UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimitation

Thème

Stabilité de la ferméture de l'image et de l'inverse généralisé

Présenté par

ABBOU Soumia

AISSA Aicha

Soutenu le 24/05/2016

Devant le jury

Mr .....Bahri............	**Président**		**U. MOSTAGANEM.**
Mme ....Saidani....................	**Examinateur**		**U. MOSTAGANEM.**
Mr OULD Ali	**Encadreur**	$M\quad C\quad A$	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2015-2016

Table des matières

Remerciements

En tout premier lieu, nous remercions Allah le tout puissant, à la sagesse et au savoir infinis, «Gloire à T oi ! Nous n'avons de savoir que ce que Tu nous as appris. Certes c'est Toi l'Omniscient, le Sage.»(Sourate al-Baqarah, verset 32).

Nous souhaitons exprimer nos sincères remerciements à Mr Mohand Ouldali. C'est qui a encadré notre travail durant toute cette année. Sa patience, Ses encouragements ont été d'un grand réconfort et d'une aide précieuse.

Nos reconnaissances vont également à l'ensemble de nos enseignants qui nous ont énormément transmis tout au long de notre cursus.

Nous tenons à remercier aussi les membres du jury d'avoir bien accepté de consacrer leurs temps afin d'évaluer notre travail.

.

Résumé

Ce mémoire est consacré à :

1. L'étude de la préservation de la fermeture de l'image d'un opérateur fermé.
2. Dans le cas où le caractère de la fermeture est préservé, on donne les relations existantes entre les inverses généralisés de T et de $(T + S)$.

.

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire

A mes très chers parents qui m'ont toujours encouragé et orienté durant mes années d'études. Que Dieu les protège et puisse-t-il les rendre fiers de moi et de ce que j'ai pu accomplir, aussi modeste soit-il.

Particulièrement à ma mère qui a toujours été présente a mes cotés, la femme à qui je dois tout.

Et très spécialement a mon père, sans qui, tout aurait été presque impossible, l'homme qui m'a soutenu avec tout ce qu'il a.

A mes frères

A tous mes amis et camarades qui m'ont toujours soutenu

A tous qui ont participé a ce travail de

prés ou de loin.

Sans oublier avec qui j'ai partagé cette experience, celui qui a contribué à ce travail avec beaucoup de sérieux, je cite : Aicha.

SOUMIA

.

DÉDICACES

A la personne la plus chère, celle qui compte énormément à mes yeux, qui m'a élevé et qui m'a éduqué, toi qui n'avais jamais eu une attitude négative à mon égard, toi ma mère que je t'aimerai toujours jusqu'aux derniers de mes jours.

A mon chèr père, à celui qui m'a poussé et motivé dans mes études et à qui je dois ma place maintenant pour ses sacrifices.

A mes sœurs, à qui je souhaite un avenir plein de succès et de bonheur.

A tous mes amis et camarades,

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment,

A mon amie et camarade de ce mémoire

Soumia et toute sa famille,

A tous qui ont participé a ce travail de

Prés ou de loin.

AICHA

.

INTRODUCTION

Le théme abordé dans ce mémoire rentre dans le cadre de la théorie de perturbation, au fait, on s'intéresse à la préservation de la fermeture de l'image d'un opérateur fermé par des opérateurs bornés . On donnera des conditions suffisantes qui réaliseront cette caractérisation. On rappelle que la fermeture de l'image d'un opérateur est directement liée à la résolotuion de l'équation $y = Ax$ pour A un opérateur fermé de H dans H.
La manuscrit présenté est dévisé en trois chapitres .
-Le premier chapitre est un rappel des différentes notions mathématiques dont on a besoin : espace de Hilbert, projection orthgonale, opérateur borné, opérateur non borné, oprateur fermé, l'inverse génralisé d'un opérateur .
-Dans le deuxième chapitre, on donne des conditions nécessairs et suffisantes pour la fermeture de l'image d'un opérateur fermé et en deuxième lieu on dennera des conditions suffisantes qui préserveront la fermeture de l'image d'un opérateur fermé perturbé par un opérateur borné .
-Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de l'inverse généralisé par rapport à la perturbation.

NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail.

- $L(E, F)$: L'ensemble des opérateurs linéaires de E dans F.
- $D(T)$: Le domaine de T est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ pour lesquels il existe une image $y \in F$. $D(T) = \{x, Tx \text{ est existe}\}$
- $N(T)$: Le noyau de T est le sous espace de E défini par : $N(T) = \{x \in D(T); T(x) = 0\}$
- $R(T)$: L'image de T est le sous espace de Fdéfini par : $R(T) = \{y \in F \ ; \ y = T(x) \ , \ x \in D(T)\}$
- $B(H_1, H_2)$: L'espace de tous les opérateurs borné entre H_1 et H_2.
- $C(H_1, H_2)$: La classe de tous les opérateurs fermé de H_1dans H_2.
- $B(H, H) = B(H)$ et $C(H, H) = C(H)$.
- $C(T) := D(T) \cap N(T)^{\perp}$:est appellé le support de T.
- P_M :Projection orthogonale sur un sous ensemble M de H.
- $\overline{M}$:Adhérence de M.
- $M^{\perp}$:L'orthogonale de M dans H.
- I :L'opérateurs identité sur H.
- T^* :Adjoint de T.
- $A_{|T}$:La restriction de A au sous espace vectoriel T.

Chapitre 1

Rappels et définitions :

1.1 Produit scalaire :

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe une application :*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle &: E \times E \to \mathbb{C} \\ (x,y) &\to \langle x,y \rangle \end{aligned}$$

est appelée produit scalaire - si elle est :

1. sesquilinéaire :

   $\forall\ x,y,z \in E : \langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

   $\forall\ x,y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

2. hermitienne :

   $\forall x,y \in E : \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

3. positive :

   $\forall x \in E,\ \langle x,x \rangle \in \mathbb{R}^{+}\ (\langle x,x \rangle \geqslant 0)$

4. définie :

   $\forall x \in E,\ \langle x,x \rangle = 0 \implies x = 0$

1.2 Norme :

Définition 1.2.1 *Une norme sur un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^{+}$ vérifiant :*

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E$$
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$$

Un $\mathbb{k}-$espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ est appelé un $\mathbb{k}-$espace vectoriel normé ou simplement espace normé.

