REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBNBADIS
– MOSTAGANEM–

Faculté des Sciences Exactes Et De l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=

MEMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Présenté par **BELHAS HADJER**

Intitulé

PROCESSUS STOCHASTIQUES EN TEMPS CONTINU : MOUVEMENT BROWNIEN

Soutenu le 30/05/2016 devant le jury d'examen :

Mr.	BOUAGADA D.	Président
Mr.	MECHDENE M.	Encadreur
Mr.	LATREUCH Z.	Examinateur

Année Universitaire 2015 / 2016

Résumé

L'objectif de ce travail est la présentation de quelques-unes des nombreuses propriétés du mouvement brownien (M.B.), et nous donnons une application de la théorie des martingales au M.B.

Notre travail débute par une présentation des propriétés essentielles de l'espérance conditionnelle. En suite, on définit d'une part les processus stochastiques, d'une manière générale, comme étant une généralisation de la notion de vecteurs (dimension finie) de v.a. au cas d'une famille de variables aléatoires (v.a.) indexées dans un ensemble de temps T, et d'autre part les martingales. Grâçe à la propriété de martingale qui est vérifiée par le M.B., on présente quelques-unes des propriétés du M.B. [14, 15, 16], et nous établissons un résultat sur le module de continuité de P. Lévy [10] et la loi du logarithme itéré [12].

Dédicaces

À mes parents,
À mes soeurs,
À tous ceux qui me sont proches.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance pour mon encadreur Monsieur M. MECHDENE qui a dirigé l'ensemble de ce travail. Je le remercie profondément pour ses remarques toujours pertinentes ainsi que sa gentillesse omniprésente.

J'exprime également toute ma profonde gratitude à Monsieur D. BOUAGADA qui me fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur Z. LATREUCH pour sa disponibilité et ses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer le manuscrit.

Mes sincères remerciements à mes professeurs de mathématiques de l'Université de Mostaganem.

Table des matières

Introduction Générale

En 1827, le botaniste R. Browen, a observé une petite particule en suspension dans un liquide et soumise à l'infini de nombreuses collisions avec des atomes, et il est donc impossible d'observer sa trajectoire exacte. Avec l'aide d'un microscope, il est seulement possible de confirmer que le mouvement de la particule est entièrement chaotique. Il est nécessaire de faire des approximations de ce type de mouvement (appelé Mouvement Brownien (M.B.)), dans le but de décrire le processus. Donc grâce aux travaux de Nobert Wiener aux États-Unis, Andreï Kolmogorov aux URSS sur la théorie des probabilités, et Paul Lévy, Doob en France [7, 10, 13], qui vont contribuer de façon décisive pour définir le modèle mathématique appelé processus de Wiener.

Depuis ces travaux, les chercheurs en mathématiques n'ont cessé d'étudier les propriétés des processus en général et en particulier ce processus dans [3, 11, 13, 14], et les applications en sont nombreuses dans le domaine des finances (voir par exemple [4, 5, 6]).

L'objectif de ce travail est la présentation de quelques unes des nombreuses propriétés du M.B.

Nous avons choisi de structurer notre manuscrit selon le plan décrit ci-dessous :
Dans le premier chapitre, on présente les propriétés essentielles de l'espérance conditionnelle
Dans le second chapitre, on définit les processus stochastiques comme les P.A.I., P.A.I.S. et les martingales.
Finalement, dans le dernier chapitre, nous établissons la régularité des trajectoires [14, 16], et les propriétés du M.B. (martingale, PAIS, cvg et contiuité en m.q...). A la dernière section, nous donnons, d'une part, un résultat sur le module de continuité de P. Lévy et la loi du logarithme itéré, d'autre part (voir dans [12]).

Chapitre 1

Espérance Conditionnelle

1.1 Introduction

Nous fixons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une sous-tribu $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ qui représente une information partielle sur l'espace, obtenue en observant les variables aléatoire (v.a.) $X_1, X_2, ..., X_n$. L'espérance conditionnelle d'une v.a. Y par rapport à $\mathcal{F}_n$ représente la meilleure estimation que l'on puisse faire de la valeur Y à l'aide de l'information contenue dans $\mathcal{F}_n$.
Dans ce chapitre, on rassemble les notions de base de l'espérance conditionnelle ainsi que leurs propriétés qui seront utiles dans les processus stochastiques.

1.2 Généralités

1.2.1 Définition d'une σ-algèbre (tribu)

Un ensemble $\mathbb{F}$ de parties d'un ensemble non vide Ω est une tribu sur Ω si :

1. $\Omega \in \mathbb{F}$
2. $\mathbb{A} \in \mathbb{F} \Longrightarrow \mathbb{A}^c \in \mathbb{F}$
3. $\forall n, \mathbb{A}_n \in \mathbb{F} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_n \in \mathbb{F}$ (Union dénombrable)

Exemples

1. $\mathbb{F} = \{\emptyset, \Omega\}$: tribu grossière
2. Tribu borélienne d'un espace topologique E : c'est la tribu $\mathbb{B}(E)$ engendrée par les ouverts de E

Remarque

Si Ω est fini alors $\mathbb{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, est une tribu sur Ω.

1.2.2 Espace probabilisable

Soit Ω un espace fondamental, un espace probabilisable est formalisé par un couple $(\Omega, \mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est une tribu sur Ω .

1.2.3 Probabilité

Soit $(\Omega, \mathbb{F})$ un espace probabilisable. Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application
$\mathbb{P} : \mathbb{F} \mapsto [0, 1]$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall (\mathbb{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathbb{F}$ disjoints deux $\grave{a}$ deux

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{F}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathbb{F}_n)$$

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

1.2.4 Espace de probabilité

Le triplet $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω est dit espace probabilisé ou espace de probabilité.

1.2.5 Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathbb{F})$ vers $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$

$X : (\Omega, \mathbb{F}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, $\forall I \subset \mathbb{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(I) \in \mathbb{F}$; $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$

1.2.6 Probabilité conditionnelle

Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $B \in \mathbb{F}$; $A \in \mathbb{F}$ deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A\backslash B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$, est donnée par :

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{1.1}$$

Remarque

1. $\mathbb{P}_B(A) : (\Omega, \mathbb{F}) \longmapsto [0,1]$ qui à chaque évènement A on associe $\mathbb{P}(A\backslash B)$
   $\mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité car

   i) $\mathbb{P}_B(\varnothing) = 0$

   ii) $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$

   iii) $\forall (A_n) \subset \mathbb{F}$ une suite des évènements tels que $A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \neq j$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(\cup A_i) &= \tfrac{\mathbb{P}((\cup A_i)\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_B(A_i) \end{aligned}$$

2. La probabilité conditionnelle vérifie toutes les propriétées d'une probabilité classique.

1.2.7 Définition d'une version régulière

Pour F fixé :

$\begin{array}{rccl} h_F : & \Omega & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(F \setminus X = x) \end{array}$ est une version régulière de la probabilité.

