RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD

OPTION : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par

KAID AMEUR Sabria
HEBBAR Issam

Soutenu le 29 Mai 2016

Intitulé

La résolution Des Èquations Matricielles

Devant le Jury

Mme SAIDANI	**Présidente**	MCB	**U. MOSTAGANEM**
Mme BECHAOUI	**Examinateur**	MAA	**U. MOSTAGANEM**
Mr Bouagada Djilali	**Encadreur**	Pr	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire 2015/2016

Résumé

L'objectif de ce mémoire, est l'étude d'une certaine classe d'équations matricielles, et notre but principal est de s'intéresser à la résolution de plusieurs types d'équations et par différentes approches.

Dans une première étape, nous avons étudié l'équation de Stein $AX + XB = C$ dans ces deux cas, le cas où A et B sont inversibles où nous avons utilisé la vectorisation afin de simplifier l'écriture de cette dernière.

Pour le deuxième cas, nous nous sommes basés sur la méthode de diagonalisation des matrices.

Pour d'autres types d'équations, tels que $AXB = C$ et $AX + BY = C$, nous avons rappelé l'inverse généralisé d'une matrice avec toutes ses propriétés pour une utilisation dans la résolution de ces deux classes.

Nous avons donc utilisé l'inverse de Moore-Penrose pour des matrices singulières, et nous nous sommes par suite intéressé aux équations matricielles polynômiales. Des solutions ont été cependant dérivées.

Enfin les systèmes différentiels de Lyapunov prennent aussi leur place dans ce mémoire. Suite à l'application de la transformée de Laplace nous arrivons à une équation matricielle polynômiale puis

nous appliquons les techniques vues précédemment pour dériver les solutions.

Quelques applications numériques sur les équations traités ont été en conséquence introduits, ce qui a illustré nos approches.

Mots clés :
- Équations matricielles.
- Équations matricielles polynômiales.
- Produit de Kroncker.
- Pseudo inverse.
- Systèmes différentiels de Lyapunov.

Dédicaces

Je tiens avant tout à dédier cet humble travail :
▶ *Aux deux personnes les plus chères dans ce monde, " Mon roi " et " Ma reine " .*
En reconnaissance de tous leurs sacrifices consentis, qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui et qui m'ont surtout permis d'atteindre cette étape cruciale de ma vie.

▶ *À Mr BOUAGADA pour son encadrement, ses conseils et ses remarques constructives .*

▶ *À mes petites princesses, mes chères soeurs Israa, Anfel, Salima et Samar.*

▶ *À mes frères Houdaïfa et Adem.*

▶ *À toute ma famille sans distinction.*

▶ *À mes collégues de la promotion.*

▶ *À tout mes amis sans exception.*

"*Sabria*"

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :
Mes parents :

■ Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

■ Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

■ Mes frères et ma soeur qui n'ont pas cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

■ Lilia GHAFFOUR, qui est la personne la plus aimable et proche de moi.

■ Mon encadreur Mr Bouagada, c'est grâce à sa disponibilité et sa contribution générale et ses conseils qu'on a pu terminer ce projet de fin d'étude.

■ Mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

"*Issam*"

Remerciements

Par ce modeste travail qui restera toujours notre compensation pour de longues années d'études .
Nous remercions :
Allah le tout puissant et miséricordieux, qui grâce à lui, nous avons entreprendre nos études et les achever dans la sérénité, et qui nous a donné le courage d'accomplir ce modeste travail.

*Puis **Mr BOUAGADA Djilali**, notre encadreur, pour ses compétences, sa bienvaillance,*

son soutien moral et sa disponibilité . Il a su encourager et porter l'intérêt à ce travail.

*Nos vifs remerciements vont également aux membres de Jury **Mme SAIDANI Mansouria** et **Mme BECHAOUI Khadidja** pour l'intérêt qu'ils ont porté a notre travail et de l'enrichir par leurs propositions .*

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participés de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Bien que le calcul matriciel proprement dit n'apparaisse qu'au début du 19 éme siècle, ainsi que les matrices en tant que tableaux de nombres, ont une longue histoire d'application à la résolution d'équations linéaires. Par exemple, le texte chinois « *les neuf chapitres sur l'art mathématique* », écrit vers le 2éme siècle avant J-C, est le premier exemple connu de l'utilisation de tableaux pour résoudre des équations, d'autres part il y a nombreux de chercheurs dans ce domaine, citons **Johan de Witt** représente des transformations géométriques à l'aide de tableaux dans son livre paru en 1659, « *Elementa curvarum linearum* », et entre 1700 et 1710, **Leibniz** montre comment utiliser les tableaux pour noter des données ou des solutions, et expérimente plus de 50 systèmes de tableaux à cet effet. En 1750, **Gabriel Cramer** publie la règle qui porte son nom.

Les équations matricielles sont un outil central pour la résolution des équations différentielles et des problèmes de contrôle de systèmes dynamiques issus de leurs discrétisations en espace.

Dans ce mémoire, on traite six équations matricielles linéaires dont une est différentielle connue par l'équation de Lyapunov.

L'objectif de notre travail c'est la résolution de ces dernières équations, en se basant sur l'outil de la vectorisation et le produit de Kronecker [2] , [7] , [3], afin de trouver l'inconnu de chaque équation une fois par l'inverse de Moore-Penrose [5] , [11] connu notamment dans la littérature et une fois par la fameuse méthode de diagonalisation de l'Algèbre Linéaire.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, comme on a consacré le premier chapitre pour la transformée de Laplace [2] , [8], le produit de Kronecker et la vectorisation, qui contient des définitions et des propriétés, qu'on les a utilisé pour aboutir à notre objectif.

Le deuxième chapitre comporte des notions de base, une définition sur les inverses généralisés et des propriétés en particulier sur l'inverse de Moore-Penrose.

Le troisième chapitre est l'originalité de ce travail, il est consacré à la résolution de certains types d'équations matricielles.

- Nous nous intéressons à un cas d'équations de Stein $AX + XB = C$ qui sont déjà étudiées par [1]. Dans certaines situations, notamment tirées de problèmes de contrôle linéaire, les matrices A et B sont creuses, de grande taille et la matrice C peut s'écrire sous la forme d'un produit EF^T où E et F sont de petit rang. Nous proposons une approche, notée (vec) s'appelle la vectorisation qui transforme l'équation de Stein en une équation matricielle linéaire de type $DZ = C$ que nous résolvons par une méthode de diagonalisation pour chercher Z afin de trouver l'inconnu X.

- Ainsi le système d'équations de Lyapunov, qui est un système matriciel différentiel, où on utilise l'approche de la transformée de Laplace afin d'obtenir une équation matricielle simple, et qu'on pourra résoudre en utilisant l'inverse de Moore-Penrose.

- L'aspect polynômial par rapport à ces équations est aussi étudié. Nous avons cependant mené une étude dans ce cadre tout en se basant sur [12] , [13] et s'intéréssant aux solutions des équations dites matricielles polynômiales.

Nos études ont été finalisées par l'illustration de quelques applications numériques afin de valider nos approches.

On clôture ce travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Les notions de base

Dans cette partie, on va introduire quelques définitions avec leurs propriétés, qui vont nous aider à traiter notre problème.

Nous nous basons dans ce cas sur les références suivantes [2],[8].

1.1 La transformée de Laplace

1.1.1 Introduction

La transformée de Laplace est une méthode developpée par Heaviside et Laplace.

Cette méthode est un outil trés puissant servant à résoudre beaucoup de problèmes notamment en électronique et en automatique.

Il s'agit d'une méthode mathématique ayant pour objectif de :

1- Contourner la difficulté de résolution des équations et des systèmes différentiels.

2- Offrir une résolution algébrique.

3- Cette approche est très bien adaptée en pratique.

1.1.2 Définition

Soit f une fonction de la variable temporelle t, on va supposer dans notre travail que f est nulle pour tout $t < 0$ (f est une fonction dite causale). La transformée de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe s telle que $s = a + ib$,

définie par,

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Les conditions d'existence :

L'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

doit être bien définie i.e,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} f(t)e^{-st}dt$$

existe (convergence de l'intégrale), sachant que $e^{-st} \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$.

Il reste donc à vérifier que f est bornée, en effet , on doit avoir :

$$|f(t)e^{-st}| \leq M$$

ceci est équivalent à,

$$|f(t)|.|e^{-(a+ib)t}| \leq M \qquad \text{avec} \quad s = a + ib$$

où encore,

$$|f(t)|.|e^{-at}|.|e^{-ibt}| \leq M \qquad \text{avec} \quad |e^{-ibt}| = 1$$

finalement,

$$|f(t)| \leq M.|e^{at}| \qquad C.Q.F.D$$

1.1.3 Propriétés

Dans cette étape, on va établir quelques propriétés concernant la transformée de Laplace.

Linéarité

La transformée de Laplace est un opérateur linéaire :
* f et g deux fonctions ;

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

* $\forall k \in \mathbb{R}$;

$$\mathcal{L}(k.f) = k.\mathcal{L}(f)$$

Dérivation

Dérivée du premier ordre

$$\mathcal{L}[f\,'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Dérivée du second ordre

$$\mathcal{L}[f\,''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Généralisation

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0)$$

1.2 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est d'une très grande importance en pratique notamment en application, quelques applications font partie de l'objectif de ce mémoire :

1-Équation de commutativité :

$$AX = XA$$

2-Équation de Lyapunov :

$$XA + A^*X = Q$$

(où A^* est le transposé du conjugué de A si A est à coefficients complexes)

3-Équation de Stein :

$$AX + \ XB = C$$

Dans tous ces cas, on veut trouver X tel que l'une des équations est satisfaite.

