REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–o ◯ o–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

DEUXIEME THEOREME FONDAMENTAL DE ROLF NEVANLINNA ET SES APPLICATIONS

Présentée par : **MESBAH Meriem et KHELAFI Manadiya**

Soutenue le : devant le jury composé de :

Président : Dr BELAIDI Benharrat (Professeur à l'université de Mostaganem).
Examinateur : Dr ANDASMAS Mammer (Professeur à l'université de Mostagenem).
Encadreur : Dr LATREUCH Zinelaabidine (Professeur à l'université de Mostagenem).

Remerciements

Au nom du Dieu clément et miséricordieux !

Nous tenons à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

La première personne nous tenons à remercier grandement notre encadreur Monsieur LATREUCH Zinelaabidine pour sa grande disponibiltié et ses précieux conseils, nous le remercions de nous avoir encadré, orienté et aidé.

Nous voulons remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Nos vifs remerciements s'étendent également au membre du jury, le président Pr BELAIDI Benharrat et l'examinateur Dr ANDASMAS Mammer pour l'interêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous tenon à remercier Mr Mark Spivakovsky qui nous a permis d'acceder à certaines documentations.

Nos plus profonds remerciements vont à nos parents, ils nous ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Il ont su nous donner toute les chances pour reussir.

Enfin nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire .

Table des matières

Introduction

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équation différentielles complexes notammenent la croissance et l'oscillation des solution. En effet dpuis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans le même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielle.

Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir [2, 3, 4].

Ce mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction à la théorie de R.Nevanlinna, dans lequel on donne des notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans les autres chapitres.

Le but du deuxième chapitre est de prouver le deuxième théorème fondamental de R.Nevanlinna en utilisant l'éstimation des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes.

Le dernier chapitre contient quelques applications, dans lequel on montre l'avantage du deuxième théorème fondamental de R.Nevanlinna.

Chapitre 1

Introduction à la théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va présenter les notions de base nécéssaires et donner quelques définitions et résultats dont on aura besoin tout au long de notre travail. Pour plus de détails voir ([2, 3, 4])

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 Formule de Poisson-Jensen

Théorème 1.1 ([2]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le domaine $|z| < R$ $(0 < \infty \leq R)$ non identiquement nulle, et a_λ $(\lambda = 1, 2, ..., h)$ (respectivement b_μ $(\mu = 1, 2, ..., k)$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors dans le disque $|z| < \rho$ on a*

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\right) d\theta \\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{h} \log\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda} z}{\rho(z-a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k} \log\left|\frac{\rho^2-\overline{b_\mu} z}{\rho(z-b_\mu)}\right|. \end{aligned}$$

Théorème 1.2 ***(Formule de Jensen)*** *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j<r|} \log\frac{r}{|a_j|}$$

Preuve On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2-\overline{a_j} z}{r(z-a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2-\overline{b_j} z}{r(z-b_j)}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\log |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne, on a

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta. \tag{1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|},$$

d'où

$$\log |g(0)| = \log |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \log \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \log \frac{r}{|b_j|}, \tag{1.2}$$

pour $z = re^{i\theta}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{a_j})}{re^{i\theta} - a_j} \right| = 1,$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{b_j})}{re^{i\theta} - b_j} \right| = 1.$$

D'où

$$\left| g(re^{i\theta}) \right| = \left| f(re^{i\theta}) \right|. \tag{1.3}$$

En remplaçant (1.2) et (1.3) dans (1.1), on a le resultat.

Définition 1.1 ([2]) *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}, \quad x \geq 0.$$

Propriétés ([2]) On a les propriétés suivantes

a)

$$\log x \leq \log^+ x$$

b)

$$\log^+ x \leq \log^+ y \quad (\text{si } 0 < x \leq y).$$

c)

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

d)

$$|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}.$$

e)
$$\log^+(\prod_{i=1}^n x_i) \le \sum_{i=1}^n \log^+ x_i.$$

f)
$$\log^+(\sum_{i=1}^n x_i) \le \log n + \sum_{i=1}^n \log^+ x_i.$$

Preuve Montrons c) d) e) et f)
c) On a

$$\begin{aligned}
\log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max(\log \frac{1}{x}, 0) \\
&= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0) \\
&= \max(\log x, 0) + \min(\log x, 0) \\
&= \log x.
\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}
\log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0) \\
&= \max(\log x, 0) - \min(\log x, 0) \\
&= |\log x| .
\end{aligned}$$

e) Si $\prod_{i=1}^n x_i \le 1$, alors l'inégalité est évidente.

Supposons que $\prod_{i=1}^n x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\log^+(\prod_{i=1}^n x_i) &= \log(\prod_{i=1}^n x_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \log x_i \\
&\le \sum_{i=1}^n \log^+ x_i
\end{aligned}$$

f) On a d'après b) et e)

$$\begin{aligned}
\log^+(\sum_{i=1}^n x_i) &\le \log^+(n \max_{1\le i\le n} x_i) \\
&\le \log n + \log^+ \max_{1\le i\le n} x_i \\
&\le \log n + \sum_{i=1}^n \log^+ x_i.
\end{aligned}$$

1.1.2 Fonction a-points

Définition 1.2 ([2]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. On définit*

$$N(r,a,f)=\int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r,$$

$N(r,f)$ est appelée la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.3 ([2])*Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par*

$$m(r,a,f)=m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta, \; a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

$m(r,f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a.

