Table des matières

Résumé

Notre objet d'étude dans ce mémoire est "Stabilité des systèmes linéaires singuliers". Tout d'abord nous avons rappelé, dans le premier chapitre des notions de bases telles que les définitions et quelques propriétés de la transformée de Laplace et nous énoncerons le théorème d'existence et d'unicité qui nous l'appliquerons ensuite à un système linéaire.
Le deuxième chapitre est consacré à la représentation des systèmes linéaires à temps invariant standard dans le cas continu et discret.
Dans le troisième chapitre, on présente le système linéaire à temps invariant singulier.
Enfin, notre travail est achevé par le calcul de la stabilité de Lyapunov dans le cas des systèmes linéaires et homogènes et nous étudions les méthodes directes et indirectes et leurs applications sur la stabilité de pendule.

Liste des Figures :

Liste des Notations et Abréviations :

Notations :

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Corps des nombres réels non-négatifs
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
A^T	Transposée de matrice A
A^{-1}	Matrice inverse de A
$det(A)$	Déterminant de A de dimension $n \times n$
$rg(A)$	Rang de A de dimension $m \times n$
P	Valeurs propres de A de dimension $n \times n$
$diag(\lambda_i)$,$\forall i = 1, ..., n$	Matrice diagonale constituée avec les éléménts de la diagonale des valeurs propres de matrice D de dimension $n \times n$
I_n	Matrice identité d'ordre n
$\ker(A)$	Noyau de A : $\{x$ telque $Ax = 0\}$
$\mathcal{L}(x)$	Transformée de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}[X(P)]$	Transformée de Laplace inverse
$S(z)$	Z-Transformée
$Z^{-1}\{X(P)\}$	Z-Transformée inverse
$adj(A)$	Comatrice de la matrice A transposée

Abréviations :

SISO	Single input-Single output(une seule entrée-une seule sortie)
LTI	Linéaire invariant dans le temps
TL	Transformée de Laplace
C.H	Cayley-Hamilton

Introduction Générale

La théorie mathématique du contrôle a connu un développement très important et son champ d'application couvre actuellement de nombreux domaines, notamment l'industrie, l'économie, la biologie.

Cette théorie fait appel à de nombreux outils mathématiques et repose sur une grande variété de modèle.

Depuis une vingtaine d'années, de nombreux points de la théorie de la commande des systèmes dynamiques ont été étendus aux systèmes singuliers tel que la stabilité qu'est notre projet d'étude dans ce mémoire.

Les systèmes algébro-différentiels ou systèmes singuliers peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques. Ils constituent un puissant outil de modélisation dans la mesure où ils peuvent décrire des processus régis à la fois par des équations différentielles (dynamiques) et des équations algébriques (statiques). Ce formalisme représente les phénomènes physiques dont le modèle ne peut pas être décrit par des équations différentielles ordinaires. On les rencontre dans des domaines aussi variés que les industries chimiques et minérales, la robotique et le domaine électrique.

Pour étudier la stabilité des systèmes, on se réfère généralement aux résultats de Lyapunov connue en théorie qualitative sous le nom de méthode directe et méthode indirecte, et l'utilisation des fonctions de Lyapunov introduit par Alexander Mikhaïlovitch Lyapunov [1857-1918]. En effet, les fonctions de Lyapunov permettent de montrer la stabilité de système en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. La première méthode étant dédiée à la linéarisation. De plus, elle permet de caractériser complétement la stabilité asymptotique uniforme que ce soit pour les points d'équilibres. [g], [i], [k].

Nous avons regroupé un large éventail de méthode d'analyse et de commande des systèmes linéaires en temps continu qu'en temps discret.

L'un des problèmes les plus important du système linéaire est celui de l'étude de sa stabilité comme nous avons vu dans notre travail, la théorie de Lyapunov est en particulier une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité du système linéaire. Nous constatons que le comportement stable ou instable des systèmes linéaires est lié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie.

Cette fonction d'énergie qu'est appelée fonction de Lyapunov possède la propriété d'être continue et de s'annuler à l'origine, ainsi que cette méthode n'est valable que dans un voisinage du point d'équilibre.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons quelques rappels et définitions des méthodes et des techniques utilisées dans ce mémoire.

1.1 Théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle de premier ordre

On considère le système en temps fini suivant,

$$\begin{cases} x' = f(t,x,u) \\ y = g(t,x,u) \end{cases} . \tag{1.1.1}$$

Autrement dit,

$$x' = F(t,x), \tag{1.1.2}$$

où on pose

$$f(t,x,u) = F(t,x).$$

Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. I un intervalle de $\mathbb{R}$

Supposons que f est continue et que pour tout sous intervalle compact J de I. f est lipschitzienne en x dans $J \times \mathbb{R}^n$(ie) $\exists\ k(J)$une constante dans $\mathbb{R}$ vérifiant,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \mid F(t,x) - F(t,y) \mid \leq k(J) \mid x - y \mid, \forall t \in J.$$

D'aprés les conditions :

1-$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, l'équation(1.1.2)admet une unique solution $\phi(t, t_0, x_0)$ satisfaisant

$$\phi(t, t_0, x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2-La solution ϕ est continue en t, t_0 et x_0.