La famille $(\mathbb{P}(. \setminus X = x))_{x\in\Omega}$ est appelée une version régulière de la probabilité conditionnelle de X.

1.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire discrète

1.3.1 Définition

Soient $X : (\Omega, \mathbb{F}) \rightarrow (\mathbb{E}, \mathcal{E})$ une variable aléatoire discrète et $Y : (\Omega, \mathbb{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ $\mathbb{P}$-intégrable. Donc l'espérance conditionnelle est définie par :

$$\mathbb{E}(Y \setminus X = x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x)} \int_{(X=x)} Y(w) d\mathbb{P}(w) \tag{1.2}$$

avec $x \in \mathbb{E}$ et $\mathbb{P}_X(x) \neq 0$

Remarques

1. Soit l'application
$$\begin{array}{rccl} h: & \Omega \times \mathbb{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & (x, F) & \mapsto & h(x, F) = \mathbb{P}(F \setminus X = x) \end{array}$$
Si x fixé :
$$\begin{array}{rccl} h_x: & \mathbb{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & F & \mapsto & h_x(F) = \mathbb{P}(F \setminus X = x) \end{array} \quad \text{est une probabilité.}$$
2. Si $Y = \mathbb{1}_F$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \setminus X = x) = \mathbb{P}(F \setminus X = x)$
3. Il existe toute une classe d'équivalence (voir [9, 13]) $\dot{f}$ de fonctions f sur $\mathbb{E}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{E},\ \mathbb{P}_X(x) \neq 0 \text{ on ait } f(x) = \mathbb{E}(Y \setminus X = x)$$
avec $\dot{f} = \{g \setminus f \mathcal{R} g\} = \{g \setminus f = g \text{ prèsque surement (P.S.)}\}$

Théorème 1.3.1 *Soient Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et X variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$.* $\forall \mathbb{B} \in \mathcal{E}$

$$\int_{X^{-1}(B)} Y d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(Y \setminus X = x) d\mathbb{P}_X \tag{1.3}$$

où $X : (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathbb{X}})$

Démonstration

On a $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \setminus X(\omega) \in B\} = \{\omega \in B \setminus x \in B\}$

$$\begin{aligned}
\int_{X^{-1}(B)} Y d\mathbb{P} &= \int_{\sum_{x\in B}(X=x)_{\mathbb{P}_X(x)\neq 0}} Y d\mathbb{P} \\
&= \sum_{x\in B}\{X=x\}_{\mathbb{P}_X(x)\neq 0} \int_{\{X=x\}} Y d\mathbb{P} \\
&= \sum_{x\in B}\{X=x\}_{\mathbb{P}_X(x)\neq 0} \mathbb{E}(Y \setminus X = x)\mathbb{P}(X=x) \\
&= \int_B \mathbb{E}(Y \setminus X = x) d\mathbb{P}_X(x)
\end{aligned}$$

1.4 Notion générale de l'espérance conditionnelle

Théorème 1.4.1 *Soit Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $X : (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathbb{X}})$. Il existe une classe d'équivalance unique de fonctions $\mathbb{P}_X$ -intégrable définies sur $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ notée $\mathbb{E}(Y \setminus X)$ ou $\mathbb{E}^X(Y)$ tel que $\forall f \in \mathbb{E}(Y \setminus X)$ on ait :*

$$\int_{X^{-1}(B)} Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B f(x) \mathbb{P}_X(dx) \tag{1.4}$$

où $\mathbb{E}(Y \setminus X) = \mathbb{E}(Y \setminus \sigma(X))$ *et* $\sigma(X) = \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{E}\}$

1.4.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathbb{F}$.
Toute variable aléatoire Z vérifie :

1. Z est $\mathcal{B}$-mesurable
2. $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y d\mathbb{P} = \int_B Z d\mathbb{P}$

est appelée l'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$.

Proposition 1.4.1 *Soit la famille $(\mathbb{P}(.\setminus X = x))_{x\in\Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle. Alors pour toute variable aléatoire $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ on a*

$$\int Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega \setminus X = x) = \mathbb{E}(Y \setminus X = x),\ \mathbb{P}_X - p.s. \tag{1.5}$$

Démonstration

1. On suppose que Y est positive et on montre l'égalité (1.5) pour la fonction indicatrice
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y \setminus X = x) & = & \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \setminus X = x) = \mathbb{P}(F \setminus X = x) \\ & = & \int \mathbb{1}_F(\omega)\mathbb{P}(d\omega \setminus X = x) \end{array}$$

2. On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}$ alors $\forall x \in E_X$ tel que $E_X = \{x \in \Omega \setminus \mathbb{P}_X(x)\}$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y \setminus X = x) & = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_i} \setminus X = x) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \mathbb{1}_{F_i}(\omega)\mathbb{P}(d\omega \setminus X = x) \\ & = & \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}(\omega)\mathbb{P}(d\omega \setminus X = x) \\ & = & \int Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega \setminus X = x) \end{array}$$

Comme Y est positive alors il existe une suite de fonctions étagées $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes telles que
$$Y = \lim_{n\longrightarrow\infty} Y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

alors par la propriété de Beppo-Levi (voir [9]) on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y \setminus X = x) & = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y \setminus X = x) \\ & = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \int Y_n(\omega)d\mathbb{P}(\omega \setminus X = x) \\ & = & \int \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n(\omega)d\mathbb{P}(\omega \setminus X = x) \\ & = & \int Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega \setminus X = x) \end{array}$$

Remarque 1.4.1 *Si Y est une variable aléatoire réelle $\mathbb{P}$-intégrable alors l'égalité (1.5) est vérifiée comme étant une différence entre deux fonctions positives intégrables* $Y = Y^+ - Y^-$.