1.3 Espace de Hilbert :

Définition 1.3.1 *On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel complexe H muni d'un produit scalaire* $(x, y) \to \langle x, y \rangle$

tel que l'espace H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet

Remarque 1.3.1 *On notera* $\forall x \in H, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1.4 Operateur borné

Définition 1.4.1 *Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire .On dit que T est borné si et seulement si :* $\exists C > 0, \|Tx\| \leq C \|x\|, \forall x \in H$.

1.5 Operateur non borné

Définition 1.5.1 *Un opérateur linéaire T non borné dans un espace de Hilbert H est un opérateur défini sur un sous-espace vectoriel propre $D(T) \subset H$ à valeurs dans H.*

1.6 Adjoint d'un operateur

Définition 1.6.1 *Un opérateur $T \in L(E, F)$ est dit densement défini si $\overline{D(T)} = E$.*

Définition 1.6.2 *Soit $T \in L(E, F)$, l'unique application linéaire $T^* \in L(F, E)$ tel que pour tout $x \in E$, $y \in F$ on ait: $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ est appelée adjoint de T.*

Définition 1.6.3 *Soit $T \in C(H)$ un opérateur densement défini alors T est :*

Normal si : $D(T) = D(T^*)$ et $TT^* = T^*T$.

Symétrique si : $D(T) \subseteq D(T^*)$ et $Tx = T^*x$ $\forall x \in D(T)$.

Auto adjoint si : $T = T^*$

Positif si : $T = T^*$ et $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in D(T)$.

1.7 projection orthogonale

Définition 1.7.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe. une projection orthogonale sur H est un opérateur $P \in B(H)$ tel que :*

$$P = P^* = P^2$$

1.8 Opérateur fermé

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur.

Définition 1.8.1 *Le graphe de T est le sous espace vectoriel de $E \times E$ noté $G(T)$ défini par :*

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in D(T)\}$$

Définition 1.8.2 *On dit que $T : E \to F$ est fermé si et seulement si $\forall\ x_n \in D(T)$:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = y \end{array} \right\}$$

alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Proposition 1.8.1 *un operateur $T : D(T) \subset E \to F$ est fermé si et seullement si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.*

Définition 1.8.3 *On appelle conorme d'un opérateure $T \in C(H)$ le nombre :*

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\|; x \in C(T), \|x\| = 1\} \;\; \textit{Où } C(T) = D(T) \cap N(T)^{\perp}$$

1.9 L'inverse généralisé d'un operateur

Définition 1.9.1 *Un opérateur* $T \in C(X,Y)$ *possède un inverse généralisé s'il existe un opérateur* $S \in B(Y,X)$ *tel que :* $R(S) \subseteq D(T)$ *et*

1. $TSTx = Tx \qquad \forall x \in D(T)$
2. $STSy = Sy \qquad \forall y \in Y$

On note l'inverse généralisé de T par T^+.

Définition 1.9.2 *Soit* $T \in C(H)$*, alors il existe un unique opérateur* $T^\dagger \in C(H)$ *défini sur* H *de domaine* $D(T^\dagger) = R(T) \oplus^\perp R(T)^\perp$ *tel que :*

– $TT^\dagger y = P_{\overline{R(T)}} y, \forall y \in D(T^\dagger)$
– $T^\dagger Tx = P_{N(T)^\perp} x, \forall x \in D(T)$
– $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$.

Cet opérateur est appelé l'inverse de Moore-Penrose de T.

Chapitre 2

Stabilité de l'image fermé par la perturbation

2.1 Fermeture de l'image d'un opérateur borné

Dans cette partie, on va établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit à image fermée.

Théorème 2.1.1 *Si $T \in B(X,Y)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $R(T)$ est fermé.
2. $R(T^*)$ est fermé.
3. $R(TT^*)$ est fermé.
4. $R(T^*T)$ est fermé.
5. $\gamma(T) > 0$.
6. T^+ est borné, $\left\|T^\dagger\right\| =\frac{1}{\gamma(T)}$.
7. $T_0 = T_{|C(T)}$ a un inverse borné.
8. $\|Tx\| \geq k\,\|x\|$, pour tout $x \in C(T)$ avec $k > 0$.

Preuve. On montre que $\left\|T^\dagger\right\| =\frac{1}{\gamma(T)}$

En effet, pout tout $x \in D(T)$, nous avons $(I - T^\dagger T)x \in N(T)$.

$$d(x, N(T)) \leq \left\|x - (I - T^\dagger T)x\right\| = \left\|T^\dagger Tx\right\| \leq \left\|T^\dagger\right\| \|Tx\|$$

d'ou : $\gamma(T) \geq \left\|T^{\dagger}\right\|^{-1}$

Comme $\gamma(T) \leq \left\|T^{\dagger}\right\|^{-1}$ pour tout $x \in D(T) \cap N(T)^{\perp}$ avec $\|x\| = 1$ nous obtenons pour tout $y \in Y$ tel que $\left\|T^{\dagger}y\right\| = 1$

$$\gamma(T) \leq \left\|TT^{\dagger}y\right\| = \|Qy\| \leq \|y\|$$

pour tout $y \in Y$ avec $T^{\dagger}y \neq 0$, $\gamma(T) \leq \frac{\|y\|}{\left\|T^{\dagger}y\right\|}$, donc

$$\gamma(T) \leq \inf\left\{\frac{\|y\|}{\|T^{\dagger}y\|}, y \in Y, T^{\dagger}y \neq 0\right\} = \left(\sup\left\{\frac{\left\|T^{\dagger}y\right\|}{\|y\|}, y \in Y\right\}\right)^{-1} = \left\|T^{\dagger}\right\|^{-1}$$

par conséquent $\gamma(T) = \left\|T^{\dagger}\right\|^{-1}$

(1) $\Longrightarrow$ (5) Supposons $R(T)$ est fermé, alors l'opérateur $\overset{\curlywedge}{T} : D(T)_{|N(T)^{\perp}} \longrightarrow R(T)$ est injectif et on a $R(T) = R(\overset{\curlywedge}{T})$ est fermé, donc $\overset{\curlywedge}{T}$ admet un inverse borné

$$\begin{aligned}
0<\inf & \left\{\frac{\left\|\overset{\curlywedge}{T}x\right\|}{\|[x]\|}; [x] \in D(\overset{\curlywedge}{T})\right\} \\
= & \inf\left\{\frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))}; x \in D(T), x \notin N(T)\right\} \\
=\inf & \left\{\frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))}; x \in C(T)\right\} \\
= & \gamma(T)
\end{aligned}$$

par conséquent $R(T)$ est fermé nous donne $\gamma(T) > 0$

(5) $\Longrightarrow$ (1) inversement si $\gamma(T) > 0$ alors $\left\|T^{\dagger}\right\| = \frac{1}{\gamma(T)}$ est bornée et par suite $R(T)$ est fermé