Nous définissons le produit de Kronecker tout en citant ces propriétés ("trace, valeurs propres,...etc").

1.2.1 Définition

Soient deux matrices A, de format (m, n) et B, de format (p, q) :

$A = [a_{i,j}]$ avec $i = 1, .., m$ et $j = 1, .., n$

et

$B = [b_{k,l}]$ avec $k = 1, .., p$ et $l = 1, .., q$

Le produit de Kronecker $A \otimes B$ est la matrice définie par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad \text{, de format } (m \times p, n \times q)$$

Exemple 1.1 *Soient A et B deux matrices telles que :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

le produit $A \otimes B$ est égale à,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & -8 \\ 6 & 3 & 15 & 0 & -2 & -1 & -9 & 0 \\ -12 & -6 & 18 & 3 & 4 & 2 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1

En général le produit de Kronecker n'est pas commutative, c'est à dire :

$$A \otimes B \neq \ B \otimes A$$

Définition
Soit A une matrice de taille (m, n), la $k - iéme$ puissance Kronecker de A par $A^{\otimes k}$, avec k entier positif.

$$A^{\otimes 1} = A \quad et \ A^{\otimes k} = A^{\otimes (k-1)} \ pour \ k = 2$$

où $A^{\otimes k}$ est une matrice de taille (m^k, n^k).

Des propriétés de base seront données par le théorème suivant,

1.2.2 Propriétés du produit de Kronecker

• Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition des matrices,

$$\begin{aligned} 0 \otimes B &= 0 \ , \quad A \otimes 0 = 0 \\ A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \end{aligned}$$

• Le produit de Kronecker est associative :

$$(A \otimes B) \otimes C \ = A \otimes (B \otimes C)$$

• Pour tous réels a et b :

$$(a.A) \otimes (b.B) = a.b(A \otimes B)$$
$$(\alpha A) \otimes B \ = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B) \ . \ \ \forall \alpha \in \Bbbk$$

• Si les formats sont compatibles :

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = (A.B \otimes C.D)$$

• La transposée :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

et

$$(A \otimes B)^* \ = A^* \otimes B^*$$

• Si A et B sont carrées, $A \otimes B$ l'est aussi et sa trace est :

$$tr(A \otimes B) \quad = \quad trA.trB$$

• Si A et B sont inversibles, $A \otimes B$ l'est aussi,

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

• Si A est de format (m, m) et B est de format (p, p) alors $A \otimes B$ est de format $(m \times p, m \times p)$ et son déterminant est :

$$det(A \otimes B) = (detA)^p.(detB)^m$$

Nous énonçons quelques théorèmes, qui seront utiles par la suite, nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes [2] , [7] , [3].

Théorème :

Soient A, B, C et D des matrices de tailles $(m, n), (p, q), (v, s)$ et (w, x) respectivement .

Alors,

$$(A \otimes B) \ (C \otimes D) = \ (AC) \otimes (BD)$$

Généralisation :

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_k)(B_1 \otimes B_2 \otimes ... \otimes B_k) = A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes ... \otimes A_kB_k.$$

et

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)...(A_k \otimes B_k) = (A_1A_2...A_k) \otimes (B_1B_2...B_k).$$

Corollaire :
Soient A et B deux matrices de tailles $(m, n), (p, q)$ respectivement.
Alors,

$$(A \otimes I)^k = A^k \otimes I$$

et

$$(I \otimes B)^k = I \otimes B^k.pour\ k = 1, 2, ..., n$$

Corollaire :
Si A et B sont deux matrices non singulières, alors la matrice A⊗B l'est aussi et on a :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

1.2.3 Vectorisation des matrices

Définition

Soit $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \end{bmatrix}$ une matrice de taille "$n \times p$", on définit l'opération "vec" d'empilement des colonnes par :

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{n.p}$$

D'autre part, si :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$vec(B) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix}$$

■ l'opérateur "vec" est linéaire, c'est-à-dire :

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B)$$

L'une des caractérisations utiles pour la résolution de certains systèmes différentiels est aussi donnée par le théoréme suivant,

Théorème H :

Soient $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$ et $C \in M_{m,q}$ des matrices données et soit $X \in M_{n,p}$ une matrice inconnue, alors,

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X).$$

En conséquence, l'équation matricielle $AXB = C$ est équivalente au système linéaire de (m, q) équations et (n, p) inconnues donnée par :

$$(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C)$$

.

Preuve :

En donnant une matrice Q , soit Q_r la $k-iéme$ colonne de Q , alors :

$$(AXB)_k = A(XB)_k = AXB_k$$

cela implique que :

$$(AXB)_k = AXB_k = A \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ bpk \end{bmatrix}$$

$$AXB_k = A \begin{bmatrix} x_{11}b_{1k} + x_{12}b_{2k} + \cdots + x_{1p}b_{pk} \\ \vdots \\ x_{n1}b_{1k} + x_{n2}b_{2k} + \cdots + x_{np}b_{pk} \end{bmatrix}$$

$$AXB_k = A \left[b_{1k} \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + b_{2k} \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{pk} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix} \right]$$

$$AXB_k = b_{1k}A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + b_{2k}A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{pk}A \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$$

$$AXB_k = \begin{bmatrix} b_{1k}A & b_{2k}A & \cdots & b_{pk}A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix}$$

$$AXB_k = \begin{bmatrix} b_{1k}A & b_{2k}A & \cdots & b_{pk}A \end{bmatrix} vec(X)$$

$$AXB_k = (B_k^T \otimes A)vec(X) \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, q$$

par conséquent,

$$vec(C) = vec(AXB) = \begin{bmatrix} B_1^T \otimes A \\ \vdots \\ B_q^T \otimes A \end{bmatrix} vec(X) = (B^T \otimes A)vec(X) \qquad C.Q.F.D$$

Corollaire : Soient $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,p}$ deux matrices données.
Alors,

$$\begin{aligned} vec(AB) &= (B^T \otimes A)vec(I_n) \\ &= (B^T \otimes I_m)vec(A) \\ &= (I_p \otimes A)vec(B) \end{aligned}$$

Preuve :

Pour démontrer les trois termes de $vec(AB)$ dans ce corollaire, on placera la matrice identité dans des diffirentes places dans AB en respectant la multiplication conventionnelle.

Tout d'abord : $AB = ABI_p$, en utilisant le **Théorème H**, ceci équivaut à :

$$vec(AB) = vec(ABI_p) = (I_p \otimes A)vec(B)$$

Puis, $AB = AI_nB$ équivaut à,

$$vec(AB) = vec(AI_nB) = (B^T \otimes A)vec(I_n)$$

et finalement, $AB = I_mAB$ sera équivalente à,

$$vec(AB) = vec(I_mAB) = (B^T \otimes I_m)vec(A)$$

Théorème : la garantie de l'existence de la solution de l'équation AXB = C

Soient $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$ et $C \in M_{m,q}$. Alors, l'équation matricielle $AXB = C$ possède une unique solution $X \in M_{n,p}$ pour tout C donné si et seulement si A et B sont non singulières.

Dans le cas contraire, i.e : Soient A et B deux matrices singulières, alors il existe une solution $X \in M_{n,p}$ si et seulement si :

$$rang(B^T \otimes A) = rang[(B^T \otimes A) \quad vec(C)]$$

ce dernier résultat est issue de [3].

Preuve :

1- Si A et B sont deux matrices non singulières, alors il existe A^{-1} et B^{-1} telle que si on multiplie les deux membres de l'équation,

$$AXB = C \tag{1.1}$$

à droite et à gauche par A^{-1} et B^{-1} respectivement,
on obtient,

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

pour toute matrice C donnée, qui est solution unique de (1.1).

2- D'après le théorème **H,** l'équation matricielle (1.1) admet une solution X si et seulement si il existe une solution $vec(X)$ du système

$$(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C). \tag{1.2}$$

Il est cependant connu qu'il existe une solution au système de n^2 équations linéaires (1.2) si et seulement si :

$$rang[B^T \otimes A] = rang[(B^T \otimes A) \quad vec(C)]$$

Cas particulier : L'équation $AX = C$

Cette équation possède une unique solution si et seulement si A est non singulière, X est donc $X = A^{-1}C$.

Dans l'autre cas, i.e : A est singulière, il existe une solution X si et seulement si :

$$rang(I_n \otimes A) = rang[(I_n \otimes A) \quad vec(C)]$$

or,

$$rang(I_n \otimes A) = n \times rang(A)$$

donc, il existe une solution unique pour "$AX = C$" si et seulement si :

$$rang[(I_n \otimes A) \quad vec(C)] = n \times rang(A)$$

Définition :

Soient $A \in M_{n,n}$ et $B \in M_{m,m}$ deux matrices données.

Alors, la matrice carrée $(I_n \otimes A) + (B \otimes I_n) \in M_{m,n}$ est appelée la somme de kronecker de A et de B.