Proposition 1.4.2 *Soit $X : (\Omega, \mathbb{F}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E})$ une variable aléatoire, et Y une v.a.r. $\mathbb{P}$-intégrable. Alors l'application $\mathbb{E}(Y \setminus X)$ est une v.a. à valeurs réelles et on a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \setminus X)) = \mathbb{E}(Y) \tag{1.6}$$

Preuve 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int Y d\mathbb{P} = \int_{x\in E} Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_E \mathbb{E}(Y \setminus X = x)d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \setminus X))\end{aligned}$$

Proposition 1.4.3 *(Positivité de l'espérance conditionnelle) Si* $Y : (\Omega, \mathbb{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *une variable aléatoire positive, alors*

$$\mathbb{E}(Y \setminus X = x) \geq 0,\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Preuve 2 *Comme* $\int_{\{x\in B\}} Y d\mathbb{P} \geq 0\ ,\ \ \forall B \in \mathbb{B}$
alors d'aprés le théorème 1.3.1 on a

$$\int_B \mathbb{E}(Y \setminus X = x)\mathbb{P}(dx) \geq 0,\ \forall B \in \mathbb{B}$$

et par conséquent, $\mathbb{E}(Y \setminus X = x) \geq 0,\ \mathbb{P}_X - p.s.$

Théorème 1.4.2 *(La convergence monotone de l'espérance conditionnelle)*
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de variable aléatoire définies sur* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *convergeant prèsque sûrement vers une variable aléatoire* Y $\mathbb{P}$*-intégrable. Alors la suite* $((\mathbb{E}(Y_n \setminus X = x)))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mathbb{E}(Y \setminus X = x)$ *prèsque sûrement par rapport à* $\mathbb{P}_X$ *(i.e.* $\mathbb{P}_X$*-p.s.)*

Démonstration

D'aprés la proposition 1.4.3 on a Si $Y \geq 0$ alors $\mathbb{E}(Y \setminus X = x) \geq 0$, $\mathbb{P}_X - p.s.$
par monotonie de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{n+1} \setminus X = x) \geq \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x)\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

par suite

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \int_{\{x\in B\}} Y_n d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x)d\mathbb{P}_X(x)$$

et

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \int_{\{x\in B\}} Y d\mathbb{P} \geq \int_{x\in B} Y_n d\mathbb{P}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(Y \setminus X = x) \geq \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x) \ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Comme la suite $((\mathbb{E}(Y_n \setminus X = x)))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, bornée et converge $\mathbb{P}_X$-p.s. Alors par le théorème de la convergence dominée on obtient

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{x\in B} Y d\mathbb{P} &= \lim_n \int_B Y_n d\mathbb{P} \\
&= \lim_n \int_B \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x) d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \textstyle\int_B \lim_n \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x) d\mathbb{P}_X(x)
\end{aligned}$$

avec $\{\lim_n \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x); x \in B\}$ est $\mathbb{B}$-mesurable.

Alors

$$\mathbb{E}(Y \setminus X = x) = \lim_n \mathbb{E}(Y_n \setminus X = x) \ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Proposition 1.4.4 *Soit* $\mathbb{B}$ *sous tribu de* $\mathbb{F}$. *Si* Y *une variable aléatoire réelle* $\mathbb{B}$*-mesurable,* T *et* Y *deux variables aléatoires définies dans* $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$*, alors*

$$\mathbb{E}(T.Y) = \mathbb{E}(T.\mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \tag{1.7}$$

Démonstration

Pour montrer 1.7 c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathbb{B} \subset \mathbb{F} \ \mathbb{E}(T.Y) = \mathbb{E}(T.\mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)$$

on passe par quatre étapes.

1. Dans la première étape on suppose que $T = \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(TY) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y) = \textstyle\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y) d\mathbb{P}_{\mathbb{B}} \\
&= \textstyle\int \mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y) d\mathbb{P}_{\mathbb{B}} \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y))
\end{aligned}$$

2. En suite $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(TY) & = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} Y) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \mathbb{1}_{A_i} Y d\mathbb{P} \\ & =^{(1)} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ & = & \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y))) \end{array}$$

3. Si T est positive, il existe une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (fonctions étagées) qui converge vers T.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(TY) & = & \underset{n}{lim} \int T_n Y d\mathbb{P} =^{(2)} \underset{n}{lim}\, \mathbb{E}(T_n \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ & = & \mathbb{E}(\underset{n}{lim}\, T_n \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ & = & \mathbb{E}(T \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \end{array}$$

4. Si T est quelconque, on utilise la décomposition suivante : $T = T^+ - T^-$ tels que T^+ et T^- sont deux fonctions positives.

Proposition 1.4.5 *Soit* $\mathbb{B}$ *sous tribu de* $\mathbb{F}$. *Si* Y *une variable aléatoire définie dans* $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, *indépendante de* $\mathbb{B}$ *alors*

$$\mathbb{E}(Y \setminus \mathbb{B}) = \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{P} - p.s. \tag{1.8}$$

Preuve 3 *Soit* $B \in \mathbb{B}$, *par indépendance on a*

$$\begin{array}{rcl} \int_B \mathbb{E}(Y \setminus B) d\mathbb{P}_B & = & \int_B Y d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_B Y d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Y) \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\mathbb{E}(Y) \\ & = & \int_B \mathbb{E}(Y) d\mathbb{P} \end{array}$$

alors

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \mathbb{E}(Y \setminus B) = \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{P} - p.s.$$

Chapitre 2

Processus stochastique et Martingales

2.1 Introduction

Les processus stochastiques généralisent la notion de vecteurs (dimension finie) de v.a. au cas d'une famille de v.a. indexées dans un ensemble général T (ensemble de temps). En probabilités, le mot martingale est un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ tel que $\mathbb{E}(X_t \setminus X_s)$ est égale à X_s pour tout $t \geq s$.
Nous allons voir, dans ce chapitre, quelques éléments essentiels qui les rendent trés utiles dans l'étude du mouvement brownien.

2.2 Processus stochastique

Définition 2.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé soit aussi* $(E, \mathcal{E})$ *un espace mesurable appelé l'espace des états, et* T *un ensemble des temps.*
La famille $(X_t)_{t\in T}$ *de variables aléatoires de* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *dans* $(E, \mathcal{E})$ *est appelée un processus stochastique ou aléatoire.*

Remarque 2.2.1 *A* $\omega \in \Omega$*, on associe l'application*

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

(i) *Si on fixe* ω*,* $X_t(\omega)$ *appelé la trajectoire de* $(X_t)_{t\in T}$ *associée à* ω*.*

(ii) *Si on fixe* t*,* $X_t(\omega)$ *c'est l'état du processus à l'instant* t*.*

Définition 2.2.2 *On dit que $(X_t)_{t\in T}$ est $\mathbb{P}$-p.s. continue à droite (resp. $\mathbb{P}$-p.s. continue à gauche, $\mathbb{P}$-p.s. continue) si pour $\mathbb{P}$-prèsque tout $\omega \in \Omega$: $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. continue à gauche, continue)*

Exemple 2.2.1
1. *La consommation d'éléctricité journalière dans une ville à temps discret.*
2. *Le nombre de coups de téléphone qui parviennent à un central téléphonique sur des intervalles de temps $[0, t]$, $t \geq 0$.*

2.3 Loi de dimension finie

La famille des lois des variables aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ lorsque $(t_1, t_2, ..., t_n)$ parcourt l'ensemble des parties finies non vides de T s'appelle la famille des lois de dimension finie ou famille des répartitions finies de $(X_t)_{t\in T}$.

