UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Croissance et points fixes des solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes

Présenté par

M^{elle} DJALTI BEN ZIANE Soumia

Soutenu le /05/2015

Devant le jury

Mr BELAÏDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme BELARBI HAMANI S	**Examinatrice**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme AZIZ HAMANI K	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Résumé

Dans ce mémoire, on a deux chapitres :

Le premier chapitre est un rappel et définition de la théorie de Nevan-linna, par exemple en définit le premier théorème fondamental de Rolf Nevan-linna avec quelques lemmes, l'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction entière, la mesure linéaire et logaritmique, la densité supérieure et le théorème de Phragmén-Lindlôf avec quelques lemmes pour prouver ce théorème.

Et le deuxième chapitre est le resultat de l'article de Jin Tu et Cai-Feng Yin[3], où nous étudierons des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieure :

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0$$

où $A_0, ..., A_{K-1}$ sont des fonctions entières d'ordre fini ayant le même ordre fini, tels que on donne des théorèmes avec leurs démonstrations et des exemples.

Dédicace

Aux deux anges gardiens qui ont veille sur moi toute leur vie, m'ont protégé et m'ont aime ,

mon père « Idrisbey Ahmed » , et ma mère « Belmhel Mahdjouba » que dieu me les protégé et les garde.

A celle qui a partagé toutes mes souffrances qui n'a cessé de me soutenir et de m'encourage ,

mon frère « Abd elkader » et mes sœurs « Ilham, Hayet ».

A toutes mes familles « Idrisbey et Belmhel ».

A tout mes amies en particulier : « Naima, Sakina, Kheira,

Hassiba, Dalila, Kaltoum, Mahdjouba, Aicha », et mes camarades.

A tous mes Professeurs en particulier « M.Fettouch » pour leur assistance et leur encouragement.

A tous mes collègues de primaire à secondaire et de l'enseignement supérieur.

A tous ceux que je ne porte pas leurs noms, qu'ils sachent que je les tiens dans mon cœur.

Khadra

Dédicace

Avec un énorme plaisir, cœur ouvert et une immense joie, que je dédie mon travail à

mes chers parents ma mère Fatma et mon père Abd elkader,

pour leur patience, leur amour, leur soutien, et leurs encouragements.

A mon frère et mes sœurs.

A mes amies et mes camarades,

Sans oublier tout les professeurs que se soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

kheira

Remerciments

Nous remercions dieu le tout-puissant de nous avoir donné la volonté de réaliser cette étude.

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à Mieur« FETTOUCH Houari »

pour avoir bien voulu nous encadrer pour tous les temps qu'il nous a octroyé et pour tous les conseils qu'il trouve ici

l'expression de notre profonde gratitude.

A les membres du jury M ^{ieur} « ZINELAABIDDINE Latreuch » et M^{me} « BECHAOUI Khadidja » .

A tous ceux qui,directement ou indirectement, ont aidé à la réalisation de ce travail.

Table des matières

INTRODUCTION

Pendant plusieurs années, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevan-linna est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions.
L'équation différentielle suivante

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0 \qquad (I)$$

a été étudié par plusieurs auteurs :K.H.Kwon et Z-X Chen.
Le premier chapitre est une introduction à la théorie de Nevan-linna,où on donne des définitions et des propriétés sur cette théorie qui concernent la distribution des valeurs des fonctions méromorphes dans le plan complexes.
Le deuxième chapitre de ce mémoire est le résultat de l'article de Jin Tu et Cai-Feng Yi [3], où nous étudierons des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieure où $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières d'ordre fini ayant le même ordre fini. (dus à K.H.Kwon [7] et Z-X Chen [14]).

Chapitre 1

Notions des bases

1.1 Rappel et définition

1.1.1 Fonction caractéristique de Rolf Nevanlinna

Définition 1.1.1 (*voir* [2]) *Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on définit*

$$\ln^{+} \alpha = \max\left(0, \ln \alpha\right).$$

Lemme 1.1.1 *On a les résultats suivants :*

1. $\ln x \leq \ln^{+} x$
2. $\ln^{+} x \leq \ln^{+} y$ *pour tout* $(0 < x \leq y)$
3. $\ln x = \ln^{+} x - \ln^{+} \frac{1}{x}$
4. $|\ln x| = \ln^{+} x + \ln^{+} \frac{1}{x}$
5. $\ln^{+} \left(\prod_{j=1}^{m} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \ln^{+} x_j$
6. $\ln^{+} \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) \leq \ln m + \sum_{j=1}^{m} \ln^{+} x$

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égale à*

$a \in \mathbb{C}$. Soit $i\left(z, a, f\right)$ désignant la multiplicité de a-point de f à z. Ainsi, on définit

$$n\left(r, a, f\right) = n\left(r, \frac{1}{f - a}\right)$$

c'est à-dire, $n(r,a,f)$ est le nombre de racines de $f(z)=a$ dans $|z|\leq r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. Pour les pôles de f, nous définissons pareillement

$$n(r,\infty,f)=n(r,f).$$

Définition 1.1.3 (*voir* [2]) *(fonction a-points). Pour la fonction méromorphe f, on définit*

$$N(r,a,f)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\log r$$

pour $a\neq\infty$ et

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$.

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z)=\sum_{j=n}^{\infty}c_jz^j,c_n\neq0,n\in\mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln|c_n|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta+N(r,f)-N(r,\frac{1}{f}).$$

Définition 1.1.4 *(fonction de proximité). Pour la fonction méromorphe f, on définit*

$$m(r,a,f)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-a}\right|d\varphi\ ,\ a\neq\infty$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi$$

$m(r,a,f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a.

