Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Mastère

Thème

Influence de la valeur du pas de Discrétisation sur la Positivité de certain classe du Système Linéaire Fractionnaire à temps discret-continu

Présenté par

Tchouka Salma Sabria *Option M.C.O*

Année Universitaire 2016 -2017

Table des matières

RÉSUMÉ

Nous avons étudie à travers ce mémoire, l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité de système linéaire fractionnaire discret à deux dimension.

Dans cet exposé, il y aura 3 partie. Dans le premier temps, Nous exposons une étude générale sur la theorie des matrice et le calcul fractionnaire, puis nous avons présenté une étude détaillée sur les différentes types du systèmes fractionnaires à deux dimension.

Dans le second temps, nous avons accordé une attention particulière aux problème obtenu aprés la discrétisation du système(3.1.1) de Kazorek [1] et nous intéressant à la resolution du système discret et extraire ses conditions de positivité, pour ce faire, nous basant sur les conditions qui seront établis dans le chapitre quatre.

En suite, nous terminous par une application qui consiste à illuster par un exemple numérique, nous ont permis grâce aux courbes graphique obtenues de valider les hypothèses et choix faits concernant la positivitée.

DÉDICACES

À mes chers parents Taher et Nouichi Malika,

À mon frère et à mes soeurs,

À mes amis,

Remerciments

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique de Monsieur **Ghazzar Mohammed Amine**, Professeur et chef de département de Mathématique à l'Université d'Abdelhamid Ibn Badis, faculté des Sciences Exactes et d'Informatique, Mostaganem

Je tiens à vous adresser mes profonds remerciments,pour avoir encadré ce travail. Je tiens à manifester ma reconnaissance pour votre patience, votre gentillesse et votre écoute. Merci de m'avoir laissé dans mes choix.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement l'adorable **Saidane Amina**, elle a été comme une grande soeur à moi, elle ma donnée tout ; l'aide, le sourire de chaque matin, le respect et surtout les conseils, je lui dis merci infiniment.

Je remercie également et plus sincèrement **Mlle Benhamdi Hayat, Mlle Mime Rania** et **Mlle Khadime Amina,** pour ses aides et ses précieuses soutiens.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de ce mémoire.

Je n'oserais oublier de remercier tout le corps professoral de : L'université de Mostaganem departement Mathématique, pour le travail énorme qu'il effectue pour nous créer les conditions les plus favorables pour le déroulement de nos études.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : Mes parents, mon frère et mes sœurs, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

NOTATION

$\mathbb{Z}$ Corps des entiers relatifs

$\mathbb{Z}_+$ Corps des nombres entiers non-négatifs

$\mathbb{R}$ Corps des nombres réels

$\mathbb{R}_+$ Corps des nombres réels non-négatifs

$\mathbb{R}^n$ Espace des vecteurs à n entiers réelles

$\mathbb{R}^{m\times n}$ Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$

$\mathbb{C}$ Corps des nombres complexes

$\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+^{n\times 1}$ Espace des vecteurs à entrées réelles non-négatives

$\mathbb{R}_+^{m\times n}$ Espace des matrices à entrées réelles non-négatives

I_n Matrice identité d'ordre n

n Ensemble des n premiers entiers naturels

$X(s)$ Transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$

$X(z)$ Z-Transformée d'une suite $(x_n)_n$

$\binom{n}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$, désigne le binôme de Newton

$\binom{\alpha}{i}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres non entiers

$\Gamma(x)$ la fonction gamma

$n!$ factorielle n

D^α opérateur de dérivation fractionnaire

$\overline{n} = \{1, 2, ..., n\}$ / $n \in \mathbb{Z}_+$

$i = \overline{1, n}$ $i \in \overline{n}$

INTRODUCTION

Tout système modélisé par une équation différentielle utilisant la dérivation d'ordre fractionnaire est appelé système d'ordre fractionnaire. Actuellement, beaucoup de travaux traitent des systèmes ou des phénomènes physiques, chimiques, biologique, informatiques, elecroniques et dans l'industrie (colonnes de distilation)...ect, qui nécessitent l'utilisation de cette théorie du calcul fractionnaire. Des chercheurs essayent de développer de nouveaux outils mathématiques et informatiques qui permettent de manipuler et de simuler les systèmes d'ordre fractionnaire, d'autres tentent de déterminer leurs caractéristiques dynamiques et statiques.

Dans notre étude, nous nous plaçons dans le cardre de modèles bidimensionnels à temps discret. Nous avons utilisé la méthode de **Grünwald-Letnikov** pour le calcul des dérivées non entières pour représenter l'aspect fractionnaire du modèle.

Dans de nombreux systèmes physiques, chimiques,...ect les variables sont par nature positives, or les modèles usuels en particulier linéaires, n'intègrent en général pas cette contrainte.

Dans ce travail, nous étudions une classe de systèmes linéaires positifs bidimensionnels et fractionnaires.

La principale propriété de ces systèmes est que si l'état initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non-négatif.

Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires. En conséquence, certaines propriétés connues des systèmes linéaires ne peuvent être appliquées pour les systèmes positifs.

Ce travail sera donc consacré à l'étude d'un modèle linéaire à deux dimensions qui a été introduit par T. Kaczorek (*T. Kaczorek*,2011) [1], et les travaux de *Ghezzar*, *Bouagada* [12].

On s'intéresse au problème de solvabilité et de positivité de ces systèmes linéaires. Des conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels modèles soit positifs seront alors établis. Nous avons étudiés par la suite le problème de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité.

