Résumé

On s'intéresse à l'étude de quelques problèmes différentiels fractionnaires dont les seconds membres admettent des singularités sur l'axe réel. On démontre certains résultats qui peuvent généraliser un travail de Z. Dahmani avec M.Z. Sarikaya qui a été récemment accepté pour publication.

Dédicace

A tous ceux qui me sont chèrs(es)...

Remerciement

En tout premier lieu, je remercie mon bon Dieu ALLAH le Tout Puissant, de m'avoir donné la force, l'audace, le courage, la patience, la volonté et la santé durant toute ma vie.

Je tiens à remercier vivement le Professeur Zoubir Dahmani d'avoir accepté d'encadrer ce travail, ainsi que pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils. J'aimerai aussi le remercier pour l'autonomie et la confiance qu'il m'a accordé, ce qui m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie également les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont attribué en acceptant de juger ce modeste travail.

Ma plus grande gratitude va à mes parents, pour leur soutien et leur disponibilité. Durrant toutes les années de ma scolarité, j'ai profité et bénéficié du savoir et du savoir-faire.

Je remercie très fort mes enseignants et tout le cadre professionnel qui a contribué à ma formation.

Une grande reconnaissance à toute ma famille et mes amis pour leur aide et compréhension.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous...

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire constitue une source d'attraction pour plusieurs chercheurs. Pour un petit historique, revenons à l'année 1695 quand Leibniz dans une lettre adressée à l'Hopital envisage la possibilité d'une nouvelle théorie des dérivées d'ordre non entier. L'Hopital fasciné par cette idée, s'intéroge dans une réponse à Leibniz sur la signification d'une dérivée d'ordre un demi !. Des années après, de nombreux chercheurs se sont intéressés à cette théorie ; parmis eux, Liouville et Riemann qui ont été les premiers à proposer des approches. On cite aussi, Weil, Greenwald, Caputo...Il fallait attendre les années quatre vingt dix pour voir les premières applications dans divers domaines vu que plusieurs chercheurs ont trouvé dans la dérivation fractionnaire un outil important pour proposer des modèles qui décrivent d'une façon plus précise les phénomènes physiques.
Dire une dérivée d'ordre non entier c'est dire des équations différentielles fractionnaires, qui elles aussi ont attiré une grande attention dans les dernières années vu que c'est une nouvelle théorie qui est apparu dans plusieurs domaines tels que la mecanique, la chimie, la biologie, l'économie, la théorie de controle et le traitement du signal... On réfère le lecteur à [1,7,8,9,10,11].
Dans ce mémoire, on traite des équations différentielles fractionnaires singulières couplées à dérivées au sens de Caputo avec différents ordres de dérivation et une singularité arbitraire sur l'axe réel. Les problèmes considérés sont originaux et peuvent généraliser le travail de Z. Dahmani avec M.Z. Sarikaya [7].
L'objectif de notre travail est de trouver des solutions intégrales exactes à ces problèmes puis, discuter l'existance et l'unicité de ces solutions en utilisant quelques théorèmes classiques de point fixe.
Ce mémoire est composé de trois chapitres et une conclusion. Comme le calcul fractionnaire est une nouvelle théorie on lui a consacré le premier chapitre, qui contient des définitions et des propriétés de l'intégrale fractionnaire et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann Liouville et au sens de Caputo.
Le deuxième chapitre comporte des notions de base et des applications, il est dévisé en deux parties : la partie des théorèmes de point fixe dans laquelle on expose les deux théorèmes de Banach et de Schaefer et une deuxième partie dans laquelle on s'intéresse à l'étude d'un problème couplé à dérivées fractionnaires non singulier.
Le troisième chapitre est l'originalité de ce travail, il est consacré à la résolution de deux problèmes singuliers à dérivées fractionnaires. Après avoir trouvé des solutions intégrales

exactes, on s'inéresse à l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de contraction de Banach et à l'existence d'au moins une solution en utilisant le théorème de Schaefer, voir [8,9].

Une conclusion générale avec quelques perspectives bibliographiques sont données à la fin de ce document.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire :

Introduction

Dans ce chapitre, on introduit les deux principaux axes du calcul fractinnaire qui sont l'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire. Ce chapitre comporte trois parties traitant dans la première partie des fonctions spéciales du calcul fractionnaire (fonction Gamma d'Euler et fonction Béta d'Euler) et leurs propriétés. Dans la deuxième partie, on introduit la définition de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouvillle ainsi que ses propriétés. Dans la troisième partie, on s'intérèsse aux dérivées fractinnaires au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, leurs propriétés et la relation entre elles.

1.1 Fonctions Spéciales du Calcul Fractionnaire

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1

La fonction Gamma d'Euler est une fonction complexe. Elle est donneé par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \ ; \ \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Cette fonction peut être aussi réelle si on prend $z \in \mathbb{R}_*^+$.

1.1.2 Fonction Béta d'Euler

Définition 1.1.2

La fonction Béta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par la formule :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

1.2 Intégrale Fractionnaire

Définition 1.2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Riemann-Liouville de f notée $J_a^\alpha f(x)$, par :

$$\begin{cases} J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0, \\ J_a^0 f(x) = f(x). \end{cases}$$

Si f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, alors,

$$J_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0, x > 0.$$

Proposition 1.2

Soit la fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

1. Semi-groupe et commutativité :

$$(J_a^\alpha J_a^\beta) f(x) = (J_a^\beta J_a^\alpha) f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x), x \in [a,b]. \tag{1.2.1}$$

2. L'application de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville sur la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$ est donnée par :

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\beta+\alpha}, \alpha > 0, \beta \geq 0, x \geq a. \tag{1.2.2}$$

1.3 Dérivées Fractionnaires

1.3.1 Dérivée au Sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1

Soient $0 < n-1 < \alpha < n, n = [\alpha]+1$ et f une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On définit la dérivée d'order α au sens de Riemman-Liouville de f noté ${}^{RL}D_a^\alpha f(x)$ par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1

Soient $0 < n-1 < \alpha < n$, la fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et α un réel positif. On a :

1.
$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.3.1.1}$$

2.
$$ J_a^{\alpha RL}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} \left(\lim_{x\to a^+} (J_a^{n-\alpha} f(x))^{(i)} \right). \tag{1.3.1.2}$$

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} \left(\lim_{x\to a^+} (J_a^{n-\alpha} f(x))^{(i)} \right). \tag{1.3.1.3}$$

Preuve :

Soient $0 < n-1 < \alpha < n$, la fonction continue $f[a,b] \to \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et α un réel positif :

1. Enn utilisant la définition 1.3.1 et utilisant la formule $(1.2.2)$, on obtient le résultat.
2. On utilise le dévlopement de Taylor de $J_a^{n-\alpha} f$ au voisinage de (a) d'ordre n avec reste intégral :
$$ J_a^n D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x) = J_a^{n-\alpha} f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} (J_a^{n-\alpha} f)^{(i)}(a) \frac{(x-a)^i}{i!}.$$
Grace à la continuité de la fonction $J_a^{n-\alpha} f$ en a, et par application de ${}^{RL}D_a^{n-\alpha}$, on obtient :
$$ {}^{RL}D_a^{n-\alpha} J_a^n D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_a^{n-\alpha}(x-a)^i}{i!} \left(\lim_{x\to a^+} (J_a^{n-\alpha} f)^{(i)}(x) \right),$$
avec $0 < n-\alpha < 1$, d'où :
$$ D_a^1 J_a^{1+\alpha RL} D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} \left(\lim_{x\to a^+} (J_a^{n-\alpha} f)^{(i)}(x) \right),$$
d'où le résultat.
3. On utilise la définition 1.3.1 :
$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \Longrightarrow D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x) = 0.$$

L'idée c'est de se débarasser de $D_a^n J_a^{n-\alpha}$, pour cela on applique J_a^n :

$$J_a^n D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x) = J_a^n 0 = 0.$$

En utilisant le développement de Taylor de $J_a^{n-\alpha} f$ au voisinage de (a) d'ordre n avec reste intégral et la continuté de $J_a^{n-\alpha} f$ en a, on obtient :

$$J_a^{n-\alpha} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1}{}_i \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\lim_{x \to a^+} (J_a^{n-\alpha} f(x))^{(i)} \right),$$

par application de ${}^{RL}D_a^{n-\alpha}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}{}_i \frac{{}^{RL}D_a^{n-\alpha}(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\lim_{x \to a^+} (J_a^{n-\alpha} f(x))^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} \left(\lim_{x \to a^+} (J_a^{n-\alpha} f(x))^{(i)} \right). \end{aligned}$$

Remarque

1. Les dérivées au sens de Riemann-Liouville de fonctions constantes ne sont pas nulles. Car si on pose $\beta = 0$ dans la formule (1.3.1.1), on obtient :

$$^{RL}D^\alpha(c) = c^{RL}D^\alpha(1) = c\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0, c \in \mathbb{R}. \tag{R1}$$

2. Dans la formule (1.3.1.2) , on remarque que lorsque $0 < \alpha < 1 = n$, on obtient :

$$J_a^{\alpha RL} D_a^\alpha f(x) = f(x). \tag{R2}$$

1.3.2 Dérivée au Sens de Caputo

Définition 1.3.2

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(]a, b[)$, notée ${}^C D_a^\alpha f(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt; a < t < b, \end{aligned}$$

avec

$$0 < n-1 < \alpha < n, n = [\alpha] + 1.$$

Proposition 1.3.2

Soient $0 < n-1 < \alpha < n$, $\beta \in \mathbb{R}$ et α un réel positif, et la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tels que $f \in C^n\left(]a,b[\right)$, on a alors :

1. $$ {}^{C}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} = {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta}. \tag{1.3.2.1}$$

2. Pour $\beta \in \mathbb{N}$ tel que $\beta < n = [\alpha]+1$, on aura :
$$ {}^{C}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = 0 \neq {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta}. \tag{1.3.2.2}$$

3. $$\begin{aligned} J_a^{\alpha C}D_a^{\alpha}f(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)}\left(\lim_{x\to a^+}(f(x))^{(i)}\right) \\ &= f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x-a)^i, c_i \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3.2.3}$$

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)}\left(\lim_{x\to a^+}(f(x))^{(i)}\right). \tag{1.3.2.4}$$

Preuve

Soient $0 < n-1 < \alpha < n$, $\beta \in \mathbb{R}$ et α un réel positif, et la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tels que $f \in C^n\left(]a,b[\right)$, on a alors :

1. En utilisant la définition 1.3.2 et la formule (1.2.2), on obtient le résultat.

2. Si on prend $\beta \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta - n + 1 \leq 0$, on obtient :
$$ {}^{C}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}J^{n-\alpha}(x-a)^{\beta-n} = 0,$$
d'où le résultat.