Définition 1.1.5 *(Fonction caractéristique). La fonction caractéristique de la fonction méromorphe f est définie comme suit*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f(z) = e^{2z}$, on a*

$$m(r,f) = \frac{2r}{\pi}\ ,\ N(r,f) = 0.$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{2r}{\pi}.$$

1.1.2 Premier Théorème fondamental de Rolf Nevan-linna

Théorème 1.1.1 (*voir* [10]) *(Premier théorème fondamental). Soit f une fonction méromorphe, $a \in \mathbb{C}$ et*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction $f - a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a)$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln 2 + \ln^+ |a|.$$

Preuve. Le 1^{ier} cas :

Si $a = 0$, alors d'après le Lemme 1.1.1 et la Proposition 1.1.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f})$$

et

$$\ln|c_m| = m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).$$

Donc

$$m(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f}) = m(r,f) + N(r,f) - \ln|c_m|.$$

D'où

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \ln|c_n|\,. \tag{1.1.1}$$

Où

$$\varphi(r,0) = 0.$$

Le $2^{ème}$ cas :

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $g = f - a$. Alors

$$N(r,\frac{1}{g}) = N(r,\frac{1}{f-a}),\;\; N(r,g) = N(r,f)$$

et

$$m(r,\frac{1}{g}) = m(r,\frac{1}{f-a}).$$

De plus

$$\ln^+|g| = \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2$$

et

$$\ln^+|f| = \ln^+|f-a+a| = \ln^+|g+a| \leq \ln^+|g| + \ln^+|a|\,.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m\left(r,g\right) \leq m\left(r,f\right) + \ln^+|a| + \ln 2$$

et

$$m\left(r,f\right) \leq m\left(r,g\right) + \ln^+|a| + \ln 2.$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m\left(r,g\right) - m\left(r,f\right).$$

Alors

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

En appliquant 1.1.1 pour la fonction g, on aura

$$T(r,\frac{1}{g}) = m\left(r,\frac{1}{g}\right) + N(r,\frac{1}{g}) = m\left(r,g\right) + N(r,g) - \ln|c_m|$$

$$= m\left(r,f\right) + N(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m| = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a).$$

Remarque 1.1.1 *Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.1.2 *Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes. Alors*

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n \tag{a}$$

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) \tag{b}$$

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \tag{c}$$

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \tag{d}$$

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n \quad \text{pour } r \geq 1 \tag{e}$$

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) \quad \text{pour } r \geq 1 \tag{f}$$

$$T(r, f^n) = nT(r, f)\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \tag{g}$$

Définition 1.1.6 *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t,\frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$ *et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

et $\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros distincts de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$.

Exemple 1.1.2 *L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z) = e^z + b$ $($*où* $b \neq 0, \infty)$ *est égal à* 1.

1.1.3 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction entière

Définition 1.1.7 *Soit* f *une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. *Si* f *est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r;f)}{\log r}$$

On dit que la fonction f *est de l'ordre infini si*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty$$

Exemple 1.1.3 *Soit* $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$. *On a* $n(t,f) = 0$, *et donc* $N(r,f) = 0$. *D'autre part,*

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ |a_n| r^n (1+o(1))\, d\theta \\ &= n\log r + O(1), \end{aligned}$$

et comme $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = n\log r + O(1)$, alors $\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 0$

Lemme 1.1.3 *Si f est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{C}$, alors*

$$\sigma\left(f^{(k)}\right) = \sigma(f). \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Définition 1.1.8 *Soit f une fonction entière non constante, l'ordre inférieur de la fonction f est défini par*

$$\mu(f) = \lim_{r\longrightarrow+\infty} \inf \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

1.1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique la densité supérieure

Définition 1.1.9 *Supposons que $E \subset [1,+\infty[$, on désigne par $m(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E et par $lm(E)$ la mesure logarithmique de l'ensemble E, avec*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)\frac{dt}{t}$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E. La densité supérieure et inférieure de l'ensemble E sont définies par

$$\overline{dens}E = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m(E\cap[1,r])}{r},$$

et

$$\underline{dens}E = \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{m(E\cap[1,r])}{r}.$$

Exemple 1.1.4 ***i)*** *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [e,e^4] \subset [1,+\infty[$ est*

$$m(E) = \int_{1}^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_{e}^{e^4} dt = e(e^3 - 1).$$

ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ *est*

$$lm(E) = \int_{1}^{+\infty} \chi_E(t)\frac{dt}{t} = \int_{e}^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

iii) La densité supérieure de l'ensemble $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ *est*

$$\begin{aligned} \overline{dens}E &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m(E \cap [1, r])}{r} = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m([e, e^4] \cap [1, r])}{r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m([e, e^4])}{r} = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.1.10 [4] *Soit* $f\ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction entière,* $\mu(r)$ *le terme maximal, i.e,* $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n; n = 0, 1...\}$. *Alors l'indice central de la fonction* f *est défini par :*

$$v_f(r) = \max\{m; \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Définition 1.1.11 *La fonction* $a(z)$ *est appelée fonction petite par rapport à* f *si* $a(z)$ *est une fonction méromorphe satisfaisant à* $T(r, a) = S(r, f)$*, c'est-à-dire* $T(r, a) = o(T(r, f))$ *quand* $r \to \infty$ *à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.*

Lemme 1.1.4 *voir* [10] *Soient* f *une fonction méromorphe transcendante et* $k \geq 1$ *un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT\left(r, f\right)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E *de mesure linéaire finie. Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Exemple 1.1.5 *i) Pour la fonction* $f(z) = e^{3z^5}$*, on a :*

$$N(r, f) = 0,\ m(r, f) = \frac{3r^5}{\pi}.$$

Donc

$$T(r,f) = \frac{3r^5}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 5,\ \rho_2(f) = 0.$$

ii) Soient $p(z) = a_p z^p + a_{p_{-1}} z^{p-1} + ...$*est un polynôme de degré* $p \geq 1$ *et* $g(z) = e^{p(z)}$ *, alors*

$$T(r,g) \simeq \frac{|a_p|\, r^p}{\pi} \quad (quand\ r \to +\infty)\ .$$

D' où

$$\rho(g) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log T(r,g)}{\log r} = p,\ \rho_2(g) = 0.$$

iii) Soit $h(z) = \exp(e^z)$*, alors .*

$$T(r,h) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}} \quad (quand\ r \to +\infty).$$

1.1.5 Théorème de Phragmén-Lindelöf

Soit f *une fonction analytique dans le domaine fermé*

$$D = \{z : \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2, r_0 \leq |z| \leq +\infty\}$$

et continue dans $\overline{D} = D \cup \partial D$ (∂D est la frontière de D)*.Soit* $\varepsilon > 0$ *tel que pour* $|z| \geq r_1(\varepsilon)$*,* $z \in D$ *on a*

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\varepsilon\, |z|^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}\right\}$$

et pour $z \in D$*, on a*

$$|f(z)| \leq M \qquad (M \text{ est constante })\,.$$

Alors $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in D$.

