\leq\frac{C_0}{1+|\lambda|}$ de plus $\forall s\in\mathbb{R}$, $B^{is}\in L\left(X\right)$, $s\longrightarrow B^{is}$ groupe et $\|B^{is}\|\leq C_1\left(1+s^2\right)e^{\frac{\pi}{2}|s|}$

Résultat final : si X UMD, alors $\forall f\in L^p\left(\left(0,T\right);X\right)$, $1<p<\infty$ le proplème de Cauchy admet une unique solution

$u\in W^{1,p}\left(0,T\,;\,X\right)\cap L^p\left(0,T\,;D_A\right)$.

(i.e) $Au\left(t\right)=A\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A}f\left(s\right)ds\in L^P$.

Remarque 1.4 *Si X n'est pas UMD on peut appliquer Daprato-Grisvard on aura le même résultat avec la régularité*

$$f \in \left(D\left(B\right),\, L^{P}((0{,}T)\,;\ X)\right)_{\theta,p}.$$

Chapitre 2

Construction de la représentation de la solution

2.1 Cas scalaire

Si L_1 et L_2 sont des scalaires on considère l'équation

$$u''(x) + (L_1 - L_2) u'(x) - L_1 L_2 u(x) = f(x) \quad x \in (0, +\infty),$$

avec les condtions

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(+\infty) = u_{+\infty}. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} u(x) = e^{xL_2} u_{0-} e^{xL_2} v_0 + \xi_1(x) + \xi_2(x) \\ v_0 = (L_{1+} L_2)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{yL_1} f(y)\, dy, \\ \xi_1(x) = (L_{1+} L_2)^{-1} \int\limits_0^{x} e^{(x-y)L_2} f(y)\, dy, \\ \xi_2(x) = (L_{1+} L_2)^{-1} \int\limits_{\varkappa}^{+\infty} e^{(y-x)L_1} f(y)\, dy. \end{cases} \tag{2.1}$$

Exemple 2.1 *On utilise la méthode de réduction de l'ordre de Krein pour résoudre le problème suivant :*

$$\begin{cases} u'' + Au = f \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases}$$

avec A vérifiant l'hypothèse d'éllipticité alors $\exists Q = -\sqrt{-A}$ g.i semi groupe analytique
On pose

$$\begin{cases} y(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) + Q^{-1} u'(x)\right) \\ z(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) - Q^{-1} u'(x)\right) \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

On obtient

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ z(1) = z_1 \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}\left(u(0) + Q^{-1}u'(0)\right) \quad \text{et } z_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 - Q^{-1}u'(1)\right).$$

$$\forall x \in [0,1]\; u(x) = e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + I_x(f) + J_x(f).$$

$$\begin{cases} I_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int\limits_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds \\ J_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int\limits_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds \end{cases}$$

D'ou le résutat **(2.1)**

2.2 Cas abstrait

si $L_{1,}L_2$ sont des opérateurs on écrit la même formule **(2.1)** avec les semi groupes e^{xL_1},e^{xL_2}

Proposition 2.1 *X est un espace UMD, $\exists\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $-L_1,-L_2 \in BIP(\theta,X)$ et soit*

$$f \in L^P(0,+\infty;X), \quad 1 < p < +\infty.$$

si u est une $(L_{1,}L_2)$ solution stricte de $(1)-(2)$ alors u est déterminée d'une façon unique

Preuve. Soit u_1,u_2 $(L_{1,}L_2)$ solution stricte de $(1)-(2)$ et $x_0 \geq 0$ fixé, montrons que :

$$u_1(x_0) = u_2(x_0).$$

On considère $R \geq x_0$,et on pose $u_R = u_1(R) - u_2(R)$.
Donc $u = u_1 - u_2$ est un $(L_{1,}L_2)$ solution stricte dans $(0,R)$ de problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L_1 - L_2)u'(x) - L_1L_2u(x) = 0, & x \in (0,R) \\ u(0) = 0, \\ u(R) = u_R. \end{cases} \tag{2.2}$$

En utilisant la méthode de Krein,on trouve que le problème (2.2) admet une unique solution stricte $(L_{1,}L_2)$

$$u(x) = e^{xL_2}\xi_0 + e^{(R-x)L_1}\xi_R \tag{2.3}$$

Puisque le problème linéaire, donc

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^{RL_1}\xi_R = 0 \\ u(R) = e^{RL_2}\xi_0 + \xi_R = u_R, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} e^{RL_2}\xi_0 + e^{RL_2}e^{RL_1}\xi_R = 0 \\ e^{RL_2}\xi_0 + \xi_R = u_R, \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \left(I - e^{RL_2}e^{RL_1}\right)\xi_R = u_R \\ \xi_0 + e^{RL_1}\xi_R = 0. \end{cases}$$