1.1.4 Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Définition 1.4 ([2]) *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,\infty,f)=T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

Exemple 1.1 *Pour la fonction $f(z)=e^z/z$, cette fonction admet un pôle simple $z=0$. Alors,*

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t}dt+\log r \\ &= \log r \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
m\left(r,f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right|d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log r d\theta \\
&= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T\left(r, e^z/z\right) &= m(r, e^z/z) + N(r, e^z/z) \\
&= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r + \log r \\
&= \frac{r}{\pi} + \frac{1}{2}\log r.
\end{aligned}$$

Lemme 1.1 ([4]) *Soient f, f_1, f_2, . . . , f_n des fonctions méromorphes et a, b, c et d des constantes complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Alors*

$$\begin{array}{lrcl}
a) & m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n. \\
b) & m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i). \\
c) & N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\
d) & N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\
e) & T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n, n \geq 1. \\
f) & T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), n \geq 1. \\
g) & T(r, f^n) & = & nT(r, f),\ n \in \mathbb{N}^*.
\end{array}$$

Preuve Montrons e) f) et g)

e) On a si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors il est de degré égale au plus $\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Alors

$$N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i)$$

et

$$\begin{aligned} m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{n} \log^+ \left|f_i(re^{i\theta})\right| + \log n \right] d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \log n \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &= m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) + N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n. \end{aligned}$$

f) On a

$$\begin{aligned} m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| \prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i). \end{aligned}$$

si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod_{i=1}^{n} f_i$ de degré égale au plus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Donc

$$N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(m(r,f_i) + N(r,f_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i). \end{aligned}$$

g) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1$. Alors si $|f| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f^n\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0 \\ N(r,f^n) &= nN(r,f) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n) + N(r,f^n) = nN(r,f) \\ &= n(m(r,f) + N(r,f)) = nT(r,f). \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f^n(re^{i\theta})\right| d\theta = n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= nm(r,f) \end{aligned}$$

et

$$N(r,f^n) = nN(r,f).$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n) + N(r,f^n) = n(m(r,f) + N(r,f)) \\ &= nT(r,f) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 ([4]) *Si f est une fonction méromorphe non-constante, et si*

$$g = \frac{af+b}{cf+d},$$

tels que a, b, c, et d sont des constants avec $ad - bc \neq 0$, alors

$$T\left(r,g\right) = T(r,f) + O(1),\ f \neq \frac{-d}{c}.$$

Preuve Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &\leq T\left(r, \frac{a}{d}\right) + T(r,f) + T\left(r, \frac{b}{d}\right) + \log 2 \\ &\leq T(r,f) + \log^+\left|\frac{a}{d}\right| + \log^+\left|\frac{b}{d}\right| + \log 2 \\ &= T(r,f) + O(1) \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a\left(f+\frac{b}{a}\right)}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &\leq \log^+\left|\frac{a}{c}\right| + \log^+\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| + T(r, f+\frac{d}{c}) + \log 2 + O(1) \\ &\leq T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

1.2 Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna

L'article de Nevanlinna "Untersuchunger über den Picardschun Satz" de novembre 1923 constitue une véritable percée. Nevanlinna parvient à réecrire la formule de Poisoon-Jensen sous forme symétrique, en terme des fonctions de proximité et de comptage de la fonction méromorphe donnée f et de la fonction $1/f$. C'est à ce moment que la théorie de Nevanlinna prend spectaculairement naissance. La conclusion finale fut tirée dans la note aux comptes-rendus de l'academie des sciences de juillet 1924.

Avant d'énoncer le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna on a besoin d'utiliser le lemme suivant

Lemme 1.2 ([2]) *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tels que $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_n| \leq r$.Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt = \sum_{|\alpha j| \leq r} \log\frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Proposition 1.2 ([2]) *Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Alors on a

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

Preuve Considérons la fonction $h(z) = f(z) z^{-m}$. On a $h(0) \neq 0, \infty$ et $m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$. En effet

si $m > 0$, alors

$$n(0, 0, f) = m \ \text{ et } \ n(0, \infty, f) = 0$$

si $m < 0$, alors

$$n(0, 0, f) = 0 \ \text{ et } n(0, \infty, f) = -m$$

si $m = 0$, alors

$$n(0, 0, f) = 0 \ \text{ et } \ n(0, \infty, f) = 0.$$

Donc h et f possèdent les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $0 < |z| \leq r$.