1.1.6 Quelques lemmes

Pour prouver le théorème, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.1.5 [5] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante,*

$H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ *un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant* $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$*et soit* $\alpha > 1$ *une constante donnée. Alors il existe une constante* $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle , tels que si* $\psi \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0\ (\psi) > 1$, tel que pour tout z *vérifiant* $\arg z = \psi$ *et* $|z| = r > R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq B\left\{\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)\right\}^{j-i}.$$

Lemme 1.1.6 [13] *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensemble* $E_2 \subset (1. + \infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que, si z satisfait* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ *et* $|f\ (z)| = M\ (r, f)$ *, alors on a*

$$\left|\frac{f\ (z)}{f^{(s)}\ (z)}\right| \leq 2r^s \qquad (s \in \mathbb{N}).$$

Lemme 1.1.7 *Supposons que $f(z)$ est une fonction entière. S' il existe un ensemble* $E_3 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que* $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$, *et*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T\ (r, f)}{\log r} = \rho;$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T\ (r, f)}{\log r} = \mu,$$

alors

$$\sigma\ (f) = \rho,\ \ \mu\ (f) = \mu.$$

De plus, si

$$\arg z = \theta \in [0, 2\pi)\backslash\ E_3$$

et

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log T\left(r,f\right)}{\log r} = \sigma$$

alors

$$\sigma_2\left(f\right) = \sigma.$$

Lemme 1.1.8 *Voir* [13] *.Soit* H_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma\left(H_j\right) \leq \sigma < \infty$. *Si* $f(z)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + ... + H_1 f' + H_0 f = 0,$$

alors $\sigma_2\left(f\right) \leq \sigma$

Lemme 1.1.9 *Voir* [5] *.Soit* $f(z)$ *une fonction entière transcendante d'ordre fini* σ*, soit* $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ *un ensemble fini de nombres entiers vérifiant* $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$*, et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_4 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, telle que si* $\psi \in [0, 2\pi) - E_4$*, alors il existe une constante* $R_0 = R_0\left(\psi\right) > 1$ *tel que pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \psi$ *et* $|z| = r \geq R_0$*, et pour tout* $(k, j) \in H$*, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}\left(z\right)}{f^{(j)}\left(z\right)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{1.1.2}$$

Lemme 1.1.10 *Voir* [1] *.Soit* $w\left(z\right)$ *une fonction entière d' ordre fini* ρ *et* $v(r)$ *son indice central. Alors*

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log v(r)}{\log r}.$$

Quelques lemmes

Lemme 1.1.11 [5] *Soit* $f(z)$ *une fonction entière transcendante d'ordre fini* σ*, soit* $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ *un ensemble fini de nombres entiers vérifiant* $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$*, et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_4 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle , tel que si* $\psi \in [0, 2\pi) - E_4$*, alors il existe une constante* $R_0 = R_0\left(\psi\right) > 1$ *telle que pour tout* z *verifiant* $\arg z = \psi$*et* $|z| = r \geq R_0$*, et pour tout* $(k, j) \in H$*, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 1.1.12 [12] *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \alpha < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1, \infty)$ de mesure linéaire fini et de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, on a*

$$\exp\left\{-r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 1.1.13 [11] *Soit $f(z)$ une fonction entière. Supposons que $|f^{(k)}(z)|$ est non bornée sur un rayon $\arg z = \theta$.Alors, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to \infty$, telle que $f^{(k)}(z_m) \to \infty$ et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq |z_m|^{k-j}(1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, ..., k-1)$$

Chapitre 2

La croissance des solutions d'une classe d'équations linèaires avec des coéfficients ayant le même ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudiérons les solutions de l'équation :

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_0f \ = 0 \qquad (I)$$

où $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières d'ordre fini.

2.2 Resultats obtenus

Théorème 2.2.1 *Soient $A_j(j=0,...,k-1)$ des fonctions entières satisfaisant à*

$$\sigma(A_0)=\sigma, \tau(A_0)=\tau, 0<\sigma<\infty, 0<\tau<\infty,$$

$$\sigma(A_j)\leq\sigma, \tau(A_j)<\tau$$

si $\sigma(A_j)=\sigma(j=1,...,k-1)$, alors chaque solution $f\not\equiv 0$ de l'équation (I) satisfait

$$\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

Corollaire 2.2.1 *Soient $P_J(z)=a_{jn}z^n+...+a_{j0}(j=0,...,k-1)$ des polynômes de degré $n\geq 1$, avec $a_{jn}(j=0,...,k-1)$ des nombres complexes.*

Si

$$|a_{0n}| > \max\{|a_{jn}|, j = 1, 2, ..., k-1\} \ \ et \ h_0(z) \neq 0,$$

alors chaque solution $f \not\equiv 0$ *de (I) satisfait*

$$\sigma_2(f) = n$$

Exemple 2.2.1 *Pour* $k = 2$*, l'équation :*

$$f'' + e^z f' - (2 + e^{2z}) f = 0, \tag{A}$$

$$où \ \sigma(e^z) = \sigma(2 + e^{2z}) = 1 \ \ et \ \ \tau(e^z) < \tau(2 + e^{2z}) = 2.$$

Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ *de (A) satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

$$\sigma_2(f) = \sigma = \sigma(A_0).$$

Théorème 2.2.2 *Soient* $h_j(z)(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$ *et soit* $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$*, où* $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$.