3. Par la définition 1.3.2, on a :
$$ {}^{C}D_a^{\alpha}f(x) = J_a^{n-\alpha}D^n f(x),$$

on applique J_a^α à cette égalité, et en utilisant le dévelopement de Taylor de la fonction f au voisinage de (a) d'ordre n avec reste intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) &= J_a^n D^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\lim_{x \to a^+} (f(x))^{(i)} \right). \end{aligned}$$

4. A partir de la formule (1.3.2.3) , on a :

$$J_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\lim_{x \to a^+} (f(x))^{(i)} \right),$$

de plus, on a comme hypothèse :

$$J_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = J_a^\alpha(0) = 0,$$

d'où :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\lim_{x \to a^+} (f(x))^{(i)} \right).$$

Remarque

1. La dérivée au sens de Caputo des fonctions constantes est nulle. En effet, si on prend $\beta = 0$ dans la formule (1.3.2.2), on obtient :

$${}^C D^\alpha(c) = c\, {}^C D^\alpha(1) = 0, c \in \mathbb{R}. \tag{R3}$$

2. De la formule (1.3.2.2), on déduit que les solutions de l'équation différentielle fractionnaire,

$${}^C D_a^\alpha(x(t)) = 0, \tag{R4}$$

sont des polynômes de degré inférieure ou égal à $n-1$

3. Dans la formule (1.3.2.3) , on remarque que :

$$J_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = f(x) \Longleftrightarrow f(a)^{(i)} = 0, i = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}^*. \tag{R5}$$

1.3.3 Lien Entre Caputo et Riemann-Liouville :

Soient $\alpha \in]n-1, n[, n = [\alpha]+1, n \in \mathbb{N}^*$, et la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que $f \in C^n\left(]a,b[\right)$, on a :

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) =^{RL} D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(x)\right]. \tag{1.3.4}$$

Démonstration

Le développement de f au voisinage de (a) d'ordre n avec reste intégrale est donné par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + J_a^n D^n f(x).$$

Par l'application de $J_a^{n-\alpha}$ aux deux membres de cette égalité, on obtient donc :

$$J_a^{n-\alpha} f(x) = J_a^{2n-\alpha} D_a^n f(x) + J_a^{n-\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right),$$

puis, on applique une dérivation classique d'ordre n :

$$\begin{aligned}
D^n J_a^{n-\alpha} f(x) &= D^n J_a^n J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x) + D^n J_a^{n-\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right), \\
J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x) &= D^n J_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right], \\
^{C}D_a^{\alpha} f(x) &= {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right].
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorèmes des Points Fixes et Problèmes Différentiels Fractionnaires

Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, on introduit quelques théorèmes de point fixe qui sont des outils très utiles pour la résolution des équations différentielles fractionnaires. La deuxième partie est consaccré aux EDFs non singulières.

2.1 Rappels au Passage

Définitions :

1. **Norme**

   Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{k}$ telle que :

   – $\|x\| = 0 \iff x = 0, \forall x \in E.$

   – $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}.$

   – $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E.$

2. **Espace vectoriel Normé**

   Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|x\|$, et on le note $(E, \|.\|)$.

3. **Suite de Cauchy**

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$, on dit que la suite x_n est de Cauchy si on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \; ona \, \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

4. **Espace complet**

   Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.

5. **Espace de Banach**

   On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé complet.

6. **Fonction k − lipschitzienne**

   Soient E une partie de $\mathbb{R}$, et la fonction $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est $k-lipschitzienne$ si :

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in E^2, |f(x) - f(y)| \leq k \, |x - y| \,.$$

   f est localement lipschitzienne si : $\forall x_0 \in E, \exists V(x_0)$, tel que f est $k - lipschitzienne$ sur $V(x_0)$.

   – Soit $f : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.On dit que f est $k - lipschitzienne$ par rapport a la deuxieme variable si

$$\exists k > 0, \forall (t, x), (t, y) \in E \times \mathbb{R}^d, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \, \|x - y\| \,.$$

7. **Application contractante**

   Soient E un espace de Banach, l'application $f : E \to F$ est dite contractante si elle est $k - lipschitzienne$ avec $0 < k < 1$, c'est à dire :

$$\exists k, 0 < k < 1, \forall x, y \in X \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \, \|x - y\|_E \,.$$

8. **Point fixe**

   Soit f une application d'un ensemble E dans lui même, on appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que

$$f\,(x) = x.$$

9. **Ensemble équicontinue**

   Pour tout élément x de E l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v = \vartheta(x), \forall f \in A, \forall y \in v, d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

10. **Ensemble uniformement borné**

    On dit que G un ensemble uniformement borné s'il xiste une constante $M > 0$ tel que

$$\|g\|_{\infty} \leq M, \forall g \in G.$$

11. **Opérateur continu**

    Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de A, si on a la proprieté suivante :

    Pour toute suite $(x_n)_n$ de A converge vers x_0 la suite $U(x_n)$ converge vers $U(x_0)$ c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(\lim_{n\to\infty} x_n) = U(x_0).$$

    – L'opérateur U est dit continu sur A , s'il est continu en chaque point de l'ensemble A.

12. **Opérateur complètement continu**

    Soient E et F deux espaces de *Banach*, l'opérateur continu $T : E \to F$ est complètement continu s'il transforme tout compact de E en une partie relativement compacte dans F

13. **Opérateur borné**

    Un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ tel que :

$$\|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

    La plus petite des constantes C vérifiant cette relation est appelée norme de U notée $\|U\|$ et donnée par :

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F .$$

14. **Opérateur compact**

    Soient Eet F deux espace de Banach, une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite compacte si l'image $T(\bar{B}_E)$ par l'application T de la boule unité fermée $\bar{B}_E$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F , on note $C(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F.

Théorème 2.1 *(Ascoli-Arzila)*

Soient X et Y deux espaces de Banach. Si X est compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a. *L'ensemble A est relativement compacte dans $C(X,Y)$.*

b. $\begin{cases} \text{L'ensemble } A \text{ est équicontinue en tout point de } X. \\ A(x) := \{f(x), f \in A\} \text{ est borné.} \end{cases}$

Théorème de Point Fixe de Banach

Soient E un espace de Banach et $f : X \subset E \to X$ (X est un fermé de E) une application contractante, alors f admet un point fixe unique $x_0 \in X$, c'est à dire :

$$\exists! x_0 \in X \qquad f(x_0) = x_0.$$

Théorème de Point Fixe de Schaefer

Soient E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur complètement continu , Si l'ensemble

$$\chi = \{u \in E : u = \mu T u, 0 < \mu < 1\}$$

est borné, alors T possède au moin un point fixe.

2.2 Problèmes Différentiels Fractionnaires

Récemment, les équations différentielles fractionnaires (EDFs) ont émergé comme une nouvelle théorie intéréssante. Cette théorie a inspiré un grand nombre de chercheurs dans divers domaines tels que la physique, la chimie, l'éléctronique, la biologie, la théorie de controle, on se réfère à [1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13].. Dans cette section, on va s'intéresser à la résolution

d'un problème différentielle fractionnaire à dérivées au sens de Caputo, puis on va discuter l'existence et l'unicité de ce problème en utlisant des théorèmes classiques de point fixe.
Le probleme traité est un problème différentielle fractionnaire couplé avec différents ordres de dérivation et des conditions aux limites homogènes.

2.2.1 Problème Couplé

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha_1}x_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), {}^C D^{\gamma_1}x_1(t)), & t \in J \\ {}^cD^{\alpha_2}x_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), {}^C D^{\gamma_2}x_2(t)), & t \in J \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$x_k(0) = 0 \ , \tag{2.2.2}$$

avec $0 < \gamma_k < \alpha_k < 1$, $t \in J := [0, T]\,, T > 0$, $f_k : C(J \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et les dérivations ${}^C D^{\alpha_k}$et ${}^C D^{\gamma_k}$ sont au sens de Caputo, $k = 1, 2$.

Solution Intégrale :

Théorème 1
La solution intégrale du problème $(2.2.1) - (2.2.2)$ *est donnée par :*

$$x_k(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_k(s, , x_1(s), x_2(s), {}^c D^{\gamma_k} x_k(s))]ds, k = 1, 2. \tag{2.2.3}$$

Preuve
Par application de la formule $(1.3.2.3)$ au problème $(2.2.1)$, on obtient :

$$x_k(t) =$$

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_k(s, , x_1(s), x_2(s), {}^c D^{\gamma_k} x_k(s)))ds - c^k, \tag{2.2.4}$$

avec $k = 1, 2$, $c^k \in \mathbb{R}$, et $0 < \alpha_k < 1$.
En utilisant les conditions (2.2.2), on obtient les valeurs de $c^k, k = 1, 2$. En remplaçant ces valeurs dans (2.2.4), on obtient $(2.2.3)$.■

Existence et Unicité des Solutions :

Dans ce qui suit, pour $k=1,2$, on considère les hypothéses suivantes :

(H_1) : Il existe des constantes positives $(\mu_k)_j$, $j=1,2,3; k=1,2$, telles que pour tout $t \in J$ et $(x_1, x_{2,} x_3)$, $(y_1, y_2, y_3) \in R^3$, on a :

$$\begin{aligned} |f_k(t, x_1, x_{2,} x_3) - f_k(t, y_1, y_2, y_3)| &\leq \sum_{j=1}^{3} (\mu_k)_j |x_j - y_j| \\ &\leq L_k \sum_{j=1}^{3} |x_j - y_j|, L_k = \max_{j=1\ldots3} \{(\mu_k)_j\}. \end{aligned}$$

(H_2) : $\max\limits_{k=1,2}\{W_k\} < 1, W_k := \max\{W_k', W_k^{"}\}$, $k=1,2$.