2.3.1 Modification

Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(\acute{X}_t)_{t\in T}$ deux processus stochastique basés sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$. On dit que $(\acute{X}_t)_{t\in T}$ est une modification de $(X_t)_{t\in T}$ si pour tout $t \in T$, $X_t = \acute{X}_t$ $\mathbb{P}$-p.s.

2.4 Processus stochastiques équivalents

On dira que deux processus stochastiques sont équivalents s'ils décrivent le même phénomène aléatoire au sens suivant :

$$\begin{array}{rcl}(X_t)_{t\in T} & : & (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) \longmapsto (E, \mathcal{E}) \\ (\acute{X}_t)_{t\in T} & : & (\acute{\Omega}, \acute{\mathbb{F}}, \acute{\mathbb{P}}) \longmapsto (E, \mathcal{E})\end{array}$$

Si $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in T, \forall B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$ on a

$$\mathbb{P}(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\}) = \acute{\mathbb{P}}(\{\acute{X}_{t_1} \in B_1, ..., \acute{X}_{t_n} \in B_n\}) \tag{2.1}$$

Exemple 2.4.1 *On a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathbb{B}_{[0,1]}, \lambda)$ où λ la mesure de lebesgue. $X_t(\omega) = 0$ et $Y_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega)$ avec $t, \omega \in [0,1]$*

Les deux processus ainsi définis sont équivalents. En effet,

$$\begin{aligned} \{\omega : Y_t(\omega) \neq X_t(\omega)\} &= \{t\} \\ \lambda(\{\omega : Y_t(\omega) \neq X_t(\omega)\}) &= \lambda(\{t\}) = 0 \end{aligned}$$

Donc, $X_t = Y_t \quad \lambda$*-p.s.*

2.5 Stationnarité faible et stricte

Soit $X = (X_t, t \in T)$ un processus stochastique réel de carré intégrable.

Définition 2.5.1 *On dit que* X *est stationnaire (au sens faible) si*

1. $\mathbb{E}(X_t)$ *est constante :* $\mathbb{E}(X_t) = m$, $t \in T$
2. $Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = Cov(X_t, X_s)$, $t, s \in T$ *(résiste au translation du temps.*

Définition 2.5.2 *Soit le processus* $X^{(h)} = (X_{t+h}, t \in T)$. *Le processus* X *est strictement stationnaire Si* $P_X = P_{X^{(h)}}$, $h \in T$.

Remarque 2.5.1 *Strictement stationnaire du seconde ordre implique faiblement stationnaire. L'inverse est faux.*

2.6 Processus stochastiques à accroissements indépendants (P.A.I)

Soit $T = \mathbb{R}_+$, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ basé sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ si on a

(i) $X_0 = 0 \quad \mathbb{P}$-p.s.

(ii) $\forall n \geq 2\ \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < t_1 < t_2 ... < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes alors $(X_t)_{t \in T}$ est un processus à accroissements indépendants (P.A.I.).

2.7 Processus stochastiques à accroissements indépendants stationnaires (P.A.I.S)

On dit qu'un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est à accroissement indépendants stationnaires (P.A.I.S.) si c'est un P.A.I. et en plus vérifie la condition suivante :

(iii) $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq s < t$, $\forall h \geq 0$

$$X_{t+h} - X_{s+h} =_{\mathcal{L}} X_{t-s}$$

Exemple 2.7.1 *Soit $T = \mathbb{N}$ on se donne une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\geq 1}$ indépendantes et,*

$$\forall n \geq 1 \ S_n = Z_1 + ... + Z_n$$

1. *On suppose que $S_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.*
2. *$\forall n \geq 2$, $\forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{N}$: $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ Les variables aléatoires $S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, ..., S_{t_n} - S_{t_{n-1}}$ sont indépendantes. Donc la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie (i) et (ii) par suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est un P.A.I. et si les Z_k, $k \geq 1$ ont même loi, $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie (iii) et par conséquent la suite est un P.A.I.S.*

2.8 Processus Gaussien

Définition 2.8.1 *Un vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$ est dit gaussien si*

pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ est une variable gaussienne.

Définition 2.8.2 *Un processus $X = \{X_t, t \in [0, 1]\}$ est gaussien, si pour tout $n \geq 1$ et pour tout $(t_1, ..., t_n) \in [0, 1]^n$, $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Remarques 2.8.1

1. *$X_1, ..., X_n$ des v.a. gaussiennes $\nRightarrow$ $(X_1, ..., X_n)$ le vecteur soit gaussien.*
2. *Si X et Y sont deux v.a. gaussiennes, non-corrélées, ce n'est nullement suffisant pour que (X, Y) soit un vecteur gaussien.*
3. *Si X et Y sont deux v.a. gaussiennes indépendantes $\Rightarrow$ (X, Y) soit un vecteur gaussien.*

Exemple 2.8.1 *Si* $X \curvearrowright N(0,1)$ *de fonction de répartition* $F_X(x)$ *et* $Y = X\mathbb{1}_{|X|>a} - X\mathbb{1}_{|X|\leq a}$, $a > 0$ *de fonction de répartition* $F_Y(y)$. *On montre façilement que* $Y \curvearrowright N(0,1)$ *à l'aide de la fonction caracéristique. Mais le vecteur* (X,Y) *n'est pas gaussien, en effet*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(|X| \leq a) - \mathbb{P}(X=0, |X| \leq a) \\ &= 0 + \mathbb{P}(|X| \leq a) - 0 \\ &= \mathbb{P}(|X| \leq a) \in]0,1[\ \forall a \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

2.9 Semi groupe de convolution

Une famille $(\mathbb{P}_t)_{t\in]0,+\infty[}$ de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ est un semi groupe de convolution si on a

$$\forall s \in]0,+\infty[\ \forall t \in]0,+\infty[\ \mathbb{P}_{s+t} = \mathbb{P}_s * \mathbb{P}_t$$

Proposition 2.9.1 **(a)** *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un P.A.I.S. et si pour tout* $t \in]0,+\infty[$, μ_t *désigne la loi de* X_t, *alors* $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ *est un semi groupe de convolution. On l'appelle le semi groupe de convolution du P.A.I.S.* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

(b) *Plus généralement, si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un P.A.I. et si pour tout* $s,t \in \mathbb{R}_+$ *tels que* $s < t$, $\mu_{s,t}$ *désigne la loi de* $X_t - X_s$, *alors on a* $\forall s,t,u \in \mathbb{R}_+$, *tels que* $s < t < u$,

$$\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}$$

Démonstration

(a) On a

$$X_{s+t} = X_s + (X_{s+t} - X_s)$$

Or, X_s et $X_{s+t} - X_s$ sont des variables aléatoires indépendantes et $X_{s+t} - X_s =_{\mathcal{L}} X_t$, donc

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$$

(b) $X_u - X_s$ a pour loi $\mu_{s,u}$, $(X_u - X_t)$ et $(X_t - X_s)$ sont des v.a. indépendantes de lois respectives $\mu_{t,u}$ et $\mu_{s,t}$. D'où l'égalité

$$\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}$$

.