L g.i semi -groupe analytique,L inversible $\exists M \geq 0$ et $\omega \geq 0$ pour tout $y > 0$

$$\left\|e^{yL}\right\| \leq Me^{-\omega y} \text{ et } \left\|Le^{yL}\right\| \leq My^{-1}e^{-\omega y} \tag{2.4}$$

donc on applique (2.4) sur L_1 et L_2,il existe $R_0 \geq \varkappa_0$ pour tout $R \geq R_0$

$$\left\|e^{RL_2}e^{RL_1}\right\| \leq \frac{1}{2}$$

On considère $R \geq R_0$ et $\left(I - e^{RL_2}e^{RL_1}\right)$ est inversible et son inverse est borné, et de plus on pose $z_R = \left(I - e^{RL_2}e^{RL_1}\right)^{-1}$,ona

$$\|z_R\| \leq 2, \tag{2.5}$$

et

$$\begin{cases} \xi_R = z_R u_R \\ \xi_0 = -e^{RL_1}z_R u_R. \end{cases} \tag{2.6}$$

Daprés (2.3) et (2.6), ona pour tout $R \geq R_0$

$$u(x_0) = -e^{-x_0 L_2}e^{RL_1}z_R u_R + e^{(R-x_0)L_1}z_R u_R = \alpha_R.$$

Mais

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} u_R = \lim_{R\longrightarrow\infty}\left(u_1(R) - u_2(R)\right) = 0.$$

D 'aprés (2.4) et (2.5), on obtient

$$u(x_0) = \lim_{R\longrightarrow\infty} \alpha_R = 0,$$

alors

$$u_1(x_0) = u_2(x_0).$$

■

Chapitre 3

Régularité de la solution

Lemme 3.1 *Soient L,M des opérateurs linéairs dans X de domaine $D(L)$, $D(M)$.*

$$D(L) = D(M) \text{ et } D(LM) = D(ML).$$

Alors :

1. $l \in \{0,1,2\}$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $P,Q \in \{L,M\}$,

$$\eta_{l,n} : D\left(P^l Q^n\right) = D\left(Q^{l+n}\right).$$

2. $l,n \in \{0,1,n\}$ *et* $P,Q \in \{L,M\}$,

$$D\left(P^l Q^n\right) = D\left(Q^l P^n\right) = D\left(Q^{l+n}\right) = D\left(P^{l+n}\right).$$

Preuve. on a pour $\eta_{0,n}$ est vraie pour $n \in N$ et
$\eta_{1,n}$ est vraie pour $n \in N$, $\eta_{1,0}$ est vraie et si $\eta_{1,k}$ est vraie pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x \in D\left(PQ^{k+1}\right) &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D\left(PQ^k\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D\left(Q^{k+1}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in D\left(Q^{k+2}\right) \end{aligned}$$

i.e $\eta_{1,k+1}$ est vraie.
$\eta_{2,n}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$
$\eta_{_{2,0}}$ est vraie

$$\begin{aligned} x \in D(P^2) &\Longleftrightarrow x \in D(P) \text{ et } Px \in D(P) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(P) \text{ et } Px \in D(P) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(QP) = D(PQ) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D(P) = D(Q) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D(P) = D(Q). \end{aligned}$$

is $\eta_{2,_k}$ est vraie pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x \in D\left(P^2 Q^{k+1}\right) &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D\left(P^2 Q^k\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(Q) \text{ et } Qx \in D\left(Q^{2+1}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in D\left(Q^{k+3}\right) \end{aligned}$$

i.e $\Leftrightarrow x \in \eta_{2,k+1}$ est suffisante ■

Remarque 3.1 *Si L_1,L_2 sont des opérateurs dans X, satisfaisant 4, le lemme 3.1, implique :*

$$D(L_iL_j) = D\left(L_i^2\right) = D\left(L_j^2\right), \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Lemme 3.2 *Ona X UMD, L est un opérateur linéaire fermé dans X,*

$$0 \in \rho(L) \text{ et } -L \in BIP(\theta_L,X), \quad \theta_L \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