Lemme :

Soient $A \in M_{n,n}$ et $B \in M_{m,m}$ deux matrices données .

Alors les matrices $(I_m \otimes A)$ et $(B \otimes I_n)$ commutent entre elles ceci en respectant la multiplication conventionnelle.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
(I_m \otimes A)(B \otimes I_n) &= (I_m B) \otimes (A I_n) \\
&= B \otimes A \\
&= (B I_m) \otimes (I_n A) \\
&= (B \otimes I_n)(I_m \otimes A) \qquad C.Q.F.D
\end{aligned}$$

Valeurs propres de la somme de Kronecker :

Théorème :

Soient $A \in M_{n,n}$ et $B \in M_{m,m}$ deux matrices données.

Si λ est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n$ son vecteur propre correspondant et si μ est une valeur propre de B et $y \in \mathbb{C}^m$ son vecteur propre associé, alors $(\lambda + \mu)$ est une valeur propre de la somme de Kronecker $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ et $(y \otimes x) \in \mathbb{C}^{mn}$ est le vecteur propre correspondant.

Remarque :
Si

$$\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1\ldots n} \text{ et } \sigma(B) = \{\mu_j\}_{j=1\ldots m}$$

Alors :

$$\sigma[(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)] = \{\lambda_i + \mu_j \ / i = 1\ldots n \text{ et } \ j = 1\ldots m\}$$

En particulier :

$$\sigma[(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)] = \sigma[(B \otimes I_n) + (I_n \otimes A)]$$

Preuve de Théorème :
Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ le vecteur propre correspondant à A, et si $\mu \in \sigma(B)$ et $y \in \mathbb{C}^m$ le vecteur propre correspondant à B,
or :

$$Ax = \lambda x$$

et

$$By = \mu y$$

il s'ensuit donc,

$$\begin{aligned}
[(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](y \otimes x) &= (I_m \otimes A)(y \otimes x) + (B \otimes I_n)(y \otimes x) \\
&= (I_m y) \otimes (Ax) + (By) \otimes (I_n x) \\
&= y \otimes (Ax) + (By) \otimes x \\
&= y \otimes (\lambda x) + (\mu y) \otimes x \\
&= \lambda(y \otimes x) + \mu(y \otimes x) \\
&= (\lambda + \mu)(y \otimes x)
\end{aligned}$$

soit alors, $(\lambda + \mu)$ est une valeur propre de $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ avec $(y \otimes x)$ son vecteur propre.

Chapitre 2

Les inverses généralisés

2.1 Introduction

En mathématiques, et plus précisément en algèbre linéaire, la notion de l'inverse généralisé (ou pseudo-inverse) généralise celle d'inverse d'une application linéaire ou d'une matrice aux cas non inversibles en lui supprimant certaines des propriétés demandées aux inverses.

Les types de pseudo-inverses sont :

• Le pseudo-inverse de Moore-Penrose dans le cas des matrices carrées non inversibles, mais généralisable à toute algèbre de matrices à valeurs dans un corps.

• Le pseudo-inverse de Drazin qui détermine la matrice qui constitue un point fixe dans la multiplication par l'exponentiation de matrices carrées au-delà d'un degré fini.

• Le pseudo-inverse à gauche et le pseudo-inverse à droite, utiles dans le cas des matrices non carrées qui ne sont jamais inversibles pour déterminer la factorisation en valeurs singulières, et qui ne sont pas nécessairement égaux non plus dans le cas de transformées non commutatives comme les opérateurs fonctionnels et distributions non discrètes.

Pour une matrice à coefficients réels ou complexes (pas nécessairement carrée), il existe un unique pseudo-inverse satisfaisant certaines conditions supplémentaires et il est appelé pseudo-inverse de Moore-Penrose (ou simplement « pseudo-inverse »), décrit par Eliakim Hastings Moore dès 1920 et redécouvert indépendamment par Roger Penrose en 1955. Erik Ivar Fredholm avait déjà introduit le concept de pseudo-inverse pour un opérateur intégral en 1903.

2.2 Définition

Étant donné une matrice A à coefficients réels avec n lignes et p colonnes, son inverse de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ est l'unique matrice à p lignes et n colonnes vérifiant les conditions suivantes :

$\boldsymbol{P}_1$**.** $AA^{\dagger}A = A$.

$\boldsymbol{P}_2$**.** $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$.

$\boldsymbol{P}_3$**.** $(AA^{\dagger})^T = AA^{\dagger}$, ($AA^{\dagger}$ est une matrice symétrique).

$\boldsymbol{P}_4$**.** $(A^{\dagger}A)^T = A^{\dagger}A$, ($A^{\dagger}A$ est également symétrique).

- L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non singulière est,

$$A^{\dagger} = A^{-1}$$

- L'inverse de Moore-Penrose pour un scalaire :
  Soit λ un scalaire, si $\lambda \neq 0$ alors,

$$\lambda^{\dagger} = \frac{1}{\lambda}$$

  et si $\lambda = 0$ donc,

$$\lambda^{\dagger} = 0$$

- L'inverse de Moore-Penrose pour une matrice nulle :

$$\text{Si} \quad A = 0 \text{ alors} \quad A^{\dagger} = 0$$

  et si $A \in M^{n\times m}$ alors, $A^{\dagger} \in M^{m\times n}$, donc les deux matrices nulles ne sont pas égales.

Unicité de l'inverse de Moore-penrose :

Supposons que B et C deux matrices qui vérifient les quatres conditions précédentes. Alors,

$$AB = (AB)^T = B^T A^T$$

en utilisant $(\boldsymbol{P}_1)$, on aura,

$$AB = B^T (ACA)^T = B^T A^T C^T A^T$$

et donc,

$$AB = (AB)^T (AC)^T$$

grâce à $(\boldsymbol{P}_3)$, il s'ensuit,

$$AB = ABAC$$

et d'après $(\boldsymbol{P}_1)$,

$$AB = AC \tag{2.1}$$

de même, pour BA :

$$BA = (BA)^T = A^T B^T$$

en utilisant $(\boldsymbol{P}_1)$, on aura,

$$BA = (ACA)^T B^T = A^T C^T A^T B^T = (CA)^T (BA)^T$$

grâce à $(\boldsymbol{P}_3)$, il s'ensuit,

$$BA = CABA$$

et d'après ($\boldsymbol{P}_1$),

$$BA = CA \tag{2.2}$$

de ($\boldsymbol{P}_2$), on a,

$$B = BAB$$

et en utilisant (2.1), cela devient,

$$B = BAC$$

et grâce à (2.2), on aura,

$$B = CAC$$

soit d'après ($\boldsymbol{P}_2$),

$$B = C.$$

D'où l'unicité de la matrice inverse de Moore-Penrose.

2.3 Propriétés

Nous exposons dans ce cas quelques propriétés de $A^\dagger$, et nous nous basons sur les références suivantes [5],[11].

1.$(A^\dagger)^\dagger = A$

2.$(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$

3.$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$

4. Si la matrice A, avec n lignes et p colonnes, est de rang k, alors elle peut s'écrire comme un produit de matrices de même rang $A = BC$, où B possède n lignes et k colonnes et C possède k lignes et p colonnes. Dans ce cas les produits (CC^T) et (B^TB) sont inversibles et la relation suivante est vérifiée :

$$A^\dagger = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$$

5. Si le rang de A est égal à son nombre de lignes, alors :

$$A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$$

6. De même, si le rang de A est égal à son nombre de colonnes, alors :

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$$

7. Si la matrice A est inversible, son inverse de Moore-Penrose est son inverse.

8. Si l'inverse de Moore-Penrose de (A^TA) est connu, on peut en déduire $A^\dagger$ par l'égalité :

$$A^\dagger = (A^TA)^\dagger A^T$$

9. De même, si $(A^TA)^\dagger$ est connu, l'inverse de Moore-Penrose de A est donné par :

$$A^\dagger = A^T(A^TA)^\dagger$$

Chapitre 3

La résolution des équations matricielles

Dans ce chapitre, on considère certains types d'équations matricielles, qui posent des différents problèmes dans la théorie des matrices et ses applications.

Où notre objectif est la résolution de six équations matricielles introduitent par la suite, en utilisant quelques méthodes de résolution.

3.1 Équation de Stein " $AX + XB = C$ "

Soient $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,m}(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
On va résoudre cette équation en utilisant la vectorisation.

Par la suite on va distinguer deux cas, le premier où les matrices A et B sont inversibles, et le deuxième c'est le cas où les deux matrices A et B sont singulières .

3.1.1 Cas des matrices A et B inversibles

Pour $AX + XB = C$, et moyennant la vectorisation, il s'ensuit,

$$vec(AX) + vec(XB) = vecC$$

ceci conduit à,

$$(I \otimes A)vecX + (B^T \otimes I)vecX = vecC$$

qui implique aussi,

$$[(I \otimes A) + (B^T \otimes I)]vecX = vecC \tag{3.1}$$

On sait que A et B sont inversibles, de même $(I \otimes A)$ et $(B^T \otimes I)$ le sont .