Si $a_{jn}(j = 0, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes distincts et* $h_0(z) \not\equiv 0$,alors *chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de (I) satisfait* $\sigma(f) = \infty$.

Exemple 2.2.2

1.Pour $k = 2$, l'équation :

$$f'' + \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} e^{iz} f' - (z^2 + 1)e^{3z} f = 0, \tag{B}$$

$$\text{où } \sigma\left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2} < 1 \text{ et } \sigma(z^2 + 1) = 0 < 1.$$

Alors, chaque *solution* $f \not\equiv 0$ *de (B) satisfait* $\sigma(f) = \infty$;

2.Pour $k=3$, l'équation :

$$f''' + \cos 2z^2 e^{z^3 - iz} f'' + (z-2)e^{2z^2} f' - zf = 0, \tag{C}$$

$$\text{où } \sigma(\cos 2z^2) = 2 < 3 \text{ et } \sigma(z-2) = \sigma(z) = 0 < 3.$$

Alors, chaque *solution* $f \not\equiv 0$ *de (C) satisfait* $\sigma(f) = \infty$.

Théorème 2.2.3 *Soient* $h_j(z)(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$ *et soient* $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$, *où* $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$. *On suppose qu'ils existent deux nombres complexes* a_{sn} *et* $a_{\ln}$ *tels que* $0 < s < l < k-1, a_{sn} =\mid a_{sn} \mid e^{i\theta_s}$, $a_{\ln} = e^{i\theta_l}$, θ_s, $\theta_l \in [0, 2\pi)$, $\theta_s \neq \theta_l$, $h_s h_l \not\equiv 0$; *pour* $j \neq s$, a_{jn} *satisfont* $a_{jn} = d_j\ a_{sn}(0 < d_j < 1)$ *ou* $a_{jn} = d_j\ a_{\ln}(0 < d_j < 1)$, *alors pour toute solution transcendante de (I) satisfait à* $\sigma(f) = \infty$. *En outre si* $f(z)$*est un solution polynômiale de (I), alors* $\deg f \leq s-1$, *si* $s = 1$, *alors toute solution non constante* $f(z)$ *de (I) satisfait à* $\sigma(f) = \infty$.

Théorème 2.2.4 *Soient* $h_j(z)(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$ *et soient* $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$, *où* $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$. a_{jn} *sont des nombres complexes tels que* $a_{0n} =\mid a_{0n} \mid e^{i\theta_0}$, $a_{sn} =\mid a_{sn} \mid e^{i\theta_s}$ $a_{0n}a_{sn} \neq 0(0 < s \leq k-1), \theta_0, \theta_s \in [0, 2\pi), \theta_0 \neq \theta_s$,

$h_0 h_s \not\equiv 0$; pour $j \neq 0, s$, a_{jn} satisfont $a_{jn} = d_j\ a_{0n}(d_j < 1)$ ou $\arg a_{jn} = \theta_s$, alors pour toute solution
$f \not\equiv 0$ *de (I) satisfait* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 2.2.3

1-

$$f^{(3)} + (z^2-1)e^{z^2+2} f^{(2)} + e^{z+1} f + zf = 0 \tag{D}$$

où

$$\sigma(z^2-1) = \sigma(1) = \sigma(z) = 0 < 2.$$

Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (D) satisfait $\sigma(f) = \infty$.

2.3 Quelques lemmes

Pour la démonstration du théorème on utilise les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *(Voir[5]). Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et soit $\alpha > 1$ une constante donnée, alors pour toute donnée $\varepsilon > 0$:*

(i) Il existe un ensemble $E \subset [0, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui ne dépend pas de α telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E$, on a :

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}| \leq B[T(\alpha r, f)r^{\varepsilon} \log T(\alpha r, f)]^{k} \qquad (k \in N) \tag{2.3.1}$$

(ii)Il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $B > 0$ qui ne dépend pas de α, et pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}| \leq B[T(\alpha r, f) \log T(\alpha r, f)]^{k} \qquad (k \in N). \tag{2.3.2}$$

Lemme 2.3.2 *(Voir[12]).Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \alpha < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1, \infty[$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a*

$$\exp\left\{-r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \tag{2.3.3}$$

Lemme 2.3.3 *Soit $A_j(z)$ une fonction entière avec*

$$\sigma(A_j) \leq \sigma < \infty,$$

Si $f(z)$ est une solution de (I) alors $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Lemme 2.3.4 *(Voir* [5; 6]*). Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante avec* $\sigma(f) = \sigma < \infty, \Gamma = \{(k_1, j_1), ..., (k_m, j_m)\}$ *un ensemble fini de nombres entiers paires distincts qui satisfaient* $k_i > j_i \geq 0$ *pour* $i = 1, ..., m$*.et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée, alors il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi]$ *de mesure linéaire nulle, tel que si* $\varphi \in [0, 2\pi] \backslash E$*, il existe une constante* $R_1 = R_1(\varphi) > 1$ *tel que pour tout* z *satisfaisant* $\arg z = \varphi$ *et* $|z| \geq R_1$ *et pour tout* $(k, j) \in \Gamma$*,on a*

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)} \tag{2.3.4}$$

Lemme 2.3.5 *(Voir* [9]*). Soit* $P(z)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$*,où*

$P(z) = (\alpha+\beta i)z^n + ..., \delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta, \alpha, \beta \in R$*, et soit* ε *une constante donnée, alors on a*

(i) Si $\delta(P, \theta) > 0$*, alors il existe* $r(\beta) > 0$ *tel que pour tout* $r \geq r(\theta)$ *:*

$$|e^{P(re^{i\theta})}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \tag{2.3.5}$$