D'après le la formule de Jensen et le lemme 1.2

$$\begin{aligned}
\log |c_m| &= \log |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log r^{-m} \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + \sum_{0 < |b_j| \leq r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{0 < |a_j| \leq r} \log \frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta - m \log r + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta - [n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)] \log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r \\
&\qquad - \left[\int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt + n(0, 0, f) \log r \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

Théorème 1.3 ***(Premier théorème fondamental)*** ([2]) *Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent de $f-a$ $(a\in\mathbb{C})$ à l'origine,*

$$f(z)-a=\sum_{j=m}^{+\infty}c_jz^j,\quad c_m\neq 0,\quad m\in\mathbb{Z},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|c_m|+\varphi(r,a)$$

où $|\varphi(r,a)|\leq\log^+|a|+\log 2.$

Preuve Montrons le théorème pour $a=0$, d'après la proposition 1.1 et lemme 1.1 $c)$ on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= m(r,f)-m(r,0,f)+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r,\frac{1}{f}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= m(r,f)+N(r,f)-\log|c_m|\\
&= T(r,f)-\log|c_m| \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,a)=0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a\neq 0$. Posons $h=f-a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\
N(r,h) &= N(r,f-a)=N(r,f).
\end{aligned}$$

On a

$$\log^+|h|=\log^+|f-a|\leq\log^+|f|+\log^+|a|+\log 2. \qquad (1.5)$$

$$\log^+|f|=\log^+|h+a|\leq\log^+|h|+\log^+|a|+\log 2. \qquad (1.6)$$

En intégrant (1.5) et (1.6) on aura

$$m(r,h)\leq m(r,f)+\log^+|a|+\log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on obtient

$$-(\log^+|a| + \log 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

D'après (1.4), on a

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= T\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N\left(r, \frac{1}{h}\right) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \log|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \log|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \log|c_m|. \end{aligned}$$

Où $\varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2$.

Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit :

Corollaire 1.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty.$$

Exemple 1.2 *On a*

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{-ie^{2iz} + i}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1 *on a*

$$\begin{aligned} T(r, \tan z) &= T\left(r, e^{2iz}\right) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1) \end{aligned}$$

1.3 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

Définition 1.5 ([2], [3]) *Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3 *La fonction $g(z) = \exp(z^n)$ est d'ordre $\rho(g) = n$ et d'hyper ordre $\rho_2(g) = 0$.*

Exemple 1.4 *Soit $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$, on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(\log r)$. De plus*

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O\left(\frac{\log r}{r}\right)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log r + \log\left(1 + O\left(\frac{\log r}{r}\right) - \log \pi\right)}{\log r} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\left[\log r - \log \pi + \log\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log r\left[1 - \frac{\log \pi}{\log r} + \frac{\log\left[1+O\left(\frac{\log r}{r}\right)\right]}{\log r}\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log r + \log\left[1 - \frac{\log \pi}{\log r} + \frac{\log\left[1+O\left(\frac{\log r}{r}\right)\right]}{\log r}\right]}{\log r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Si f est d'ordre fini, alors l'hyper-ordre de cette fonction est nulle.*

1.4 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.6 *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,+\infty[$ est définie par*

$$mes(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E *et la mesure logarithmique d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty[$ *est définie par*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.5 1) *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [2, 6] \cup [7, 8] \subset [0, \infty)$ *est*

$$mes\,(E) = \int_0^{\infty} \chi_{_E}(t)\,dt = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

2) *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = \mathbb{N}$ *est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle.*

3) *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, 5] \subset [1, \infty)$ *est*

$$lm\,(F) = \int_1^{\infty} \chi_{_F}(t)\,\frac{dt}{t} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \log 5.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.7 $[1, 2]$ *Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction* f *respectivement par*

$$\lambda\,(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2\,(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq r$.

Exemple 1.6 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction* $f(z) = \sin z$ *sont égaux respectivement à* 1 *et* 0.

Chapitre 2

Le deuxième théorème fondamental via les dérivées logarithmiques

Dans ce chapitre, on va donner la preuve du deuxième théorème fondamental basée sur les dérivées logarithmiques, la preuve donnée ici est en général similaire a celle dans le livre de Haymen.

2.1 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Afin de prouver le deuxième théorème fondamental de R. Nevanlinna, on a besoin d'abord de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.1 [1, 3] *Soit f une fonction méromorphe non constante sur $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors l'égalité*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1) \tag{2.1}$$

est vrai pour $0 < r < R$.

Preuve. Soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j}$$

ce qui implique

$$m(r, F) \leq \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + \log q. \tag{2.2}$$

Soit

$$\delta = \min_{1 \leq j < k \leq q} |a_j - a_q|$$

il est claire que $\delta > 0$. On a les deux cas suivants :

(i) Il existe au moins un entier k $(1 \leq k \leq q)$ tel que

$$|f(z) - a_k| < \frac{\delta}{2q}.$$

dans ce cas, pour $j \neq k$, on a

$$\begin{aligned} |f(z) - a_j| &= |f(z) - a_k + a_k - a_j| \\ &\geq |a_k - a_j| - |f(z) - a_k| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2q} = \frac{(2q-1)\delta}{2q}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{|f(z) - a_j|} \leq \frac{2q}{(2q-1)\delta} < \frac{1}{2q-1} \frac{1}{|f(z) - a_k|}. \tag{2.3}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq \frac{1}{|f(z) - a_k|} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q} \frac{1}{|f(z) - a_j|} \\ &\geq \frac{1}{|f(z) - a_k|} - \frac{q-1}{2q-1} \frac{1}{|f(z) - a_k|} \\ &> \frac{1}{2|f(z) - a_k|}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\log^+ |F(z)| > \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_k|} - \log 2. \tag{2.4}$$