D'après les propriétés du produit de Kronecker on a :

$$(I \otimes A)^{-1} = I^{-1} \otimes A^{-1} = I \otimes A^{-1}$$

et

$$(B^T \otimes I)^{-1} = I^{-1} \otimes (B^{-1})^T = I \otimes (B^{-1})^T$$

Alors l'équation (3.1) devient,

$$vecX = [(I \otimes A) + (B^T \otimes I)]^{-1} vecC$$

3.1.2 Cas des matrices non inversibles

Soit,

$$AX + XB = C \tag{3.2}$$

et par application de la vectorisation à l'équation (3.2), on obtient,

$$vec(AX + XB) \;=\; vec(C)$$

grace à la linéarisation de la vectorisation, on a

$$vec(AX) + vec(XB) \;= vec(C)$$

et en se basant sur les propriétés de cette dernière,

$$(I_N \otimes A)vec(X) + (B^T \otimes I_M)vec(X) = vec(C)$$

ceci est équivalent à,

$$[(I_N \otimes A) + (B^T \otimes I_M)]vec(X) = vec(C)$$

or,

$$[(I_N \otimes A) + (B^T \otimes I_M)]x = c \tag{3.3}$$

où,

$$x = vec(X), c = vec(C).$$

- Soit λ la valeur propre de A et U le vecteur propre associé à λ.
- Soit μ la valeur propre de B^T et V le vecteur propre associé à μ.

Donc, on a :

$$AU = \lambda U \tag{3.4}$$

et

$$B^T V = \mu V \tag{3.5}$$

En multipliant (3.4) par V^Tet (3.5) par U^T, on aura,
L'équation (3.4) est équivalente à,

$$AUV^T = \lambda UV^T$$

et l'équation (3.5) sera de même équivalente à,

$$UV^T B = \mu UV^T$$

et en attribuant la somme entre les deux équations précédentes, on obtient,

$$AUV^T + \ UV^T B = (\lambda + \mu)UV^T$$

Alors, $(\lambda + \mu)$ est la valeur propre du système (3.3), et ce dernier admet une solution si et seulement si $(\lambda + \mu) \ \neq \ 0$.

Supposons que A et B sont deux matrices diagonalisables, c'est à dire :

$$A = TDT^{-1} \Longleftrightarrow \ T^{-1}AT = D$$

$$B = LHL^{-1} \Longleftrightarrow \ L^{-1}BL = H$$

Si on remplace X par "$T\tilde{X}L^{-1}$" dans l'équation (3.2), on aura donc :

$$AT\tilde{X}L^{-1} + T\tilde{X}L^{-1}B = C \tag{3.6}$$

et si on multiplie l'équation (3.6) par " T^{-1} "à gauche et "L" à droite, on trouve :

$$(T^{-1}AT)\tilde{X} + \tilde{X}(L^{-1}BL) = T^{-1}CL \tag{3.7}$$

$$(\lambda_i + \mu_j)\tilde{x}_{ij} = \tilde{c}_{ij}$$

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{(\lambda_i + \mu_j)}$$

où $\tilde{c} = T^{-1}CL$. T et L sont des matrices de passages pour A et B respectivement.

Finalement, on déduit "X " qui est la solution de l'équation (3.2) de cette relation :

$$X = T\tilde{X}L^{-1}$$

3.1.3 Application numérique 1

Dand cette partie, nous introduisons un exemple numérique comme application sur la méthode de résolution de l'équation

$$AX + XB = C$$

Soient A , B et C trois matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On passe à **la diagonalisation** des deux matrices A et B.

– ***Ètape*1 : "*Diagonalisation de la matrice* A"**

■ Cherchons les valeurs propres de A :

Tout d'abord, on calcule le polynôme caractéristique de A,

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

$$\Leftrightarrow det \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & \lambda + 2 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0$$

Donc les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}$$

■ Cherchons les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A :

1. Le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$:

On a,

$$E_{\lambda_1} = \left\{ U_1 \in \mathbb{R}^3 / \ AU_1 = \lambda_1 U_1 \right\}$$

donc,

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= < U_1 > \\ &= < \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T > \end{aligned}$$

2. Le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$:
On a,

$$E_{\lambda_2} = \left\{U_2 \in \mathbb{R}^3 /\ AU_2 = \lambda_2 U_2\right\}$$

alors,

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= < U_2 > \\ &= < \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T > \end{aligned}$$

3. Le vecteur propre associé à $\lambda_3 = -4$:
Le sous éspace propre,

$$E_{\lambda_3} = \left\{U_3 \in \mathbb{R}^3 /\ AU_3 = \lambda_3 U_3\right\}$$

par suite,

$$\begin{aligned} E_{\lambda_3} &= < U_3 > \\ &= < \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T > \end{aligned}$$

■ La matrice de passage T qui contient les vecteurs propres de A est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

■ Cherchons "T^{-1}" :

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} com(T)^T.$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

On a :

$$A = TDT^{-1}$$

ceci est équivalent à,

$$T^{-1}AT = D$$

avec,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

– ***Ètape2 : "Diagonalisation de la matrice B "***

■ Cherchons les valeurs propres de B :

Tout d'abord, on calcule le polynôme caractéristique de B,

$$P_B(\mu) = |\mu I - B\ | = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \mu - 2 & 1 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\mu - 2)(\mu \ - 1) = 0$$

donc les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 1 \end{cases}$$

■ Cherchons les vecteurs propres associés aux valeurs propres de B :

1. Le vecteur propre associé à $\mu_1 = 2$:

On a,

$$E_{\mu_1} = \left\{ V_1 \in \mathbb{R}^3 / \ AV_1 = \mu_1 V_1 \right\}$$

donc,

$$\begin{aligned} E_{\mu_1} &= \ < V_1 > \\ &= \ < \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T > \end{aligned}$$

2. Le vecteur propre associé à $\mu_2 = 1$:

On a,

$$E_{\mu_2} = \left\{ V_2 \in \mathbb{R}^3 / \ AV_2 = \mu_2 V_2 \right\}$$

alors,

$$\begin{aligned} E_{\mu_2} &= \ < V_2 > \\ &= \ < \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T > \end{aligned}$$

■ La matrice de passage L qui contient les vecteurs propres de B est :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■ Cherchons "L^{-1}" :

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(V)} com(L)^T$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a,

$$B = LHL^{-1}$$

ceci est équivalent à,

$$L^{-1}BL = H$$

avec,

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— *Ètape3* : "*La recherche de la solution X*"

Si on remplace X par "$T\tilde{X}L^{-1}$" dans l'équation "$AX + XB = C$", il s'ensuit,

$$AT\tilde{X}L^{-1} + T\tilde{X}L^{-1}B = C.$$

Et en multipliant l'équation (3.6) par "T^{-1}" à gauche et "L" à droite, on trouve,

$$(T^{-1}AT)\tilde{X} + \tilde{X}(L^{-1}BL) = T^{-1}CL$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_i + \mu_j)\tilde{x}_{ij} = \tilde{c}_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{(\lambda_i + \mu_j)}, \quad pour\ (\lambda_i + \mu_j) \neq 0$$

avec,

$$\tilde{C} = T^{-1}CL.$$

Calculons "$\widetilde{C}$" :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1,20 & 0,80 \\ -0,16 & 0 \\ 0,23 & 0,40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2,8 \\ -0,16 & -0,16 \\ 0,63 & 1,03 \end{pmatrix}$$

On revient à l'équation (3.6), on a,

$$\begin{cases} D = T^{-1}AT \\ \\ H = L^{-1}BL \end{cases}$$

Par suite, l'équation (3.6) devient :

$$D\tilde{X} + \tilde{X}H = \tilde{C}$$

Ceci est équivalent à,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \\ \tilde{x}_{31} & \tilde{x}_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \\ \tilde{x}_{31} & \tilde{x}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2,8 \\ -0,16 & -0,16 \\ 0,63 & 1,03 \end{pmatrix}$$

qui équivaut à, $$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ 2\tilde{x}_{21} & 2\tilde{x}_{22} \\ -4\tilde{x}_{31} & -4\tilde{x}_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ 2\tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \\ 2\tilde{x}_{31} & \tilde{x}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2,8 \\ -0,16 & -0,16 \\ 0,63 & 1,03 \end{pmatrix}$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} 3\tilde{x}_{11} & 2\tilde{x}_{12} \\ 4\tilde{x}_{21} & 3\tilde{x}_{22} \\ -2\tilde{x}_{31} & -3\tilde{x}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2,8 \\ -0,16 & -0,16 \\ 0,63 & 1,03 \end{pmatrix}$$

soit alors,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \\ \tilde{x}_{31} & \tilde{x}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2,8}{2} \\ \\ -\frac{0,16}{4} & -\frac{0,16}{3} \\ \\ -\frac{0,63}{2} & -\frac{1,03}{3} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on déduit la valeur de "X " qui est la solution de l'équation (3.2) de cette relation :

$$X = T\tilde{X}L^{-1}$$

Soit donc,

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2{,}8}{2} \\ -\frac{0{,}16}{4} & -\frac{0{,}16}{3} \\ -\frac{0{,}63}{2} & -\frac{1{,}03}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0,2157 & -0,2416 \\ 0,1636 & 0,2906 \\ 0,0926 & 0,2112 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0,1898 & -0,0259 \\ 0,0367 & 0,1269 \\ -0,0260 & 0,1186 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2 Équations de type " $AXB = C$ "