(1) $\Longleftrightarrow$ (6) Supposons $R(T)$ est fermé

$$\begin{aligned}
R(T) \text{ est fermé} & \Longleftrightarrow \gamma(T) > 0 \\
& \Longleftrightarrow \left\|T^{\dagger}\right\| > 0 \\
& \Longleftrightarrow T^{\dagger} \text{ est borné.}
\end{aligned}$$

(4) $\Longrightarrow$ (1) Si $R(T)$ n'est pas fermé alors $\gamma(T) = 0$, d'ou $\gamma(T^*T) = 0$ donc $R(T^*T)$ n'est pas fermé .

(1) $\Longrightarrow$ (4)Si $R(T)$ est fermé alors $\gamma(T) > 0$, d'ou $T^{\dagger}$ est borné de même pour $(T^{\dagger})^*T^{\dagger}$ et comme $(T^*T)^{\dagger} = T^{\dagger}(T^*)^{\dagger}$ alors :

$$\gamma(T^*T) = \frac{1}{\|(T^*T)^{\dagger}\|} \geq \frac{1}{\|T^{\dagger}\|^2} = \gamma(T)^2 > 0$$

d'ou $R(T^*T)$ est fermé .

(7) $\Longleftrightarrow$ (8) Soient l'opérateur $\overset{\curlywedge}{T} : D(T)_{/N(T)^{\perp}} \longrightarrow R(T)$ et :

$$\overset{\curlywedge}{H} = \left\{ Tv \in H : v \in C(T) = D(T) \cap N(T)^{\perp} \right\}$$

Comme $\overset{\curlywedge}{T}$ est injectif alors $\overset{\curlywedge}{T}^{-1}$ est bien défini sur $\overset{\curlywedge}{H}$, de plus

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \overset{\curlywedge}{H}/\{0\}} \frac{\left\| \overset{\curlywedge}{T}^{-1} w \right\|}{\|[w]\|} &= \sup \left\{ \frac{\|v\|}{\|Tv\|} ; v \in C(T), v \neq 0 \right\} \\ &= \left[\inf \left\{ \frac{\|Tv\|}{\|v\|} ; v \in C(T), v \neq 0 \right\} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\overset{\curlywedge}{T}^{-1}$ est borné si et seulement si T est borné inférieurement, c'est à dire (8) $\square$

2.2 Fermeture de l'image de la somme de deux opérateurs

Nous donnons dans cette partie des conditions suffisantes pour que la fermeture de l'image d'un opérateur fermé reste fermée sous perturbation .

Proposition 2.2.1 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ densement défini à image fermée . Soit $S \in B(H_1, H_2)$, alors :*

1. $ST^{\dagger}T = S|_{D(T)} \Longleftrightarrow N(T) \subseteq N(T+S) \Longleftrightarrow N(T) \subseteq N(S)$
2. Si $\left\| ST^{\dagger} \right\| < 1$ et $ST^{\dagger}T = S|_{D(T)}$, alors $N(T+S) = N(T)$

Preuve. 1. (1) On veut prouver que

$$N(T) \subseteq N(T+S) \Longleftrightarrow N(T) \subseteq N(S)$$

Supposons que $N(T) \subseteq N(T+S)$ c'est a dire ,soit $x \in N(T)$ alors :

$$\begin{aligned} x &\in N(T) \Longrightarrow x \in N(T+s) \\ &\Longrightarrow (T+S)x = 0 \\ &\Longrightarrow Tx + Sx = 0 \\ &\Longrightarrow Sx = 0 \quad \text{car } Tx = 0 \\ &\Longrightarrow x \in N(S) \end{aligned}$$

donc :

$$x \in N(T) \Longrightarrow x \in N(S)$$

D'ou : $N(T) \subseteq N(S)$

De méme pour l'inverse :

Supposons que $N(T) \subseteq N(S)$, Soit $x \in N(T)$:

$$\begin{array}{rcl} x & \in & N(T) \Longrightarrow Tx = 0 \\ & \Longrightarrow & Sx = 0 \text{ car } x \in N(S) \\ \text{par sommation} & \Longrightarrow & Tx + Sx = 0 \\ & \Longrightarrow & (T+S)x = 0 \\ & \Longrightarrow & x \in N(T+S) \end{array}$$

D'ou le résultat

(2) maintenant et d'aprés la relation précédent on veut prouver que

$$ST^{\dagger}T = S\mid_{D(T)} \Longleftrightarrow N(T) \subseteq N(S)$$

Supposons que $ST^{\dagger}T = S\mid_{D(T)}$, Si $x \in N(T) \subset D(T)$

$$\begin{array}{rcl} Sx & = & ST^{\dagger}Tx = O \quad \text{car } T^{\dagger}Tx = O \\ & \Longrightarrow & Sx = 0 \\ & \Longrightarrow & x \in N(S) \end{array}$$