(H_3) : Pour $k=1,2$, les fonctions $f_k : J \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et bornées par S_k, i.e. : il existe $S_k > 0, \forall t \in J, \forall u \in \mathbb{R}^3, |f_k(t,u)| \leq S_k$.

On considère également pour $k=1,2$, les quantités suivantes :

$$W_k' := \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+1)} T^{\alpha_k}, W_k^{"} := \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} T^{\alpha_k-\gamma_k}. \tag{2.2.5}$$

et

$$C_k := \frac{S_k}{\Gamma(\alpha_k+1)} (t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}). \tag{2.2.6}$$

Existence et Unicité :

D'abord, on introduit l'espace de Banach $(X \times X, \|(x_1, x_2)\|_{X\times X})$, avec :

$$X \times X := \{(x_1, x_2) : x_k \in C(J, \mathbb{R}), {}^c D^{\gamma_k} x_k \in C(J, \mathbb{R})\}, k=1,2,$$

muni de la norme :

$$\|(x_1, x_2)\|_{X\times X} = \max(\|x_1\|_\infty, \|{}^c D^{\gamma_1} x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \|{}^c D^{\gamma_2} x_2\|_\infty); \;\; \|x\|_\infty = \sup_{t\in J} |x(t)|,$$

avec $0 < \gamma_k < \alpha_k < 1, k=1,2$.

Théorème 2

Sous les hypothéses $(H_i)_{i=1,2}$, *le problème* $(2.2.1)-(2.2.2)$ *admet une unique solution sur* J.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de contraction de Banach. On procède en deux étapes :

Etape 1 : On défint l'opérateur non linéaire $T : X \times X \to X \times X$ par :

$$T\left(x_1, x_2\right)(t) :=$$

$$\left(T_1\left(x_1, x_2\right)(t), T_2\left(x_1, x_2\right)(t)\right), \ t \ \in \ J,$$

où, pour $k = 1, 2$,

$$T_k\left(x_1, x_2\right)(t) =$$

$$\int\limits_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} - f_k(s, , x_1(s), x_2(s), ^c D^{\gamma_k} x_k(s))]ds.$$

On veut prouver que l'opérateur T est contractant. Pour tout $t \in J, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$, on a :

$$\begin{array}{c} T_k(x_1, x_2)(t) - T_k(y_1, y_2)(t) \\ = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_k - 1}[f_k(s, , y_1(s), y_2(s), ^c D^{\gamma_k} y_k(s)) \\ - f_k(\tau, , x_1(s), x_2(s), ^c D^{\gamma_k} x_k(s))]ds. \end{array}$$

Donc,

$$\begin{array}{c} |T_k(x_1, x_2)(t) - T_k(y_1, y_2)(t)| \\ \leq \left| \begin{array}{c} \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_k - 1}[f_k(s, , x_1(s), x_2(s), ^c D^{\gamma_k} x_k(s)) \\ - f_k(s, , y_1(s), y_2(s), ^c D^{\gamma_k} y_k(s))]ds \end{array} \right| . \end{array}$$

L'hypothèse (H_1) nous permet d'écrire :

$$|T_k(x_1, x_2)(t) - T_k(y_1, y_2)(t)|$$

$$\leq \left| \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_k - 1} \left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k - ^c D^{\gamma_k} y_k|\right)(s) ds \right| .$$

Ce qui veut dire,

$$\|T_k(x_1, x_2) - T_k(y_1, y_2)\|_\infty$$

$$\leq \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k)} \sup_{t \in [0,T]} \int_0^t (t-s)^{\alpha_k - 1} \left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k - ^c D^{\gamma_k} y_k|\right)(s) ds.$$

D'où,

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$
$$\leq \left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+1)}T^{\alpha_k}\right)\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

En utilisant (2.2.5), pour $k=1,2$, on a :

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty \leq W_k'\,\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

Etape 2 : On passe maintenant à étudier la dérivée ${}^cD^\gamma T(x_1,x_2)$, pour $k=1,2$. On va essayer de majorer la quantité :

$$\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)-{}^cD^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\|_\infty,$$

pour pouvoir obtenir une majoration de la quantité :

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_{X\times X}.$$

On considère donc la dérivée fractionnaire ${}^cD^\gamma T(x_1,x_2): X\times X\to X\times X$ donnée par :

$${}^cD^\gamma T(x_1,x_2)(t):=$$

$$\left({}^cD^{\gamma_1}T_1(x_1,x_2)(t),{}^cD^{\gamma_2}T_2(x_1,x_2)(t)\right),t\in J,k=1,2.$$

Pour $k=1,2$, on peut écrire

$${}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t)=$$
$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}[f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s))]ds.$$

Pour tout $t\in J,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X$ et pour $k=1,2$, on a :

$${}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t)-{}^cD^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)(t)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_k-\gamma_k-1}\left(f_k(s,,y_1(s),y_2(s),{}^cD^{\gamma_k}y_k(s))\right.$$
$$\left.-f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s))\right)ds.$$

Ce qui est équivalent à :

$$|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t)-{}^cD^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)(t)|$$
$$\leq\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}[f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s))\right.$$
$$\left.-f_k(s,,y_1(s),y_2(s),{}^cD^{\gamma_k}y_k(s))]ds\right|.$$

L'hypothèse (H_1) donne :

$$|^{c}D^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t) -^{c} D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)(t)|$$

$$\leq \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|^{c}D^{\gamma_k}x_k -^{c} D^{\gamma_k}y_k|)(s)ds.$$

Donc,

$$\|^{c}D^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -^{c} D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|^{c}D^{\gamma_k}x_k -^{c} D^{\gamma_k}y_k|\right)(s)ds.$$

D'où,

$$\|^{c}D^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -^{c} D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}T^{\alpha_k-\gamma_k}\right)\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

Grâce à (2.2.5), pour $k=1,2$, on a :

$$\|^{c}D^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -^{c} D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\|_\infty \leq W_k^{"}\,\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

Ce qui implique :

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_{X\times X}$$

$$\leq W_k\,\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

Finalement :

$$\|T(x_1,x_2)-T(y_1,y_2)\|_{X\times X}$$

$$\leq \max_{k=1,2}W_k\,\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

L'hypothèse (H_2) nous garantit que T est contractant.

D'où, le problème $(2.2.1)-(2.2.2)$ admet une unique solution sur J. ■

Existence d'au moins une solution :

Théorème 3

Sous l'hypothése (H_3), le problème $(2.2.1)-(2.2.2)$ admet au moins une solution sur J.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de Schaeffer. On procède en quatre étapes :

Etape 1 : La continuité des fonctions $f_k, k = 1, 2$ (l'hypothèse (H_3)) donne la continuité de l'opérateur T sur $X \times X$.

Etape 2 : On définit l'ensemble $\Omega_r := \{(x_1, x_2) \in X \times X, \|(x_1, x_2)\|_{X \times X} \leq r\}$, avec $r > 0$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega_r, k = 1, 2$, on obtient

$$\|T_k(x_1, x_2)\|_X \leq \frac{S_k T^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}.$$

Ce qui donne

$$\|T(x_1, x_2)\|_{X \times X} \leq \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{S_k T^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \right).$$

Par conséquent, l'image de tout ensemble borné par l'opérateur T est aussi un ensemble borné dans $X \times X$.

Etape 3 : Equicontinuité de $T(\Omega_r)$:

Pour tout $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, (x_1, x_2) \in \Omega_r$ et pour $k = 1, 2$, on a :

$$\|T_k(x_1, x_2)(t_2) - T_k(x_1, x_2)(t_1)\|_X \leq C_k. \tag{2.2.7}$$

Dans (2.2.7), les quantités $C_k, k = 1, 2$, (données dans (2.2.6)) sont indépendantes de x_1, x_2, et tendent vers zéro quand t_1 tend vers t_2. Ainssi, comme conséquence des étapes $1, 2, 3$ et en utilisant le théorme 2.1 de Arzela-Ascoli, on déduit que T est complètement continue.

Etape 4 : On veut montrer que l'ensemble défini par :

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in X \times X, (x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2), 0 < \mu < 1\}$$

est borné.

Soit $(x_1, x_2) \in \Omega$, alors $(x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2)$, pour $0 < \mu < 1$. Donc, pour tout $t \in J$, on a :

$$x_1(t) = \mu T_1(x_1, x_2)(t), x_2(t) = \mu T_2(x_1, x_2)(t).$$

D'où,

$$\|(x_1, x_2)\|_{X \times X} = \mu \|T(x_1, x_2)\|_{X \times X}, 0 < \mu < 1.$$

Puisque les fonctions f_k sont bornées (d'après (H_3)) , alors grace à (2.2.7), on obtient :

$$\|(x_1, x_2)\|_{X\times X} \leq \mu \max_{k=1,2} C_k, 0 < \mu < 1.$$

Finalement, Ω est borné.