2.10 Martingales

2.10.1 Filtration

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ tel que : $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, pour tous $t \leq s$ dans T.

Remarque 2.10.1

1. *$\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$,*
2. *$\mathcal{F}_t^X := \bigcap_{s>t} \sigma(X_r : r \leq s)$: filtration engendrée par un processus $(X_t)_{t\geq 0}$,*
3. *$\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$: la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{F}_t$.*

2.10.2 Processus adapté

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus, est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si pour toute t X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

2.10.3 Temps d'arrêt

On appelle temps d'arrêt toute application $T : \Omega \longmapsto \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ telle que $\forall n,\ \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \Longleftrightarrow \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

Remarque 2.10.2 *On peut écrire $\{T \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{T = i\}$.*

Proposition 2.10.1 *Si T et S sont des temps d'arrêt alors*

1. *$S \bigcap T$*
2. *$S \bigcup T$*
3. *$S + T$*

sont aussi des temps d'arrêt.

Démonstration

1. Comme $\mathcal{F}_n$, l'intersection et l'union sont des temps d'arrêt car on peut écrire
$$(S \bigcap T) = (S \leq n) \bigcap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$$
2. De même $(S \bigcup T) = (S \leq n) \bigcup (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$

3. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, donc $(S+T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ car

$$(S+T \leq n) = (S \leq n-m; T \leq m) \in \mathcal{F}_{n-m} \bigcap \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{n-m} \subset \mathcal{F}_n$$

2.10.4 Martingale, sur-Martingale et sous-Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus intégrable adapté. On dit que le processus est

1. une martingale, si pour tous $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t \setminus \mathcal{F}_s) = X_s \ \mathbb{P} - p.s.$$

2. une sur-martingale, si pour tous $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t \setminus \mathcal{F}_s) \leq X_s \ \mathbb{P} - p.s.$$

3. une sous-martingale, si pour tous $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t \setminus \mathcal{F}_s) \geq X_s \ \mathbb{P} - p.s.$$

Exemple 2.10.1 *Considérons le cas discret.*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ intégrable de moyenne M.
On désigne par $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $X_1, X_2, ..., X_n$. Considérons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(S_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n) & = & \mathbb{E}(S_n + X_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n) \\ & = & \mathbb{E}(S_n \setminus \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n) \\ & = & S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) \\ & = & S_n + M \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{l} \text{Si } M = 0 \Longrightarrow (S_n)_{n\geq 1} \text{ est une martingale} \\ \text{Si } M \geq 0 \Longrightarrow (S_n)_{n\geq 1} \text{ est une sous-martingale} \\ \text{Si } M \leq 0 \Longrightarrow (S_n)_{n\geq 1} \text{ est une sur-martingale} \end{array}$$

Remarque 2.10.3 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une sur-martingale* $\Longleftrightarrow$ $(-X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une sous-martingale.*

Exemple 2.10.2 *Soient* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et* $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *martingale. Alors le processus* $(|X_t|, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une sous-martingale. En effet,* $|X_t|$ *est* $\mathbb{F}_t -$ *mesurable, et la fonction* $\phi(.) = |.|$ *est une fonction convexe sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $|X_t|$ *est intégrable pour* $t \in \mathbb{R}$. *D'aprés l'inégalité de Jensen (voir [2]) on a pour tous* $0 \leq s \leq t$

$$|\mathbb{E}(X_t \setminus \mathcal{F}_s)| = |X_s| \leq \mathbb{E}(|X_t| \setminus \mathcal{F}_s) \ \mathbb{P} - p.s.$$

d'où le résultat.

Chapitre 3

Propriétés du processus de Wiener

3.1 Introduction

Le mouvement brownien (M.B.) ou processus de wiener joue un rôle fondamental dans la construction de processus stochastiques plus généraux, il jouit de nombreuses propriétés remarquables.
Dans ce chapitre, nous allons nous limiter à l'étude du procédé unidimensionnel de wiener en $\mathbb{R}$, présenterons une définition du M.B., et une petite séléction de ses nombreuses propriétés, plus particulièrement celles en rapport avec les martingales. Dans la dernière section nous montrons une application de la loi du logarithme itéré sur les trajectoires du M.B.

3.2 Mouvement Brownien

Définition 3.2.1 *Un processus à valeurs réelles $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Wiener si les conditions suivantes sont satisfait :*

1. $W_0 = 0 \quad \mathbb{P}$- *p.s.*
2. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus stochastique (aléatoire) à accroissement indépendant :*
   $\forall n \ , \ \ \forall t \ 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$
   les variables $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
3. $W_t - W_s$ *est une variable aléatoire réelle gaussienne, centrée et de variance* $t - s$.
   i.e. $W_t - W_s \curvearrowright N(0, t - s)$

Proposition 3.2.1 *Si $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Wiener alors*

(i) $\mathbb{E}(W_t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$

(ii) $Cov(W_t, W_s) = min(s,t)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$

Démonstration

(i) On montre que $\mathbb{E}(W_t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Fixons $t \in \mathbb{R}_+$, on a $W_t = W_0 + (W_t - W_0)$ Alors

$$\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(W_0) + \mathbb{E}(W_t - W_0)$$

d'aprés (1) et (3) de la définition du mouvement Brownien on a (i).

(ii) Soit $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_s W_t) &= \mathbb{E}(W_s W_t + W_s^2 - W_s^2) \\
&= \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s) + W_s^2) \\
&= \mathbb{E}(W_s^2) + \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s)) \\
&= \mathbb{E}(W_s^2) + \mathbb{E}(W_s)\mathbb{E}(W_t - W_s) \\
&= \mathbb{E}(W_s^2) = s
\end{aligned}$$

Soit maintenant $t < s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_s W_t) &= \mathbb{E}(W_s W_t - W_t^2 + W_t^2) \\
&= \mathbb{E}(W_t(W_s - W_t) + W_t^2) \\
&= \mathbb{E}(W_t^2) + \mathbb{E}(W_t(W_s - W_t)) \\
&= \mathbb{E}(W_t^2) + \mathbb{E}(W_t)\mathbb{E}(W_s - W_t) \\
&= \mathbb{E}(W_t^2) = t
\end{aligned}$$

D'où (ii).