De plus, pour $R \in]0,\infty[$, $1 < p < +\infty$, $\psi \in L^p(0,R\,;X)$ et $\phi \in L^p(0,+\infty\,;X)$

1. $\mathcal{L}(\psi) : x \longmapsto L\int_0^x e^{(x-y)L}\psi(y)\,dy \in L^p(0,R;X)$.
   il existe $C_R > 0$
$$\|\mathcal{L}(\psi)\|_{L^p(0,R;X)} \leq C_R\|\psi\|_{L^p(0,R;\,X)}, \quad \psi \in L^p(0,R;X). \tag{3.1}$$

2. $x \longmapsto L\int_{\varkappa}^R e^{(y-x)L}\psi(y)\,dy \in L^p(0,R\,;X)$.

3. $x \longmapsto L\int_R^x e^{(x-y)L}\phi(y)\,dy \in L^p(0,+\infty\,;X)$.

4. $x \longmapsto L\int_x^{+\infty} e^{(y-x)L}\phi(y)\,dy \in L^p(0,+\infty\,;X)$.

5. $x \longmapsto Le^{xL}\int_0^{+\infty} e^{(y)L}\phi(y)\,dy \in L^p0,+\infty;X)$.

Preuve. 1) pour la premiere assertion on va appliquer le théorème de Dore– Venni à l'étude du problème

$$\begin{cases} u'(x) + Lu(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad x \in (0,1)$$

Alors,comme X est UMD et L est un opérateur liniare fermé dans X ,alors pour toute $f \in L^P(0,1\,;X)$ ce problème admet une unique solution stricte u telle que

$$u \in W^{1,p}(0,R;X) \cap L^p(0,R;D_A)$$

avec

$$u(x) = \int_0^x e^{(x-y)L}\psi(y)\,dy$$

et donc

$$x \longrightarrow L\int_0^x e^{(x-y)L}\psi(y)\,dy \in L^p(0,R;X)$$

2) c'est un conséquence de l'assertion1

$$L\int_{x}^{R}e^{(y-x)L}\psi\left(y\right)dy=L\int_{0}^{R-x}e^{((R-x)-s)L}\psi\left(R-s\right)ds.$$

3) pour lassertion 3 on utilise le résultat de Daprato-Grisvard [14]
4) en utilisant Dore [14]
on montre que : $F_1+F_2\in L^p\left(0,+\infty;X\right)$ $x\in(0,\infty)$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)=L\int_{x}^{x+1}e^{(y-x)}\phi\left(y\right)dy \\ F_2\left(x\right)=L\int_{x+1}^{+\infty}e^{(y-x)}\phi\left(y\right)dy \end{cases}$$

on a $F_2\in L^p\left(0,+\infty;X\right)$ et puisque L génère un semi–groupe analytique et $0\in\rho\left(L\right)$ donc il existe $M\geq1$ et $\omega\geq0$ pour tout $y>0$ $\left\|e^{yL}\right\|\leq Me^{-\omega y}$ et

$$\left\|Le^{yL}\right\|\leq My^{-1}e^{-\omega y} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left\|F_2\left(x\right)\right\|^P d\varkappa &= \int_0^{+\infty}\left\|\int_{x+1}^{+\infty}Le^{(y-x)L}\phi\left(y\right)dy\right\|^P dx \\
&\leq M^P\int_0^{+\infty}\left(\int_{x+1}^{+\infty}\frac{1}{y-x}e^{-(y-x)\omega}\left\|\phi\left(y\right)\right\|dy\right)^P dx \\
&\leq M^P\int_0^{+\infty}\left(\int_{\varkappa+1}^{+\infty}e^{-(y-x)\omega}\left\|\phi\left(y\right)\right\|dy\right)^p dx \\
&\leq M^P\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(g*h\right)\left(x\right)\right|^p dx,
\end{aligned}$$

telle que g et h définies par :

$$g\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x\geq-1\\ \exp\left(x\omega\right) & \text{si } x<-1\end{cases} \qquad \text{et} \qquad h\left(x\right)=\begin{cases}\left\|\phi\left(x\right)\ \right\| & \text{si } x\geq0\\ 0 & \text{si } x<0\ .\end{cases}$$

si $\phi\in L^p\left(0,+\infty;X\right)$ donc $h\in L^p\left(R\right)$,de plus $g\in L^1\left(R\right)$

$$\int_R\left|g\left(x\right)\right|dx = \int_{-\infty}^{-1}\exp\left(x\omega\right)dx<+\infty,$$