D'où, le problème $(2.2.1) - (2.2.2)$ admet au moins une solution sur J.■

Chapitre 3

Problèmes Différentiels Fractionnaires Singuliers

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires EDFs singulières ont attiré une grande attention. En effet, elles ont une grande signification dans la vie réelle car elles modélisent des phénomènes de la mécanique, la chimie, la biologie,l'économie, la théorie de contrôle et le traitement du signal. De nombreux auteurs se sont intéréssés à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles fractionnaires singulières non linéaires, en utilisant de nombreux théorèmes classiques de point fixe, voir [7,8,9,14].
Dans [7], Z. Dahmani et M.Z. Sarikaya ont considéré des équations différentielles fractionnaires couplées de type Lane-Emden. Ils se sont intéréssés à l'existence et l'unicité des solutions et quelques Ulam stabilités du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta_1}({}^{c}D^{\alpha_1}+b_1g_1\left(t\right))x_1\left(t\right)+f_1(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right))=h_1\left(t\right), \quad 0<t<1 \\ {}^{c}D^{\beta_2}({}^{c}D^{\alpha_2}+b_2g_2\left(t\right))x_2\left(t\right)+f_2(t,x_1\left(t\right),x_2\left(t\right))=h_2\left(t\right), \quad 0<t<1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} x_k\left(0\right) &= 0\ ,\ {}^{c}D^{\alpha_k}x_k\left(1\right)+b_kg_k\left(1\right)x_k\left(1\right)=0, \\ 0 &< \alpha_k<1, 0<\beta_k<1, b_k\geq 0, \quad k=1,2. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, on commence par introduire la notion de singularité dans les deux cas classique et fractionnaire puis on s'intérèsse à la résolution de quelques EDFs singulières couplées avec deux différents ordres de dérivation et une singularité arbitraire. Les dérivées considérés dans ce chapitre sont au sens de Caputo pour donner un sens aux conditions initiales. On discute l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de contraction de Banach. Puis, on discute l'exsitence d'au moins une solution en utilisant le théorème de Schaefer.

Le premier problème est donné par :

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta_1}({}^cD^{\alpha_1}+b_1g_1(t))x_1(t)+f_1(t,x_1(t),x_2(t),{}^cD^{\gamma_1}x_1(t))=h_1(t), & t\in J \\ {}^cD^{\beta_2}({}^cD^{\alpha_2}+b_2g_2(t))x_2(t)+f_2(t,x_1(t),x_2(t),{}^cD^{\gamma_2}x_2(t))=h_2(t), & t\in J \end{cases}$$

$$x_k(0)=0\ ,\ {}^cD^{\alpha_k}x_k(T)+b_kg_k(T)x_k(T)=\int_0^T G_k(\tau)x_k(\tau)\,d\tau,$$

avec $0<\gamma_k<\alpha_k<1, 0<\beta_k<1$ et $t\in J:=[0,T], T>0$, les dérivations ${}^CD^{\beta_k}$, ${}^CD^{\alpha_k}$et ${}^CD^{\gamma_k}$ sont au sens de Caputo. La fonction g_k est supposée être singulière au point $T_0\in J$, $k=1,2$.

Dans le deuxieme problème, on change l'ordre de dérivation :

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta_1}({}^cD^{\alpha_1}+b_1g_1(t))x_1(t)+f_1(t,x_1(t),x_2(t),{}^cD^{\gamma_1}x_1(t))=h_1(t), t\in J \\ {}^cD^{\beta_2}({}^cD^{\alpha_2}+b_2g_2(t))x_2(t)+f_2(t,x_1(t),x_2(t),{}^cD^{\gamma_2}x_2(t))=h_2(t), t\in J \end{cases}$$

$$x_k(0)=0, x_k'(0)=0,\ k=1,2$$

$${}^cD^{\alpha_k}x_k(0)=0,\ \ {}^cD^{\alpha_k}x_k(1)+b_kg_k(1)x_k(1)=0,\ k=1,2$$

où $1<\alpha_k<2, 1<\beta_k<2, 0<\gamma_k<1$ et $J:=[0,T], T>0$. Les dérivations ${}^CD^{\beta_k}$, ${}^CD^{\alpha_k}$et ${}^CD^{\gamma_k}$ sont au sens de Caputo. La fonction g_k est supposée être singulière au point $T_0\in J$, $k=1,2$.

3.1 Singularité

3.1.1 Singularité par Rapport à la Variable Temporelle

Cas Classique :

– On appelle équation différentielle singulière à dérivées classiques d'ordre $n, n\in\mathbb{N}$, par rapport à la variable temporelle, au point $T_0\in J:=[0,T]\subset\mathbb{R}$, toute équation différentielle de la forme :

$$x^{(n)}(t)=f(t,x(t),...,x^{(n-1)}(t)),$$

où : $t \in J, x \in C^n(J,\mathbb{R})$ et f n'est pas continue au point T_0 c'est à dire $\lim\limits_{t\to T_0} f(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)) = \infty$.

Cas Fractionnaire :

On appelle équation différentielle singulière fractionnaire d'ordre $\alpha, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, par rapport à la variable temporelle, au point $T_0 \in J$, toute équation différentielle fractionnaire de la forme :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), ...,^{C} D^{\alpha-(n-1)}x(t)),$$

avec : $t \in J, x \in C^n(J,\mathbb{R})$ avec $n = [\alpha] + 1$ et f n'est pas continue au point T_0 c'est à dire $\lim\limits_{t\to T_0} f(t, x(t), ...,^{C} D^{\alpha-(n-1)}x(t)) = \infty$.

Ou de la forme :

$$^{RL}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), ...,^{RL} D^{\alpha-(n-1)}x(t)),$$

avec : $t \in J, x \in C(J,\mathbb{R})$ et f n'est pas continue au point T_0 c'est à dire $\lim\limits_{t\to T_0} f(t, x(t), ...,^{RL} D^{\alpha-(n-1)}) = \infty$.

3.1.2 Singularité par Rapport à la Variable Spatiale

Cas Classique :

– On appelle équation différentielle singulière à dérivées classiques d'ordre $n, n \in \mathbb{N}$, par rapport à la variable spatiale, au point $u_0 \in \mathbb{R}^n$, toute équation différentielle de la forme :

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)),$$

où : $t \in J, x \in C^n(J,\mathbb{R})$ et f n'est pas continue au point $u_0 := (x_0, ..., x_0^{(n-1)})$, c'est à dire $\lim\limits_{u\to u_0} f(t, u) = \infty$, avec $u := (x(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$.

Cas Fractionnaire :

On appelle équation différentielle singulière fractionnaire d'ordre $\alpha, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$,par rapport à la variable spatiale, au point $u_0 \in \mathbb{R}^n$, toute équation différentielle fractionnaire de la forme :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), ...,^{C} D^{\alpha-(n-1)}x(t)),$$

avec : $t \in J, x \in C^n(J,\mathbb{R})$ avec $n = [\alpha]+1$ et f n'est pas continue au point $u_0 := (x_0,...,x_0^{(n-1)})$, c'est à dire $\lim\limits_{u\to u_0} f(t,u) = \infty$, avec $u := (x(t),...,{}^C D^{\alpha-(n-1)}x(t)) \in \mathbb{R}^n$.
Ou de la forme :

$$^{RL}D^{\alpha}x(t) = f(t,x(t),...,{}^{RL} D^{\alpha-(n-1)}x(t)),$$

avec : $t \in J, x \in C(J,\mathbb{R})$ et f n'est pas continue au point $u_0 := (x_0,...,x_0^{(n-1)})$, c'est à dire $\lim\limits_{u\to u_0} f(t,u) = \infty$, $u := (x(t),...,{}^{RL} D^{\alpha-(n-1)}x(t)) \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Problème 1 :

On considère le problème :

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta_1}({}^cD^{\alpha_1} + b_1 g_1(t))x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t), {}^c D^{\gamma_1}x_1(t)) = h_1(t), & t \in J \\ {}^cD^{\beta_2}({}^cD^{\alpha_2} + b_2 g_2(t))x_2(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t), {}^c D^{\gamma_2}x_2(t)) = h_2(t), & t \in J \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$x_k(0) = 0\ ,\ {}^cD^{\alpha_k}x_k(T) + b_k g_k(T)\, x_k(T) = \int_0^T G_k(\tau)\, x_k(\tau)\, d\tau, \tag{3.2.2}$$

avec $0 < \gamma_k < \alpha_k < 1, 0 < \beta_k < 1$ et $t \in J := [0,T], T > 0$, les dérivations ${}^C D^{\beta_k}$, ${}^C D^{\alpha_k}$et ${}^C D^{\gamma_k}$ sont au sens de Caputo. La fonction $g_k$est supposée être singulière au point $T_0 \in J$ c'est à dire $g_k : J - \{T_0\} \to \mathbb{R}^+$ est continue avec $\lim\limits_{t\to T_0} g_k(t) = +\infty$, des conditions sur les fonctions $f_k : J \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $h_k : J \to \mathbb{R}$ seront établies dans ce qui suit,$k = 1, 2$.

3.2.1 Solution Intégrale :

Théorème 1

Supposons que $(h_k)_{k=1}^2 \in C(J,\mathbb{R})$ *et* $(f_k)_{k=1}^2 \in C(J\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. *Alors, la solution intégrale du problème* $(3.2.1)-(3.2.2)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} x_k(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)} [h_k(s) - f_k(s,, x_1(s), x_2(s), {}^c D^{\gamma_k}x_k(s))]ds d\tau \\ - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} b_k g_k(\tau) x_k(\tau) d\tau + \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} G_k(\tau)\, x_k(\tau)\, d\tau \\ - \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \left(\int_0^T \frac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)} [h_k(\tau) - f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k}x_k(\tau))] \right),\ k = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Preuve

Par application de la formule (1.3.2.3) au problème (3.2.1) , on obtient :

$$\left(D^{\alpha_k} + b_k g_k(\tau)\right) x_k(\tau) =$$

$$\int_0^{\tau} \frac{(\tau - s)^{\beta_k - 1}}{\Gamma(\beta_k)} (h_k(s)\, ds - f_k(s, , x_1(s), x_2(s), {}^c D^{\gamma_k} x_k(s)))ds - c^k,$$

avec $k = 1, 2,\ c^k \in \mathbb{R}$, et $0 < \beta_k < 1$.

On applique la même proposition, on aura :

$$x_k(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\tau} \frac{(\tau - s)^{\beta_k - 1}}{\Gamma(\beta_k)} (h_k(s)\, ds - f_k(s, , x_1(s), x_2(s), {}^c D^{\gamma_k} x_k(s)))dsd\tau$$

$$- \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} b_k g_k(\tau)\, x_k(\tau) d\tau - \frac{c^k t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} - c'^k, \tag{3.2.4}$$

où $k = 1, 2$ et $c'^k \in \mathbb{R}$.