D'ou $ST^{\dagger}T = S\mid_{D(T)} \Longrightarrow N(T) \subseteq N(S)$

Pour l'inverse : Supposons que $N(T) \subseteq N(S)$, Soit $x \in D(T)$, $x = u + v$ tel que $u \in N(T)$ et $v \in C(T)$, alors

$$\begin{aligned}
ST^\dagger Tx &= ST^\dagger T(u+v)\\
&= ST^\dagger Tu + ST^\dagger Tv\\
&= ST^\dagger Tv \qquad \text{car } u \in N(T)\\
&= SP_{\overline{R(T^\dagger)}}v\\
&= SP_{\overline{C(T)}}v \quad \text{comme } R(T^\dagger) = C(T)\\
&= Sv \qquad (P_{\overline{C(T)}}v = v \text{ car } v \in C(T))\\
&= Su + Sv\\
&= S(u+v), (\text{ comme } N(T) \subseteq N(S))\\
&= Sx.
\end{aligned}$$

D'ou $N(T) \subseteq N(S) \Longrightarrow ST^\dagger T = S \mid_{D(T)}$

2. On sait déja que si $ST^\dagger T = S \mid_{D(T)}$ alors $N(T) \subseteq N(T+S)$, Il suffit de prouver que $N(T+S) \subseteq N(T)$

soit $x \in N(T+S)$

$$\begin{aligned}
x &\in N(T+S) \Longrightarrow (T+S)x = 0\\
&\Longrightarrow Tx + Sx = 0\\
&\Longrightarrow Tx + ST^\dagger Tx = 0\\
&\Longrightarrow (I + ST^\dagger)Tx = 0\\
&\Longrightarrow Tx = 0 \quad \text{comme } (I+ST^\dagger)^{-1} \in B(H_1)\\
&\Longrightarrow x \in N(T)
\end{aligned}$$

D'ou $N(T) = N(T+S)$ □

Théorème 2.2.1 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ un opérateur densement défini à image fermée, et $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

(a) $\|S\| < \frac{1}{\|T^\dagger\|}$ et

(b) $N(T) \subseteq N(T+S)$.

alors $R(T+S)$ est fermé.

Preuve. Comme $R(T)$ est fermé , on a $\|Tx\| \geq \gamma(T)\|x\|$ pour chaque $x \in C(T)$. Comme $C(T+S) \subseteq C(T)$ car :

$$\begin{aligned}
\forall x \quad \in \quad & C(T+S) \Longrightarrow x \in D(T+S); x \notin N(T+S) \\
\Longrightarrow \quad & x \in D(T); x \notin N(T) \text{ D'aprés (b)} \\
\Longrightarrow \quad & x \in D(T) \cap N(T)^{\perp} \\
\Longrightarrow \quad & x \in C(T)
\end{aligned}$$

par l'inégalitée triangulaire, pour tout $x \in C(T+S)$

$$\begin{aligned}
\|(T+S)x\| &= \|Tx+Sx\| \\
&\geq |\|Tx\| - \|Sx\|| \\
&\geq |\gamma(T)\|x\| - \|S\|\|x\|| \\
&\geq (\gamma(T) - \|S\|)\|x\|.
\end{aligned}$$

Comme $\|S\| < \frac{1}{\|T^{\dagger}\|} \Longrightarrow \|S\| < \gamma(T) \Longrightarrow \gamma(T) - \|S\| > 0$, alors $\exists k > 0$ tel que $\|(T+S)x\| \geq k\|x\|$, d'ou $R(T+S)$ est fermé. $\square$

Proposition 2.2.2 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ densement défini à image fermée, Soit $S \in B(H_1, H_2)$. Alors :*

(1) $TT^{\dagger}S = S$ si et seulement si $R(S) \subseteq R(T)$

(2) Si $TT^{\dagger}S = S$, alors $R(T+S) \subseteq R(T)$

(3) Si $\|T^{\dagger}S\| < 1$ et $TT^{\dagger}S = S$, alors $R(T+S) = R(T)$.

Preuve. (1) Soit $TT^{\dagger}S = S$ alors $S = T(T^{\dagger}S) \subseteq T$ donc $R(S) \subseteq R(T)$
maintenant si $R(S) \subseteq R(T)$, on a :
Soit $x \in R(S)$

$$x \in R(S) \Longrightarrow x \in R(T)$$

$$d'o : TT^{\dagger}Sx = P_{R(T)}Sx = Sx$$

Donc $TT^{\dagger}S = S$

(2) Supposons que $TT^{\dagger}S = S$ alors $T + S = T + TT^{\dagger}S \subseteq T(I + T^{\dagger}S) \subseteq T$ d'ou $R(T+S) \subseteq R(T)$

(3)Il suffit de prouver que $R(T) \subseteq R(T+S)$

On a $\|T^{\dagger}S\| < 1$ alors $(I + T^{\dagger}S)^{-1} \in B(H_1)$. Si $y = Tx$,$\forall x \in D(T)$, par la surjectivitée de $(I + T^{\dagger}S)$, $\exists\ u \in D(T)$ tel que :

$$x = (I + T^{\dagger}S)u \Longrightarrow y = T(I + T^{\dagger}S)u = Tu + TT^{\dagger}Su = Tu + Su = (T + S)u$$

d'ou : $R(T) \subseteq R(T+S)$, et comme $R(T+S) \subseteq R(T)$ d'aprés (2), alors $R(T+S) = R(T)$. □

Théorème 2.2.2 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ un opérateur densement défini à image fermée, et soit $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

1. $\|T^{\dagger}S\| < 1$
2. $TT^{\dagger}S = S$.

Alors $R(T+S)$ est fermé.

Preuve. D'aprés la proposition 2.2.2, $R(T+S) = R(T)$. Comme $R(T)$ est fermé alors $R(T+S)$ est fermé. □

Théorème 2.2.3 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ un opérateur densement défini à image fermée, supposons que $S \in B(H_1, H_2)$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(1) $\|T^{\dagger}S\| < 1$

(2) $TT^{\dagger}S = S$ et

(3) $ST^{\dagger}T = S|_{D(T)}$.

alors

(a) $R(T+S)$ est fermé et

(b) $(T+S)^{\dagger} = (I + T^{\dagger}S)^{-1}T^{\dagger} = T^{\dagger}(I + ST^{\dagger})^{-1}$, par conséquent $T^{\dagger} = (T+S)^{\dagger}(I + ST^{\dagger})$

Preuve. Notons d'abord que $(T+S)$ est un opérateur fermé avec $D(T+S) = D(T)$, pour prouver (a), on montre que $R(T+S) = R(T)$, ce qui est dejà prouvé dans la proposition 2.2.2. Il reste à déduire la formule de $T^{\dagger}$.