(ii) Si $\delta(P, \theta) < 0$*, alors il existe* $r(\theta) > 0$ *tel que* $r \geq r(\theta)$*,*

$$|e^{P(re^{i\theta})}| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \tag{2.3.6}$$

Lemme 2.3.6 *(Voir* [6]*). Soit* $f(z)$ *une fonction entière et supposons que* $|f^{(k)}(z)|$ *n'est pas bornée sur le rayon* $\arg z = \theta$ *.*

Alors il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}(m = 1, 2, ...)$,où $r_m \to \infty$, tels que $f^{(m)}(z_m) \to \infty$ et

$$|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}| \leq |z_m|^{k-j}(1 + \circ(1)) \quad (j = 0, ..., k-1) \tag{2.3.7}$$

Lemme 2.3.7 *(voir* [8]*). Soit* $k \geq 1$*,*$p_1, p_2, ..., p_k$ *des polynômes non constants de degré* $d_1, d_2, ..., d_k$*, respectivement, tels que* $\deg(p_i - p_j) = \max\{d_i, d_j\}$ *pour* $i \neq j$*. Soit* $A(z) = \sum_{j=1}^{k} B_j(z)e^{p_j(z)}$*, où* $B_j(z) \neq 0$ *sont des fonctions entières avec* $\sigma(B_j) < d_j$*, alors* $\sigma(A) =$ $\max_1 \leq j \leq n\{d_j\}$.

Lemme 2.3.8 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec*

$$\sigma(f)=\sigma,\tau(f)=\tau,0<\sigma<\infty,0<\tau<\infty,$$

alors pour toute constante donnée $\beta<\tau$ il existe un ensemble $E\subset[1,+\infty[$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r\in E$,on a

$$\log M(r,f)>\beta r^{\sigma} \tag{2.3.8}$$

2.4 Preuve du théorème 2.2.1

Supposons que $f(z)$ est une solution non triviale de (I).
De (I), on a

$$\mid A_0(z)\mid\leq\mid\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\mid+\mid A_{k-1}(z)\mid\mid\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\mid+...+\mid A_1(z)\mid\mid\frac{f'(z)}{f(z)}\mid \tag{2.4.1}$$

D'aprés le lemme 2.3.1(i), on sait qu'il existe un certain ensemble $E_1\subset[0,\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B>0$ de telle sorte que

$$\mid\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\mid\ \leq B(T(2r,f))^{2k}\qquad (j=1,...,k) \tag{2.4.2}$$

valable pour tout $|z|=r\notin E_1$et r assez grand. Si $\sigma(A_j)<\sigma(j\neq 0)$, d'après le lemme 2.3.2, il existe un ensemble $E_2\subset[1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_2$, on a

$$|A_j(z)|\leq\exp\{r^{\alpha_1}\}\qquad (j\neq 0), \tag{2.4.3}$$

où $0<\alpha_1<\sigma$. Si

$$\sigma(A_j)=\sigma,\ \tau(A_j)<\tau(j\neq 0),$$

On choisit $\alpha_{2,}\alpha_3$ *satisfaisant* $\max\{\tau(A_j), j \neq 0\} < \alpha_2 < \alpha_3 < \tau$ *tels que pour* r *assez grand, on a*

$$\mid A_j(z) \mid \leq \exp\{\alpha_2 r^\sigma\} \qquad\qquad (j \neq 0). \tag{2.4.4}$$

Du lemme 2.3.8, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, \infty)$ *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E_0$*, on a*

$$M(r, A_0) > \exp\{\alpha_3 r^\sigma\}. \tag{2.4.5}$$

Donc, de (2.4.1)-(2.4.5), pour tout z *satisfaisant* $|A_0(z)| = M(r, A_0)$ *et pour* $|z| = r \in E_0 \setminus(E_1 \cup E_2)$*, on a*

$$\exp\{\alpha_3 r^\sigma\} \leq kB \exp\{\alpha_2 r^\sigma\} (T(2r, f))^{2k} \tag{2.4.6}$$

De (2.4.6), on a $\sigma_2(f) \geqslant \sigma$*. D'autre part , d'après le lemme 2.3.3, on a* $\sigma_2(f) \leq \sigma$*, donc* $\sigma_2(f) = \sigma = \sigma(A_0)$*.*

2.5 Preuve du théorème 2.2.2

Supposons que $f(z)$ est une solution trascendante de (I), on montre que $\sigma(f) = \infty$.
Par l'absurde, on suppose que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Du lemme 2.3.4, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi)\setminus E_3$, il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, telle que pour tout z satisfaisant

$$\arg z = \theta \; et \; |z| = r > R_1,$$

on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\sigma} \qquad\qquad (\text{k} \geq j > i \geq 0). \tag{2.5.1}$$

$a_{jn} = |a_{jn}|e^{i\varphi_j}$, et $E_4 = \left\{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = |a_{jn}| \cos(\varphi_j + n\theta) = 0, j = 0, ..., k-1\right\} \cup \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j - Pi, \theta) = 0, 0 \leq i < j \leq k-1\}$,alors $m(E_4) = 0$.

Pour chaque fonction entière $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)}(j = 0, ..., k-1)$,du lemme 2.3.5, il existe un ensemble $H_j \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)\setminus H_j$, et pour r assez grand, alors A_j satisfait (2.3.5) ou (2.3.6).

L'ensemble $\mathrm{E}_5 = \cup_{j=0}^{k-1} H_j$, alors E_5 est de mesure linéaire nulle. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\setminus(E_3 \cup E_4 \cup E_5)$, on a

$$\delta(p_j, \theta) \neq 0, \qquad \delta(p_i, \theta) \neq \delta(p_j, \theta), \quad (0 \leq i < j \leq k-1).$$

a_{jn} sont des nombres complexes distincts, il existe un seul $s \in \{0, ..., k-1\}$ tel que $\delta(p_s, \theta) = \max\{\delta(p_j, \theta) : j = 0, ..., k-1\}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\setminus(E_3 \cup E_4 \cup E_5)$ donné.