3-Si F et x_0 sont continues relativement au paramètre $\lambda\,(\lambda \in \mathbb{R})$, alors la solution ϕ est continue relativement à λ. Alors l'équation(1.1.2) admet une et une seule solution $\forall t \in \mathbb{R}$ et pour tout t_0, x_0; $\phi\,(t, t_0, x_0) = x_0$. tel que :

$$\phi\,(t, t_0, x_0) = \Phi\,(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t, \tau)\, B\,(\tau)\, u\,(\tau)\, d\tau.$$

On considère le système suivant qui est extrait de l'équation (1.1.2) :

$$\begin{cases} x'\,(t) = A\,(t)\, x + B\,(t)\, u \\ y\,(t) = C\,(t)\, x + D\,(t)\, u \\ \qquad x\,(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.1.3}$$

$$A\,(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}, \overline{u}, t) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x}, \overline{u}, t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ . & & & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x}, \overline{u}, t) & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x}, \overline{u}, t) \end{pmatrix}, \; B\,(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x}, \overline{u}, t) \\ \vdots \\ . \\ \frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x}, \overline{u}, t) \end{pmatrix}$$

$$C\,(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}, \overline{u}, t) \dots \frac{\partial g}{\partial x_n}(\overline{x}, \overline{u}, t)\right], \; D\,(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(\overline{x}, \overline{u}, t)$$

avec $\overline{x}$, $\overline{u}$: sont les variables de point d'équilibre, et $A \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times n}\right)$, $B \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m}\right)$, $C \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p \times n}\right)$, $D \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p \times m}\right)$, tel que

La solution du système aura la forme :

$$x\,(t) = \Phi\,(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t, \tau)\, B\,(\tau)\, u\,(\tau)\, d\tau.$$

D'aprés le théorème d'existence et d'unicité on a :pour tout $x\,(t_0) = x_0$ et pour tout $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, le système (1.1.3) admet une unique solution pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y\,(t) = C\,(t)\, \Phi\,(t, t_0) + C\,(t) \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t, \tau)\, B\,(\tau)\, u\,(\tau)\, d\tau + D\,(t)\, u\,(t)\,.$$

La matrice $\Phi\,(t, t_0)$ s'appelle matrice de transition du système d'équation :

$$x' = A\,(t)\, x.$$

Remarque : Dans le cas où $A\,(t) = A$, $B\,(t) = B$

$$\Phi\,(t, t_0) = e^{\,A(t - t_0)}.$$

Définition 1.1.1 (point d'équilibre) *:Soit le système (4.1.1). Un point d'équilibre, ou point singulier du système noté par $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ est la solution de l'équation $f(t) = 0$, et on note par $D = \{x \in \mathbb{R}^n / f(t) = 0\}$ (resp. $\forall t \in I,\ f(t, \overline{x}) = 0$).*

1.2 la transformée de Laplace $\mathcal{L}$

Définition 1.2.1 *:Soit f une fonction du temps t. La transformée de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe$P$, définie par :*

$$F(P) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt}dt\ , \forall P \in \mathbb{C},$$

cette intégrale n'existe que si

$$\exists\ k > 0, \textit{tel que}\ \mid f(t) \mid \leq k\ e^{at}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$$

La fonction $F(P)$ est appelée image de $f(t)$, et la fonction $f(t)$ est appelée l'origine de $F(P)$

Remarque : Dans le cas des fonctions non causales, la T.L est définie par :

$$F(P) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}dt,\ \forall P \in \mathbb{C}.$$

Propriétés :

1.2.1 La linéarité

Proposition 1.2.1 *:La transformée de Laplace est un opérateur linéaire.*

Soit $f,\ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des T.L $\mathcal{L}(f(t))$ et$\mathcal{L}(g(t))$ et soient$t \in \mathbb{R}^+$et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L} g(t)$$

1.2.2 Dérivation de Laplace

Nous rappelons quelques propriétés pour tout fonction f dérivable n fois. On a,

1· $\mathcal{L}(f'(t)) = P\ F(P) - f(0)$ tel que : $F(P) = \mathcal{L}(f(t))$

2· $\mathcal{L}(f''(t)) = P^2\ F(P) - P\ f(0) - f'(0)$

3· $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = P^n\ F(P) - \sum_{k=1}^{n} P^{\ k-1} f^{\ (n-k)}(0)\ ;\ n \geq 1$

1.3 La transformation en Z

La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace.

Définition 1.3.1 *: la transformation en Z est une application qui transforme une suite s (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée z, telle que*

$$S(z) = Z\ \{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{\ -n}, z \in \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)\ z^{\ -n} converge \right\}.$$

1.4 La transformée inverse en Z :

La transformée inverse en Z est donnée par :

$$x(n) = Z^{-1}\left\{X(P)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(P)P^{n-1}dP,$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

1.5 Théorème de convolution

Cela incite à utiliser la transformation de Laplace, qui transforme un produit de convolution en un produit.

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

Si

$$F(P) = \mathcal{L}(f(t)) \text{ et } G(P) = \mathcal{L}(g(t))$$

alors

$$\mathcal{L}^{-1}(F(P) \cdot G(P)) = (f * g)(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)),$$

où$(f * g)(t)$ est le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$ qui définie par,

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx.$$

1.6 Notions de Système

Définition 1.6.1 *: Un système linéaire est dit à temps invariant si tous les matrices d'évolutions de contrôle, d'observabilité et de transmition sont à coéfficients constantes.*

Nous développerons le cas monovariable SISO : i.e une seule entrée - une seule sortie.