et $(g * h) \in L^p(R)$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \|F_2(x)\|^P dx < +\infty.$$

on montre $F_1 \in L^p(0, +\infty; X)$.
soit $j \in N$

$$\phi_j : x \longmapsto X_{[j;j+1[}(x)\,\phi(x),$$

on note $X_{[j;j+1[}$ par la fonction caractéristique de $([j, j+1[)$ et

$$\begin{cases} I_j = \int_j^{j+1} \left\| L \int_x^{j+1} e^{(y-x)L} \phi_j(y)\, dy \right\|^P dx \\ J_j = \int_j^{j+1} \left\| L \int_{J+1}^{x+1} e^{(y-x)L} \phi_{j+1}(y)\, dy \right\|^P dx. \end{cases}$$

on pose le changement de variable $\tau = 1 - x + j$ et $\sigma = 1 - y + j$, on obtient

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^1 \left\| L \int_{1-\tau+j}^{j+1} e^{(y-1+\tau-j)L} \phi_j(y)\, dy \right\|^P d\tau \\ &= \int_0^1 \left\| L \int_0^{\tau} e^{(\tau-\sigma)L} \phi_j(1-\sigma+j)\, d\sigma \right\|^P d\tau \\ &= \left\| \mathcal{L}\left(\phi_j(1-\cdot+j)\right) \right\|^P_{L^p(0,1;X)}, \end{aligned}$$

on obtient

$$I_j \leq (C_1)^P \left\| \phi_j(1-\cdot+j) \right\|^P_{L^p(0,1;X)} \leq (C_1)^P \left\| \phi_j \right\|_{L^p(j,j+1;X)} \tag{3.3}$$

utilisant (3.2) on trouve

$$\begin{aligned} J_j &= \int_0^1 \left\| L \int_{j+1}^{2-\tau+j} e^{(y-x)L} \phi_{j+1}(y)\, dy \right\|^P d\tau \\ &= \int_0^1 \left\| L \int_0^{1-\tau} e^{(s+\tau)L} \phi_{j+1}(s+j+1)\, ds \right\|^P d\tau \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left\| L e^{(s+\tau)L} \phi_{j+1}(s+j+1)\, ds \right\| \right)^P d\tau \\ &\leq M^P \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{s+\tau} \left\| \phi_{j+1}(s+j+1) \right\| ds \right)^P d\tau, \end{aligned}$$

Le noyau $\frac{1}{s+\tau}$ définit un opérateur borné dans $L^p(0,1;R)$, il existe $C>0$ telle que :

$$
\begin{aligned}
J_j &\leq CM^P \left\|\phi_{j+1}(.+j+1)\right\|^P_{L^p(0,1;R)} \\
&\leq CM^P \left\|\phi_{j+1}\right\|^P_{L^p(j+1,j+2;X)}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

finalement, on écrit

$$
\int_0^{+\infty} \|F_1(x)\|^P dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \|F_1(x)\|^P dx,
$$

On utilise (3.3)(3.4)

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\phi_j\right\|^P_{L^p(j,j+1;X)} = \|\phi\|^P_{L^p(0,+\infty;X)},
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \|F_1(x)\|^P d\varkappa &\leq 2^P \sum_{j=0}^{\infty} (I_j + J_j) \\
&\leq 2^P (C_1)^P \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\phi_j\right\|^P_{L^p(j,j+1;X)} + 2^P CM^P \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\phi_{j+1}\right\|^P_{L^p(j+1,j+2;X)} \\
&\leq 2^P \max\left((C_1)^P, CM^P\right) \|\phi\|_{L^p(0,+\infty;X)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

5) d'aprés la formule 3 et 4 , on a

$$
\begin{aligned}
Le^{xL}\int_0^{+\infty} e^{yL}\phi(y)\,dy &= Le^{xL}\int_0^{x} e^{(y)L}\phi(y)\,dy + Le^{xL}\int_x^{+\infty} e^{yL}\phi(y)\,dy \\
&= L\int_0^{x} e^{(x-y)L}e^{2yL}\phi(y)\,dy + e^{2xL}L\int_x^{+\infty} e^{(y-x)L}\phi(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

et d'après (3.2)

$$
y \to e^{2yL}\phi(y) \in L^P(0,+\infty;X)
$$

■

Lemme 3.3 *Soit X un espace de Banach et L est un générateur infitésimal d'un semi - groupe analytique, L inversible dans X..*

$R \in]0,+\infty[, 1 < p < +\infty,\ 0 < \theta < \frac{1}{p},\ \psi \in W^{\theta,p}(0,R;X)$.