Exemple 3.2.1 *Si W est un processus de Wiener standard, on montre que*

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t r^{-1} W(r) dr, \; t \in [0,1]$$

est un processus de Wiener.

Comme W est gaussienne et centré, $\tilde{W}$ l'est aussi.

Il reste à montrer que $\mathbb{E}(\tilde{W}_s \tilde{W}_t) = \min(s,t))$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{W}_s \tilde{W}_t) &= \mathbb{E}(W(s)W(t)) - \mathbb{E}(W(s) \textstyle\int_0^t r^{-1} W(r) dr) - \mathbb{E}(W(t) \int_0^s r^{-1} W(r) dr) \\
&+ \mathbb{E}(\textstyle\int_0^s r^{-1} W(r) dr \int_0^t r^{-1} W(r) dr)
\end{aligned}$$

On suppose que $t \leq s$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(\tilde{W}_s\tilde{W}_t) & = & t - \int_0^t r^{-1}\mathbb{E}(W(s)W(r))dr - (\int_0^t r^{-1}\mathbb{E}(W(t)W(r))dr + \int_t^s r^{-1}\mathbb{E}(W(t)W(r))dr) \\
& + & \int_0^t[\int_0^r r^{-1}u^{-1}\mathbb{E}(W(r)W(u))du + \int_r^s r^{-1}u^{-1}\mathbb{E}(W(r)W(u))du]dr \\
& = & t - \int_0^t r^{-1}rdr - (\int_0^t r^{-1}rdr + \int_t^s r^{-1}tdr) + \int_0^t[\int_0^r (ru)^{-1}udu + \int_r^s (ru)^{-1}rdu]dr \\
& = & t - t - (t + t\log(\frac{s}{t})) + \int_0^t(1 + \log(s) - \log(r))dr \\
& = & -t - t\log(\frac{s}{t}) + t + t\log(s) - (t\log(t) - t) = t
\end{array}$$

De même pour $s \leq t$, on obtient $\mathbb{E}(\tilde{W}_s\tilde{W}_t) = \min(s,t))$.

3.3 Le mouvement Brownien comme une martingale

Théorème 3.3.1 *Le mouvement Brownien (W_t) est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Démonstration

Pour tout $t > s \geq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(W_t \setminus \mathcal{F}_s) & = & \mathbb{E}(W_t - W_s \setminus \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s \setminus \mathcal{F}_s) \\
& = & \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s \\
& = & W_s
\end{array}$$

Exemple 3.3.1 *Soit $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien, alors le processus $(W_t^2 - t)_t$ est une martingale.*

Démonstration

Soit $t > s \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(W_t^2 \setminus \mathcal{F}_s) & = & \mathbb{E}(W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2 \setminus \mathcal{F}_s) \\
& = & W_s^2 + (t-s)
\end{array}$$

Donc,

$$\mathbb{E}((W_t^2 - t) \setminus \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$$

Exemple 3.3.2 *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, $\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2})$ est une martingale.*

Remarque 3.3.1 *Si Y est une variable gaussienne centrée réduite, on a*

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\lambda y) \exp(-\frac{y^2}{2}) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \exp(\frac{\lambda^2}{2}) \tag{3.1}$$

Démonstration

On montre si $\forall s < t$,

$$\mathbb{E}(\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}) \setminus \mathcal{F}_s) = \exp(\sigma W_s - \frac{\sigma^2 s}{2})$$

Soit $s < t$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(\exp(\sigma W_t) \setminus \mathcal{F}_s) & = & \exp(\sigma W_s \mathbb{E}(\exp(\sigma(W_t - W_s)) \setminus \mathcal{F}_s) \\ & = & \exp(\sigma W_s) \mathbb{E}(\exp(\sigma W_{t-s})) \\ & = & \exp(\sigma W_s) \mathbb{E}(\exp(\sigma \sqrt{t-s} \frac{W_{t-s}}{\sqrt{t-s}})) \end{array}$$

où $\frac{W_{t-s}}{\sqrt{t-s}} \curvearrowright N(0,1)$

Application de 3.1 sur la variable $\frac{W_{t-s}}{\sqrt{t-s}}$, on obtient

$$\exp(\sigma W_s) \mathbb{E}(\exp(\sigma \sqrt{t-s} \frac{W_{t-s}}{\sqrt{t-s}})) = \exp(\sigma W_s) \exp(\sigma^2 \frac{(t-s)}{2})$$

D'ù le résultat.

Théorème 3.3.2 **(a)** *Un processus de Wiener (W_t) est à accroissement stationnaire et de covariance $Cov(W_s, W_t) = \min(s,t)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.*

(b) *Réciproquement tout processus gaussien centré de covariance* $\min(s,t)$ *est un processus de Wiener.*

Démonstration

(a) Soit $\phi_{h,t}$ la fonction caractéristique de $W_{t+h} - W_t$. Comme $W_{t+h} = (W_{t+h} - W_t) + W_t$; $t \geq 0$, $h \geq 0$

On a par indépendance des accroissements

$$\exp(-\frac{1}{2}\delta^2(t+h)u^2) = \phi_{h,t}(u) \exp(-\frac{1}{2}\delta^2 t u^2),\ u \in \mathbb{R}$$

Alors,

$$\phi_{h,t}(u) = \exp(-\frac{1}{2}\delta^2 hu)$$

par conséquent $W_{t+h} - W_t \curvearrowright N(0,h)$. D'où les accroissements sont stationnaires. Et pour la covariance est déjà démontrer dans la proposition 3.2.1.

(b) Il suffit de montrer que les accroissements sont indépendants. Or, pour $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ on a

$$\mathbb{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] = (t_2 - t_1 - t_2 + t_1) = 0$$

Donc, les accroissements sont orthogonaux et par conséquent indépendants puisque le processus est gaussien.

3.4 Régularité des trajectoires

Dans cette section on présente deux résultats concerne la continuité et dérivabilité en moyenne quadratique (m.q.) ainsi que la non-variation bornée des trajectoires du mouvement brownien.