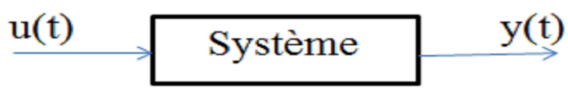

Figure 1.1.Shémas de système

Déscription d'un système mathématiquement :

On peut décrire le système par :

1. L'équation différentielle
2. Réponse Impulsionnelle
3. Fonction (où matrice) de transfert
4. Représentation d'état (A,B,C,D)

Lien entre les descriptions :

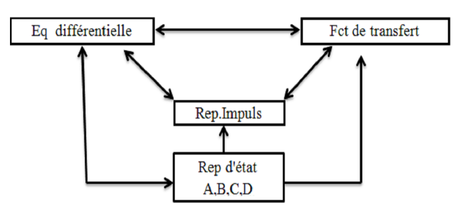

Figure 1.2.Shémas descriptions d'un système

Définition 1.6.2 ***(régime libre)*** *:Le régime libre est la partie de la solution qui ne dépend que des conditions initiales.*

Dans le cas d'un système LTI, elle est donnée par la forme,

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Définition 1.6.3 ***(régime forcé)*** *: Le régime forcé est la partie de la solution faisant intervenir l'excitation x(t) et pour des conditions initiales nulles.*

Dans le cas d'un système LTI, elle est donnée par la forme,

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Chapitre 2

Systèmes Linéaires à Temps Invariant Standard :Cas Continu

Ce chapitre présente la description du système à asservir est basée sur un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre. d'une part, que l'on sait résoudre directement ces systèmes qui passer par la transformée de Laplace.

2.1 Description d'un système LTI standards en temps continu

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où :

t est le temps
$u(t)$ est le vecteur de commande ou d'entrée. $Dim(u) = m$,
$x(t)$ est le vecteur d'état. $Dim(x) = n$,
$y(t)$ est le vecteur de sortie. $Dim(y) = p$,
E est la matrice d'évolution du système. $Dim(E) = (n \times n)$,
A est la matrice dynamique $Dim(A) = (n \times n)$,
B est la matrice d'application de la commande ou d'entrée. $Dim(B) = (n \times m)$,
C est la matrice d'observation ou de sortie. $Dim(C) = (p \times n)$,
D est la matrice de transmission $Dim(D) = (p \times m)$,
x_0 est la condition initiale

Remarque : Pour le même système physique donné, il existe plusieurs représentations d'état possibles, c-à-d la représentations d'état n'est pas unique.

Définition 2.1.1 *: Le système (2.1.1) est dit standard si det* $E \neq 0$

Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard (ou explicite).

$*$Si $det\ E \neq 0$, alors en multipliant (2.1.1) par E^{-1}, on obtient le système suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases},$$

qui est un système explicite.

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve la solution,

$$x(t) = e^{E^{-1}At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Et la réponse donnée par,

$$y(t) = Ce^{E^{-1}At}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

$*$Si $det\ E = 0$, on va considérer la définition suivante :

Définition 2.1.2 *: Le système (2.1.1) est dit régulier si et seulement si* $det(E\lambda - A) \neq 0$ *pour un certain* $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.2 Solution d'un système LTI standards à temps continu

Commençons par remarquer que le système LTI standards à temps continu peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

telle que A, B, C et D sont des matrices constantes.

La première équation s'appelle l'équation de commande ; la seconde, équation d'observation.

Supposons que le système est régulier, et on utilise la méthode de la transformation de Laplace, et de plus en supposons que$(PI_n - A)$ inversible pour un certain $P \in \mathbb{C}$,

$$X(P) = (PI_n - A)^{-1}x_0.$$

Remarque :$X(P)$ représente le vecteur des TL des x_i, $\forall i = \overline{1, n}$.

L'application de la transformation de Laplace inverse de cette équation donne,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(PI_n - A)^{-1}\right] x_0.$$

Or,

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(PI_n - A)^{-1}\right].$$

Qui représente la matrice de transition du système,

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

L'équation d'évolution de l'état x dans le cas du régime forcé devient,

$$x' = Ax + Bu,$$

et leur solution est donnée par :

$$X(P) = (PI_n - A)^{-1} x_0 + (PI_n - A)^{-1} BU(P),$$

puis on applique la TL inverse, on trouve

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{partie libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau) d\tau}_{\text{partie force}}$$

Cette expression est la somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre(ou autonome), soit $e^{A(t-t_0)} x_0$ et de la solution correspondant au régime forcé(ou commandé).
Et La sortie est donnée par :

$$y(t) = Ce^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Exemple : On considère le système présenté en figure 1.3 :Les variables d'entrées(cas de commande)sont e_1 et e_2. et la sortie est la tension S aux bornes de $L1$.

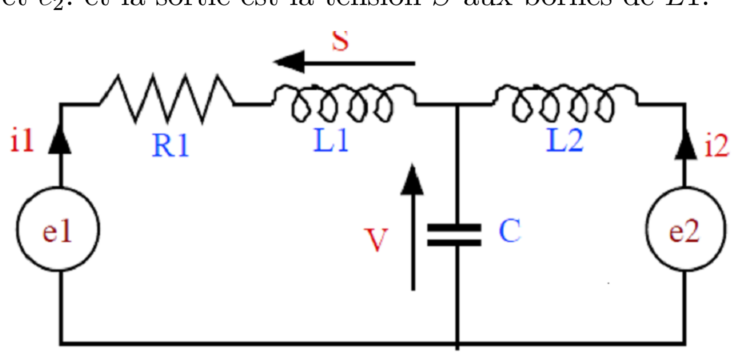

Figure 1.3.Circuit électrique RLC

Soit $u = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ le vecteur contenant ces deux variables.

Les équations de ce système sont :

$$\begin{cases} e_1 = R_1.i_1 + L1.\frac{di_1}{dt} + V \\ e_2 = L2.\frac{di_2}{dt} + V \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}.(i_1 + i_2) \\ S = L1.\frac{di_1}{dt} \end{array}$$

A un instant donné t, on peut considérer que le système se trouve dans un certain "état" défini par les valeurs prises par i_1, i_2 et V. Soit le vecteur $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T = [i_1\ i_2\ V]^T$.