On a :

1. $x \longmapsto L\int_0^x e^{(x-y)L}\psi(y)\,dy \in W^{\theta,p}(0,R\,;X) \subset L^p(0,R;X)$.

2. si : $R<+\infty$

$$x\longmapsto L\int\limits_{x}^{R}e^{(y-x)L}\psi\left(y\right)dy\in W^{\theta,p}\left(0,R\,;X\right)\subset L^{p}\left(0,R;X\right).$$

3. si : $R=+\infty$

$$x\longmapsto L\int\limits_{x}^{+\infty}e^{(y-x)L}\psi\left(y\right)dy\in W^{\theta,p}\left(0,+\infty\,;X\right)\subset L^{p}\left(0,R;X\right)$$

Preuve. ■

1. C'est le résultat de Daprato .G et P . Grisvard.
2. D'aprés lemme 3.2 assertion 2.
3. On utilise le lemme 3.2 assertion 4.

Lemme 3.4 *Soit* L *est génèrateur d'un semi–groupe analytique* $\left(e^{xL}\right)_{x\geq 0}$ *dans* X *et* $0\in\rho\left(L\right)$.

pour $f\in L^{p}\left(0,+\infty;X\right)$, *on obtient*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\int\limits_{0}^{x}e^{(x-y)L}f\left(y\right)dy=0$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\int\limits_{x}^{+\infty}e^{(y-x)L}f\left(y\right)dy=0$

Preuve. 1.Pour $x\in\left(0,+\infty\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}\alpha\left(x\right) &= \int\limits_{0}^{\varkappa}e^{(x-y)L}f\left(y\right)dy\\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\varkappa}{2}}e^{(x-y)L}f\left(y\right)dy+\int\limits_{\frac{\varkappa}{2}}^{\varkappa}e^{(x-y)L}f\left(y\right)dy\\ &= \alpha_{1}\left(x\right)+\alpha_{2}\left(x\right).\end{aligned}$$

d'aprés **(3.2)** , il existe $M\geq 1$ et $\omega>0$, pour tout $y>0$

$$\left\Vert e^{yL}\right\Vert\leq Me^{-\omega y}$$

donc pour $x\geq 0$

$$\begin{aligned}\left\Vert\alpha_{2}\left(x\right)\right\Vert &\leq \int\limits_{\frac{\varkappa}{2}}^{x}\left\Vert e^{(x-y)L}\right\Vert\left\Vert f\left(y\right)\right\Vert dy\\ &\leq M\int\limits_{\frac{\varkappa}{2}}^{x}e^{-\omega(x-y)}\left\Vert f\left(y\right)\right\Vert dy\end{aligned}$$

on pose $q=\frac{p}{p-1}$ on obtient d'après Holder

$$\left\|\alpha_2\left(x\right)\right\|\leq M\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}e^{-\omega q(x-y)L}dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\varkappa}\left\|f\left(y\right)\right\|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left\|\alpha_2\left(x\right)\right\| &\leq \frac{M}{\left(wq\right)^{\frac{1}{q}}}\left(1-e^{-\omega q\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}\left\|f\left(y\right)\right\|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{M}{\left(\omega q\right)^{\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{+\infty}\left\|f\left(y\right)\right\|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

et d'autre part $f\in L^{p}\left(0,+\infty;X\right)$, et

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{+\infty}\left\|f\left(y\right)\right\|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

Alors

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left\|\alpha_2\left(x\right)\right\|=0.$$

pour α_1, on écrit :

$$\begin{aligned}\left\|\alpha_1\left(x\right)\right\| &\leq \int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\left\|e^{(x-y)L}\right\|\left\|f\left(y\right)\right\|dy\\ &\leq M\left(\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}e^{-\omega q(x-y)}dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\left\|f\left(y\right)\right\|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{M}{\left(\omega q\right)^{\frac{1}{q}}}\left\|f\right\|_{L^{p}(0,+\infty;X)}\left(e^{-\omega q\frac{\pi}{2}}-e^{-\omega qx}\right)\end{aligned}$$

on trouve

$$\lim_{\varkappa\longrightarrow+\infty}\left\|\alpha_1\left(x\right)\right\|=0$$