L'ensemble $\delta = \delta(p_s, \theta), \delta_1 = \max\{\delta(p_j, \theta) : j \neq s\}$, alors $\delta_1 < \delta$.

On distingue deux cas :

(i) $\delta > 0$,

(ii) $\delta < 0$.

Cas (i) :

Du lemme 2.3.5, pour tout $\varepsilon_1 (0 < 3\varepsilon_1 < \frac{\delta - \delta_1}{\delta_1})$ une constante donnée, on obtient pour r assez grand,

$$|A_s(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1-\varepsilon_1)\delta r^n\}, \tag{2.5.2}$$

$$|A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1+\varepsilon_1)\delta_1 r^n\} \qquad (\mathrm{j} \neq s). \tag{2.5.3}$$

Maintenant, on montre que $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$.

Si $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ n'est pas bornée sur $\arg z = \theta$, alors du lemme 2.3.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta} (m = 1, 2, ...)$, telle que $r_m \to \infty$, $f^{(s)}(z_m) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq |z_m|^{s-j}(1 + o(1)) \qquad (\text{j=0,...,s-1}). \tag{2.5.4}$$

On remplace (2.5.1)-(2.5.4) dans (I), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\right\} &\leq |A_s(z_m)| \\
&\leq |\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| + ... + +|A_{s-1}(z_m)||\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| + ... \\
&\quad +|A_0(z_m)||\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| \\
&\leq k\exp\left\{(1+\varepsilon_1)\delta_1 r_m^n\right\}|z_m|^M,
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

où $M > 0$ est une constante. De (2.5.5), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(\delta-\delta_1)r_m^n\right\} \leq r_m^M. \tag{2.5.6}$$

Contradiction. Donc $|f^{(s)}(re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$, et

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \tag{2.5.7}$$

sur $\arg z = \theta$.

Cas (ii) :

De (I),on déduit

$$-1 = A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \tag{2.5.8}$$

Maintenant, on montre que $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$.

Si $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ n'est pas bornée sur $\arg z = \theta$, alors du lemme 2.3.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta} (m = 1, 2, ...)$, telle que $r_m \to \infty$, $f^{(k)}(z_m) \to \infty$ et

$$|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}| \leq |z_m|^{k-j}(1+o(1)) \qquad \text{(j=0,...,k-1)}. \tag{2.5.9}$$

D'après le lemme (2.3.5), pour tout $\varepsilon_2 (0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2})$ une constante donnée, on obtient

$$|A_j(z_m)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon_2)\delta r_m^n\right\} \qquad \text{(j=0,...,k-1)}. \tag{2.5.10}$$

Alors de (2.5.9) et (2.5.10), pour r$_m$ assez grand, on a

$$|A_j(z_m)\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon_2)\delta r_m^n\right\}.{r_m}^{k-j}(1+o(1)) \to 0\ ,\ (j = 0, ..., k-1). \tag{2.5.11}$$

On remplace (2.5.11) dans (2.5.8), on trouve

$$1 \leq 0. \qquad \text{(impossible)} \tag{2.5.12}$$

Donc, $|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$, et

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \tag{2.5.13}$$

sur $\arg z = \theta$.

De (2.5.7), (2.5.13) et du fait que $E_3 \cup E_4 \cup E_5$ est de mesure linéaire nulle et d'aprés le théorème de Phragmén-Lindelöf, on obtient que $f(z)$ est un polynôme, contradiction. Donc

$$\sigma(f) = \infty.$$

2.6 Preuve du théorème 2.2.3

Supposons que $f(z)$ est une solution *non triviale de (I).* De (I) on a

$$-A_0 = \frac{f^{(k)}}{f} + ... + A_j\frac{f^{(j)}}{f} + ... + A_s\frac{f^{(s)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f}. \tag{2.6.1}$$

On suppose que $a_{jn}, a_{j_mn}(j_\alpha \in \{1, ..., s-1, s+1, ..., k-1\})$ satisfait $a_{j_\alpha n} = d_{j_\alpha} a_{0n}(\alpha = 1, ..., m)$ et $\arg a_{jn} = \theta_s$pour $j \in \{1, ..., s-1, s+1, ..., k-1\} \backslash \{j_1, ..., j_m\}$. On choisit une constante c qui satisfait $\{\max d_{j_1}, ..., d_{j_m}\} < c < 1$. On divise la démonstration en deux cas :

(a) $c < 0$;

(b) $0 \leq c < 1$.

cas (a). $c < 0$.De [17, pp. 253-255], ils existent des constantes $\theta_1, \theta_2, \alpha, R_2$ satisfont $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi), \theta_1 < \theta_2, \alpha > 0, R_2 > 0$ telles que pour tout $|z| = r > R_2$ et $\arg z = \theta \in (\theta_1, \theta_2)$, on trouve $\delta(p_0, \theta) =| a_{0n} | \cos(\theta_0 + n\theta) > \alpha, \quad \delta(p_s, \theta) =| a_{sn} | \cos(\theta_s + n\theta) < 0$,

et

$\delta(p_j, \theta) < 0 \qquad (j \neq 0)$.