D'après (2.3), on a

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_j|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q} \log^+ \frac{2q}{(2q-1)\delta} < q \log^+ \frac{2q}{\delta}. \tag{2.5}$$

Il résulte de (2.4) et (2.5) que

$$\log^+ |F(z)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_j|} - q \log^+ \frac{2q}{\delta} - \log 2. \tag{2.6}$$

(ii) Pour tout $1 \leq j \leq q$

$$|f(z) - a_k| \geq \frac{\delta}{2q}.$$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{j=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_j|} \leq q \log^+ \frac{2q}{\delta},$$

ce qui implique l'inégalité (2.6).

En remplacant z par $re^{i\theta}$ dans (2.6) et en intégrant par rapport à θ entre 0 et 2π, on obtient

$$m(r, F) \geq \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) - q \log^+ \frac{2q}{\delta} - \log 2. \tag{2.7}$$

d'après (2.2) et (2.7), on déduit (2.1).

Maintenant on peut montrer le deuxième théorème fondamental.

Théorème 2.1 $[1,2,3]$*Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le disque $|z| < R$ et a_j $(j = 1,2,...,q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors pour $0 < r < R$, on a*

$$m(r,f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f),$$

où

$$N_1(r) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$

et

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1).$$

Preuve. Soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j}$$

D'après le lemme 2.1, on a

$$m(r,F) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1). \tag{2.8}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} m(r,F) &\leq m(r,f'F) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r,f'F) + T\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r,f'F) + T(r,f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comme

$$\begin{aligned} T(r,f') &= m(r,f') + N(r,f') \\ &\leq m(r,f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r,f') \\ &\leq T(r,f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N(r,f), \end{aligned} \tag{2.10}$$

il resulte de $(2.8) - (2.10)$ que

$$m(r,f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq 2T(r,f) - \left\{2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right\}$$

$$+m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1),$$

ce qui complète la preuve du théorème 2.1.

2.2 L'éstimation de S(r,f)

Nous avons besoin d'éstimer le terme $S(r,f)$, c'est à dire on a besoin d'étudier la croissance du $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$. dans cette section on va introduire un lemme qui s'apelle le lemme des dérivées logarithmiques et qui est en même temps le lemme clé du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna.

Lemme 2.2 [1] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Alors l'inégalité*

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(R,f) + 3\log^+ \frac{1}{R-r} + 4\log^+ R$$

$$+2\log^+ \frac{1}{r} + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 10 \tag{2.11}$$

est vrai pour $0 < r < R < \infty$.

Remarque 2.1 *Si $f(0) = 0$ ou ∞, on suppose que le dévloppement en série de Laurent de f au voisinage de $z = 0$ est*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + ..., \quad (c_\lambda \neq 0).$$

Posons $g(z) = z^{-\lambda} f(z)$. Alors $g(0) \neq 0, \infty$ et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\lambda}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Pour $m\left(r,\frac{g'}{g}\right)$, on peut appliquer le lemme 2.2 pour obtenir une inégalité similaire à (2.11).

L'éstimation de $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ dans le lemme 2.2 contient le terme $\log^+ T(R,f)$. Pour éliminer ce terme, nous avons besoin d'un lemme due à Borel sur les fonctions monotones.

Lemme 2.3 [1]*Soit $T(r)$ une fonction continue croissante prend ses valeurs dans $[r_0, \infty[$. Si $T(r_0) \geq 1$, alors*

$$T\left(r + \frac{1}{T(r)}\right) < 2T(r), \tag{2.12}$$

en dehors d'un ensemble E_0 de r de mesure linéaire au plus 2.

Preuve. Si (2.12) est vrai pour $r_0 \leq r < \infty$, alors le lemme 2.3 est vrai. Par contre, soit E_0 est l'ensemble de $r\,(\geq r_0)$ tel que (2.12) est fausse. Comme $T(r)$ est continue et E_0 est un fermé. Posons

$$r_1 = \min\{r, r \in E_0\}, \; r_1' = r_1 + \frac{1}{T(r_1)},$$

$$r_2 = \min\{r, r \in E_0 \cap [r_1', \infty[\}, \; r_2' = r_2 + \frac{1}{T(r_2)},$$

$$.........$$

$$r_n = \min\left\{r, r \in E_0 \cap \left[r'_{n-1}, \infty\right[\right\},\ r'_n = r_n + \frac{1}{T(r_n)},$$

....