2. d'après 1 on écrit

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_{x}^{+\infty}e^{(y-x)L}f\left(y\right)dy\right\| &\leq M\left(\int\limits_{x}^{+\infty}e^{-\omega q(y-x)}dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{x}^{+\infty}\left\|f\left(y\right)\right\|^{P}dy\right)^{\frac{1}{P}}\\ &\leq \frac{M}{\left(\omega q\right)^{\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_{x}^{+\infty}\left\|f\left(y\right)\right\|^{P}dy\right)^{\frac{1}{P}}\end{aligned}$$

on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\left\|\int_x^{+\infty}\left\|e^{(y-x)L}\right\|f(y)\,dy\right\|\right)=0.$$

■

Théorème 3.1

$$f\in L^p(0,+\infty;X)\,,\ 1<p<+\infty$$

Les deux assertions sont équivalentes :

1. $u_0\in(D(L_1,L_2)\,,X)_{\frac{1}{2p},p}$
2. *Le problème (1)-(2)admet une unique solution* (L_1,L_2).

Preuve. $\Longrightarrow u_0\in(D(L_1,L_2)\,,X)_{\frac{1}{2p},p}$

et considérer u donnée par (2.1)

Dabord

nous avons l'étude la régularite de u de (2.1)-(4) et remarque 3.1, on a pour $x\in(0,+\infty)$

$$\begin{cases} L_1L_2\xi_1(x)=L_1(L_1+L_2)^{-1}L_2\displaystyle\int_0^x e^{(x-y)L_2}f(y)\,dy\\ L_1L_2\xi_2(x)=L_2(L_1+L_2)^{-1}L_1\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{(y-x)L_1}f(y)\,dy,\end{cases}$$

et de

$$L_1(L_1+L_2)^{-1}\quad\text{et}\quad L_2(L_1+L_2)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\,,$$

On déduit du lemme 3.2 étape 3 et 4 cette

$$L_1L_2\xi_1,\quad L_1L_2\xi_2\in L^p(0,+\infty;X)\,,\,1<p<+\infty,$$

de plus

$$L_1\xi_1'=L_1L_2\xi_1+\ L_1(\ \ L_1+L_2)^{-1}f\in L^p(0,+\infty;X)\,,\ 1<p<+\infty,$$

de même pour $i,j\in\{1,2\}$

$$L_i\xi_j'\in L^p(0,+\infty;X)\,,\quad 1<p<+\infty,$$

et aussi

$\xi_1'+\xi_2'=L_2\xi_1+L_1\xi_2$, on obtient

$$(\xi_1+\xi_2)''\in L^p(0,+\infty;X)\qquad 1<p<+\infty.$$

on pose $\xi=\xi_1+\xi_2$,on en déduit que

$$\xi\in W^{2,p}(0,+\infty;X)\,,(L_1-L_2)\,\xi',L_1L_2\xi\in L^p(0,+\infty;X)\,.\tag{3.5}$$

de puis, nous avons $u = w - v + \xi$ où

$$v(x) = e^{xL_2} v_0 \text{ et } w(x) = e^{xL_2} u_0 \ , x \in (0, +\infty) ,$$

du lemme 3.2 assertion 5, on obtient

$$v \in W^{2,p}(0, +\infty; X), (L_1 - L_2) v', L_1 L_2 v \in L^p(0, +\infty; X) . \tag{3.6}$$

D'aprés la Remarque 3.1,on trouve

$$u_0 \in (D(L_1 L_2), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left(D\left(L_2^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p}, p} ,$$

$$x \longmapsto L_2^2 e^{xL_2} u_0 \in L^p(0, +\infty; X) .$$

$\forall i = 1, 2$

$$x \longmapsto L_i L_2 e^{xL_2} u_0 \in L^p(0, +\infty; X) ,$$

(On peut utiliser $L_i L_2 = L_i L_2^{-1} L_2^2$ pour $L_i L_2^{-1} \in \mathcal{L}(X)$)
Finalement

$$w \in W^{2,p}(0, +\infty; X), (L_1 - L_2) w', L_1 L_2 w \in L^p(0, +\infty; X) , \tag{3.7}$$

$u = w - v + \xi$ vérifier

$$u \in W^{2;p}(0, +\infty; X), (L_1 - L_2) u', L_1 L_2 u \in L^{\cdot p}(0, +\infty; X) .$$

On conclut, donc u vérifie (1)-2), il est clair que u vérifie (1) et $u(0) = u_{0,}$ du lemme 3.4 et 3.2, on obtient $u(+\infty) = 0$ est necessaire et suffisant .