On appelle ce vecteur l'état du système. Toutes les équations d'évolution de ce système peuvent s'écrire en fonction des entrées et de x_1, $x_2$et x_3 et de leurs dérivées :

$$\begin{cases} x_1' = \frac{-R}{L1}x_1 - \frac{1}{L1}x_3 + \frac{1}{L1}e_1 \\ x_2' = \frac{-1}{L2}x_3 + \frac{1}{L2}e_1 \\ x_3' = \frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}x_2 \end{cases}.$$

Ce qui peut s'écrire :

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L1} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u.$$

2.3 Description d'un système LTI standards en temps discret

Définition 2.3.1 *:La représentation d'état d'un système LTI en temps discret est de la forme,*

$$\begin{cases} x_{k+1}(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t)...(1) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + Du_k(t).....(2) \\ x_k(0) = x_0,\ \forall k \in \mathbb{R}^+,\ k \geq k_0 = 0 \end{cases},$$

où :

t est le temps
$u_k(t)$ est le vecteur de commande ou d'entrée. $Dim(u) = m$,
$x_k(t)$ est le vecteur d'état. $Dim(x) = n$,
$y_k(t)$ est le vecteur de sortie. $Dim(y) = p$,
A est la matrice dynamique $Dim(A) = (n \times n)$,
B est la matrice d'application de la commande ou d'entrée. $Dim(B) = (n \times m)$,
C est la matrice d'observation ou de sortie. $Dim(C) = (p \times n)$,
D est la matrice de transmission $Dim(D) = (p \times m)$,
x_0 est la condition initiale

Et A, B, C et D sont des matrices constantes

1· Les équations (1)sont appelées équations d'états.

2· Les équations (2)sont appelées équations de mesures (d'observation).

2.4 Solution d'un système LTI standards en temps discret

La solution du système standard (2.3.1) est :

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B u_i \ \ , k > 0.$$

Et la sortie du système standard (2.3.1) est donnée par :

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} B u_i \ \ + D u_i \ , k > 0.$$

Preuve.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$\begin{array}{ll} pour\ k = 0 \rightarrow & x_1 = Ax_0 + Bu_0 \\ pour\ k = 1 \rightarrow & \begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + Bu_1 \\ &= A\left[Ax_0 + Bu_0\right] + Bu_1 \\ &= A^2 x_0 + \sum_{k=0}^{1} A^{2-(k+1)} B u_k \end{aligned} \\ pour\ k = 2 \rightarrow & \begin{aligned} x_3 &= Ax_2 + Bu_2 \\ &= A^3 x_0 + \sum_{k=0}^{2} A^{3-(k+1)} B u_k \end{aligned} \\ pour\ k^{ième} \rightarrow & x_k = A^k x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)} B u_k \end{array}$$

Puis on démontré par recurence.

Le premier membre de cette équation correspond au régime libre, le deuxième au régime forcé.

2.5 La matrice de transition

La matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$ est solution du système autonome

$$x' = Ax.$$

On peut définir, comme dans la partie précédente, que :

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(PI_n - A)^{-1}.$$

Pour le problème de Cauchy. La solution est unique et définie par,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_{0,}\forall t \geq t_0,$$

tel que,

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires de la matrice de transition :

1.$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$

2.$\Phi(t_0, t_0) = I_n$

2.6 Quelques méthodes de calcul de cette matrice

2.6.1 Par transformation de Laplace inverse

On peut utiliser la première définition de la matrice de transition :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(PI_n - A)^{-1}\right].$$

Exemple 1. Soit :

$$x' = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x.$$

On va chercher a calculer e^{At}.

$$det(PI_n - A) = (P+2)(P+3)$$

En formant la TL inverse, on trouve :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

2.6.2 Par le calcul direct de e^{At} à partir de développement limité

$$e^{At} = I_n + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Ai}{i!}t^i.$$

Exemple : On reprend le même d'éxemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = I_2 + At = \begin{pmatrix} 1-5t & -t \\ 6t & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.3 Par l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

Comme
$$\Phi(t) = I_n + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i.$$
Avec le théorème de C.H., on peut réecrire $\Phi(t)$ ainsi :

$$\Phi(t) = \alpha_0(t).I_n + \alpha_1(t).A + \alpha_2(t).A^2 + ... + \alpha_{n-1}(t).A^{n-1}.....(**),$$

où n est la dimension de la matrice carrée A.

Proposition 2.6.1 *:Si A une matrice carrée a n valeurs propres non nulles distinctes :λ_1 ;λ_2 ;... ; λ_n, les coefficients $\alpha_0(t), \alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)$de l'équation $(**)$sont solution du système formé par les équations :*

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t).\lambda_i + \alpha_2(t).\lambda_i^2 + ... + \alpha_{n-1}(t).\lambda_i^{n-1} \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

On reprend l'exemple 1.
$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres de cette matrice sont :$\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -3$. D'après la proposition précédente, on sait que :
$$\Phi(t) = \alpha_0(t).I_n + \alpha_1(t).A$$
où $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$ sont solution de :
$$\begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t).(-2) \\ e^{-3t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t).(-3) \end{cases}.$$
Ce qui donne :
$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ \alpha_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \end{cases}.$$
Le calcul de $\Phi(t)$ donne le même résultat que dans l'exemple 1.