S'il existe une infinité de r_n, alors la suite $\{r_n\}$ n'admet pas une limite finie τ. Sinon, $\{r'_n\}$ converge vers la même limite τ, car $r_n < r'_n \leq r_{n+1}$. Mais

$$r'_n - r_n = \frac{1}{T(r_n)} \geq \frac{1}{T(\tau)} > 0,$$

contradiction quand $n \to \infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, ce qui implique que $E_0 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [r_n, r'_n]$, d'où

$$mesE_0 \leq \sum_{n\geq 1} (r'_n - r_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{T(r_n)}.$$

comme $r_n \in E_0$ $(n = 1, 2, ...)$, alors

$$T(r_n) \geq T\left(r'_{n-1}\right) \geq 2T(r_{n-1}) \geq ... \geq 2^{n-1}T(r_1) \geq 2^{n-1}.$$

Donc

$$mes(E_0) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} = 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

D'après le lemme 2.3 , le lemme 2.2 peut être écrit sous la forme suivante :

Théorème 2.2 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe. Si f est d'ordre fini, Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r),\ \ (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log(rT(r,f))),\ \ (r \to \infty,\ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mesure linéaire ne dépasse pas 2.

Preuve. Si f est d'ordre fini λ. Alors

$$T(r,f) < r^{\lambda+1},\ \ (r > r_0).$$

On Prend $R = 2r$ dans le lemme 2.2, on obtient

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r),\ \ (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors il existe r_0 tel que $T(r_0, f) \geq 1$. D'après le lemme 2.3, l'ensemble exceptionnel E_0 associé à $T(r,f)$ satisfait $mes(E_0) \leq 2$. Pour $r \notin E_0$ et $R = r + \frac{1}{T(r,f)}$, on trouve

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log(rT(r,f))),\ \ (r \to \infty,\ r \notin E_0),$$

ce qui complète la preuve du théorème 2.2.

Corollaire 2.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe et*

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f-a_j}\right) + O(1).$$

Si f est d'ordre fini, Alors

$$S(r,f) = O(\log r), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$S(r,f) = O(\log(rT(r,f))), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mesure linéaire fini.

Remarque 2.2 *Si f est une fonction rationnelle, alors $\frac{f'}{f}$ est aussi rationnelle et le degré de numérateur est toujours inférieure au degré de dénomérateur. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = o(1), \quad (r \to \infty).$$

Si f est une fonction transcendante, alors

$$\log r = o(T(r,f)), \quad (r \to \infty),$$

de même

$$\log^+ T(r,f) = o(T(r,f)), \quad (r \to \infty).$$

Corollaire 2.2 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe et*

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f-a_j}\right) + O(1).$$

Si f est d'ordre fini, Alors

$$S(r,f) = o(T(r,f)), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$S(r,f) = o(T(r,f)), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mesure linéaire fini.

Corollaire 2.3 *Pour toute fonction méromorphe f non constante et pour k un entier positif, on a*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f)$$

Preuve. Quand $k = 1$ c'est le lemme du dérivée logarithmique. On suppose que

$$m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) = S(r, f)$$

est vrai pour certain $l \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} m\left(r, f^{(l)}\right) &= m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f} f\right) \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) \\ &= m(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

La fonction méromorphe f admet un pôle d'ordre p en un point z_0 si et seulement si $f^{(l)}$ admet un pôle d'ordre $l + p \geq l + 1$ au point $z = z_0$. Il est clair que

$$n(r, f^{(l)}) \leq (l + 1)n(r, f).$$

Donc

$$N(r, f^{(l)}) \leq (l + 1)N(r, f).$$

D'où

$$\begin{aligned} T(r, f^{(l)}) &= m(r, f^{(l)}) + N(r, f^{(l)}) \\ &\leq m(r, f) + S(r, f) + (l + 1)N(r, f) \\ &\quad (l + 1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Si $k = l$. Ainsi

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) &= m\left(r, \frac{\left(f^{(l)}\right)'}{f^{(l)}}\right) \\ &= S(r, f^{(l)}) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right) \\ &= S(r, f) + S(r, f) \\ &= S(r, f) \end{aligned}$$

Corollaire 2.4 *Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le plan complexe et $a_1, a_2, ..., a_q$ sont q $(q \geq 3)$ nombres complexes distinct dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Alors*

$$(q-2)\, T\,(r, f) < \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) - N_1\,(r) + S\,(r, f)$$

où

$$N_1\,(r) = 2N\,(r, f) - N\,(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$

et $S\,(r, f)$ définie dans le corollaire 2.2.

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)=T\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+O\left(1\right)$$

où a_j est un nombre complexe.

2.3 Une autre forme du deuxième théorème fondamental

Dans cette section, on va montrer une formule plus précise du deuxième théorème fondamental de R. Nevanlinna. Dans ce qui suit, on note par $E\subset\left]0,\infty\right[$ un ensemble de mesure linéaire finie, et on note $S\left(r,f\right)$ la quntité $S\left(r,f\right)=o\left(T\left(r,f\right)\right)$ $\left(r\rightarrow\infty\right)$ si l'ordre de f est finie, et $S\left(r,f\right)=o\left(T\left(r,f\right)\right)$ $\left(r\rightarrow\infty,\ r\notin E\right)$ si l'ordre de f est infinie.