Du lemme 2.3.5, pour tout $\varepsilon_3(0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2})$ une constante donnée, on obtient pour r assez grand,

$$|A_0(re^{i\theta})| \geq \exp\left\{(1 - \varepsilon_3)\alpha r^n\right\}, \tag{2.6.2}$$

$$|A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1-\varepsilon_3)\delta(p_j,\theta)r^n\} < M \qquad (\mathrm{j} \neq 0) \tag{2.6.3}$$

D'après le lemme 2.3.1(ii), on sait qu'il existe un ensemble $E_6 \subset [0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle et des constantes* $B > 0, R_3 > 1$ telles que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in (\theta_1,\theta_2)\backslash E_6$ et $|z| = r > R_3$, On a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B(T(2r,f))^{2k} \qquad (j = 1,...,k) \tag{2.6.4}$$

On remplace (2.6.2)-(2.6.4) dans (2.6.1), pour r assez grand , alors

$$\exp\{(1-\varepsilon_3)\alpha r^n\} \leq |A_0(re^{i\theta}) \leq kM.B(T(2r,f))^{2k} \tag{2.6.5}$$

De (2.6.5), on trouve $\sigma_2(f) \geq n$. D'autre part, du lemme 2.3.3, on a $\sigma_2(f) \leq n$, donc $\sigma_2(f) = n$.

cas (b). $0 \leq c < 1$. De[17, pp.253-255] ils existent des constantes $\alpha, R_2 \in [0,2\pi)$ satisfaisant $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi)$ $\theta_1 < \theta_2$,
$\alpha > 0, R_2 > 0$ telles que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ *et* $|z| = r > R_2$, et $\arg z = \theta \in (\theta_1,\theta_2)$, on a $\delta(p_0,\theta) = | a_{0n} | \cos(\theta_0 + n\theta) > \alpha$, $\quad \delta(p_s,\theta) = | a_{sn} | \cos(\theta_s + n\theta) < 0$,
donc
$\delta(p_0 - ca_{0n}z^n,\theta) > (1-c)$, $\quad \delta(-ca_{0n}z^n,\theta) \leq 0$,
et
. $\quad \delta(p_j - ca_{0n}z^n,\theta) < 0$ $(j \neq 0)$.

Des lemmes 2.3.5 et 2.3.2 , pour tout $\varepsilon_3(0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2})$ une constante donnée et pour r assez grand, on a

$$|A_0e^{-ca_{0n}z^n}| = |h_0e^{p_0-ca_{0n}z^n}| \geq \exp\{(1-\varepsilon_3)(1-c)\alpha r^n\} \tag{2.6.6}$$

et

$$|A_je^{-ca_{0n}z^n}| = |h_je^{p_j-ca_{0n}z^n}| \leq \exp\{o(1)r^n\} \quad j \neq 0 \tag{2.6.7}$$

On remplace (2.6.4),(2.6.6),(2.6.7) dans (2.6.1), pour r assez grand $\arg z = \theta \in (\theta_1, \theta_2) \backslash E_6$ et $|z| = r > R_3$, On déduit que

$$\exp\left\{(1-\varepsilon_3)(1-c)\alpha r^n\right\} \leq |A_0(z)e^{-ca_{0n}z^n}| \leq kB\exp\left\{o(1)r^n\right\}.(T(2r,f))^{2k} \tag{2.6.8}$$

De (2.6.4), on trouve $\sigma_2(f) \geq n$. D'autre part, du lemme 2.3.3, on a $\sigma_2(f) \leq n$, donc $\sigma_2(f) = n$.

2.7 Preuve du théorème 2.2.4

Supposons que $f(z)$ est une solution trascendante de (I),on montre que $\sigma(f) = \infty$.
Par l'absurde, on suppose que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Du lemme 2.3.4, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E_3$, il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, telle que pour tout z satisfaisant

$$\arg z = \theta \; et \; |z| = r > R_1,$$

on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\sigma} \qquad (\mathrm{k} \geq j > i \geq 0). \tag{2.7.1}$$

L'ensemble $E_7 = \left\{\theta \in [0, 2\pi) : |a_{sn}|\cos(\theta_s + n\theta) = \delta(p_s, \theta) = \delta(p_l, \theta) = |a_{\ln}|\cos(\theta_l + n\theta)\right\}, \theta_s \neq \theta_l$, alors $m(E_7) = 0$.
Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \backslash (E_3 \cup E_7)$, on a
$\delta(P_s, \theta) > \delta(P_l, \theta)$, où $\delta(P_s, \theta) < \delta(P_l, \theta)$.
Notons $c_1 = (P_s, \theta), c_2 = (P_l, \theta)$, La démonstration se divise en deux cas :
(i) $c_1 > c_2$;
(ii) $c_1 < c_2$.
Cas (i). On distingue trois cas :
(a) $c_1 > c_2 > 0$;
(b) $c_1 > 0 > c_2$;
(c) $0 > c_1 > c_2$.

Cas (a) :

On considère le nombre $c_3 = \max\{\delta(p_j, \theta), j \neq s\}$, alors $c_3 < c_1$.Du lemme 2.3.5, pour tout $\varepsilon_4 (0 < 3\varepsilon_4 < \frac{c_1 - c_3}{c_3})$, une constante donnée, et pour r assez grand, on obtient

$$|A_s(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1-\varepsilon_4)c_1 r^n\}, \tag{2.7.2}$$

et

$$|A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1+\varepsilon_4)c_3 r^n\}, \qquad j \neq s \tag{2.7.3}$$

Maintenant, on montre que $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$.

Si $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ n'est pas bornée sur $\arg z = \theta$, alors du lemme 2.3.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta} (m = 1, 2, ...)$,telle que $r_m \to \infty$, $f^{(s)}(z_m) \to \infty$ et

$$|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| \leq |z_m|^{s-j}(1 + o(1)) \qquad \text{(j=0,...,s-1).} \tag{2.7.4}$$

On remplace (2.7.2)-(2.7.4) dans (I), on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon_4)c_1 r_m^n\} &\leq |A_s(z_m)| \\ &\leq |\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| + ... + +|A_{s-1}(z_m)||\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| + ... \\ &\quad +|A_0(z_m)||\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}| \\ &\leq k\exp\{(1+\varepsilon_4)c_3 r_m^n\}|z_m|^M, \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

De (2.7.5), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(c_1 - c_2)r_m^n\right\} \leq r_m^M.$$

Contradiction. Donc $|f^{(s)}(re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$, et

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \tag{2.7.6}$$

sur $\arg z = \theta$.