2.6.4 Par la diagonalisation

Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_i)$, $\forall i = 1, ..., n$ tels que :

$$A = PDP^{-1}$$

Exemple : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer les valeurs propres de cette matrice on doit d'abord calculer le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned} det\ (A - \lambda I) &= (1-\lambda)^2 (3-\lambda) \\ \lambda_1 &= 1;\ \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

on trouve les vecteurs propres associés à chaque valeur propre, il faut calculer $ker(E_\lambda)$ i.e.

$$\forall X = (x, y, z),\ ker(E_\lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; AX = \lambda X\}.$$

$A = P\ DP^{-1}$ où P est la matrice de passage et D la matrice diagonale de A

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $det\ P = -2 \neq 0$. Alors P^{-1}existe. Donc

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^{3t} - e^t & -e^{3t} + e^t \\ 0 & -e^{3t} + e^t & -e^{3t} - e^t \end{pmatrix}.$$

2.7 La fonction de transfert

La fonction de transfert $H(P)$ est définie avec des conditions initiales nulles du système (2.1.1) :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}.$$

On prend la TL des équations d'états :

$$X(P) = (PI_n - A)^{-1} BU(P).$$

On suppose que notre système est régulier. Dans ce cas,on applique de même la TL à l'équation $y = Cx + Du$ nous donne :

$$Y(P) = CX(P) + DU(P).$$

On remplace $X(P)$ dans$Y(P)$. on obtient :

$$Y(P) = \left[C(PI_n - A)^{-1}B + D\right]U(P).$$

Posons,

$$H(P) = C(PI_n - A)^{-1}B + D.$$

Revenons à notre fonction de transfert i.e.

$$(PI_n - A)^{-1} = \frac{adj(PI_n - A)}{\det(PI_n - A)} \text{ qui aboutit à : } H(P) = C\frac{adj(PI_n - A)}{\det(PI_n - A)}B + D.$$

Ou encore :

$$H(P) = \frac{C\ adj(PI_n - A))B + \det(PI_n - A)D}{\det(PI_n - A)}.$$

Remarque :La matrice de transfert est invariante pour tout changement de la description d'état(en particulier, dans le cas d'un changement de base).

Exemple : Soit le système d'écrit par :

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}.$$

Dans ce cas, l'entrée et la sortie du système sont des scalaires. Le calcul de la matrice de transfert va en fait donner la fonction de transfert. D'où,

$$H(P) = C(PI_n - A)^{-1}B + D = \frac{1}{(P+1)(P+2)}.$$

Chapitre 3

Systèmes Linéaires à Temps Invariant Singuliers :Cas Continu

Dans ce chapitre, le problème de la recherche de la solution de système linéaire singulier est traité par l'utilisation de la transformation de Laplace comme généralisation du cas standard.

3.1 Présentation des systèmes singuliers

La modélisation d'état d'un processus est obtenue en appliquant la méthode dite de variables d'états. Cette méthode offre une meilleure compréhension du système et s'avère très intéressante pour l'analyse et la synthèse des systèmes. Pour obtenir un modèle d'espace d'état, nous devons choisir quelques variables qui ont une signification physique comme la vitesse, le poids, la température, l'accélération, etc. Ces variables doivent contenir suffisamment d'informations pour caractériser le processus étudié. Puis, plusieurs équations seront établies à partir des relations entre ces variables. Généralement, ce sont des équations différentielles et algébriques qui décrivent le modèle mathématique d'un processus physique.

3.2 Description d'un système LTI singulier à temps continu

On considère le système linéaire à temps continue (2.1.1)

Définition 3.2.1 *: On dit que le système (2.1.1) est singulier si la matrice E est singulière, c-à-d* $det E = 0$.

3.3 Solution d'un système LTI singulier à temps continu

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $det(PE - A) \neq 0$ pour un certain $P \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent autour de l'infini.

$$(PE - A)^{-1} = P^{-1} \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i P^{-i}, \tag{3.3.1}$$

où μ est appelé indice de nilpotence du faisceau$(PE - A)$il est décrit par,

$$\mu = rgE - deg[det(PE - A)] + 1.$$

Et ϕ_i est appelée la matrice fondamentale de (2.1.1).

La solution $x(t)$ du système (2.1.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et le contrôle $u(t)$ est donnée par,

$$x(t) = e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}\left[Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right],$$

où

$$u^{\,(j)} = \frac{d^{\,j}u}{dt}, j = 1, ..., \mu - 1.$$

Et la sortie du système singulier est :

$$y(t) = Ce^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \int_0^t Ce^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}\left[Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right] + Du(t).$$

Preuve. Par application de la transformée de Laplace à l'équation

$$Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

on obtient

$$(EP - A)X(P) = Ex_0 + BU(P).$$

Le système (2.1.1) étant régulier, donc

$$X(P) = (EP - A)^{-1}(Ex_0 + BU(P)).$$

De la relation (3.3.1). on a,

$$\begin{aligned} X(P) &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} \left[Ex_0 + BU(P)\right] \\ &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} BU(P) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} BU(P) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)} BU(P) \end{aligned}$$

Enfin, nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution pour obtenir la solution du système comme suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[X(P)\right] &= Ex_0\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)}\right] + B\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} U(P)\right] + Ex_0\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)}\right] \\ &\quad + B\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)} U(P)\right] \end{aligned}$$

sachant que,

$$\mathcal{L}\left[e^{\phi_0 At}\phi_0\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i P^{-(i+1)}.$$

D'aprés le théorème de convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[X(P)\right] &= Ex_0\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left(e^{\phi_0 At}\phi_0\right)\right] + B\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left(e^{\phi_0 At}\phi_0\right) \times \mathcal{L}(u(t))\right] + Ex_0\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)}\right] \\ &\quad + B\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} P^{-(i+1)} U(P)\right], \end{aligned}$$

on aura alors,

$$x(t) = Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + \left[\left(e^{\phi_0 At}\phi_0\right) * Bu(t)\right] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t).$$