Théorème 2.3 [2]*Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le plan complexe et $a_1,\ a_2,...,a_q$ sont q $\left(q\geq3\right)$ nombres complexes distinct dans $\mathbb{C}\cup\left\{\infty\right\}$. Alors*

$$\left(q-2\right)T\left(r,f\right)<\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S\left(r,f\right).$$

Preuve. D'après le corollaire 2.3, on a

$$\left(q-2\right)T\left(r,f\right)<\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1\left(r\right)+S\left(r,f\right). \tag{2.13}$$

Soit $n_1\left(t\right)=2n\left(t,f\right)-n\left(t,f'\right)+n\left(t,\frac{1}{f'}\right)$. On a

$$N_1\left(r\right)=\int_0^r\frac{n_1\left(t\right)-n_1\left(0\right)}{t}dt+n_1\left(0\right)\log r.$$

Si z_0 est un pôle de $f\left(z\right)$ de multiplicité k dans $\left|z\right|\leq k$, alors z_0 est compté $k-1$ fois par $n_1\left(t\right)$. De même, pour une valeur finie a, si z_0 est un zéro de $f\left(z\right)-a$ de multiplicité k dans $\left|z\right|\leq k$, alors z_0 est compté $k-1$ fois par $n_1\left(t\right)$. Par conséquent

$$\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1\left(r\right)\leq\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right). \tag{2.14}$$

D'après (2.13) et (2.14), on obtient

$$\left(q-2\right)T\left(r,f\right)<\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S\left(r,f\right).$$

2.4 Généralisation du deuxième théorème fondamental

Dans cette section on va introduire des résultats généralisent le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Tout d'abord on va citer un théorème et des définitions dont on aura besoin par la suite.

Définition 2.1 [2, 3] *Soient $f(z)$ et $a(z)$ deux fonctions méromorphes dans le plan complexe. Si $T(r,a) = S(r,f)$, alors $a(z)$ est dite small fonction de $f(z)$.*

Définition 2.2 ([2]) *Le déterminant Wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ des fonctions méromorphes $f_1, f_2, ..., f_n$ est donné par*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) := \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Lemme 2.4 ([3]) ***(Milloux)*** *Supposons que $f(z)$ est une fonction méromorphe, non-constante dans le plan copmlex $\mathbb{C}$, et k un entier positif, et soit*

$$\psi(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^{(i)} z$$

où $a_1(z), a_2(z), ..., a_k(z)$ sont des small fonctions de $f(z)$. Alors

$$m\left(r, \frac{\psi}{f}\right) = S(r,f)$$

et

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f) + S(r,f) \\ &\leq (k+1)T(r;f) + S(r,f). \end{aligned}$$

Preuve On considère le cas où $\psi(z) = f^{(k)}$. D'après le lemme du dérivée logarithmique, on a

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r,f)$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} T(r,f') &= m(r,f') + N(r,f') \\ &\leq m(r,f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r,f) + \overline{N}(r,f) \\ &= T(r,f) + \overline{N}(r,f) + S(r,f) \\ &\leq 2T(r,f) + S(r,f). \end{aligned}$$

Ainsi le théorème est vrai pour $k = 1$. On suppose maintenant que le théorème est vrai pour $k = n$, i.e.,

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) = S(r, f).$$

Et en notant que

$$\begin{aligned} T(r, f^{(n)}) &\leq T(r, f) + n\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq (n+1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(n+1)}}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{f^{(n+1)}}{f^{(n)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) \\ &= S(r, f^{(n)}) + S(r, f) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

La combinaison des dérivées

$$\begin{aligned} T(r, f^{(n+1)}) &\leq T(r, f^{(n)}) + \overline{N}(r, f^{(n)}) + S(r, f^{(n)}) \\ &\leq T(r, f) + n\overline{N}(r, f) + S(r, f) + \overline{N}(r, f^{(n)}) + S(r, f^{(n)}) \\ &= T(r, f) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq (n+2)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ainsi le théorème est vrai pour $k = n + 1$. Dans ce qui suit, on considère le cas général.

Il est évident que

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{\psi}{f}\right) &\leq \sum_{i=0}^{k} m\left(r, \frac{a_i f^{(i)}}{f}\right) + \log(k+1) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} \left[m(r, a_i) + m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right)\right] + \log(k+1) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} m(r, \psi) &\leq m\left(r, \frac{\psi}{f}\right) + m(r, f) \\ &= m(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} N(r, \psi) &\leq N(r, f^{(k)}) + \sum N(r, a_i) \\ &\leq N(r, f) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'après (2.15) et (2.16)on a

$$\begin{aligned} T(r, \psi) &\leq m(r, f) + N(r, f) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\ &= T(r, f) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq (k+1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

2.4.1 Cas de trois small fonctions

R. Nevanlinna à prouvé que les constantes dans le deuxième théorèmes fondamentals peuvent êtres remplacer par trois small fonctions. En fait, il à prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.4 [2, 3, 4] *Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le plan complexe, et $a_1(z)$, $a_2(z)$ et $a_3(z)$ sont trois small fonctions de f. Alors*

$$T(r,f) < \sum_{j=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r,f). \tag{2.17}$$