$\Longleftarrow$ Le probléme (1)-(2) admet une solution stricte (L_1, L_2) ,on déduit ■

$$u_0 \in (D(L_1 L_2); X)_{\frac{1}{2p}, p} .$$

Théorème 3.2 *soit X un espace de Banach complexe et*

$$f \in W^{\theta, p}(0, +\infty; X), 0 < \theta < \frac{1}{p} \text{ et } 1 < p < +\infty.$$

Les deux assertions sont équivalentes :

1. $u_0 \in (D(L_1, L_2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.
2. *Le probléme* $(1) - (2)$ *admet une unique solution srticte* (L_1, L_2) .

Preuve.

Pour leThéorème 3.2 on utlise le preuve de théorème 3.1 et lemme 3.3.

Pour v et w même chose que théorème 3.1, pour $\xi_{1,}\xi_2$ qui dépendent de f on utilise lemme 3.3 au lieu du lemme 3.2. ■

Chapitre 4

Cas particuliers $L_1 = B - \left(B^2 - A\right)$, $L_2 = -B - \sqrt{\left(B^2 - A\right)}$

4.1 Construction de L_1et L_2

Soit A et B deux opérateurs vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^2 - A \text{ est fermé } \mathbb{R} \subset \rho\left(B^2 - A\right) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} \left\| \lambda \left(\lambda + B^2 - A\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\varkappa)} < +\infty \end{array} \right. \tag{4.1}$$

de plus $-\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}$ est générateur infitésimal d'un semi groupe analytique

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subseteq D\left(B\right), \tag{4.2}$$

$$\forall y \in D\left(B\right),\ B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} y = \left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} By,$$

$(*)$ $\pm B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}$ inversibles à inverses bornés.
De plus on suppose :

$$\exists \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \pm B + \left(B^2 + A\right)^{\frac{1}{2}} \in BIP\left(\theta, X\right), \tag{4.3}$$

$(**)$ $\pm B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}$ générateur de semi groupe analytique dans X

$$L_1 = B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } L_2 = -B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4}$$

Lemme 4.1 *Si L_1,L_2 définit par(4.4) . Alors*

$$\left\{ \begin{array}{c} D\left(L_1\right) = D\left(L_2\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right), \\ D\left(L_1 L_2\right) = D\left(L_2 L_1\right) = D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(-A\right), \\ L_1 L_2 = L_2 L_1 \subset -A, \end{array} \right.$$

et $(L_1 + L_2)^{-1} = -\frac{1}{2}(B^2 - A)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X)$ *.Notons que* $L_1L_2 = L_2L_1 = -A$ *si et seulement si :*

$$D(A) \subset D(B^2).$$

Finalement le théorème 3.1 et le lemme précédent nous conduisent au résultat suivant.

Théorème 4.1 *X est un espace UMD et*

$$f \in L^p(0,\infty\,;X)\,,\ 1 < P < +\infty.$$

les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_0 \in (D(B^2 - A)\,,X)_{\frac{1}{2},p}$.
2. *Le probleme* $(1) - (2)$ *admet une unique solution stricte vérifiant :*

$$u \in L^p\left(0,+\infty\,;D\left(B^2 - A\right)\right) \quad \text{et } u' \in L^p\left(0,+\infty;D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Théorème 4.2 *X est un espace de Banach et :*

$$f \in W^{\theta,p}(0,\infty\,;X)\,,\ 0 < \theta < \frac{1}{p} \text{ et } 1 < P < +\infty.$$

les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_0 \in (D(B^2 - A)\,,X)_{\frac{1}{2},p}$.
2. *Le probleme (1)-(2) vérifier une unique solution stricte vérifiant :*

$$u \in L^p\left(0,+\infty\,;D\left(B^2 - A\right)\right) \quad \text{et } u' \in L^p\left(0,+\infty;D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Chapitre 5

Exemple

Soit X UMD $\alpha \in \left]-\infty, 0\right[$,$\beta \in \left]0, +\infty\right[$,$m \in \mathbb{N}$ * et C un opérateur linéaire tel que

$$C \in BIP\left(\theta_c, X\right) \text{ et } 0 \in \rho\left(C\right), \text{ avec } \quad 0 < \theta C < \frac{\pi}{2m},$$

on considère A, B défini par

$$A = \alpha\beta C^{2m}, \; B = \frac{\alpha + \beta}{2} C^m$$

puisque $C \in BIP\ (\theta_c, X)$ pour tout $\mu > 0$, $\mu C^m \in BIP\ (m\theta_C, X)$ (voir J.Pruss et H. Sohr [9] , corollaire 3,p.444 et corollaire 1, P.435).