Nous voulons prouver que $T^\dagger = (I + T^\dagger S)(T + S)^\dagger$. il suffit de prouver :$(T + S)^\dagger = (I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger$. Soit $U := (I+T^\dagger S)^{-1}T^\dagger$, on montre que U satisfait tous les axiomes de la définition de l'inverse de Moore-Penrose.

Notons que la condition $ST^\dagger T = S|_{D(T)}$ avec $\left\|T^\dagger S\right\| < 1$ implique que $N(T) = N(T + S)$.

Soit $z \in R(U)$, il existe $y \in D(T^\dagger)$ tel que $z = (I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger y$, ainsi $T^\dagger y = z + T^\dagger Sz$. Donc $z = T^\dagger y - T^\dagger Sz \in C(T) = C(T + S) \subseteq D(T + S)$

Maintenant pour $z \in D(T)$,

$$\begin{aligned}
U(T + S)z &= (I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger(T + S)z \\
&= (I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger(T + TT^\dagger S)z \\
&= (I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger T(I + T^\dagger S)z \\
&= (I + T^\dagger S)^{-1}P_{N(T)^\perp}(I + T^\dagger S)z \\
&= (I + T^\dagger S)^{-1}(I + T^\dagger S)z \\
&= z = P_{R(U)}z.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
(T + S)U &= (T + S)(I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger \\
&= (T + TT^\dagger S)(I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger \\
&= T(I + T^\dagger S)(I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger \\
&= TT^\dagger \\
&= P_{R(T)} \\
&= P_{R(T+S)}
\end{aligned}$$

Ensuite , on montre que $R(U) = R(S + T)^\perp$. Comme $(I + T^\dagger S)^{-1}$ est inversible, $N(U) = N(T^\dagger) = R(T)^\perp$, et d'aprés proposition 2.2.2 on a $R(T) = R(T + S)$.

L'unicité de$(T + S)^\dagger$ est assurée par la définition 1.9.2

Comme $R(S) \subseteq R(T)$, d'aprés la série de Neumann, on a

$$(I + T^\dagger S)^{-1}T^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}(-T^\dagger S)^n T^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} T^\dagger(-ST^\dagger)^n = T^\dagger(I + ST^\dagger).$$

□

Chapitre 3

Stabilité de l'inverse généralisé par la somme

Dans ce chapitre, on donne des relations existantes entre l'inverse généralisée d'un opérateur férmé T à image fermé et l'inverse généralisé de son opérateur perturbé $(T+S)$.

Corollaire 3.0.1 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ densement défini à image fermée, supposons que $S_n \in B(H_1, H_2)$ satisfaisant les conditions du théorème 2.2.3 et $S_n \longrightarrow 0$ alors :*

(1) $(T+S_n)^\dagger \longrightarrow T^\dagger$ *dans la norme de l'opérateur de $B(H_2, H_1)$.*

(2) $\gamma(T+S_n) \longrightarrow \gamma(T)$ *lorsque $n \longrightarrow \infty$.*

Preuve. (1) D'aprés le théorème 2.2.3 on a :

$$\begin{aligned}
(T+S_n)^\dagger - T^\dagger &= T^\dagger(I+S_nT^\dagger)^{-1} - T^\dagger(I+S_nT^\dagger)(I+S_nT^\dagger)^{-1} \\
&= T^\dagger(I+S_nT^\dagger)^{-1}\left[(I-(I+S_nT^\dagger)\right] \\
&= T^\dagger(I+S_nT^\dagger)^{-1}(-S_nT^\dagger)
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left\|(T+S_n)^\dagger - T^\dagger\right\| &= \left\|T^\dagger(I+S_nT^\dagger)^{-1}(-S_nT^\dagger)\right\| \leq \left\|T^\dagger(I+S_nT^\dagger)^{-1}\right\| \|S_n\| \left\|T^\dagger\right\| \\
&\leq \left\|(I+T^\dagger S_n)^{-1}T^\dagger\right\| \;\; \|S_n\| \left\|T^\dagger\right\| \text{ comme } T^\dagger \; (I+S_nT^\dagger)^{-1} = (I+T^\dagger S_n)^{-1}T^\dagger \\
&\leq \|S_n\| \left\|T^\dagger\right\| \left\|T^\dagger\right\| \left\|(I+T^\dagger S_n)^{-1}\right\| \\
&= \|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2 \left\|(I+T^\dagger S_n)\right\|^{-1} = \frac{\|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2}{\|(I+T^\dagger S_n)\|} \\
&\leq \frac{\|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2}{|\|I\| - \|T^\dagger S_n\||} = \frac{\|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2}{1-\|T^\dagger S_n\|} \text{ comme } \left\|T^\dagger S_n\right\| < 1.
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2}{1 - \|T^\dagger S_n\|} \longrightarrow 0 \;\text{ car } S_n \longrightarrow 0$$

D'ou : $(T + S_n)^\dagger \longrightarrow T^\dagger$

(2) On a :

$$\begin{aligned}
|\gamma(S_n + T) - \gamma(T)| &= \left| \frac{1}{\|(S_n + T)^\dagger\|} - \frac{1}{\|T^\dagger\|} \right| \\
&= \left| \frac{\|T^\dagger\| - \|(S_n + T)^\dagger\|}{\|T^\dagger\| \, \|(S_n + T)^\dagger\|} \right| \\
&\leq \frac{\left\|(T + S_n)^\dagger - T^\dagger\right\|}{\|T^\dagger\| \, \|(S_n + T)^\dagger\|} \\
&\leq \frac{\|S_n\| \left\|T^\dagger\right\|^2}{(1 - \|T^\dagger S_n\|) \, \|T^\dagger\| \, \|(S_n + T)^\dagger\|} \\
&= \beta \|S_n\| \;\text{ avec } \beta > 0
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\gamma(S_n + T) - \gamma(T)| \longrightarrow 0 \text{ car } S_n \longrightarrow 0, \text{ alors } \gamma(S_n + T) \longrightarrow \gamma(T)$$

□

Corollaire 3.0.2 *Soit $T \in B(H_1, H_2)$ est un opérateur injectif à image fermée, et soit $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

(a) $R(S) \subseteq R(T)$.