En utilisant les conditions (3.2.2), on obtient les valeurs de c^k et $c'^k, k = 1, 2$. En remplaçant ces valeurs dans (3.2.4), on obtient (3.2.3) .■

3.2.2 Existence et Unicité des Solutions :

Dans ce qui suit, pour $k = 1, 2$, on considère les hypothéses suivantes :

(H_1) : Il existe des constantes positives $(\mu_k)_j$, $j = 1, 2, 3; k = 1, 2$, telles que pour tout $t \in J$ et (x_1, x_2, x_3) , $(y_1, y_2, y_3) \in R^3$, on a :

$$\begin{aligned} \left| f_k(t, x_1, x_2, x_3) - f_k(t, y_1, y_2, y_3) \right| &\leq \sum_{j=1}^{3} (\mu_k)_j \left| x_j - y_j \right| \\ &\leq L_k \sum_{j=1}^{3} \left| x_j - y_j \right|, L_k = \max_{j=1\ldots3} \{(\mu_k)_j\}. \end{aligned}$$

(H_2) : La fonction $G_k : J \to \mathbb{R}$ est continue et $\|G_k\|_\infty = \sup_{t \in J} |G_k(t)| = G_k, k = 1, 2$.

(H_3) : Pour $k = 1, 2$, il existe $\lambda_k, 0 < \lambda_k < \alpha_k < 1$, $w_k(t) = (t - T_0)^{\lambda_k} g_k(t)$ est continue sur J et $\|w_k\|_\infty = \underset{t \in J}{Sup} |w_k(t)| = \underset{t \in J}{Sup} \left|(t - T_0)^{\lambda_k} g_k(t)\right| = M_k$.

(H_4) : $\max\limits_{k=1,2}\{W_k\} < 1, W_k := \max\{W_k', W_k^{"}\}$, $k = 1, 2$.

(H_5) : Pour $k = 1, 2$, les fonctions $f_k : J \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h_k : J \to \mathbb{R}$ sont continues et bornées respectivement par S_k et R_k, i.e. : il existe $S_k > 0, \forall t \in J, \forall u \in \mathbb{R}^3, |f_k(t, u)| \leq S_k$ et il existe $R_k > 0, \forall t \in J, |h_k(t)| \leq R_k$.

On considère également pour $k = 1, 2$, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} W_k' \ &: \ = 3L_k \left(\frac{T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + \frac{T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)} \right) + |b_k| \, M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} \left(T - T_0\right)^{\alpha_k-\lambda_k} + \frac{G_k}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} T^{\alpha_k+1}, \\ W_k^{"} \ &: \ = 3L_k \left(\frac{T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)} + \frac{T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k+1)} \right) + |b_k| \, M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k+1)} \left(T - T_0\right)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k} \\ &\quad + \frac{G_k}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)} T^{\alpha_k-\gamma_k+1}. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

et

$$\begin{aligned} C_k \ &: \ = \frac{(S_k+R_k)\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + r\,|b_k| \, M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} \left((t_2 - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} - (t_1 - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} \right) \\ &\quad + r \frac{G_k}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} \left(t_2^{\alpha_k+1} - t_1^{\alpha_k+1} \right) + \frac{(S_k+R_k)\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Existence d'une Solution Unique :

On introduit l'espace de Banach $(X \times X, \|(x_1, x_2)\|_{X\times X})$, avec :

$$X \times X := \left\{ (x_1, x_2) : x_k \in C\left(J, \mathbb{R}\right), ^{c}D^{\gamma_k} x_k \in C\left(J, \mathbb{R}\right) \right\}, k = 1, 2,$$

muni de la norme :

$$\|(x_1, x_2)\|_{X\times X} = \max\left(\|x_1\|_\infty, \|^c D^{\gamma_1} x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \|^c D^{\gamma_2} x_2\|_\infty \right); \ \ \|x\|_\infty = \sup_{t\in J} |x(t)|,$$

avec $0 < \gamma_k < \alpha_k < 1, k = 1, 2$.

Théorème 2

Sous les hypothéses $(H_i)_{i=1}^4$, *le problème* $(3.2.1) - (3.2.2)$ *admet une unique solution sur* J.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de contraction de Banach. On procède en deux étapes :

Etape 1 : On défint l'opérateur non linéaire $T : X \times X \rightarrow X \times X$ par :

$$T\left(x_1, x_2\right)(t) :=$$

$$\left(T_1\left(x_1, x_2\right)(t), T_2\left(x_1, x_2\right)(t)\right), \; t \in J,$$

où, pour $k = 1, 2$,

$$T_k\left(x_1, x_2\right)(t) =$$

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(s) - f_k(s,, x_1(s), x_2(s), ^c D^{\gamma_k} x_k(s))]ds d\tau$$

$$-\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} b_k g_k(\tau) x_k(\tau) d\tau + \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \int_0^T G_k(\tau) x_k(\tau) d\tau$$

$$-\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(\tau) - f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau))]d\tau.$$

On veut prouver que l'opérateur T est contractant. Pour tout $t \in J, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$, on a :

$$\begin{gathered}
T_k(x_1, x_2)(t) - T_k(y_1, y_2)(t) \\
= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}[f_k(\tau,, y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \\
-f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau))]d\tau
\end{gathered}$$

$$-\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau) - y_k(\tau)]d\tau + \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \int_0^T G_k(\tau)[x_k(\tau) - y_k(\tau)]d\tau$$

$$\begin{gathered}
-\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}[f_k(\tau,, y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \\
-f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau))]d\tau, k = 1, 2.
\end{gathered}$$

Donc,

$$\begin{gathered}
|T_k(x_1, x_2)(t) - T_k(y_1, y_2)(t)| \\
\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}[f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right. \\
\left. -f_k(\tau,, y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))]d\tau \right|
\end{gathered}$$

$$+\left|\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau) - y_k(\tau)]d\tau\right| + \left|\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \int_0^T G_k(\tau)[x_k(\tau) - y_k(\tau)]d\tau\right|$$

$$\begin{gathered}
+\left|\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}[f_k(\tau,, x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right. \\
\left. -f_k(\tau,, y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))]d\tau \right| .
\end{gathered}$$

L'hypothèse (H_1) nous permet d'écrire :

$$|T_k(x_1,x_2)(t) - T_k(y_1,y_2)(t)|$$

$$\leq \left| \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1} \left(|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^cD^{\gamma_k}x_k -^c D^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau \right|$$

$$+ \left| \tfrac{b_k}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau \right| + \left| \tfrac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} \int\limits_0^T G_k(\tau)\left[x_k(\tau)-y_k(\tau)\right]d\tau \right|$$

$$+ \left| \tfrac{L_k t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} \left(|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^cD^{\gamma_k}x_k -^c D^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau \right|.$$

Ce qui veut dire,

$$\|T_k(x_1,x_2) - T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1} \left(|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^cD^{\gamma_k}x_k -^c D^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau$$

$$+ \tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k)} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}(\tau-T_0)^{-\lambda_k} \left|(\tau-T_0)^{\lambda_k} g_k(\tau)\right| |x_k(\tau)-y_k(\tau)|\, d\tau$$

$$+ \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)} \sup_{t\in[0,T]} t^{\alpha_k} \int\limits_0^T |G_k(\tau)|\, |x_k(\tau)-y_k(\tau)|\, d\tau$$

$$+ \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k)} \sup_{t\in[0,T]} t^{\alpha_k} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^cD^{\gamma_k}x_k -^c D^{\gamma_k}y_k|)(\tau)d\tau.$$

Par (H_2) and (H_3), on obtient :

$$\|T_k(x_1,x_2) - T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \tfrac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}\, d\tau$$

$$+ \tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k)} M_k \|x_k-y_k\|_\infty \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}(\tau-T_0)^{-\lambda_k}\, d\tau + \tfrac{T^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} T G_k \|x_k-y_k\|_\infty$$

$$+ \tfrac{3L_k T^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k)} \|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} d\tau.$$

D'où,

$$\|T_k(x_1,x_2) - T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} T^{\alpha_k+\beta_k} + \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)} T^{\alpha_k+\beta_k} \right) \|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}$$

$$+ \left(\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\, M_k}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} (T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} + \frac{G_k}{\Gamma(\alpha_k+1)} T^{\alpha_k+1} \right) \|x_K-y_K\|_\infty .$$

Et donc,

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$
$$\leq \left[\left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}+\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}\right)T^{\alpha_k+\beta_k}+\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\,M_k}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)}(T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k}+\frac{G_k}{\Gamma(\alpha_k+1)}T^{\alpha_k+1}\right]$$
$$\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

En utilisant (3.2.5), pour $k=1,2$, on a :

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty \leq W_k' \,\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}.$$

Etape 2 : On passe maintenant à étudier la dérivée ${}^cD^\gamma T(x_1,x_2)$, pour $k=1,2$. On va majorer la quantité :

$$\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)-{}^cD^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\|_\infty,$$

pour pouvoir avoir une majoration de la quantité :

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_{X\times X}.$$

On considère donc la dérivée fractionnaire ${}^cD^\gamma T(x_1,x_2) : X\times X\to X\times X$ donnée par :

$${}^cD^\gamma T(x_1,x_2)(t):=$$

$$\left({}^cD^{\gamma_1}T_1(x_1,x_2)(t),{}^cD^{\gamma_2}T_2(x_1,x_2)(t)\right),t\in J,k=1,2.$$

Pour $k=1,2$, on peut écrire

$${}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t)=$$
$$\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}\int_0^\tau\frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(s)-f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s))]dsd\tau$$

$$-\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)}b_kg_k(\tau)x_k(\tau)d\tau+\frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}\int_0^T G_k(\tau)\,x_k(\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(\tau)-f_k(\tau,,x_1(\tau),x_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}x_k(\tau))]d\tau.$$

Pour tout $t\in J,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X$ et pour $k=1,2$, on a :

$${}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2)(t)-{}^cD^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} \left(f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \right. \\ \left. - f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right) d\tau$$

$$-\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau + \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} \int_0^T G_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau$$

$$-\frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} \left(f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \right. \\ \left. - f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right) d\tau.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2)(t) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2)(t) \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} [f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right. \\ \left. - f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))] d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau \right| + \left| \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} \int_0^T G_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} [f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right. \\ \left. - f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), {}^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))] d\tau \right|$$