Pour ce type d'équations, les mêmes techniques qui s'appuit sur la vectorisation, seront appliquées

$$vec(AXB) = vecC$$

suite à cela, on aura,

$$(B^T \otimes A)vecX = vecC$$

on distingue cependant deux cas,

3.2.1 Le cas des matrices inversibles

Soient $A \in M_{m,m}$, $B \in M_{n,n}$, $X \in M_{m,n}$ et $C \in M_{m,n}$.
Si A et B sont inversibles, alors $(B^T \otimes A)$ l'est aussi, et

$$(B^T \otimes A)^{-1} = (B^{-1})^T \otimes A^{-1}.$$

Suite aux propriétés du produit de Kronecker, notre équation devient :

$$vecX = (B^T \otimes A)^{-1}vecC$$

ce qui implique,

$$vecX = [(B^{-1})^T \otimes A^{-1}]vecC$$

3.2.2 Cas des matrices singulières :

Soient $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$, $X \in M_{n,p}$ et $C \in M_{m,q}$.
Dans ce cas, on s'appuit sur [10] pour étudier ce cas, on va rechercher la solution dans le cas ou A et B ne sont pas inversibles

L'équation,

$$AXB = C$$

admet une solution si et seulement si il existe $A^\dagger$ et $B^\dagger$ tels que,

$$AA^\dagger CB^\dagger B = C$$

Si elle admet des solutions, elles sont donc de la forme

$$X = A^\dagger CB^\dagger + W - A^\dagger AWBB^\dagger$$

avec W une matrice arbitraire de dimension appropriée .

Supposons que cette condition de consistence

$$AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C$$

est valable pour un certain $A^{\dagger}$ et $B^{\dagger}$.
Alors il est claire que

$$X_0 = A^{\dagger}CB^{\dagger}$$

est solution de l'équation matricielle.
et vice versa, supposons que l'équation (1.1) admet une solution X_1, alors :

$$AX_1B = C$$

ainsi

$$A^{\dagger}AX_1BB^{\dagger} = A^{\dagger}CB^{\dagger}$$

par conséquent

$$AA^{\dagger}AX_1BB^{\dagger}B = AA^{\dagger}CB^{\dagger}B$$

qui est aussi égale à

$$AX_1B = AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C$$

soit alors

$$AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C.$$

En notant que $A^{\dagger}$ et $B^{\dagger}$ sont des inverses de Moore-Penrose.
Maintenant supposons que l'équation (1.1) admet comme solution Y.
Soit :

$$K = Y - X_0 \tag{3.8}$$

où,

$$X_0 = A^{\dagger}CB^{\dagger}$$

En multipliant l'équation (3.8) par "A" à gauche et "B" à droite, on aura,

$$AKB = AYB - AX_0B\ .$$

Si on remplace "AYB" et "X_0" par leurs valeurs, on obtient donc,

$$AKB = C\ - AA^{\dagger}XB^{\dagger}B$$

et puisque,

$$AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C$$

il s'ensuit,

$$AKB = C\ - C\ = 0 \tag{3.9}$$

et en appliquant $A^\dagger$ et $B^\dagger$ sur l'équation (3.9), et elle devient cependant,

$$A^\dagger AKBB^\dagger = 0 \ .$$

On peut donc écrire K comme suit,

$$K = K - A^\dagger AKBB^\dagger.$$

À partir de (3.8), il découle,

$$Y = K + X = K - A^\dagger AKBB^\dagger \ + A^\dagger CB^\dagger \ .$$

Ceci équivaut donc à,

$$Y = A^\dagger CB^\dagger \ + K - A^\dagger AKBB^\dagger$$

■ ***Vérif ication de la solution*** :
Si :

$$X = A^\dagger CB^\dagger \ + W - A^\dagger AWBB^\dagger$$

est une solution de l'équation (1.1), avec W une matrice arbitraire. Alors en multipiliant X par A et B, on obtient :

$$AXB = A(A^\dagger CB^\dagger)B \ + A(W - A^\dagger AWBB^\dagger)B$$

ceci équivaut à

$$AXB \ = \ AA^\dagger CB^\dagger B \ + AWB - AA^\dagger AWBB^\dagger B$$

et en utilisant la condition de consistence citée précédemment et la propriété de l'inverse de Moore-Penrose ($\boldsymbol{P}_1$), on obtient :

$$AXB = C \ + AWB - AWB$$

D'où, le résultat

$$AXB = C$$

Enfin, nous caractérisons cela par le théorème suivant,

Théorème 1 :
Ètant donné une équation de type "$AXB = C$", alors la solution est de la forme suivante :

$$X = A^\dagger CB^\dagger \ + W - A^\dagger AWBB^\dagger$$

Où W est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

3.2.3 Application numérique 2

Maintenant, nous introduisons deux exemples concernant le type d'équations :

$$AXB = C$$

Cas des matrices inversibles

Soient A , B et C trois matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par application de la vectorisation sur l'équation (1.1), on obtient,

$$vec(AXB) = vec(C)$$

Ceci est équivalent à,

$$(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C)$$

donc la solution existe si et seulement si $(B^T \otimes A)^{-1}$ existe et elle est unique.
■Cherchons $(B^T \otimes A)^{-1}$, pour trouver $vec(X)$:
On sait déja d'après les propriétes citées précédemment que,

$$(B^T \otimes A)^{-1} = (B^{-1})^T \otimes A^{-1}$$

■Calculons d'abord A^{-1} et B^{-1} :

puisque,

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

et

$$det(B) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

alors, A^{-1} et B^{-1} existent.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[com(A)]^T$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{\det(B)}[com(B)]^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Calculons maintenant "$(B^{-1})^T \otimes A^{-1}$" :

$$(B^{-1})^T \otimes A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^T \otimes A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{3}{20} & -\frac{9}{10} & \frac{3}{10} & \frac{9}{20} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

soit,

$$vec(X) = (B^T \otimes A)^{-1} vec(C)$$

$$vec(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{3}{20} & -\frac{9}{10} & \frac{3}{10} & \frac{9}{20} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$vec(X) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} \\ \frac{12}{10} \\ \frac{8}{10} \\ \frac{11}{10} \\ -\frac{17}{10} \\ -\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Cas de non inversibilité

Soient A, B et C trois matrices telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le rang de A est égale à son nombre de lignes qui est 3, et le rang de B est égale à son nombre de colonnes qui est 3.

■ Calculons $A^{\dagger}$:

Sachant que,

$$A^{\dagger} = (A^T A)^{\dagger} A^T$$

en se basant sur la remarque et d'après la propriété "5" de l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de A sera définie comme suit,

$$A^{\dagger} = (A^T A)^{\dagger} A^T = (A^T A)^{-1} A^T$$

On a,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$\det(A^T A) = 3 \neq 0 \Rightarrow (A^T A)^{-1} \text{ existe}$$

et en calculant $(A^TA)^{-1}$:

$$\begin{aligned}(A^TA)^{-1} &= \frac{1}{\det(A^TA)}[com(A^TA)]^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}A^{\dagger} &= (A^TA)^{-1}.A^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

■ Calculons $B^{\dagger}$:
Sachant que,

$$B^{\dagger} = B^T(BB^T)^{\dagger}$$

en se basant sur la remarque et d'après la propriété "6" de l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de B sera définie comme suit,

$$B^{\dagger} = B^T(BB^T)^{\dagger} = B^T(BB^T)^{-1}$$

On a,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit alors,

$$BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$\det(BB^T) = 3 \neq 0 \Rightarrow (BB^T)^{-1} \text{ existe}$$

et en calculant $(BB^T)^{-1}$:

$$\begin{aligned}(BB^T)^{-1} &= \frac{1}{\det(BB^T)}[com(BB^T)]^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
B^{\dagger} &= B^{T}.(BB^{T})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
B^{\dagger} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■ Calculons la solution "X " :

D'après le **Théorème 1,** la solution est :

$$X = A^{\dagger}CB^{\dagger} + W - A^{\dagger}AWBB^{\dagger}$$

d'une part,

$$\begin{aligned}
A^{\dagger}CB^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
A^{\dagger}A &= (A^{T}A)^{-1}.A^{T}A = I_2 \\
BB^{\dagger} &= BB^{T}.(BB^{T})^{-1} = I_2
\end{aligned}$$

finalement,

$$\begin{aligned}
X &= A^{\dagger}CB^{\dagger} + (W - I_2WI_2) \\
&= A^{\dagger}CB^{\dagger} \\
X &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où la solution .

3.3 Équations de type "$AX + BY = C$ " :

Soient $A \in M_{m,n}$, $X \in M_{n,q}$, $B \in M_{m,n}$, $Y \in M_{n,q}$ et $C \in M_{m,q}$.
Dans cette section, nous exposerons notre apport dans ce mémoire.