(b) $\left\|T^\dagger S\right\| < 1$.

alors

(1) $T + S$ est injectif .

(2) $R(T + S) = R(T)$.

(3) $(T + S)^\dagger = (I + T^\dagger S)^{-1} T^\dagger = T^\dagger (I + S T^\dagger)^{-1}$

(4) $\left\|(T + S)^\dagger\right\| \leq \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{1 - \left\|T^\dagger S\right\|}$

(5) $\left\|(T + S)^\dagger - T^\dagger\right\| \leq \frac{\left\|T^\dagger S\right\| \left\|T^\dagger\right\|}{1 - \left\|T^\dagger S\right\|}$

Preuve. (1)Comme T est injectif , $T^\dagger T = I\mid_{D(T)}$ alors : $ST^\dagger T = SI\mid_{D(T)} = S\mid_{D(T)}$. d'aprés la relation : $(T+S)^\dagger = (I+T^\dagger S)^{-1}T^\dagger = T^\dagger(I+ST^\dagger)^{-1}$ (qui a été déjà prouvé dans la preuve du théorème 2.2.3)

$$\begin{aligned}(T+S)^\dagger(T+S) &= (I+T^\dagger S)^{-1}T^\dagger(T+S)\\ &= (I+T^\dagger S)^{-1}(T^\dagger T+T^\dagger S)\\ &= (I+T^\dagger S)^{-1}(I+T^\dagger S)\\ &= I\end{aligned}$$

donc $T+S$ est injectif

(2)D'aprés la proposition 2.2.2 , (a) équivalente à la condition $TT^\dagger S = S$ et comme $\left\|T^\dagger S\right\| < 1$ alors $R(T+S) = R(T)$.

(4)

$$\begin{aligned}\left\|(T+S)^\dagger\right\| &= \left\|(I+T^\dagger S)^{-1}T^\dagger\right\|\\ &\leq \left\|(I+T^\dagger S)^{-1}\right\|\left\|T^\dagger\right\|\\ &= \left\|(I+T^\dagger S)\right\|^{-1}\left\|T^\dagger\right\|\\ &= \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{\|(I+T^\dagger S)\|}\\ &\leq \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{1-\|T^\dagger S\|}\end{aligned}$$

(5) a été déjà prouvé dans le corollaire précédent $\square$

Corollaire 3.0.3 *soit $T \in B(H_1, H_2)$ un opérateur surjectif et $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

(a) $N(T) \subseteq N(S)$

(b) $\left\|ST^\dagger\right\| < 1$

alors

(1) $T+S$ est surjectif

(2) $N(T+S) = N(T)$

(3) $(T+S)^\dagger = T^\dagger(I+ST^\dagger)^{-1} = (I+T^\dagger S)^{-1}T^\dagger$

(4) $\left\|(T+S)^{\dagger}\right\| \leq \frac{\left\|T^{\dagger}\right\|}{1-\left\|ST^{\dagger}\right\|}$

(5) $\left\|(T+S)^{\dagger}-T^{\dagger}\right\| \leq \frac{\left\|ST^{\dagger}\right\|\left\|T^{\dagger}\right\|}{1-\left\|ST^{\dagger}\right\|}$

Preuve. (1)Comme T est surjectif , $TT^{\dagger}=I$ alors : $STT^{\dagger}=S$.

d'aprés la relation : $(T+S)^{\dagger}=T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}$

$$
\begin{aligned}
(T+S)(T+S)^{\dagger} &= (T+S)T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1} \\
&= (TT^{\dagger}+ST^{\dagger})(I+ST^{\dagger})^{-1} \\
&= (I+ST^{\dagger})(I+ST^{\dagger})^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

donc $T+S$ est surjectif.

(2)D'aprés la proposition 2.2.1 , (a) est équivalente à la condition $STT^{\dagger}=S$ et comme $\left\|ST^{\dagger}\right\|<1$ alors $N(T+S)=N(T)$

(4)

$$
\begin{aligned}
\left\|(T+S)^{\dagger}\right\| &= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|T^{\dagger}\right\|\left\|(I+ST^{\dagger})^{-1}\right\| \\
&= \left\|(I+ST^{\dagger})\right\|^{-1}\left\|T^{\dagger}\right\| \\
&= \frac{\left\|T^{\dagger}\right\|}{\|(I+ST^{\dagger})\|} \leq \frac{\left\|T^{\dagger}\right\|}{1-\|ST^{\dagger}\|}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\left\|(T+S)^{\dagger}-T^{\dagger}\right\| &= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}-T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}(I+ST^{\dagger})\right\| \\
&= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}\left[I-(I+ST^{\dagger})\right]\right\| \\
&= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}(-ST^{\dagger})\right\| \\
&\leq \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}\right\|\left\|(-ST^{\dagger})\right\| \\
&\leq \left\|T^{\dagger}\right\|\left\|(I+ST^{\dagger})\right\|^{-1}\left\|ST^{\dagger}\right\| \\
&= \frac{\left\|ST^{\dagger}\right\|\left\|T^{\dagger}\right\|}{\|(I+ST^{\dagger})\|} \\
&\leq \frac{\left\|ST^{\dagger}\right\|\left\|T^{\dagger}\right\|}{1-\|ST^{\dagger}\|}
\end{aligned}
$$

$\square$

Corollaire 3.0.4 *Soit $T \in B(H_1, H_2)$ à image fermée et $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

(1) $N(T) \subseteq N(S)$

(2) $\|S\| \left\|T^\dagger\right\| < 1$

alors

(i) $N(T+S) = N(T)$

(ii) $\left\|(T+S)^\dagger\right\| \leq \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{1-\|S\|\left\|T^\dagger\right\|}$

Preuve. (i) regarde la proposition 2.2.1

(ii)

$$\begin{aligned}
\left\|(T+S)^\dagger\right\| &= \left\|T^\dagger(I+ST^\dagger)^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|T^\dagger\right\| \left\|(I+ST^\dagger)^{-1}\right\| \\
&= \left\|(I+ST^\dagger)\right\|^{-1} \left\|T^\dagger\right\| \\
&= \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{\|(I+ST^\dagger)\|} \\
&\leq \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{|1-\|ST^\dagger\||} \\
&\leq \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{|1-\|S\|\left\|T^\dagger\right\||} \\
&= \frac{\left\|T^\dagger\right\|}{1-\|S\|\left\|T^\dagger\right\|}
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.0.1 *Soit $T \in B(H)$tel que :*

$$\|Tx\| \leq \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|(I+T)x\| \ \textit{pour tout } x \in H$$

Où $\lambda_j < 1, j = 1, 2$. Alors :

$\lambda_j \in (-1, 1)$ et $(I+T)$ est bijectif .