Preuve. Soit

$$g(z) = \frac{f(z)-a_1(z)}{f(z)-a_3(z)} \frac{a_2(z)-a_3(z)}{a_2(z)-a_1(z)}.$$

Alors

$$T(r,g) = T(r,f) + S(r,f).$$

D'après le deuxième théorème fondamental

$$T(r,g) \leq \overline{N}(r,g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + S(r,g)$$

Il s'ensuit de (2.17)

$$\begin{aligned} &\overline{N}(r,g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) \\ \leq &\sum_{j=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2-a_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2-a_3}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right) \\ \leq &\sum_{j=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r,f), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.4.2 L'inégalité de C. T. Chaung

Avec une preuve similaire à celle du lemme 2.1, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 2.5 *Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe et $a_j(z)$ $(j = 1, ..., q)$ sont des small fonctions de f. Alors*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f-a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r,f).$$

R. Nevanlinna posé la question suivante "*Peut on remplacer les constantes dans le deuxième théorème fondamental par des small fonctions ?*". C. T. Chaung a étudié ce problème et touvé une réponse affirmative pour le cas des fonctions entières.

Théorème 2.5 *Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le plan complexe, et $a_j(z)$ $(j = 1, ..., q)$ sont des small fonctions de f. Alors*

$$(q-1)\,T(r,f) < \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + q\overline{N}(r,f) + S(r,f).$$

Preuve. Posons

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j(z)}$$

D'après le lemme 2.4

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) = m(r,F) + S(r,f). \tag{2.18}$$

Soit $\{b_1, b_2, ...b_p\}$ est le système linéairement indépendant maximal de $\{a_1, a_2, ...a_q\}$ et on écrit

$$L(f) = W(b_1, b_2, ...b_p, f)$$

où W est le wronskien de $b_1, b_2, ...b_p, f$, et

$$L(f) = A_0 f^{(p)} + A_1 f^{(p-1)} + ... + A_p f,$$

où $A_0, A_1, ..., A_p$ sont des small fonctions de f. Il es clair que

$$L(a_j) = 0 \ \ (j = 1, ..., q).$$

Donc

$$L[f(z) - a_j(z)] = L[f(z)] \quad (j = 1, ..., q),$$

et

$$m\left(r, \frac{L(f)}{f-a_j}\right) = m\left(r, \frac{L(f-a_j)}{f-a_j}\right) = S(r,f) \quad (j = 1, ..., q).$$

Alors

$$\begin{aligned} m(r,F) &\leq m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{L(f)}{f-a_j}\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{L(f)}{f-a_j}\right) + \log q \\ &= T(r, L(f)) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r,f). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Miloux

$$T(r, L(f)) \leq T(r,f) + p\overline{N}(r,f) + S(r,f). \tag{2.19}$$

Il s'ensuit de (2.18) – (2.19) que

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq T(r,f) + p\overline{N}(r,f) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r,f). \tag{2.20}$$

Et comme

$$m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)=T\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S\left(r,f\right),$$

alors l'inégalité (2.20) implique que

$$\begin{aligned}\left(q-1\right)T\left(r,f\right) &< \sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+p\overline{N}\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{L\left(f\right)}\right)+S\left(r,f\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+q\overline{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).\end{aligned}$$

Chapitre 3

Quelques Applications

Dans ce chapitre, on va citer deux applications connues du deuxième théorème fondamental de R.Nevanlinna, le théorème de cinq valeurs de Nevanlinna qui est une conséquence du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna et le théorème de Picard (petit). La différence entre les deux est que historiquement le théorème de Picard a été démontré avant le deuxième théorème fondamental mais le théorème de cinq valeurs après.

3.1 Théorème de Picard

Définition 3.1 *Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe et $a \in \mathbb{C}$. Si la fonction $f(z) - a$ n'a pas de zéros, alors a est dite valeur exceptionnelle de Picard.*

Définition 3.2 *On dit qu'une valeur a est exceptionnelle au sens de Borel pour $f(z)$, si l'ordre de $N(r, a, f)$ est plus petit que $\rho(f)$ quand $\rho < \infty$, ou fini quand $\rho = \infty$.*

Exemple 3.1 *la fonction entière e^z admet 0 comme valeur exceptionnelle.*

Exemple 3.2 *La fonction méromorphe $\tan z$ admet i et $-i$ comme valeurs exceptionnelles*

Théorème 3.1 *Toute fonction méromorphe transcendante dans le plan complexe admet au plus deux valeurs exceptionelle de Picard.*

Preuve. Supposons que f admet trois valeurs exceptionneles de Picard a_1, a_2 et a_3. Sans perdre de généralités, on suppose que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = \infty$. D'après le deuxième théorème fondamental

$$T(r, f) < \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}(r, f) + S(r, f).$$

Comme $0, 1$ et ∞ sont des valeurs exceptionnelle de Picard, alors

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = \overline{N}(r, f) = 0$$

d'où

$$T(r, f) < S(r, f)$$

ce qui est une contradiction.