L'hypothèse (H_1) donne :

$$\left| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2)(t) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2)(t) \right|$$

$$\leq \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^c D^{\gamma_k} x_k - {}^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau$$

$$+ \left| \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau \right| + \left| \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} \int_0^T G_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{L_k t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^c D^{\gamma_k} x_k - {}^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau \right|.$$

Donc,

$$\left\| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2) \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} \left(|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^c D^{\gamma_k} x_k - {}^c D^{\gamma_k} y_k| \right)(\tau) d\tau$$

$$+ \frac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} (\tau-T_0)^{-\lambda_k} \left| (\tau-T_0)^{\lambda_k} g_k(\tau) \right| |x_k(\tau)-y_k(\tau)| d\tau$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} \sup_{t\in[0,T]} t^{\alpha_k-\gamma_k} \int_0^T |G_k(\tau)| |x_k(\tau)-y_k(\tau)| d\tau$$

$$+ \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k)} \sup_{t\in[0,T]} t^{\alpha_k-\gamma_k} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |{}^c D^{\gamma_k} x_k - {}^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau.$$

En utilisant (H_2) et (H_3), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -{}^c D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\right\|_\infty \\
&\leq \tfrac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \left\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\right\|_{X\times X} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1}\,d\tau \\
&+\tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} M_k \left\|x_k-y_k\right\|_\infty \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}(\tau-T_0)^{-\lambda_k}\,d\tau + \tfrac{T^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)} T G_k \left\|x_k-y_k\right\|_\infty \\
&+\tfrac{3L_kT^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k)} \left\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\right\|_{X\times X} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}d\tau.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\left\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -{}^c D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\right\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)}T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k} + \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k}\right) \left\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\right\|_{X\times X} \\
&+\left(\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\,M_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k+1)}(T-T_0)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k} + \frac{G_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}T^{\alpha_k-\gamma_k+1}\right) \left\|x_k-y_k\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\begin{aligned}
&\left\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -{}^c D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\right\|_\infty \\
&\leq \Bigg[\left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)} + \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}\right)T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k} \\
&+\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\,M_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k+1)}(T-T_0)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k} + \frac{G_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}T^{\alpha_k-\gamma_k+1}\Bigg] \\
&\left\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\right\|_{X\times X} .
\end{aligned}$$

Grâce à (3.2.5), pour $k=1,2$, on a :

$$\left\|{}^cD^{\gamma_k}T_k(x_1,x_2) -{}^c D^{\gamma_k}T_k(y_1,y_2)\right\|_\infty \leq W_k^{"} \left\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\right\|_{X\times X} .$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k(x_1,x_2) - T_k(y_1,y_2)\right\|_{X\times X} \\
&\leq W_k \left\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\right\|_{X\times X} .
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&\left\|T(x_1,x_2) - T(y_1,y_2)\right\|_{X\times X} \\
&\leq \max_{k=1,2} W_k \left\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\right\|_{X\times X} .
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H_4) nous garantit que T est contractant.

D'où, le problème $(3.2.1)-(3.2.2)$ admet une unique solution sur J. ■

Existence d'au moins une solution :

Théorème 3

Sous les hypothéses $(H_i)_{i=2,3,5}$ *, le problème* $(3.2.1)-(3.2.2)$ *admet au moins une solution sur* J.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de Schaeffer. On procède en quatre étapes :

Etape 1 : La continuité des fonctions $f_k, h_k, w_k, k=1,2$ (les hypothèses (H_3) et (H_5)) implique la continuité de l'opérateur T sur $X \times X$.

Etape 2 : On définit l'ensemble $\Omega_r := \{(x_1,x_2) \in X \times X, \|(x_1,x_2)\|_{X\times X} \leq r\}$, avec $r>0$. Pour tout $(x_1,x_2) \in \Omega_r, k=1,2$, on obtient

$$\|T_k(x_1,x_2)\|_X \leq$$
$$\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}+r\,|b_k|\,M_k\frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)}\,(T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k}+r\frac{G_k}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}T^{\alpha_k+1}+\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}.$$

Ce qui donne

$$\|T(x_1,x_2)\|_{X\times X} \leq$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}+r\,|b_k|\,M_k\frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)}\,(T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k}+r\frac{G_k}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}T^{\alpha_k+1}+\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\beta_k+1)}\right).$$

Par conséquent, l'image de tout ensemble borné par l'opérateur T est aussi un ensemble borné dans $X \times X$.

Etape 3 : Equicontinuité de $T(\Omega_r)$:

Pour tout $t_1,t_2 \in J, t_1<t_2, (x_1,x_2) \in \Omega_r$ et pour $k=1,2$, on a :

$$\|T_k(x_1,x_2)(t_2)-T_k(x_1,x_2)(t_1)\|_X \leq C_k. \tag{3.2.7}$$

Dans (3.2.7), les quantités $C_k, k=1,2$, (données dans (3.2.6)) sont indépendantes de x_1,x_2, et tendent vers zéro quand t_1 tend vers t_2. Ainssi, comme conséquence des étapes $1,2,3$ et en utilisant le théorme 2.1 de Arzela-Ascoli, on déduit que T est complètement continue.

Etape 4 : On veut montrer que l'ensemble défini par :

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in X \times X, (x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2), 0 < \mu < 1\}$$

est borné.

Soit $(x_1, x_2) \in \Omega$, alors $(x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2)$, pour $0 < \mu < 1$. Donc, pour tout $t \in J$, on a :

$$x_1(t) = \mu T_1(x_1, x_2)(t), x_2(t) = \mu T_2(x_1, x_2)(t).$$

D'où,

$$\|(x_1, x_2)\|_{X \times X} = \mu \|T(x_1, x_2)\|_{X \times X}, 0 < \mu < 1.$$

Puisque les fonctions f_k et h_k sont bornées (d'après (H_5)) , alors grace à (3.2.7), on obtient :

$$\|(x_1, x_2)\|_{X \times X} \leq \mu \max_{k=1,2} C_k, 0 < \mu < 1.$$

Finalement, Ω est borné.

D'où, le problème (3.2.1) $-$ (3.2.2) admet au moins une solution sur J.$\blacksquare$

3.3 Problème 2 :

Ce problème est donné par :

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta_1}({}^cD^{\alpha_1} + b_1 g_1(t))x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t), {}^c D^{\gamma_1} x_1(t)) = h_1(t), t \in J \\ {}^cD^{\beta_2}({}^cD^{\alpha_2} + b_2 g_2(t))x_2(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t), {}^c D^{\gamma_2} x_2(t)) = h_2(t), t \in J \end{cases} \tag{3.3.1}$$

$$x_k(0) = 0, x_k'(0) = 0, \ k = 1, 2$$

$${}^cD^{\alpha_k} x_k(0) = 0, \quad {}^cD^{\alpha_k} x_k(1) + b_k g_k(1) x_k(1) = 0, \ k = 1, 2, \tag{3.3.2}$$

avec $1 < \alpha_k < 2, 1 < \beta_k < 2, 0 < \gamma_k < 1$ et $t \in J := [0, T], T > 0$, les dérivations ${}^C D^{\beta_k}$, ${}^C D^{\alpha_k}$et ${}^C D^{\gamma_k}$ sont au sens de Caputo. La fonction g_k est supposée être singulière au point $T_0 \in J$ c'est à dire $g_k : J - \{T_0\} \to \mathbb{R}^+$ est continue avec $\lim_{t \to T_0} g_k(t) = +\infty$. Des conditions sur les fonctions $f_k : J \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $h_k : J \to \mathbb{R}$ seront établies dans ce qui suit,$k = 1, 2$.

3.3.1 Solution intégrale :

Théorème 1

Supposons que $(h_k)_{k=1}^2 \in C(J,\mathbb{R})$ *et* $(f_k)_{k=1}^2 \in C(J\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. *Alors, la solution intégrale du problème* $(3.3.1)-(3.3.2)$ *est donnée par l'expression :*

$$x_k(t)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(s)-f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s))]dsd\tau$$
$$-\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}b_kg_k(\tau)x_k(\tau)d\tau$$
$$-\frac{t^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)}\left(\int_0^T \frac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(\tau)-f_k(\tau,,x_1(\tau),x_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}x_k(\tau))]\right),\ k=1,2. \tag{3.3.3}$$

Preuve

Par application de la formule $(1.3.2.3)$ au problème $(3.3.1)$, on obtient :

$$(D^{\alpha_k}+b_kg_k(\tau))\,x_k(\tau)=$$
$$\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}(h_k(s)-f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s)))ds-c_0^k-c_1^k\tau,$$

avec $k=1,2,\ (c_0^k),(c_1^k)\in\mathbb{R}$, et $1<\beta_k<2$.

On applique la même proposition, on aura :

$$x_k(t)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}(h_k(s)\,ds-f_k(s,,x_1(s),x_2(s),{}^cD^{\gamma_k}x_k(s)))dsd\tau$$
$$-\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}b_kg_k(\tau)\,x_k(\tau)d\tau-\frac{c_0^kt^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}-\frac{c_1^kt^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)}-c_0'^k-c_1'^kt, \tag{3.3.4}$$

où $k=1,2$ et $(c_0'^k),(c_1'^k)\in\mathbb{R}$, $1<\alpha_k<2$.