Nous allons considérer dans ce cas la classe des équations matricielles de type :

$$AX + BY = C \tag{3.10}$$

Une approche de résolution sera cependant dérivée.
On peut écrire l'équation (3.10) d'une autre façon,

$$[A \quad B]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = C$$

on pose :

$$\bar{D} = [A \quad B] \quad et \quad \bar{Z} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

on obtient,

$$\bar{D}\bar{Z} = C \tag{3.11}$$

Pour trouver la solution de l'équation (3.11) on doit d'abord :
- Introduire la condition de consistence pour (3.11) .
- On applique l'inverse de Moore-Penrose sur (3.11), on trouve,

$$\bar{D}^{\dagger} \ \bar{D}\bar{Z} = \quad \bar{D}^{\dagger}C$$

- En multipliant par "$\bar{D}$ " les deux membres de l'équation :

$$\bar{D} \ \bar{D}^{\dagger} \ \bar{D}\bar{Z} = \ \bar{D}\bar{D}^{\dagger}C$$

d'après ($\mathbf{P}_1$), on déduit,

$$C \ = \bar{D}\bar{D}^{\dagger}C.$$

Soit maintenant Y la solution de l'équation (3.11), c'est à dire :

$$\bar{D}Y = C$$

et en posant

$$K = Y - X \tag{3.12}$$

avec

$$X = \bar{D}^{\dagger}C$$

en multipliant l'équation (3.12) par " $\bar{D}$ ", on obtient alors,

$$\bar{D}K = \ \bar{D}Y - \ \bar{D}X$$

et en remplaçant " $\bar{D}Y$ " et " X " par leurs valeurs, il vient,

$$\bar{D}K = C - \bar{D}\bar{D}^{\dagger}C$$

et comme " $C = \bar{D}\bar{D}^{\dagger}C$ ", donc,

$$\bar{D}K = C - C = 0 \,. \tag{3.13}$$

On applique " $\bar{D}^{\dagger}$ " sur l'équation (3.13), elle devient alors,

$$\bar{D}^{\dagger}\ \bar{D}K = 0$$

par suite, on peut écrire K comme suit,

$$K = K - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D}K$$

À partir de (3.12), on déduit,

$$Y = K + X = K - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D}K + \bar{D}^{\dagger}C$$

or,

$$Y = \bar{D}^{\dagger}C + (I - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D})K$$

■***Vérif ication de la solution*** :
Si

$$\bar{Z} = \bar{D}^{\dagger}C + (I - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D})W \tag{3.14}$$

est une solution de l'équation (3.11), avec W une matrice arbitraire. Alors en multipiliant (3.14) par $\bar{D}$, on obtient,

$$\bar{D}\bar{Z} = \bar{D}[\bar{D}^{\dagger}C + (I - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D})W]$$
$$\Leftrightarrow \bar{D}\bar{Z} = \bar{D}\bar{D}^{\dagger}C + \bar{D}(I - \bar{D}^{\dagger}\ \bar{D})W$$

en utilisant la condition de consistence, on obtient,

$$\bar{D}\bar{Z} = C + \bar{D}W - \bar{D}\bar{D}^{\dagger}\ \bar{D}W$$

on utilise la propriété $(\boldsymbol{P}_1)$ de l'inverse généralisé, on déduit,

$$\bar{D}\bar{Z} = C + \bar{D}W - \bar{D}W$$

et finalement,

$$\bar{D}\bar{Z} = C$$

Donc on va caractériser ce résultat dans le théorème qui suit,

Théorème 2 :
Chaque équation de type $\bar{D}\bar{Z} = C$, admet une solution de la forme :

$$\bar{Z} = \bar{D}^{\dagger}C \ + (I - \bar{D}^{\dagger} \ \bar{D})W$$

où une matrice W arbitraire conforme .

3.4 Les équations matricielles polynômiales

3.4.1 Introduction

les équations matricielles polynômiales ont fait l'objet de nombreuses recherches dont on cite à titre d'exemples les traveaux de **Emre et Silverman** [6], **Feinstein et Barness**, **Kucera**, **Kaczorek** [14], etc ...

Récement la théorie des systèmes positifs a apporté un grand intérêt à de nombreux chercheurs.

Certains problèmes de contrôle automatique peuvent être réduit à la recherche de solutions pour des équations matricielles polynômiales.

Notre but est de transformer ces équations matricielles polynômiales à des équations algébriques qui seront faciles à résoudre.

Dans ce qui suit, plusieurs types d'équations seront éxposés. Nous contribuons dans certaines d'autre eux.

3.4.2 Équations matricielles polynômiales de type "$A(s)X(s) = B(s)$"

Soient $A(s)$, $X(s)$ et $B(s)$ trois matrices polynômiales , telles que :

$$\begin{cases} A(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots + A_n s^n \in \mathbb{R}^{q\times p}[s] \\ B(s) = B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \cdots + B_m s^m \in \mathbb{R}^{q\times k}[s] \\ X(s) = X_0 + X_1 s + X_2 s^2 + \cdots + X_r s^r \in \mathbb{R}^{p\times k}[s] \end{cases} \tag{3.15}$$

En tenant compte de

$$A(s)X(s) = B(s) \tag{3.16}$$

et en passant par la mutliplication polynômiale, on aura donc,

$$\begin{aligned} A(s)X(s) &= (A_n X_r)s^{n+r} + \cdots + (A_n X_{m-n} + A_{n-1}X_{m-n+1} + \cdots + A_{m-r+1}X_{r-1} + A_{m-r}X_r)s^m \\ &\quad + \cdots + (A_n X_0 + A_{n-1}X_1 + \cdots + A_{n-r}X_r)s^n \\ &\quad + \cdots + (A_r X_0 + A_{r-1}X_1 + \cdots + A_1 X_{r-1} + A_0 X_r)s^r \\ &\quad + \cdots (A_1 X_0 + A_0 X_1)s + A_0 X_0 \\ &= B_m s^m + B_{m-1}s^{m-1} + \cdots + B_n s^n + \cdots + B_r s^r + \cdots + B_1 s + B_0 \end{aligned}$$

et à partir de (3.16), il est clair que le degré minimal de $X(s)$ est égal à "$m - n$ ", en subtitutiant (3.15) dans (3.16) , et en comparant les coefficients qui ont le même degré de "s", on obtient, Pour $n + r \geq m$ et $n > r$:

$$\begin{cases} A_0X_0 = B_0 \\ A_1X_0 + A_0X_1 = B_1 \\ \vdots \\ A_rX_0 + A_{r-1}X_1 + \cdots + A_1X_{r-1} + A_0X_r = B_r \\ \vdots \\ A_nX_0 + A_{n-1}X_1 + \cdots + A_{n-r}X_r = B_n \\ \vdots \\ A_nX_{m-n} + A_{n-1}X_{m-n+1} + \cdots + A_{m-r+1}X_{r-1} + A_{m-r}X_r = B_m \end{cases}$$

et pour "$n + r = m$" , les équations précédentes deviennent sous la forme suivante :

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B} \tag{3.17}$$

où,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_r & A_{r-1} & A_{r-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & A_{n-r-1} & A_{n-r} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)q\times(r+1)p}$$

et

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p(r+1)\times k}$$

et

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q(m+1)\times k}$$

D'après le **Théorème 2**, la solution de l'équation (3.17) est :

$$\bar{X} = \bar{A}^{\dagger}\bar{B} \ + (I - \bar{A}^{\dagger}\ \bar{A})\tilde{W}$$

avec $\tilde{W}$ une matrice arbitraire conforme .

3.4.3 Application numérique 3

Soient A et B deux matrices polynômiales, telles que :

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s+1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(s) = \begin{pmatrix} 2s^2 \\ 2s+2 \end{pmatrix}$$

On a,

$$A(s)X(s) = B(s)$$

On remarque que $A(s)$ est de degré "$n = 1$", c'est à dire,

$$A(s) = A_1 s + A_0$$

où,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice polynômiale $B(s)$ est de degré "$m = 2$", c'est à dire :

$$B(s) = B_2 s^2 + B_1 s + B_0$$

où,

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de même $X(s)$ est de même degré de $A(s)$, i.e :

$$X(s) = X_1 s + X_0$$

alors le produit polynômial $A(s)X(s)$ est comme suit,

$$A(s)X(s) = A_1 X_1 s^2 + (A_1 X_0 + A_0 X_1)s + A_0 X_0$$

et en comparant les coefficients de "$A(s)X(s)$" et "$B(s)$" selon de degré de "s", on aura donc,

$$\begin{cases} A_0 X_0 = B_0 \\ A_1 X_0 + A_0 X_1 = B_1 \\ A_1 X_1 = B_2 \end{cases}$$

ceci équivaut à,

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B}$$

où,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_0 & A_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

et la solution de cette équation est :

$$\bar{X} = \bar{A}^{\dagger}\bar{B}$$

Remarque : le rang de la matrice $\bar{A}$ est égale à son nombre de lignes.