Cas (b) :

On suit le même raisonnement que dans le cas (a) , on trouve

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \tag{2.7.7}$$

sur $\arg z = \theta$.

Cas (c) :

De (I), on obtient

$$-1 = A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_l(z)\frac{f^{(l)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_s(z)\frac{f^{(s)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \tag{2.7.8}$$

Du lemme 2.3.5, pour tout $\varepsilon_5 (0 < \varepsilon_5 < \frac{1}{2})$ une constante donnée et pour tout r assez grand , on a

$$|A_j(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1-\varepsilon_5)c_1 r^n\}\,(j = 0, ..., k-1) \quad . \tag{2.7.9}$$

Maintenant, on montre que $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$.

Si $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ n'est pas bornée sur $\arg z = \theta$, alors du lemme 2.3.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta} (m = 1, 2, ...)$,telle que $r_m \to \infty$, $f^{(k)}(z_m) \to \infty$ et

$$|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}| \leq |z_m|^{k-j}(1 + o(1)) \qquad \text{(j=0,...,k-1)}. \tag{2.7.10}$$

On remplace (2.7.9)-(2.7.10) dans (2.7.8), on déduit

$1 \leq 0$. (contradiction)

Donc $|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. Alors

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \tag{2.7.11}$$

sur $\arg z = \theta$.

De (2.7.6), (2.7.7) et (2.7.11) et le faite que $E_3 \cup E_7$ est de mesure linéaire nulle, alors d'aprés le théorème de Phragmèn-Lindelöf,on déduit que $f(z)$ est un polynôme, contradiction. Donc

$$\sigma(f) = \infty.$$

Cas (ii) :

On utilise le même raisonnement que dans le cas (i), on déduit que $f(z)$ est un polynôme, contradiction. Donc

$$\sigma(f) = \infty.$$

Si $f(z)$ est une solution polynômialle de (I), alors deg $f \leq s-1$. Si $f(z)$ est une solution polynômialle de deg $f \geq s$.
Si $\theta_s \neq \theta_l + \pi$ ou $\theta_l \neq \theta_s + \pi$, l'ensemble $E_8 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_s, \theta) > \delta(p_l, \theta) > 0\}$,
alors $m(E_8) > 0$.
On choisit $\Gamma = \{z : \arg z = \theta \in E_8\}$, et suivant le même raisonemment que dans le cas (a), pour tout $z \in \Gamma$ et pour r assez grand, on a

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon_4)c_1 r^n\} &\leq |A_s(z) f^{(s)}(z)| \\ &\leq |f^{(k)}(z)| + ... + |A_{s+1}(z) f^{(s+1)}(z)| + |A_{s-1}(z) f^{(s-1)}(z)| + ... \\ &\quad + |A_0(z) f(z)| \\ &\leq k \exp\{(1+\varepsilon_4)c_3 r^n\} |z|^M, \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

De (2.7.12), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(c_1 - c_3) r^n\right\} \leq r^M.$$

Contradiction.Si $\theta_s \neq \theta_l + \pi$ ou $\theta_l \neq \theta_s + \pi$, l'ensemble $E_9 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_s, \theta) > 0 > \delta(p_l, \theta) > 0\}$, alors
$m(E_9) > 0$.
De la même manière, on choisit $\Gamma = \{z : \arg z = \theta \in E_8\}$,et suivant le même raisonemment dans (2.7.12), on a aussi une contradiction,donc chaque solution polynômialle de (I) satisfait $deg\ f \leq s-1$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a définie la théorie de Nevan-linna par quelques définitions et propriétés.

On a prolongé les même resultats de l'article de Jin Tu et Cai-Feng Yi[3], où on a étudié les solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre superieure.

Bibliographie

[1] **Chane Ho Yu, Xiao Shuji** *fonctions algébroıde et les équations différentielles* ordinaires *Pékin. Science Press,* 1998

[2] **J. K Langley**, *On complex oscillation and a problem of Ozawa.* Kodai Math. J. 9, 430–439.

[3] **J. Tu, Cai-Feng. Yi, J.** Math. Anal. Appl. 340(2008) 487-497.

[4] **G.Jank, L. Volkmann**, Einfűhrung *in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen, Birkhāuser*, Basel-Boston, 1985.

[5] **G. Gundersen**, Estimates for the logaritmic derivate of a meromorphic function, plus similar estimates, J. London Math. Soc. 37 (1988) 88-104.

[6] **G. Gundersen, E. Steinbart**. Finit order solutions of nonhomogenous linear differntial equations, Ann. Acad.Sci. Fenn. Math. 17 (1992) 327-341.

[7] **K.H.Kwon**, Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations, Kodai Math. J. 19(1996), 378-387.

[8] **S.-A.Gao, Z-X. Chen, T.-W. Chen**,Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Huazhong University Science and Technology Press,Wuhan,1998 (in Chinese).

[9] **S.B. Bank, J.K. Langley**, On the oscillation of certain linear differential equation in the complex domain, Proc. Edinb. Math. Soc. 30(1987) 455-469.

[10] **W.Hayman** , *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[11] **Z. X. Chen, Kwangho Shon**, *The relation between solutions of a class of second order differential equations with functions of small growth*,Chinese Annals of

Mathematics,(4)27(2006),431-432. (in chinese) English transl.in Chinese journal of Contem-porary Mathematics,(3)27(2006).

[12] **Z-X.Chen**,On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations, Acta Math. Sinca B 18 (2002) 79-88 (in Chinese).

[13] **Z-X.Chen, Shon Kwangho**. On the growth of solutions of class of higher order differential equations. Acta Mathematica Scientia, 2004, 24 B(1) :52-60.

[14] **Z-X.Chen**,The growth of solutions of the differential equation $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$,Sci.China Ser.A 31 (2001) 775-784 (in Chinese).