De plus ,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|x\| &\leq \|(I+T)x\| \leq \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|x\| \ \text{pour tout } x \in H \\
\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|y\| &\leq \left\|(I+T)^{-1}y\right\| \leq \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|y\| \ \text{pour tout } y \in H
\end{aligned}$$

Théorème 3.0.4 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ densement défini et $S \in B(H_1, H_2)$ tel que*

$$\|Sx\| \leq \lambda_1 \|Tx\| + \lambda_2 \|(S+T)x\| \;\; \textit{pour tout } x \in D(T) \qquad (*)$$

Où $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $\lambda_2 > -1$ et $\|(S+T)x\| \geq \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2} \|Tx\|$ pour tout $x \in D(T)$

(2) $N(T) = N(T+S) = N(T) \cap N(S)$

(3) Si $R(T)$ est fermé, alors $R(T+S)$ est fermé, dans ce cas :

$$\left\|(T+S)^{\dagger}\right\| \geq \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1} \left\|T^{\dagger}\right\|$$

(4) Si en plus , $T^{\dagger}Ty = y \ \forall y \in H_2$, alors $(T+S)^{\dagger}(T+S)y = y \ \forall y \in H_2$ et

$$(T+S)^{\dagger} = T^{\dagger}(I + ST^{\dagger})^{-1}$$

Preuve.

Preuve. (1) Par inégalité triangulaire nous avons :

$$\begin{aligned} \|Sx + Tx\| &\geq | \, \|Tx\| - \|Sx\| \, | \\ &\geq | \, \|Tx\| - (\lambda_1 \|Tx\| + \lambda_2 \|(S+T)x\|)| \\ &\geq | \, \|Tx\| - \lambda_1 \|Tx\| - \lambda_2 \|(S+T)x\| \, | \\ &\geq (1-\lambda_1) \|Tx\| \, | - \lambda_2 \|(S+T)x\| \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} (1+\lambda_2) \|(S+T)x\| &\geq (1-\lambda_1) \|Tx\| \\ \|(S+T)x\| &\geq \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2} \|Tx\| \quad \text{pour tout } x \in D(T) \text{ et comme } \lambda_2 > -1 \end{aligned}$$

Il est facile de voire que $N(T) \subseteq N(T+S)$ Soit $x \in N(T)$ d'apré $(*)$

$$\begin{aligned} \|Sx\| &\leq \lambda_1 \underbrace{\|Tx\|}_{=0} + \lambda_2 \|(S+T)x\| \\ &\leq 0 + \lambda_2 \|Sx + Tx\| \\ &\leq \lambda_2 \|Sx + 0\| \\ &\leq \lambda_2 \|Sx\| \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}(1-\lambda_2)\|Sx\| &\leq 0\\ (1-\lambda_2)\|Sx\| &= 0 \text{ comme } -1<\lambda_2<1 \text{ d'aprés le lemme 3.0.1,et } \|Sx\|\geq 0\end{aligned}$$

et par suite $\|Sx\| = 0$ cela implique que $x \in N(S)$ et $x \in N(T)$ c-à-d $x \in N(S) \cap N(T)$ ainsi $N(T) = N(T+S)$ □

(3)Si $R(T)$ est fermé alors $\gamma(T) > 0$ ainssi $\gamma(T+S) > 0$ donc $R(T+S)$ est fermé (d'aprés le théoreme 2.1.1). Donc on peut remplacer dans $(*)$ T et S par $T^\dagger$ et $S^\dagger$ on obtient :

$$\gamma(T+S) \leq \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\gamma(T)$$

1. **(4)** D'apré (2) ona $N(T+S) = N(S)$ on déduit que $ST^\dagger T = S|_{D(T)}$ (d'aprés la proposition 2.2.1) ainsi :

$$\begin{aligned}S+T &= ST^\dagger T + T\\ &= (I+ST^\dagger)T\end{aligned}$$

pour tout $y \in H_2$: $TT^\dagger y = y$ et d'aprés l'hypothèse $(*)$ nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|ST^\dagger y\right\| &\leq \lambda_1\left\|TT^\dagger y\right\| + \lambda_2\left\|((S+T)T^\dagger)y\right\|\\ &\leq \lambda_1\|y\| + \lambda_2\left\|(ST^\dagger+I)y\right\|\end{aligned}$$

d'ou $(I+ST^\dagger)$ est bijectif nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}(T+S)^\dagger(I+ST^\dagger) &= (T+ST^\dagger T)^\dagger(I+ST^\dagger)\\ &= ((I+ST^\dagger)T)^\dagger(I+ST^\dagger)\\ &= T^\dagger\underbrace{(I+ST^\dagger)^\dagger(I+ST^\dagger)}_{I}\\ &= T^\dagger\end{aligned}$$

Donc

$$(S+T)^\dagger = T^\dagger(I+ST^\dagger)^{-1}$$

□

Corollaire 3.0.5 *Soit $T \in C(H_1, H_2)$ densement défini et $S \in B(H_1, H_2)$ tel que :*

$$\|(S-T)x\| \leq \lambda_1 \|Tx\| + \lambda_2 \|Sx\| \text{ pour tout} x \in D(T)$$

Ou $\lambda_1 < 1$. Alors :

(1) $N(T) = N(S)$

(2) $\lambda_2 > -1$ et$\|Sx\| \geq \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2} \|Tx\|$,$\forall x \in D(T)$