■ ***Calcul de $\bar{\mathbf{A}}^{\dagger}$*** :
Sachant que,

$$A^{\dagger} = (A^T A)^{\dagger} A^T$$

et en se basant sur la remarque précédente et la propriété "5" de l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de A sera définie comme suit,

$$A^{\dagger} = (A^T A)^{\dagger} A^T = (A^T A)^{-1} A^T$$

Tout d'abord,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$\bar{A}^T \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(\bar{A}^T \bar{A}) = 1$$

et donc,

$$(\bar{A}^T \bar{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

finalement,

$$\bar{\mathbf{A}}^{\dagger} = (\bar{A}^T \bar{A})^{-1} \bar{A}^T$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que,

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$\bar{X} = \bar{A}^{\dagger}\bar{B}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\bar{X} = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 \end{pmatrix}^T$ est une solution de l'équation "$\bar{A}\bar{X} = \bar{B}$ ", avec,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4.4 Équations matricielles polynômiales de type : " $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)$ "

L'équation " $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)$ " peut se mettre sous la forme de l'équation (3.16) , en effet,

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s) \tag{3.18}$$

ceci est équivalent à,

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = C(s).$$

Elle s'écrit alors,

$$D(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z(s) = \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}.$$

L'équation (3.18) prend la forme suivante,

$$D(s)Z(s) = C(s)$$

avec :

$$\begin{cases} D(s) = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots + D_n s^n \in \mathbb{R}^{q\times p} \\ \\ C(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \cdots + C_m s^m \in \mathbb{R}^{q\times k} \\ \\ Z(s) = Z_0 + Z_1 s + Z_2 s^2 + \cdots + Z_r s^r \in \mathbb{R}^{p\times k} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{aligned} D(s)Z(s) &= (D_n Z_r)s^{n+r} + \cdots + (D_n Z_{m-n} + D_{n-1}Z_{m-n+1} + \cdots + D_{m-r+1}Z_{r-1} + D_{m-r}Z_r)s^m \\ &\quad + \cdots + (D_n Z_0 + D_{n-1}Z_1 + \cdots + D_{n-r}Z_r)s^n \\ &\quad + \cdots + (D_r Z_0 + D_{r-1}Z_1 + \cdots + D_1 Z_{r-1} + D_0 Z_r)s^r \\ &\quad + \cdots (D_1 Z_0 + D_0 Z_1)s + D_0 Z_0 \\ &= C_m s^m + C_{m-1}s^{m-1} + \cdots + C_n s^n + \cdots + C_r s^r + \cdots + C_1 s + C_0 \end{aligned}$$

Pour $n + r \geq m$ et $n > r$, et en comparant les coefficients qui ont le même de degré de "s ", on aura :

$$\begin{cases} D_0Z_0 = C_0 \\ D_1Z_0 + D_0Z_1 = C_1 \\ \vdots \\ D_rZ_0 + D_{r-1}Z_1 + \cdots + D_1Z_{r-1} + D_0Z_r = C_r \\ \vdots \\ D_nZ_0 + D_{n-1}Z_1 + \cdots + D_{n-r}Z_r = C_n \\ \vdots \\ D_nZ_{m-n} + D_{n-1}Z_{m-n+1} + \cdots + D_{m-r+1}Z_{r-1} + D_{m-r}Z_r = C_m \end{cases} \tag{3.19}$$

et pour "$n + r = m$" , les équations précédentes prennent la forme,

$$\tilde{D}\tilde{Z} = \tilde{C}$$

où

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_1 & D_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ D_r & D_{r-1} & D_{r-2} & \cdots & D_1 & D_0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ D_n & D_{n-1} & D_{n-2} & \cdots & D_{n-r-1} & D_{n-r} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)q\times(r+1)p}$$

et

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p(r+1)\times k}$$

et

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q(m+1)\times k}$$

Revenons à l'équation (3.18), tout d'abord en calculant le produit polynômial "$A(s)X(s)$"avec,

$$\begin{cases} A(s) = A_0 + A_1s + A_2s^2 + \cdots + A_ns^n \in \mathbb{R}^{q\times p} \\ X(s) = X_0 + X_1s + X_2s^2 + \cdots + X_rs^r \in \mathbb{R}^{p\times k} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
A(s)X(s) &= (A_nX_r)s^{n+r} + \cdots + (A_nX_{m-n} + A_{n-1}X_{m-n+1} + \cdots + A_{m-r+1}X_{r-1} + A_{m-r}X_r)s^m \\
&+ \cdots + (A_nX_0 + A_{n-1}X_1 + \cdots + A_{n-r}X_r)s^n \\
&+ \cdots + (A_rX_0 + A_{r-1}X_1 + \cdots + A_1X_{r-1} + A_0X_r)s^r \\
&+ \cdots (A_1X_0 + A_0X_1)s + A_0X_0
\end{aligned}$$

Puis on calcule "$B(s)Y(s)$ " avec,

$$\begin{cases} B(s) = B_0 + B_1s + B_2s^2 + \cdots + B_ns^n \in \mathbb{R}^{q\times p} \\ Y(s) = Y_0 + Y_1s + Y_2s^2 + \cdots + Y_rs^r \in \mathbb{R}^{p\times k} \end{cases}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
B(s)Y(s) &= (B_nY_r)s^{n+r} + \cdots + (B_nY_{m-n} + B_{n-1}Y_{m-n+1} + \cdots + B_{m-r+1}Y_{r-1} + B_{m-r}Y_r)s^m \\
&+ \cdots + (B_nY_0 + B_{n-1}Y_1 + \cdots + B_{n-r}Y_r)s^n \\
&+ \cdots + (B_rY_0 + B_{r-1}Y_1 + \cdots + B_1Y_{r-1} + B_0Y_r)s^r \\
&+ \cdots (B_1Y_0 + B_0Y_1)s + B_0Y_0
\end{aligned}$$

et on attribue donc la somme entre "$A(s)X(s)$ " et "$B(s)Y(s)$ ", on aura cependant,

$$\begin{aligned}
A(s)X(s)+B(s)Y(s) &= [A_nX_r+B_nY_r]s^{n+r} \\
&+\cdots+[A_nX_{m-n}+B_nY_{m-n}+A_{n-1}X_{m-n+1}+B_{n-1}Y_{m-n+1} \\
&+\cdots+A_{m-r+1}X_{r-1}+B_{m-r+1}Y_{r-1}+A_{m-r}X_r+B_{m-r}Y_r]s^m \\
&+\cdots+[A_nX_0+B_nY_0+A_{n-1}X_1+A_{n-1}X_1+\cdots+A_{n-r}X_r+B_{n-r}Y_r]s^n \\
&+\cdots+[A_rX_0+B_rY_0+A_{r-1}X_1+B_{r-1}Y_1+\cdots+A_1X_{r-1}+B_1Y_{r-1} \\
&+A_0X_r+B_0Y_r]s^r \\
&+\cdots+[A_1X_0+B_1Y_0+A_0X_1+B_0Y_1]s+A_0X_0+B_0Y_0 \\
&= C_ms^m+C_{m-1}s^{m-1}+\cdots+C_ns^n+\cdots+C_rs^r+\cdots+C_1s+C_0
\end{aligned}$$

en suite, en comparant les coefficients de "s" et pour $n+r\geq m$ et $n>r$, il s'ensuit,

$$\left\{\begin{array}{c}
A_0X_0+B_0Y_0=C_0 \\
A_1X_0+B_1Y_0+A_0X_1+B_0Y_1=C_1 \\
\vdots \\
A_rX_0+B_rY_0+A_{r-1}X_1+B_{r-1}Y_1+\cdots+A_1X_{r-1}+B_1Y_{r-1}+A_0X_r+B_0Y_r=C_r \\
\vdots \\
A_nX_0+B_nY_0+A_{n-1}X_1+B_{n-1}Y_1+\cdots+A_{n-r}X_r+B_{n-r}Y_r=C_n \\
\vdots \\
A_nX_{m-n}+B_nY_{m-n}+A_{n-1}X_{m-n+1}+B_{n-1}Y_{m-n+1}+\cdots+B_{m-r}Y_r=C_m
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = C_0 \\ \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y1 \end{bmatrix} = C_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} A_r & B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{r-1} & B_{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{r-1} \\ Y_{r-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix}_r = C_r \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} A_{n-r} & B_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = C_n \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m-n} \\ Y_{m-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m-n+1} \\ Y_{m-n+1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} A_{m-r} & B_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} B_{m-r} Y_r = C_m \end{array} \right.$$

Puisque,

$$D(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z(s) = \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

alors, une comparaison de ce dernier système d'équations par (3.19), donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \\ D_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \\ \quad \vdots \\ D_n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \\ Z_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \\ \quad \vdots \\ Z_r = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Pour "$n + r = m$ " le systéme d'équations précédent devient,

$$\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{Y} \;\; = \;\; \tilde{C}$$

qui est équivalent à,

$$\tilde{D}\tilde{Z} = \tilde{C}$$

où,

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & 0 & 0 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & A_0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ A_r & B_r & A_{r-1} & B_{r-1} & & \cdots & \cdots & & A_1 & B_1 & A_0 & B_0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ A_n & B_n & A_{n-1} & B_{n-1} & \cdots & & \cdots & & \cdots & & A_{n-r} & B_{n-r} \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_n & B_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)q \times 2(r+1)p}$$

et

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_r \\ Y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p(r+1) \times k}$$

et

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q(m+1) \times k}$$

Finalement, d'après le **Théorème 2,** la solution de l'équation "$\tilde{D}\tilde{Z} = \tilde{C}$ " est :

$$\tilde{Z} = \tilde{D}^{\dagger}\tilde{C} \ + (I - \tilde{D}^{\dagger} \ \tilde{D})\breve{W}$$

avec $\breve{W}$ une matrice arbitraire conforme .

3.4.5 Application numérique 4

Nous avons appliqués la méthode de résolution de l'équation de type :

$$"A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)"$$

sur un exemple numérique.