3.2 Théorème de cinq valeurs de Nevanlinna

Dans cette setcion, on va citer quelques résultats connus sur le théorème des cinq valeurs de Nevanlinna. En premier lieu on donne quelques définitions

Définition 3.3 ([4])*Soient f et g deux fonctions méromorphes d'un variable complexe, et $a \in \mathbb{C}$. On dit que :*

(i). f et g partagent la valeur a CM (comptant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités.

(ii) f et g partagent la valeur a IM (ignorant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros sans tenir compte de leurs multiplicités.

(iii) f et g partagent la valeur a DM (multiplicités diférentes) si f et g partagent la valeur a IM et les zéros de $f(z) - a$ et $g(z) - a$ ont des multiplicités différentes en tout point.

Exemple 3.3 *Les fonctions e^z et e^{-z} partagent $0, 1, -1, \infty$ CM; et $q(z) = z^2(z-2)$ et $p(z) = z^3(z-2)^2$ partagent 0 DM.*

En 1929, Rolf Neanlinna a démontré le resultat suivant

Théorème 3.2 ***(Théorème de cinq valeurs)*** ([4])*Si deux fonctions méromorphes f et g partagent cinq valeurs IM, alors elles sont identiques.*

Preuve. On suppose d'abord que tous les valeurs a_j $(j = 1, ..., 5)$ sont finis. D'après le deuxième théorème fondamental

$$3T(r,f) < \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r,f) \tag{3.1}$$

et

$$3T(r,g) < \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_j}\right) + S(r,g).$$

Supposons aussi que $f \neq g$. Alors, d'après l'hypothèse

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &= \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) \\
&\leq T(r, f - g) + O(1) \\
&\leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

D'après $(3.1) - (3.2)$

$$3(T(r,f) + T(r,g)) \leq 2(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g),$$

ce qui est une contradiction. Donc $f \equiv g$.

On suppose maintenant que l'une des valeurs a_j $(j = 1, ..., 5)$ est infinie, sans perdre de généralité, on suppose que $a_5 = \infty$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq a_j \ (j = 1, ..., 5)$. Posons

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - a}, \ G(z) = \frac{1}{g(z) - a},$$

et

$$b_j = \frac{1}{a_j - a} \ (j = 1, ..., 4), \ b_5 = 0.$$

Il est claire que F et G partagent les valeurs $b_j \ (j = 1, ..., 5)$ IM, d'après le premier cas, on trouve que $F(z) \equiv G(z)$, ce qui implique que $f \equiv g$.

Exemple 3.4 *Soit* $f(z) = \exp(z)$ *et* $g(z) = \exp(-z)$. *Alors* f *et* g *partagent les quatres valeurs* $0, 1, -1, \infty$ *IM, mais* f *et* g *sont différentes.*

En 1929, Rolf Nevanlinna ([4]) a démontré le résultat remarquable suivant :

Théorème 3.3 ***(Le théorème de quatres valeurs de Nevanlinna)*** *Si deux fonctions méromorphes partagent quatres valeurs CM, alors* f *est une transformation de Möbius de* g.

Remarque 3.1 *La transformation de Möbius d'une fonction est définie comme la composée d'un nombre fini d'inversions par rapport à des plans ou des sphères. En particulier, si on identifie* $\mathbb{R}^2$ *à* $\mathbb{C}$, *alors on peut prouver que les transformations de Möbius conservant l'orientation sont de la forme :*

$$M : z \to \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c *et* d *quatres nombres complexes tels que* $ad - bc \neq 0$.

En 1983, Gundersen a amelioré ce théorème : deux valeurs partagées IM et deux valeurs partagées CM impliquent quatres valeurs CM. Donc, si deux fonctions méromorphes f et g partagent deux valeurs CM et deux autres valeurs IM, alors f est une transformation de Möbius de g.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna et ses applications sur la théorie d'unicité des fonctions. Ce théorème est très utile dans les équations différentielles complexes, le produit infini et le théorème de Malmquist...etc

Une partie importante de la recherche sur la théorie des fonctions d'une seule variable complexe au $20^{\text{ème}}$ siècle est basée sur la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est peut être la réalisation la plus reconnue du mathématicien Rolf.Nevanlinna, elle s'accorde avec la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe, pour cette raison, elle est aussi communément appelée la théorie de distribution des valeurs dans le littérature.

Cette théorie est encore en développement. Un problème important en théorie de Nevanlinna est de donner une meilleur estimation pour le terme d'erreur dans le deuxième théorème fondamental.

La théorie de Nevanlinna est liée à la géométrie différentielle et à la théories analytique des nombres. Ahlof et Nevanlinna, par exemple, prouvent que la constante 2 dans le deuxième théorème fondamental est lié à la caractéristique d'Euler de la sphère Riemannienne.

Bibliographie

[1] **E. Borel,** *Sur les zéros des fonctions entières,* Acta Mathematica. December 1897, 20 :357

[2] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[3] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1993.

[4] **C. C. Yang and H. X. Yi**, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.