Mantenant ,on prend $L_1 = \alpha C^m$ et $L_2 = -\beta C^m$, on vérifie que toutes les hypothèses sur L_1 et L_2 sont satisfaites, nous pouvons applique les résultat précédent

Comme exemple simple, nous allons considérer $m = 1$, Ω borné dans $\mathbb{R}^n$ avec $\partial\Omega$ de classe C^2, $X = L^q\left(\Omega\right)$ avec $1 < p < +\infty$ et C tel que

$$\begin{cases} D\left(C\right) = W^{2,q}\left(\Omega\right) \cap W_0^{1,q}\left(\Omega\right), \\ \qquad Cu = -\Delta u. \end{cases}$$

Ona $0 \in \rho\left(C\right)$ et $C \in BIP\ (\theta, X)$ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$(voir l'exemple 3 en [5] P120).

On note

$$D(A) = D(B^2) = \left\{u \in w^{4,q}\left(\Omega\right): \; u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0\right\}.$$

en appliquant le théorème 3.1on obtient :

Proposition 5.1 *Soit* $p \in \left]1, +\infty\right[$,$f \in L^p\left(0, +\infty; L^q\left(\Omega\right)\right)$.
les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_0 \in \left(D\left(A\right), L^q\left(\Omega\right)\right)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. *Le probléme*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right) - \left(\alpha+\beta\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right) + \alpha\beta\Delta_y^2 u\left(x,y\right) = f\left(x,y\right), & \left(x,y\right) \in \left(0,+\infty\right)\times\Omega, \\ u\left(0,y\right) = u_0\left(y\right), & y \in \Omega, \\ u\left(+\infty,y\right) = 0, & y \in \Omega, \\ u\left(x,\zeta\right) = \Delta_y u\left(x,\zeta\right) = 0, & \left(x,\zeta\right) \in \left(0,+\infty\right)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

admet une unique solution stricte u,telle que :
$u \in w^{2,P}\left(0,+\infty; L^q\left(\Omega\right)\right) \cap L^P\left(0,+\infty; L^q\left(\Omega\right)\right)$ *et* $\acute{u} \in L^P\left(0,+\infty; L^q\left(\Omega\right)\right)$ *vérifiant(5.1).*

.

Bibliographie

[1] A. Favini, Parabolicity of second order differential equations in Hilbert spase, Semigroup Forum 42(1991), 303-331.

[2] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A.Yagi, Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces, *Funkcial. Ekvac. 49(2006), 193-214.*

[3] A. Pazy, Semigroupe of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berline, Heidelberg, Tokyo,1983.

[4] A. El Haial, R. Labbas, On the ellipticity and solvability of abstract second-order differential equation, Electron. J. Differential Equations 57 (2001), 1–18.

[5] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe, A. Yagi, On the solvability of complet abstract differential equations of elliptic type, Funkcial. Ekvac. 47(2004),205–224.

[6] C. J. K. Batty, R. Chill,S.Srivastava. : Maximal regularity for second order nonautonomous Cauchy problems,Studia Math. 189(2008),205-223.

[7] G. Da Prato, P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaire et équation différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. 45(9) (1975), 305-387.

[8] G. Dore, L^p Regularity for Abstract Differential Equations, Functional Analysis and Related Topics, Kyoto, 1991, Lecture Notes in Math, vol. 1540, Springer-Verlag, Berlin, 1993, pp. 25-38.

[9] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holand, Amsterdam, 1978.

[10] J.Prus, H. Sohr, On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces, Math. Z. 203 (1990), 429-452.

[11] J. Pruss, H. Sohr, Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L_p , Hiroshima Math. J. 23(1993), 161-192.

[12] J. Liang, T. Xiao, Wellposedness results for cerain classes of higher order abstract Cauchy problems connected with integrated semigroup, Semigroupe Forum 56(1998), 84-103.

[13] J. Pruss, Maximal regularity for abstract parabolic problems with inhomogeneous bounary data in L_p-space, Math. Bohem. 2(2002), 311-327.

[14] R. Chill, S. Serivastava, L^p-maximal regularity for second order Cauchy problems,Math. Z. 2155(2005), 715-718.