En utilisant les conditions (3.3.2), on obtient les valeurs de c^k et $c'^k, k=1,2$. En remplaçant ces valeurs dans (3.3.4), on obtient $(3.3.3)$.■

3.3.2 Existence et Unicité des Solutions :

Dans ce qui suit, pour $k=1,2$, on considère les hypothéses suivantes :

(H_1) : Il existe des constantes positives $(\mu_k)_j$, $j = 1, 2, 3; k = 1, 2$, telles que pour tout $t \in J$ et pour $(x_1, x_{2,} x_3)$, $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} |f_k(t, x_1, x_{2,} x_3) - f_k(t, y_1, y_2, y_3)| &\leq \sum_{j=1}^{3} (\mu_k)_j |x_j - y_j| \\ &\leq L_k \sum_{j=1}^{3} |x_j - y_j|, L_k = \max_{j=1\ldots3} \{(\mu_k)_j\}. \end{aligned}$$

(H_2) : Pour $k = 1, 2$, il existe $\lambda_k, 0 < \lambda_k < \alpha_k < 1$, $w_k(t) = (t - T_0)^{\lambda_k} g_k(t)$ est continue sur J et $\|w_k\|_\infty = \underset{t\in J}{Sup} |w_k(t)| = \underset{t\in J}{Sup} \left|(t - T_0)^{\lambda_k} g_k(t)\right| = M_k$.
(H_3) : $\max\limits_{k=1,2} \{W_k\} < 1, W_k := \max\{W'_k, W"_k\}$, $k = 1, 2$,
(H_4) : Pour $k = 1, 2$, les fonctions $f_k : J \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h_k : J \to \mathbb{R}$ sont continues et bornées respectivement par S_k et R_k, i.e. : il existe $S_k > 0, \forall t \in J, \forall u \in \mathbb{R}^3, |f_k(t, u)| \leq S_k$ et il existe $R_k > 0, \forall t \in J, |h_k(t)| \leq R_k$.

On considère également pour $k = 1, 2$, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} W'_k \;\; &: = 3L_k \left(\frac{T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + \frac{T^{\alpha_k+\beta_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} \right) + |b_k| M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} (T - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} \\ W"_k \;\; &= 3L_k \left(\frac{T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)} + \frac{T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} \right) \\ &\quad + |b_k| M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k+1)} (T - T_0)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k}, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

et

$$\begin{aligned} C_k \;\; : &= \frac{(S_k + R_k)(t_2^{\alpha_k+\beta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k})}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + \frac{(S_k + R_k)(t_2^{\alpha_k+\beta_k+1} - t_1^{\alpha_k+\beta_k+1})}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} \\ &\quad + r |b_k| M_k \frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} \left((t_2 - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} - (t_1 - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} \right). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Existence d'une Solution Unique :

On introduit l'espace de Banach $(X \times X, \|(x_1, x_2)\|_{X\times X})$, avec :

$$X \times X := \{(x_1, x_2) : x_k \in C(J, \mathbb{R}), {}^c D^{\gamma_k} x_k \in C(J, \mathbb{R})\}, k = 1, 2,$$

muni de la norme :

$$\|(x_1,x_2)\|_{X\times X}=\max\left(\|x_1\|_\infty,\|x_2\|_\infty,\|^cD^{\gamma_1}x_1\|_\infty,\|^cD^{\gamma_2}x_2\|_\infty\right);\ \ \|x_k\|_\infty=\sup_{t\in J}|x_k(t)|\,,\ k=1,2,$$

avec $0<\gamma_k<1,\ k=1,2.$

Théorème 2

Sous les hypothéses $(H_i)_{i=1}^3$*, le problème* $(3.3.1)-(3.3.2)$ *admet une unique solution sur* J*.*

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de contraction de Banach. On procède en deux étapes :

Etape 1 : On définit l'opérateurr non linéaire $T:X\times X\to X\times X$ par :

$$T\left(x_1,x_2\right)(t):=$$

$$\left(T_1\left(x_1,x_2\right)(t),T_2\left(x_1,x_2\right)(t)\right),\ t\ \in\ J,$$

avec, pour $k=1,2,$

$$T_k\left(x_1,x_2\right)(t)=$$

$$\int\limits_0^t\tfrac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\int\limits_0^\tau\tfrac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(s)-f_k(s,,x_1\left(s\right),x_2\left(s\right),^cD^{\gamma_k}x_k\left(s\right))]dsd\tau$$

$$-\int\limits_0^t\tfrac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}b_kg_k(\tau)x_k(\tau)d\tau$$

$$-\tfrac{t^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)}\int\limits_0^T\tfrac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}[h_k(\tau)-f_k(\tau,,x_1\left(\tau\right),x_2\left(\tau\right),^cD^{\gamma_k}x_k\left(\tau\right))]d\tau.$$

On doit montrer que T est contractant.

Pour tout $t\in J,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X$ et pour $k=1,2,$ on a :

$$T_k(x_1,x_2)(t)-T_k(y_1,y_2)(t)$$

$$\begin{gathered}=\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}[f_k(\tau,,y_1\left(\tau\right),y_2\left(\tau\right),^cD^{\gamma_k}y_k\left(\tau\right))\\ -f_k(\tau,,x_1\left(\tau\right),x_2\left(\tau\right),^cD^{\gamma_k}x_k\left(\tau\right))]d\tau\end{gathered}$$

$$-\tfrac{b_k}{\Gamma(\alpha_K)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_k-1}g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau$$

$$\begin{gathered}-\tfrac{t^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k)}\int_0^T(T-\tau)^{\beta_k-1}[f_k(\tau,,y_1\left(\tau\right),y_2\left(\tau\right),^cD^{\gamma_k}y_k\left(\tau\right))\\ -f_k(\tau,,x_1\left(\tau\right),x_2\left(\tau\right),^cD^{\gamma_k}x_k\left(\tau\right))]d\tau.\end{gathered}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&|T_k(x_1,x_2)(t)-T_k(y_1,y_2)(t)| \\
\leq &\left|\tfrac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}[f_k(\tau,,x_1(\tau),x_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}x_k(\tau)) \right. \\
&\left. -f_k(\tau,,y_1(\tau),y_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}y_k(\tau))]d\tau\right| \\
&+\left|\tfrac{b_k}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau\right| \\
+ &\left|\tfrac{t^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k)}\int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}[f_k(\tau,,x_1(\tau),x_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}x_k(\tau)) \right. \\
&\left. -f_k(\tau,,y_1(\tau),y_2(\tau),{}^cD^{\gamma_k}y_k(\tau))]d\tau\right|.
\end{aligned}$$

Grâce à (H_1), on obtient :

$$\begin{aligned}
&|T_k(x_1,x_2)(t)-T_k(y_1,y_2)(t)| \\
\leq &\left|\tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|{}^cD^{\gamma_k}x_k-{}^cD^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau\right| \\
&+\left|\tfrac{b_k}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)]d\tau\right| \\
+ &\left|\tfrac{L_k t^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k)}\int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|{}^cD^{\gamma_k}x_k-{}^cD^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau\right|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty \\
\leq &\tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|{}^cD^{\gamma_k}x_k-{}^cD^{\gamma_k}y_k|\right)(\tau)d\tau \\
&+\tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}(\tau-T_0)^{-\lambda_k}\left|(\tau-T_0)^{\lambda_k}g_k(\tau)\right||x_k(\tau)-y_k(\tau)|\,d\tau \\
&+\tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k)}\sup_{t\in J}t^{\alpha_k+1}\int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|{}^cD^{\gamma_k}x_k-{}^cD^{\gamma_k}y_k|)(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H_2), donne :

$$\begin{aligned}
&\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty \\
\leq &\tfrac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k+\beta_k-1}\,d\tau \\
&+\tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k)}M_k\|x_k-y_k\|_\infty\sup_{t\in J}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-1}(\tau-T_0)^{-\lambda_k}\,d\tau \\
&+\tfrac{3L_kT^{\alpha_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k)}\|(x_1-y_1),(x_2-y_2)\|_{X\times X}\sup_{t\in J}\int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1}d\tau.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|T_k(x_1,x_2)-T_k(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} T^{\alpha_k+\beta_k} + \frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} T^{\alpha_k+\beta_k+1} \right) \left\| (x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \right\|_{X\times X}$$

$$+ \left(\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\, M_k}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} (T - T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} \right) \|x_k - y_k\|_\infty .$$

D'où,

$$\|T_k(x_1, x_2) - T_k(y_1, y_2)\|_\infty$$

$$\leq \left[\left(\frac{3L_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + \frac{3TL_k}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} \right) T^{\alpha_k+\beta_k} + \frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\, M_k}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)} (T - T_0)^{\alpha_k-\lambda_K} \right]$$

$$\left\| (x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \right\|_{X\times X} .$$

Par Conséquent, en utilisant (3.3.5), on peut voir que :

$$\|T_k(x_1, x_2) - T_k(y_1, y_2)\|_\infty \leq W'_k \left\| (x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \right\|_{X\times X} .$$

Etape 2 : On considère la dérivée fractionnaire ${}^cD^\gamma T(x_1, x_2) : X \times X \to X \times X$ donnée par :

$${}^cD^\gamma T\,(x_1, x_2)\,(t) :=$$

$$\left({}^cD^{\gamma_1} T_1\,(x_1, x_2)\,(t)\,, {}^c D^{\gamma_2} T_2\,(x_1, x_2)\,(t)\right),\ t \ \in \ J, 0 < \gamma_k < 1,\ k = 1, 2,$$

où, pour $k = 1, 2$:

$${}^cD^{\gamma_k} T_k\,(x_1, x_2)\,(t) =$$

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)} [h_k(s) - f_k(s, , x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, {}^c D^{\gamma_k} x_k\,(s))] ds d\tau$$

$$- \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} b_k g_k(\tau) x_k(\tau) d\tau$$

$$- \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)} \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)} [h_k(\tau) - f_k(\tau, , x_1\,(\tau)\,, x_2\,(\tau)\,, {}^c D^{\gamma_k} x_k\,(\tau))] d\tau.$$

Pour tout $t \in J, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ et pour $k = 1, 2$ on a :

$${}^cD^{\gamma_k} T_k(x_1, x_2)(t) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1, y_2)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} \left(f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \right.$$
$$\left. - f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right) d\tau$$

$$- \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)] d\tau$$

$$- \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} \left(f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau)) \right.$$
$$\left. - f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right) d\tau.$$

D'où :

$$|^c D^{\gamma_k} T_k(x_1, x_2)(t) -^c D^{\gamma_k} T_k(y_1, y_2)(t)|$$
$$\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} [f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right.$$
$$\left. - f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))] d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)] d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} [f_k(\tau, , x_1(\tau), x_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} x_k(\tau)) \right.$$
$$\left. - f_k(\tau, , y_1(\tau), y_2(\tau), ^c D^{\gamma_k} y_k(\tau))] d\tau \right|.$$