(3) Si $R(T)$ est fermé , alors $R(S)$ est fermé , dans ce cas :

$$\|S^\dagger\| \leq \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1} \|T^\dagger\|$$

(4) Si en plus , $T^\dagger T y = y \ \forall y \in H_2$, alors $(T+S)^\dagger (T+S) y = y \ \forall y \in H_2$ et

$$S^\dagger = T^\dagger (I + (S-T)T^\dagger)^{-1} = T^\dagger \sum_{n=0}^{\infty} (-(S-T)T^\dagger)^n$$

Preuve. Cette preuve est analogue au theoreme 3.0.4 en remplaçant S par $(S-T)$. □

Corollaire 3.0.6 *Soient T et S satisfaisant les conditions du théoreme 3.0.4, supposons de plus que T vérifie $T^\dagger T y = y \ \forall y \in H_2$ et $\lambda_2 = 0$, alors*

(1) $\|ST^\dagger\| < 1$ et $(I + ST^\dagger)^{-1} \in B(H_2)$, dans ce cas :

$$\|(I + ST^\dagger)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|ST^\dagger\|}$$

(2) $\|(S+T)^\dagger - T^\dagger\| \leq \frac{\|T^\dagger\|^2 \|S\|}{1 - \|ST^\dagger\|}$

Preuve. (1)On a :

$$\begin{aligned}
\|(I + ST^\dagger)^{-1}\| &= \|(I + ST^\dagger)\|^{-1} \\
&= \frac{1}{\|(I + ST^\dagger)\|} \\
&\leq \frac{1}{|\|I\| - \|ST^\dagger\||} (\text{ d'aprés l'inégalitée triangulaire}) \\
&= \frac{1}{|1 - \|ST^\dagger\||} \\
&= \frac{1}{1 - \|ST^\dagger\|} \ (\text{comme } \|ST^\dagger\| < 1)
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\left\|(T+S)^{\dagger}-T^{\dagger}\right\| &= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}-T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}(I+ST^{\dagger})\right\| \\
&= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}\left[I-(I+ST^{\dagger})\right]\right\| \\
&= \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}(-ST^{\dagger})\right\| \\
&\leq \left\|T^{\dagger}(I+ST^{\dagger})^{-1}\right\|\left\|(-ST^{\dagger})\right\| \\
&\leq \left\|T^{\dagger}\right\|\left\|(I+ST^{\dagger})\right\|^{-1}\|S\|\left\|T^{\dagger}\right\| \\
&= \frac{\left\|T^{\dagger}\right\|\|S\|\left\|T^{\dagger}\right\|}{\|(I+ST^{\dagger})\|} \\
&\leq \frac{\left\|T^{\dagger}\right\|^{2}\|S\|}{1-\|ST^{\dagger}\|}
\end{aligned}
$$

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a énnoncée des théorèmes donnant des conditions suffisantes garantissant la stabilité des images fermées et on a donnée. des relations existantes entre leurs inverses généralisées.

Bibliographie

1. Generalized inverses and applications, Academic Press[Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976, Edited by M. Zuhair Nashed, University of Wisconsin, Mathematics Reaserch Center, Publcation No. 32. MR MR0451661 (56 #9943)
2. Adi Ben-Israel, On error bounds for generalized inverses, SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 585-592. MR MR0215504 (35 #6344)
3. Adi Ben-Israel and Thomas N. E. Greville, Generalized inverses, second ed., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Math´ematiques de la SMC, 15, Springer-Verlag, New York, 2003,Theory and applications. MR MR1987382 (2004b :15008)
4. S. L. Campbell and C. D. Meyer, Jr., Generalized inverses of linear transformations, Dover Publications, Inc., New York, 1991, Corrected reprint of the 1979 original. MR 1105324(92a :15003)
5. Ole Christensen, Operators with closed range, pseudo-inverses, and perturbation of frames for a subspace, Canad. Math. Bull. 42 (1999), no. 1, 37–45. MR 1695886 (2000d :47003)
6. J. Ding, , and L. J. and Huang, On the perturbation of the least squares solutions in Hilbert spaces, Proceedings of the 3rd ILAS Conference (Pensacola, FL, 1993), vol. 212/213, 1994,pp. 487–500. MR MR1306994 (95i :47023)
7. J. Ding and L. J. Huang, Perturbation of generalized inverses of linear operators in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 198 (1996), no. 2, 506–515. MR MR1376277 (97i :47017)
8. Jiu Ding, New perturbation results on pseudo-inverses of linear operators in Banach spaces,Linear Algebra Appl. 362 (2003), 229–235. MR MR1955467 (2003m :47002)
9. C WGroetsch, New perturbation results on pseudo-inverses of linear operators in Banach spaces,Linear Algebra Appl. 362 (2003), 229–235. MR 1955467 (2003m :47002)
10. Seymour Goldberg, Unbounded linear operators : Theory and applications, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

11. Simone Gramsch and Eberhard Schock, Ill-posed equations with transformed argument, Abstr.Appl. Anal. (2003), no. 13, 785–791. MR MR1996924 (2004f :47019)
12. C. W. Groetsch, Spectral methods for linear inverse problems with unbounded operators, J.Approx. Theory 70 (1992), no. 1, 16–28. MR MR1168372 (93g :47011)
13. C W Groetsch, Inclusions for the Moore-Penrose inverse with applications to computational methods,Contributions in numerical mathematics, World Sci. Ser. Appl. Anal., vol. 2, World Sci. Publ.,River Edge, NJ, 1993, pp. 203–211. MR 1299760 (95h :65041)
14. Richard B. Holmes, A course on optimization and best approximation, Springer-Verlag, Berlin,1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 257. MR MR0420367 (54 #8381)
15. Qianglian Huang, Lanping Zhu, Xiaoru Chen, and Chang Zhang, On stable perturbations of the generalized drazin inverses of closed linear operators in banach spaces, Abstract and Applied Analysis 2012 (2012), 1–12.
16. Qianglian Huang, Lanping Zhu, and Jiena Yu, Some new perturbation results for generalized inverses of closed linear operators in Banach spaces, Banach J. Math. Anal. 6 (2012), no. 2,58–68. MR 2945988