Par conséquent,

$$x(t) = Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + \int_0^t \left[e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau\right] + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\left[Ex_0\delta^{(i-1)} + Bu^{(i-1)}(t)\right].$$

Et la sortie est :

$$y(t) = Ex_0 Ce^{\phi_0 At}\phi_0 + C\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 u(\tau)d\tau + C\sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}\left[Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right] + Du(t).$$

Exemple : Considérons les matrices E et A suivantes,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = 2.$$

Alors,

$$det(EP - A) = -P$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$ tel que,

$$\mu = rgE - deg[det(EP - A)] + 1 = 2$$

Et par définition,

$$(PE - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i P^{-(i+1)} = \phi_{-2} P^1 + \phi_{-1} P^0 + \phi_0 P^{-1} + \phi_1 P^{-2} + ...$$

Donc,

$$(PE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -P \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{P} & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_{-1} E x_0 \delta(t) + \phi_{-1} B u(t) + \phi_{-2} E x_0 \delta^{(1)}(t) + \phi_{-2} B u^{(1)}(t) \\ &= \begin{pmatrix} -x_{2,0}\delta(t) - u(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$y(t) = 2u(t).$$

3.4 Description d'un système LTI singulier à temps discret

Considérons le système linéaire singulier en temps discret suivant,

$$\begin{cases} Ex_{k+1}(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + Du_k(t) \\ x_k(0) = x_{k_0}, t_0 = 0 \end{cases}. \tag{3.4.1}$$

3.5 Solution d'un système LTI singulier à temps discret

Notons que nous avons les mêmes propriétés que dans le cas continu. Cependant, l'application de la z-transformée au système (3.4.1) donne,

$$(EP-A)X(P) = PEx_0 + BU(P) \Rightarrow X(P) = (EP-A)^{-1}PEx_0 + (EP-A)^{-1}BU(P),$$

d'après (3.3.1), on obtient,

$$X(P) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{-i} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{-(i+1)} BU(P).$$

Utilisons maintenant la z-transformée inverse pour obtenir la solution du système,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(P)P^{n-1}dP = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{n-i-1} Ex_0 dP + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i P^{n-i-2} dP,$$

par conséquent, la solution du système est,

$$\begin{aligned} x(n) \quad &: = x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i Bu(n-i-1) \\ &= \phi_n Ex_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu(i) \end{aligned}$$

Il s'ensuit par suite,

$$x(n) = \phi_n Ex_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu(i),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Qui représente la solution du système singulier à temps discret. Et la sortie du système est déterminée par la formule,

$$y(n) = C\phi_n Ex_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} C\phi_{n-i-1} Bu(i) + Du(n),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Exemple : On reprend l'exemple précédent. la solution est donnée par,

$$\begin{aligned} x_n &= \phi_{-2}Bu_{n+1} + \phi_{-1}Bu_n + \phi_0 Bu_{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} -u_n - u_{n+1} \\ -u_n \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La sortie du système sera cependant égale à,

$$y_n = 2u_n.$$

Chapitre 4

Stabilité des Systèmes LTI à temps Continu

4.1 Stabilité des systèmes LTI standard au sens de Lyapunov

Dans cette section, nous rappelerons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibres. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.
La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.
On considère un système non linéaire décrit par son modèle d'état,

$$x'(t) = f(t, x, u). \tag{4.1.1}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ et la condition initiale $x(t_0) = x_0$, on suppose que le système possède un point d'équilibre $\overline{x}$

4.2 Les définitions de la stabilité

La définition de la stabilité possède le même définition du point d'équilibre.

Définition 4.2.1 ***:(Equilibre stable)*** *Le point $\overline{x}$ est un point d'équilibre stable du système (4.1.1) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \textit{tel que};\ ||x_0 - \overline{x}\ || < \delta \Rightarrow ||x(t, x_0, u) - \overline{x}|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0,$$

avec $x(t, x_0, u)$ désigne la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (4.1.1). Si cette condition n'est pas satisfaite, le point d'équilibre est instable.

Définition 4.2.2 ***:(Equilibre attracteur)*** *Le point $\overline{x}$ est un point d'équilibre attracteur du système (4.1.1) si*

$$\exists \delta > 0 \ \textit{tel que}; ||x_0 - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} ||x(t, x_0, u) - \overline{x}|| = 0, \forall t \geq t_0.$$

$\overline{x}$ est un équilibre attracteur veut dire que $\overline{x}$ est un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ si elles démarrent suffisamment près de $\overline{x}$. Lorsque $\delta = +\infty$, on dit que $\overline{x}$ est globalement attractif.

Définition 4.2.3 ***:(Equilibre asymptotiquement stable)*** *Le point $\overline{x}$ est un point d'équilibre asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable pour le système (4.1.1) s'il est stable et attractif (resp. globalement attracteur).*

Un ensemble d'états initiaux x_0 à partir des quels les trajectoires convergent vers un équilibre asymptotiquement stable est appelé bassin d'attraction.
La stabilité asymptotique est la propriété qui est généralement recherchée en pratique.
Cette définition ne nous dit rien sur la vitesse avec laquelle la trajectoire $x(t)$ converge vers son équilibre. C'est pourquoi, on introduit la notion suivante de stabilité exponentielle.