En utilisant (H_1), on obtient :

$$|^c D^{\gamma_k} T_k(x_1, x_2)(t) -^c D^{\gamma_k} T_k(y_1, y_2)(t)|$$

$$\leq \frac{L_K}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k -^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau$$

$$+ \left| \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} g_k(\tau)[x_k(\tau)-y_k(\tau)] d\tau \right|$$

$$+ \left| \frac{L_k t^{\alpha_k-\gamma_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k)} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k -^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau \right|.$$

Et donc,

$$\|^c D^{\gamma_k} T_k(x_1, x_2) -^c D^{\gamma_k} T_k(y_1, y_2)\|_\infty$$
$$\leq \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \sup_{t\in J} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k -^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau$$

$$+ \frac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} \sup_{t\in J} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} (\tau-T_0)^{-\lambda_k} \left| (\tau-T_0)^{\lambda_k} g_k(\tau) \right| |x_k(\tau)-y_k(\tau)| d\tau$$

$$+ \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k)} \sup_{t\in J} t^{\alpha_k-\gamma_k+1} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} (|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |^c D^{\gamma_k} x_k -^c D^{\gamma_k} y_k|)(\tau) d\tau.$$

Par (H_2), on a :

$$\|^c D^{\gamma_k} T_k(x_1, x_2) -^c D^{\gamma_k} T_k(y_1, y_2)\|_\infty$$

$$\leq \tfrac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k)} \left\| (x_1-y_1), (x_2-y_2) \right\|_{X\times X} \sup_{t\in J} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k-1}\, d\tau$$

$$+\tfrac{|b_k|}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k)} M_k \left\| x_k-y_k \right\|_\infty \sup_{t\in J} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_k-\gamma_k-1} (\tau-T_0)^{-\lambda_k}\, d\tau$$

$$+\tfrac{L_k T^{\alpha_k-\gamma_k+1}}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k)} \left\| (x_1-y_1), (x_2-y_2) \right\|_{X\times X} \sup_{t\in J} \int_0^T (T-\tau)^{\beta_k-1} d\tau.$$

Et alors,

$$\left\| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2) \right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)} T^{\alpha_k-\gamma_K+\beta_k} + \frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1} \right) \left\| (x_1-y_1), (x_2-y_2) \right\|_{X\times X}$$

$$+\left(\frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\, M_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k+1)} (T-T_0)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k} \right) \left\| x_k-y_k \right\|_\infty .$$

Ce qui implique que :

$$\left\| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2) \right\|_\infty$$

$$\leq \left[\left(\frac{L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+\beta_k+1)} + \frac{T L_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+2)\Gamma(\beta_k+1)} \right) T^{\alpha_k-\gamma_k+\beta_k} + \frac{\Gamma(1-\lambda_k)\,|b_k|\, M_k}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_K-\lambda_k+1)} (T-T_0)^{\alpha_k-\gamma_k-\lambda_k} \right]$$

$$\left\| (x_1-y_1), (x_2-y_2) \right\|_{X\times X} .$$

En utllidant (3.3.5), on obtient :

$$\left\| {}^c D^{\gamma_k} T_k(x_1,x_2) - {}^c D^{\gamma_k} T_k(y_1,y_2) \right\|_\infty \leq W_k^{"} \left\| (x_1-y_1), (x_2-y_2) \right\|_{X\times X} .$$

D'où,

$$\left\| T_k(x_1,x_2) - T_k(y_1,y_2) \right\|_{X\times X}$$

$$\leq W_k \left\| (x_1-y_1, x_2-y_2) \right\|_{X\times X} .$$

Finalement,

$$\left\| T(x_1,x_2) - T(y_1,y_2) \right\|_{X\times X}$$

$$\leq \max_{K=1,2} W_K \left\| (x_1-y_1, x_2-y_2) \right\|_{X\times X} .$$

Par (H_3), on obtient la contraction de T.

D'où, le problème $(3.3.1)-(3.3.2)$ admet une unique solution sur J. ■

Existence d'au moins une solution :

Théorème 3

Sous les hypothéses $(H_i)_{i=2,4}$, *le problème* $(3.3.1)-(3.3.2)$ *admet au moins une solution sur* J.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème de Schaeffer. On procède en quatre étapes :

Etape 1 : La continuité des fonctions $f_k, h_k, w_k, k=1,2$ donne la continuité de l'opérateur T sur $X \times X$.

Etape 2 : On définit l'ensemble $\Omega_r := \{(x_1, x_2) \in X \times X, \|(x_1, x_2)\|_{X\times X} \leq r\}$, avec $r>0$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega_r, k=1,2$, on obtient

$$\|T_k(x_1,x_2)\|_X \leq$$
$$\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + r\,|b_k|\,M_k\frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)}\,(T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} + \frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)}.$$

Et donc,

$$\|T(x_1,x_2)\|_{X\times X} \leq$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} + r\,|b_k|\,M_k\frac{\Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\alpha_k-\lambda_k+1)}\,(T-T_0)^{\alpha_k-\lambda_k} + \frac{(S_k+R_k)\,T^{\alpha_k+\beta_k+1}}{\Gamma(\alpha_k+2)\Gamma(\beta_k+1)}\right).$$

Par conséquent, l'image de tout ensemble borné par l'opérateur T est aussi un ensemble borné dans $X \times X$.

Etape 3 : Equicontinuité de $T(\Omega_r)$:

Pour tout $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, (x_1, x_2) \in \Omega_r$ et pour $k=1,2$, on a :

$$\|T_k(x_1,x_2)(t_2) - T_k(x_1,x_2)(t_1)\|_X \leq C_k. \tag{3.3.7}$$

Dans (3.3.7), les quantités $C_k, k=1,2$, (données dans (3.3.6)) sont indépendantes de x_1, x_2, et tendent vers zéro quand t_1 tend vers t_2. Ainssi, comme conséquence des étapes $1,2,3$ et en utilisant le théorme 2.1 de Arzela-Ascoli, on déduit que T est completement continue.

Etape 4 : On veut montrer que l'ensemble défini par :

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in X \times X, (x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2), 0 < \mu < 1\}$$

est borné.

Soit $(x_1, x_2) \in \Omega$, alors $(x_1, x_2) = \mu T(x_1, x_2)$, pour $0 < \mu < 1$. Donc, pour tout $t \in J$, on a :

$$x_1(t) = \mu T_1(x_1, x_2)(t), x_2(t) = \mu T_2(x_1, x_2)(t).$$

D'où,

$$\|(x_1, x_2)\|_{X \times X} = \mu \|T(x_1, x_2)\|_{X \times X}, 0 < \mu < 1.$$

Puisque les fonctions f_k et h_k sont bornées (d'après (H_4)) , alors grace à (3.3.7), on obtient :

$$\|(x_1, x_2)\|_{X \times X} \leq \mu \max_{k=1,2} C_k, 0 < \mu < 1.$$

Finalement, Ω est borné.

D'où, le problème (3.3.1) $-$ (3.3.2) admet au moins une solution sur J.$\blacksquare$

Conclusion Générale

Dans le cadre de notre projet de fin d'études, nous avons eu l'opportunité d'aborder un thème qui porte sur une nouvelle théorie à savoir le calcul fractionnaire. En particulier sur les équations différentielles fractionnaires singulières couplées à dérivées au sens de Caputo avec différents ordres de dérivation et une singularité arbitraire sur l'axe réel, qui découlent de la modélisation des phénomènes physiques. Nous avons aussi pris connaisance de l'utilité des thèormes de point fixe, qui nous ont permet d'étudier l'existence et l'unicité des problèmes considérés. Ce travail nous a été bénéfique pour résoudre ces problèmes...Dans les années à venir, nous ésperons élargir notre travail et approfondir nos connaissances dans le domaine des équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] Z. Bekkouche : *Caputo Derivative and Applications for FDEs,* 2014-2015

[2] Z. Cui, P. Yu and Z.Mao : *Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Advances in Dynamical Systems and Applications. Volume 7, Number 1, pp. 31–40 (2012)

[3] Z. Dahmani, L. Tabharit : *Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative,* Theory And Applications Of Mathematics & Computer Science., 4 (1), (2014), pp. 40–55.

[4] Z. Dahmani, A.Taieb : *A Coupled System Of Nonlinear Differential Equations Involving m Nonlinear Terms,* Georgian Mathematical Journal., 2015.

[5] Z. Dahmani, A. Taieb : *Solvability Of A Coupled System Of Fractional Differential Equations With Periodic And Antiperiodic Boundary Conditions,* Pure And Applied Math Letters., 2015.

[6] Z. Dahmani, A. Taieb : *New Existence And Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Differential Systems,* Ser. Math. Inform., 2015.

[7] Z. Dahmani, M.Z. Sarikaya : *A Generalized Lane-Emden Fractional Differential System And Its Δ-Stability,* JARDCS Journal of IASR, 2015.

[8] L. Ghaffour, Z. Dahmani : *A Class Of Fractional Differential Equation With Arbitary Singularities*, Konuralp Journal of Mathematics, Submitted, 2016

[9] L. Ghaffour, Z. Dahmani : *Fractional Differential Equations With Arbitairy Singularities*, Journal of Interdiscip. Math, Submitted, 2016

[10] M. Houas, Z. Dahmani : *Coupled Systems Of Integro-Differential Equations Involving Riemann-Liouville Integrals And Caputo derivatives*, Acta Univ. Appulensis., 2014.

[11] M. Houas, Z. Dahmani : *New Results For A System Of Two Fractional Differential Equations Involving n Caputo Derivatives,* Krag. J.Math., 2014. pp. 30-42.

[12] M. Li, Y. Liu : *Existence And Uniqueness Of Positive Solutions For A Coupled System Of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Open Journal Of Applied Sciences., 3, (2013), pp. 53-61.

[13] S.M. Mechee, N. Senu : *Numerical Studies Of Fractional Differential Equations Of Lane-Emden Type By Method Of Collocation,* Applied Mathematics., 3, (2012), pp. 851-856.

[14] I. Rachůnková, S. Staněk, and M.Tvrdý : *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations,* Contemporary Mathematics and Its Applications, Volume 5, 2009.