Soient A, B et C des matrices définies par :

$$A(s) = \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ 2 & 2s+2 \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C(s) = \begin{pmatrix} s^2 \\ 3s+1 \end{pmatrix}$$

On remarque que le degré "n" de "$A(s)$" est égale à "1", et le degré "m" de "$C(s)$" est égale à "2".

De même on sait précedemment que "$m = r + n$", alors le degré "r" de "$X(s)$" est égale à "1".

C'est-à-dire,

$$A(s) = A_1 s + A_0$$

où,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \; et \; A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$C(s) = C_2 s^2 + C_1 s + C_0$$

où,

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad et \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$X(s) = X_1 s + X_0$$

on attribue la multiplication polynômiale "$A(s)X(s)$", on obtient donc,

$$A(s)X(s) = A_1X_1s^2 + (A_1X_0 + A_0X_1)s + A_0X_0$$

de même,

$$\begin{cases} B(s) = B_0 \\ Y(s) = Y_1 s + Y_0 \end{cases}$$

et donc le produit "$B(s)Y(s)$" devient,

$$B(s)Y(s) = B_0Y_0 + B_0Y_1 s \tag{3.20}$$

et en attribuant la somme entre "$A(s)X(s)$" et "$B(s)Y(s)$", on aura alors,

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = A_1X_1s^2 + (A_1X_0 + A_0X_1 + B_0Y_1)s + (A_0X_0 + B_0Y_0) \tag{3.21}$$

et en comparant les coefficients de (3.21) et (3.20) selon le degré de "s", on aura donc,

$$\begin{cases} A_0X_0 + B_0Y_0 = C_0 \\ A_1X_0 + A_0X_1 + B_0Y_1 = C_1 \\ A_1X_1 = C_2 \end{cases}$$

qui sera équivalent à,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = C_0 \\ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = C_1 \\ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = C_2 \end{cases}$$

en posant,

$$D(s) = \begin{pmatrix} A(s) & B(s) \end{pmatrix} \quad et \quad Z(s) = \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix}$$

on déduit alors que,

$$\begin{cases} D_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix} \\ D_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Z_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \\ Z_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc notre système devient sous forme,

$$\tilde{D}\tilde{Z} = \tilde{C}$$

où,

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & A_0 & B_0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalement, d'après le **Théorème2** la solution de notre équation est :

$$\tilde{Z} = \tilde{D}^{\dagger}\tilde{C}$$

■ ***Calcul de*** $\tilde{D}^{\dagger}$:
Sachant que,

$$D^{\dagger} = (D^T D)^{\dagger} D^T$$

et en se basant sur la remarque précédente et la propriété "5" de l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de D sera définie comme suit,

$$D^{\dagger} = (D^T D)^{\dagger} D^T = (D^T D)^{-1} D^T$$

Tout d'abord,

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \tilde{D}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$\tilde{D}^T\tilde{D} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(\tilde{D}^T\tilde{D}) = 4$$

$$(\tilde{D}^T\tilde{D})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \tilde{D}^\dagger &= (\tilde{D}^T\tilde{D})^{-1}\tilde{D}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{D}^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors,

$$\tilde{Z} = \tilde{D}^\dagger\tilde{C}$$

ce qui nous donne,

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où, $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \end{pmatrix}^T$ est une solution de l'équation "$\tilde{D}\tilde{Z} = \tilde{C}$ ", avec,

$$\begin{cases} Z_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.4.6 Application aux systèmes différentiels de Lyapunov

Dans cette section, nous étudierons une nouvelle classe de systèmes qui est celles des systèmes différentiels dits de Lyapunov.

Nous utilisons nos précédents résultats pour résoudre ce type de systèmes.

Le système d'équations

$$\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + Fu(t) \tag{3.22}$$

est appelée système linéaire de Lyapunov à temps continu, où $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ représente l'état du système et $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son contrôle. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Par application de la Transformée de Laplace sur l'équation (3.22), on aura :

$$\mathcal{L}(\dot{X}) = \mathcal{L}[AX(t) + BX(t) + Fu(t)].$$

Grâce à la linéarité de la transformée de Laplace, on déduit,

$$\mathcal{L}(\dot{X}) = A\mathcal{L}[X(t)] + \mathcal{L}[X(t)]B + F\mathcal{L}[u(t)] \ .$$

Sous conditions initiales nulles, on obtient,

$$sX(s) - AX(s) - X(s)B = Fu(s) \ .$$

et si on vectorise,

$$vec([sI - A]X(s) - X(s)B) = Vec[Fu(s)]$$

et comme l'opérateur "vec" est linéaire, alors,

$$vec[(sI - A)X(s)] - vec[X(s)B] = vec[Fu(s)]$$

ceci équivaut à,

$$(sI \otimes I - A \otimes I)vec[X(s)] - (B^T \otimes I)vec[X(s)] = vec[Fu(s)]$$

$$\Leftrightarrow [(sI \otimes I - A \otimes I) - (B^T \otimes I)]vec[X(s)] = vec[Fu(s)]$$

alors,

$$[I \quad 0]s + [-(A \otimes I) \quad -(B^T \otimes I)]Vec[X(s)] = C(s)$$

or,

$$D(s)Z(s) = C(s).$$

En remarquant que $D(s)$ est un polynôme de degré "1", c'est-à-dire :

$$D(s) = D_1 s + D_0 \qquad (n = 1)$$

avec,

$$\begin{cases} D_0 = \ [-(A \otimes I) \quad -(B^T \otimes I)] \\ \qquad D_1 = [I \quad 0] \end{cases}$$

Puisque $n > r$ et $r \geqslant 0$ et donc forcément $r = 0$, c'est-à-dire le polynôme Z(s) est de degré nul, et donc :

$$Z(s) = \ Z_0 \ .$$

Concernant $C(s)$ qui est de degré "m" avec $m = n+ \ r$.donc $m = 1$, i.e $C(s)$ est de la forme suivante :

$$C(s) = \ C_1 s + C_0.$$

Par identification selon le degré de "s", on aura,

$$D(s)Z(s) \ = \ C(s)$$

il s'ensuit,

$$(D_1 s + D_0)(\ Z_0) = C_1 s + C_0$$

donc,

$$\begin{cases} D_0 Z_0 = C_0 \\ D_1 Z_0 = C_1 \end{cases}$$

ceci équivaut à,

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \end{bmatrix} Z_0 = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

or,

$$\begin{bmatrix} -(A \otimes I) & -(B^T \otimes I) \\ I & 0 \end{bmatrix} Z_0 = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix}.$$

Pour $m = n + r$:

$$\hat{D}\hat{Z} = \hat{C} \tag{3.23}$$

D'après le **Théorème 2,** la solution de l'équation (3.23) est :

$$\hat{Z} = \hat{D}^{\dagger}\hat{C} + (I - \hat{D}^{\dagger} \ \hat{D})\hat{W}$$

où $\hat{W}$ une matrice arbitraire.

Conclusion

Nous avons mené une étude de certaines équations matricielles polynômiales ou non, qu'on rencontre généralement et plus souvent en automatique et contrôle, des analyses des méthodes de résolution ont été proposées, des approches étendues ont été cependant dérivées.

Les systèmes différentiels de Lyapunov ont fait l'objet d'une section à part. Nous avons enfin introduit une récente approche en transformant ces systèmes à des équations matricielles polynômiales, par conséquent, des solutions de cette classe des systèmes ont été données.

Enfin des exemples illustrant nos approches ont été introduits.

Bibliographie

[1] **Antony Jameson,** SIAM J. APPL. MATH. vol16, No5, *September (1968)* .

[2] **Dj.Bouagada,** cours " Théorie des matrices ", (*2014.2015)*

[3] **B. J. Broxon**, The Kronecker product, Thesis (*2006).*

[4] **[S L] Campbell,** Singular systems of differential equations II, Pitman *(1980)*

[5] **[S L] Campbell**,Continuity properties of the Drazin pseudo inverse, Stephen L. Campbell and Carl D.Meyer,J.r Linear Algebra and its Applications $10, 77 - 835$ *(1975).*

[6] **E. Emre, L.M. Silverman** The equation $XR + QY = \phi$: A characterization of solutions ,SIAM J. Control Optim., 19 *(1981)*, pp. 33–38

[7] **F.R. Gantmacher,** The theory of matrices, vol II, Chelsea, New York, (*1965)*

[8] **Hebbar Issam & Kaid Ameur Sabria,** Résolution des systèmes différentiels linéaires à retard, projet de fin d'étude (*2013.2014)*

[9] **R. A. Hornand C. R. Johnson**, Matrix analysis, CUP Cambridge, *(1985).*

[10] **Karim M. Abadir and Jan R. Magnus,** Matrix algebra, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York *(2005)*

[11] **R. Penrose,** A generalized inverse for matrices, proc Cambridge Philo soc $\mathbf{51.406 - 413}$**,** (*1955)*

[12] **T. Kaczorek,** Positive soltuion to polynomial matrix equations, Appl. Math. and comp.Sci, vol8, No2, $\mathbf{403 - 415}$, (*1998)*

[13] **T. Kaczorek**, Polynomial and Rational Matrices, Applications in Dynamical Systems Theory. *Springer. (2007).*

[14] **T. Kaczorek, J. Klamka** Minimum energy control of 2-D linear systems with variable coefficients, International Journal of Control 44 (3), $645 - 650$, *(1986)*