Définition 4.2.4 ***:(Stabilité exponentielle)*** *Le point $\overline{x}$ est un point d'équilibre exponentiel stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\alpha > 0$ et $\delta > 0$tel que ;*

$$||x_0 - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow ||x(t, x_0, u) - \overline{x}|| \leq M\ ||x_0 - \overline{x}|| exp(-\alpha t), \forall t \geq t_0.$$

Remarque : *Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.*

Par la suite, nous nous intéresserons à la stabilité autour de l'origine c-à-d quand $\overline{x} = 0$.

4.3 Méthode de Lyapunov

4.3.1 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système (4.1.1) autour de l'équilibre $\overline{x}$. Donc elle équivaut à examiner les valeurs propres $\lambda_i(A)$, où A est la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre , c-à-d

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}).$$

Définition 4.3.1 *: (méthode indirecte de Lyapunov) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont à partie réelle négative c-à-d*

$$\forall i \;\; tel\ que; \;\; Re(\lambda_i(A)) < 0.$$

Le point d'équilibre $\overline{x}$ est exponentiellement stable. Sinon, si A possède au moins une valeur propre à partie réelle positive c-à-d

$$\exists \; i \;\; tel\ que\ ; \;\; Re(\lambda_i(A)) > 0.$$

l'équilibre $\overline{x}$ est instable.

Cette méthode est simple à mettre en oeuvre mais elle ne permet d'analyser que très partiellement la stabilité, car elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction.
Exemple : Soit le système standard suivant,

$$\begin{cases} x_1' = x_1\,(2 - x_1 - x_2) \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - x_1^2 \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité il faut d'abord trouver le point d'équilibre, autrement dit résoudre le problème

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1^2 - x_1x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

donc l'ensemble des points d'équilibres est,

$$\overline{X} = \{\overline{x} = (x_1, x_2)\,/\,(0,0)\,,(1,1)\,,(2,0)\}$$

puis on calcule la matrice Jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 - x_2 & -x_1 \\ 2 - 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

au point $\overline{x} = (2, 0)$, la matrice Jacobienne

$$J(2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique est,

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

donc les valeurs propres sont $\lambda = -1$, $\lambda_2 = -2$, dans ce cas le point d'équilibre $\overline{x} = (2, 0)$ est asymptotiquement stable.

4.3.2 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Cette méthode est basée sur la définition d'une fonction particulière définie positive (notée généralement $V(x, t)$), appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Elle est plus difficile à mettre en oeuvre par rapport à la méthode indirecte, mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale.

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V(x)$ (fonction d'énergie généralisée)$V(x) > 0, \forall x \neq 0$

Théorème : Pour le système autonome $x'(t) = f(x)$ de point d'équilibre 0

-Si $V(x) > 0$ telle que $V'(x) \leq 0$ alors 0 est un point d'équilibre stable.

-Si $V(x) > 0$ telle que $V'(x) < 0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Application aux modèles LTI

- Modèle : $x'(t) = Ax(t)$
- Fonction candidate de Lyapunov quadratique :

$$V(x) = x^T P x$$

où P la matrice réelle symétrique définie positive

Théorème : le système$x' = Ax$ est asymptotiquement stable ssi $\forall\ Q = Q^T > 0$, $\exists\ P > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Q = 0.$$

La dérivée temporelle $V'(x)$ est calcule comme suit,

$$V'(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} x' = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \overline{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x, \overline{u}).$$

Cette équation extrère d'aprés $V'(x) < 0$.

$$\begin{aligned} V'(x(t)) &= x^{'T}(t)Px(t) + x^T(t)Px'(t) \\ &= x^T(t)\left[A^TP + PA\right]x(t) \\ &= x^T(t)\left[-Q\right]x(t) \end{aligned}$$

où Q la matrice symétrique donnée par :

$$Q = -\left(A^TP + PA\right).$$

la condition de stabilité s'écrit alors $x^T(t)\left[A^TP + PA\right]x(t) < 0$ pour $x \neq 0$, ce qui s'écrit aussi $A^TP + PA < 0$ et qui signifie que toutes les valeurs propres (réelles) de la matrice symétrique Q sont strictement négatives.

L'évolution des processus est décrite par une expression de la forme :

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \text{ dans le cas continu} \\ x_{k+1} &= Ax_k, \text{ dans le cas discret} \end{aligned}$$

avec A une matrice constante.

Dans le cas continu, la condition de stabilité asymptotique est que les valeurs propres de la matrice A soient à parties réelles strictement négatives. C'est une condition suffisante et nécessaire [d].

Dans le cas discret l'équation de Lyaponov s'écrit :$P - A^TPA = Q$, il y a une condition nécessaire et suffisante, est aussi donnée, pour la stabilité asymptotique est que les valeurs propres de A soient de modules strictement inférieurs à 1 $\parallel \lambda_i(A) \parallel < 1$).

4.4 Application de Pendule

Bras d'un robot à un degré de liberté.

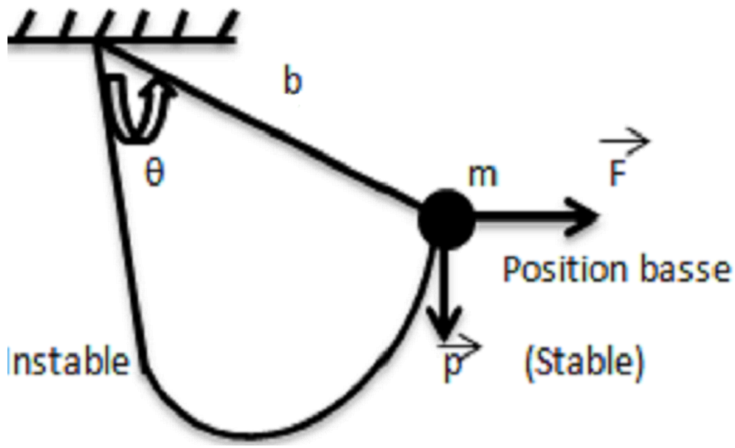

Figure 1.**4**.Pendule simple

Avec

$$\begin{aligned} \text{Energie cinétique} \quad &: \quad = E_{cin} = 1/2m(x'^2 + y'^2) = 1/2m\ \theta'^{\,2} \\ \text{Energie potontielle} \quad &: \quad = E_{pot} = mg(1 - cos\ \theta) \end{aligned}$$

pour $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$. on a ,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = f_1 \\ x_2' = -g\ sin\ x_1 - \frac{b}{m}x_2 = f_2 \end{cases},$$

où,

x_1 :Position angulaire.