Théorème 3.4.1 *W continue en moyenne quadratique mais pas dérivable en moyenne quadratique.*

Preuve 4 *1. On montre pour $s \longrightarrow t$, $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 \longrightarrow 0$*

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 &= \mathbb{E}(W_t^2) - 2\mathbb{E}(W_sW_t) + \mathbb{E}(W_s^2) \\ &= (t - 2\min(s,t) + s) \\ &= |t-s| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où la continuité en m.q.

2. Pour la non-dérivabilité, il suffit de développer la quantité :

$$\mathbb{E}(\frac{W_{t+h} - W_h}{h})^2 = \frac{1}{h} \longrightarrow \infty \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

.

Théorème 3.4.2 *Les trajectoires de W ne sont pas à variation bornée.*

Preuve 5 $(W(t))_{t\in[0,1]}$ *: un processus de Wiener standard* $(\sigma^2 = 1)$
On pose

$$Y_n = \sum_{j=1}^{2^n} |W(\frac{j}{2})^n - W(\frac{j-1}{2})^n|$$

Remarque 3.4.1 *Rappelons si*

$$Z \curvearrowright N(0,1),\ \mathbb{E}|Z| = a > 0 et\ \mathbb{V}ar|Z| = b > 0$$

donc puisque $W(\frac{1}{2})^n \curvearrowright N(0,(\frac{1}{2})^n)$, *alors la variable* $Z = 2^{\frac{n}{2}} W(\frac{1}{2})^n$ *suit une loi* $N(0,1)$.
D'aprés la remarque 3.4.1 on a

$$\mathbb{E}|(W(\frac{1}{2})^n))| = 2^{-\frac{n}{2}} a \ et\ \mathbb{V}ar|(W(\frac{1}{2})^n))| = 2^{-n} b$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}(Y_n) = 2^n 2^{-\frac{n}{2}} a \ et\ \mathbb{V}ar(Y_n) = 2^n 2^{-n} b$$

application de l'inégalité de Chebyshev (voir [3]) Sur Y_n *on obtient*

$$\mathbb{P}(|Y_n - 2^{\frac{n}{2}} a| > n) \leq \frac{2^n 2^{-n} b}{n^2}$$

donc

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n - 2^{\frac{n}{2}} a| > n) < \infty$$

avec une probabolité 1 , $|Y_n - 2^{\frac{n}{2}} a| \leq n$ *ce qui donne*

$$Y_n \geq 2^{\frac{n}{2}} a - n$$

alors $Y_n \longrightarrow \infty \quad \mathbb{P}$-*p.s.*

3.5 Application au mouvement Brownien

3.5.1 Module de continuité de Lévy

Ci-dessous nous donnons un résultat sans démonstration sur le module de continuité de Lévy qui nous aide à montré la loi du logarithme itéré.

Théorème 3.5.1 *Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien W vérifient, pour tous $0 \leq A < B < \infty$,*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2r \log(\frac{1}{r})}} \sup_{s,t \in [A,B], |s-t| \leq r} |W_t - W_s| \right) = 1 \tag{3.2}$$

3.5.2 Loi du Logarithme Itéré (L.L.I.)

Dans ce paragraphe, nous donnons une application de la théorie des martingales au mouvement brownien (M.B.), cette application est une version du Module de continuité de P. Lévy sur les trajectoires du M.B.

Théorème 3.5.2 *Si W est M.B., pour tout temps d'arrêt T fini on a prèsque sûrement*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{W_{T+r} - W_T}{\sqrt{2r \log\log(\frac{1}{r})}} = 1$$

$$\liminf_{r \longrightarrow 0} \frac{W_{T+r} - W_T}{\sqrt{2r \log\log(\frac{1}{r})}} = -1$$

Pour montrer ce théorème on a besoin de :

Propriété forte de Markov :

Si T est un temps d'arrêt de la filtration $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t^+})_{t \geq 0}$, le processus $Y_r = W_{T+r} - W_T$ est un mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{T^+}$.

Propriété de Doob :

Si X est une martingale, on a pour tous $t > 0$, $a > 0$:

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq a) \leq \frac{1}{a} (\mathbb{E}|X_t|) \tag{3.3}$$

Lemme de Borel-Cantelli :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants.

1. Si $\sum_n \mathbb{P}(\mathbb{A}) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$

2. Si $\sum_n \mathbb{P}(\mathbb{A}) = \infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$

Démonstration du théorème

Par la propriété forte de Markov, il suffit de montrer le résultat pour $T \equiv 0$, et par symétrie on montre que

$$Y = \limsup_{r\longrightarrow 0} \frac{W_r}{\psi(r)} = 1 \ \mathbb{P} - p.s. \tag{3.4}$$

La démonstration se fait en deux étapes.

Remarque 3.5.1 *On pose $\phi(r) = \sqrt{2r\log(\frac{1}{r})}$ et $\psi(r) = \sqrt{2r\log\log(\frac{1}{r})}$, on a $\frac{\psi(r)}{\phi(r)} \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow 0$*
La fonction $\psi(r)$ n'est bien définie que pour $r < 1$, et est croissante sur $]0, t_0[$ pour un certain $t_0 > 0$ (où $t_0 > \frac{1}{e}$).

Étape 1 :

On va d'abord montrer que $Y \leq 1$ p.s.
d'aprés l'exemple 3.3.2 le processus $(\exp(aW_t - \frac{a^2t}{2}))_t = M_t^a$ est une martingale pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par suite, la propriété de Doob 3.3 implique

$$\mathbb{P}(\sup M_t^a > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(|M_1^a|) = \frac{1}{\lambda} \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

donc pour tous $a, b > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq 1}(W_t - \frac{at}{2}) > b) = \mathbb{P}(\sup_{t\leq 1}(M_t^a) > \exp(ab)) \leq \exp(-ab) \tag{3.5}$$

Soit alors $\theta, \delta \in]0,1[$. Posons $a_n = (1+\delta)\theta^{-n}\psi(\theta^n)$ et $b_n = \frac{\psi(\theta^n)}{2}$, de sorte que

$$a_n b_n = (1+\delta)\log\log(\theta^{-n}) = (1+\delta)(\log(n) - \log\log(\frac{1}{\theta}))$$

appliquons 3.5 avec a_n et b_n, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\sup_{t\leq 1}(W_t - \frac{a_n t}{2}) > b_n) &\leq \sum_{n\geq 1} \exp(-a_n b_n) \\ &\leq \exp(-(1+\delta)(\log\log(\tfrac{1}{\theta}))) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty\end{aligned}$$