x_2 :Vitesse angulaire.

m :masse.

b :distance entre le point d'ancrage et le centre de masse.

$$V(x_1, x_2) = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mx_2^2 + mg(1 - \cos x_1).$$

Cette fonction est positive pour autant que θ' et le second terme ne s'annulent pas simultanément. Par conséquent, V est nul pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} V'(x_1,x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' \\ &= mx_2(-g\sin x_1 - \frac{b}{m}x_2) + mgx_2\sin x_1 = -bx_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

L'équilibre donc est stable d'aprés le Théorème de seconde méthode de Lyapunov.

L'ensemble $D = \{x \backslash V'(x) = 0\}$tel que, $V = \{x_1, x_2 \backslash x_2 = 0\}$ est la droite horizontale passant par l'origine.

4.5 Stabilité des systèmes LTI singuliers au sens de Lyapunov

On doit d'abord traité la stabilité dans le système singulier les cas où,

1)$E = I_n$, on trouve la condition de Lyapunov établis pour le cas standard.

2)E est inversible, dans se cas adaptons les même résultat comme généralisation du théorème.

$$x'(t) = E^{-1}Ax(t) = \tilde{A}x(t).$$

Théorème :le système singulier est stable avec E inversible s'il existe une matrice P définie positive vérifiant $P^T = P$ et qui est solution de l'équation

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} = -Q.$$

Pour toute matrice$Q$ définie positive et $E^{-1}A = \tilde{A}$.

Autrement dit, Il existe une matrice P définie positive solution de l'équation

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} < 0,$$

Où

$$\tilde{A} = E^{-1}A.$$

3)E n'est pas inversible, la Fonction candidate de Lyapunov quadratique : $V(x) = x^T(PE)x$.

Théorème : On dit que le système singulie est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice P tel que

$$A^T P + PA = -Q,$$

où

$$E^T P = P^T E \geq 0.$$

Pour une matrice Q définie positive.

Preuve. considérons la fonction candidate de Lyapunov ,

$$V(x(t)) = x^T (PE)\, x.$$

pour trouver la stabilité, il suffit que

$$V'(x(t)) < 0 \Rightarrow V'(x(t)) = x^{'T} PE^T x + x^T PE\ x^{'} < 0$$

pour

$$E^T P = P^T E$$

on a

$$\begin{aligned} V'(x(t)) < 0 &\Rightarrow x^T \left(A^T P + PA\right) x < 0 \\ &\Rightarrow \left(A^T P + PA\right) < 0 \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

Remarque : Les mêmes définitions de la stabilité au cas standard restent valables pour le cas singulier. mais cette dernière partie, nous caractérisons des extensions des test pour le cas des systèmes singulieres.

Exemple : On considère comme système singulier à temps continu, oùOn considère comme système singulier à temps continu, où

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'abord, on calcule

$$A^T P + PA = -Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2P_2 & P_1 - P_2 - P_3 \\ P_1 - P_2 - P_3 & 2(P_2 - P_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Et par l'identification, on trouve la matrice $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, il reste à montrer qu'elle est définie positive, Ensuit, Il faut montrer que $E^T P = P^T E \geq 0$. Enfin, ce système n'est pas stable d'après Lyapunov car $E^T P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq P^T E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons introduit la stabilité des systèmes linéaires singuliers par la méthode de Lyapunov.

L'intérêt de ce travail etait de montrer qu'en utilisant les techniques de la théorie de contrôle, on peut obtenir des résultats pour des problèmes appartenant aux autres domaines de mathématiques comme l'arithmétique.

Nous prions le bon ALLAH que ce projet aura été au succès et peut aider dans le futur d'autres étudiants qui choisiraient de travailler sur le même thème.

Bibliographie

1 D. Arzelier :Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de cuors version 5.2. LAAS-CNRS. France.

2 D. Bouagada : Système et représentation d'état. Cours de Master(1) 2015. Modélisation, Contrôle et Optimisation.

3 D. Bouagada : Théorie de contrôle. Cours de Master(1) 2015. Modélisation, Contrôle et Optimisation.

4 Borne L. Vanheegh Ph, Duflos E"Automatisation des processus dans l'espace d'état", éditions Technip, 2007.

5 Dail. L :Singular Control System.Springer New York 1989.

6 R. Chabour, Fonctions de Lyapounov et stabilité des systèmes déterministes. http ://poncelet.sciences.un metz.fr/chabour/

7 Jean-Pierre Richard, Ecole Centrale de Lille, méthode de Lyapunov"méthode directe".

8 Emmanuel Trélat"controle optimal" : théorie et application, vuibert collection 2005.

9 T.Kaczorek, Standard and singular 1D and 2D positive linear systems, CD SPA 2000.

10 Hahn W :" Theory and Application of Lyapunov's Direct Method" Englewood Cliffs, NJ : Prentice - Hall, 1963.