D'aprés le lemme de Borel-Cantelli, pour ω en dehors d'un ensemble négligeable N il existe $n_0 = n_0(\omega)$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait

$$\begin{aligned} W_t &\leq \tfrac{a_n t}{2} + b_n \\ &= \tfrac{\psi(\theta^n)}{2}(1 + t(1+\delta)\theta^{-n}) \end{aligned}$$

pour tout $t \leq 1$, si de plus $t \leq \theta^{n-1}$, alors

$$W_t \leq \frac{\psi(\theta^n)}{2}(1 + \frac{(1+\delta)}{\theta})$$

d'aprés la croissance de ψ : $\psi(\theta^n) \leq \psi(t)$ si $\theta^n \leq t \leq t_0$. En d'autres termes,

$$\theta^n \leq t \leq \theta^{n-1},\ n \geq n_0,\ n \geq 1 + \frac{\log(\frac{1}{t_0})}{\log(\frac{1}{\theta})},\ W_t \leq \frac{\psi(t)}{2}(1 + \frac{(1+\delta)}{\theta})$$

Donc,

$$Y \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{(1+\delta)}{\theta}) \text{ pour tous } \theta, \delta \in]0,1[$$

par conséquent,

$$Y \leq 1 \ p.s.$$

Étape 2 :

On montre maintenant, $Y \geq 1\ \mathbb{P} - p.s.$

Les évènements $A_n = \{W_{\theta^n} - W_{\theta^{n+1}} \geq (1 - \sqrt{\theta})\psi(\theta^n)\}$ sont indépendants, et on a la variable aléatoire

$$\frac{W_{\theta^n} - W_{\theta^{n+1}}}{\sqrt{(\theta^n - \theta^{n+1})}} \curvearrowright N(0,1)$$

Si on pose $a_n = \frac{(1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n)}{\sqrt{(\theta^n-\theta^{n+1})}}$, alors

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I(a_n)$$

$$\text{où } I(a_n) = \int_{a_n}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx \geq \frac{\exp(-\frac{1}{2}a_n^2)}{a_n + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{\exp(-\frac{1}{2}a_n^2)}{2a_n} \text{ pour tout n assez grand}$$

Posons $\gamma = \frac{1-\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}$ et $a_n^2 = 2\gamma^2[\log(n) + \log\log(\frac{1}{\theta})] \longrightarrow \infty$ donc,

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}a_n^2)}{2a_n} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}a_n^2)}{4\gamma\sqrt{\log(n)}}$$

Comme $\gamma < 1$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A_n) & \geq & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\gamma[\log(n)+\log\log(\frac{1}{\theta})])}{4\gamma} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \\
& \geq & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\gamma[\log\log(\frac{1}{\theta})])}{4\gamma} \frac{1}{n^\gamma\sqrt{\log(n)}} \\
\displaystyle\sum_{n\geq1} \mathbb{P}(A_n) & \geq & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\gamma[\log\log(\frac{1}{\theta})])}{4\gamma} \displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\gamma\sqrt{\log(n)}}
\end{array}$$

pour tout $\gamma < 1$ on a $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\gamma\sqrt{\log(n)}}$ diverge car c'est une série de Bertrand par suite $\displaystyle\sum_{n\geq1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, appliquons le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

c'est-à-dire , pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable on a $\{W_{\theta^n} - W_{\theta^{n+1}} \geq (1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n)\}$ pour une infinité de valeurs de n. Par ailleurs d'aprés l'étape 1 on sait qu'en dehors d'un ensemble négligeable on a aussi $W_{\theta^{n+1}} \geq (1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n)$ pour tout n

assez grand. Donc en dehors d'un ensemble négligeable on a pour une infinité de valeurs de n

$$W_{\theta^n} \geq (1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n) - 2\psi(\theta^{n+1}) = \psi(\theta^n)(1-\sqrt{\theta} - 2\sqrt{\theta}(\frac{\sqrt{\log(n+1)+\log\log(\frac{1}{\theta})}}{\sqrt{\log(n)+\log\log(\frac{1}{\theta})}})^{\frac{1}{2}})$$

par suite

$$Y = \limsup_n \frac{W_{\theta^n}}{\psi(\theta^n)} \geq 1 - 3\sqrt{\theta} \text{ p.s.}$$

comme θ est arbitraire dans $]0,1[$, on en déduit $Y \geq 1$ $\mathbb{P}-$ p.s.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, notre objectif a été d'introduire les propriétés des processus aléatoires plus précisement le mouvement brownien.

Nous avons montré que le M.B. est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (P.A.I.S.), et est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On a montré aussi que les trajectoires du M.B. sont continues en moyenne quadratique mais pas dérivables, et ne sont pas à variation bornée.
Le M.B. donne le même résultat comme dans le cas des sommes partielles des v.a. concernant la loi du logarithme itéré grâçe à la notion de martingale.

Finalement, nous intéressons dans le future à généraliser les processus aux multidimensionnels et on souhaite appliquer ces techniques aux équations différentielles stochastiques et aux finances.

Bibliographie

[1] JEAN-CLAUDE LALEUF. *Processus et intégrales stochastiques.* Ellipses, 2014,

[2] VINCENZO CAPASSO, DAVID BAKSTEIN. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes, Theory, Models, and Applications.* Birkhäuser-Boston-Basel-Berlin, 2005,

[3] SAMUEL KARLIN, HOWARD M. TAYLOR. *A first course in Stochastic Processes.* ACADEMIC PRESS NEW YORK SANFRANCISCO LONDON, 1975,

[4] PRASADA CHALASANI, SOMESH JHA. *Stochastic Calculus and Finance.* Steven E Shreve, 1996,

[5] HUYÊN PHAM. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance.* Springer, 2007,

[6] DAMIEN LAMBERTON, BERNARD LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1997,

[7] DOOB J. L. *Stochastic processes.* Wiley, 1953,

[8] ITO K. *Lectures on stochastic processes.* Bombay, 1961.

[9] M. Cottrell, Ch. Duhamel, V. Genon-Catalot. *Exercices de Probabilités avec rappels de cours.* Librairie classique Eugène Belin, 1980,

[10] LEVY PAUL. *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier-Villars, deuxième édition, 1965,

[11] PARZEN E. *Stochastic processes.* S. KARLIN, 1962,

[12] STRASSEN V. *An invariance principle for the law of the iterated logarithm.* Z.W., 3, pp. 211-226, 1964,

[13] TORTRAT A. *Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires.* MASSON, 1971,

[14] REVUZ D., YOR M. *Continuous martingales and brownien motion.* Vol. 293 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-verlag, Berlin, 1991,

[15] FRIZ P., VICTOIR N. *Multidimensional Stochastics Processes as Rough Paths.* vol. 120 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010,

[16] FRIZ P., Martin HAIRER. *A course on rough Paths with an introduction to regularity structures.* Springer, 2014.