Le travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre nous avons présentés des généralités sur la théorie des matrices et sur la transformée en Z. Ce chapitre est organisé en deux partie

Dans le premier temps, nous présentons la théorie générale de matrices particulières telles les matrices non-négatives, les matrices de Metzler, puis nous avons présente brièvement les propriétés intéressantes de ces matrices particulières, puisque, lors de notre étude, nous utiliserons cette classe de matrices. Dans le second temps, nous exposerons la définition de la transformée en Z et ses propriétés.

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas des transformées de Fourier où Laplace pour les systèmes à temps continu. Ces transformations connaissent une particularisation aux systèmes à temps discret. La propriété la plus remarquable est toujours la mise en correspondance de la convolution dans le domaine direct avec un produit dans le domaine transformé. La transformée en Z présente en outre l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier. Les raisons d'introduire la transformée en Z sont donc les mêmes que celles qui ont motivé l'utilisation de la transformée de Laplace : une facilité plus grande d'utilisation et d'inversion que celles offertes par la transformée de Fourier.

Le deuxième chapitre décrit les différentes types du systèmes linéaires fractionnaires bidimensionnel $(2D)$.

Dans le deuxième temps, nous avons introduit les différentes définitions de calcul de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire et nous avons donnés les définition de **Caputo,Grünwald-Letnikov** qui est une méthode d'approximation qui nos permet de mettre en oeuvre les dérivées d'ordre fractionnares.

Le chapitre 3, sera donc consacré à l'étude un modèle linéaire fractionnaire à deux dimensions, nous avons étudié par la suite le problème discrétisé.

Nous adapterons dans le mème chapitre une analyse sur l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la postivité des systèmes linéaires fractionnaire.

Enfin, nous terminerons par une conclusion qui résume l'ensemble des résultats obtenus.

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre a essentiellement pour l'objectif de présenter quelques rappels sur les matrices et transformée en Z et coefficient binomial. Nous fournissons au début de ce chapitre des notions préliminaires qu'on va utiliser. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes [2], [5],[6], et [7].

1.1 Matrices particulières

Nous étudions alors plus particulièrement les matrices non-négatives, positives, strictements positives et les matrices de Metzler qui permettent de caractériser la positivité de systèmes linéaires.
Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels

1.1.1 Matrices non-négatives

Définition 1.1.1 *On dit que A est une matrice* non-négative *si* $\forall i \in \overline{n}$, $\forall j \in \overline{m} : a_{ij} \geq 0$, *autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par :*

$$A \geq 0 \text{ ou encore, } A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}.$$

1.1.2 Matrices positives

Définition 1.1.2 *A est une matrice* positive *si A est non-négative et* $\exists k \in \overline{n}, \exists l \in \overline{m} : a_{kl} > 0$, *c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement)* *positive. Nous noterons une telle matrice par :*

$$A > 0.$$

1.1.3 Matrices strictements positives

Définition 1.1.3 *A est une matrice* strictement positive *si* $\forall i \in \overline{n}$, $\forall j \in \overline{m}$: $a_{ij} > 0$, *i.e. toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par :*

$$A >> 0.$$

Remarque 1.1.1 *Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension n, $n \geq 2$.*

1.1.4 Matrices de Metzler

Définition 1.1.4 *A est une matrice de* Metzler *si* $\forall i \in \overline{n}$, $\forall j \in \overline{m}$, $i \neq j$: $a_{ij} \geq 0$, *i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.*

Exemple 1.1.1 *La matrice A est suivante est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 12 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2 La transformée en Z

La transformée en Z constitue l'outil privilégie pour l'étude des systèmes discrets.
Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace pour un temps continues.
C'est une application qui transforme une suite (définie sur les entiers positives) en une fonction de la variable complexe.

1.2.1 La transformée en Z d'une fonctions discrète

Définition 1.2.1 *Soit une suite discrète $(x(j))_j =\cdot (x_j)_j$.*
La transformée en Z est définie par

$$X(z) = Z[x_j] = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} \tag{1.2.1}$$

ou z est une variable complexe et où $X(z)$ est une fonction complexe de la variable z

Exemple 1.2.1 *soit $x(n) = 1$,pour tout $n \in \mathbb{N}$, ona :*

$$X(z) = Z[x_n] = \sum_{j=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ...$$

on retrouve une série géométrique de raison $\frac{1}{z}$, elle converge pour $|z| > 1$ et

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

Théorème 1.2.1 *Si*

$$X(z) = Z[x_j] = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z[x_{i+1}] &= zX(z) - zx_0, \\ Z[x_{i-p}] &= z^{-p}X(z) + \ z^{-p} \sum_{j=-1}^{-p} x_j z^{-j}. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisent la definition

$$Z[x_{i+1}] = \sum_{i=0}^{\infty} x_{i+1} z^{-i} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-(j-1)} = z \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} - zx_0 = zX(z) - zx_0$$

$$\begin{aligned} Z[x_{i-p}] &= \sum_{i=0}^{\infty} x_{i-p} z^{-i} = \sum_{j=-p}^{\infty} x_j z^{-(j+p)} = z^{-p} \sum_{j=-p}^{\infty} x_j z^{-j} = z^{-p} \sum_{j=-p}^{\infty} x_j z^{-j} + z^{-p} \sum_{j=-1}^{-p} x_j z^{-j} \\ &= z^{-p}X(z) + z^{-p} \sum_{j=-1}^{-p} x_j z^{-j}. \end{aligned}$$

□

Quelques propriétés intéressantes :

Linéarité

La linéarité de la transformation signifie que la transformée d'une séquence obtenue par combinaison linéaire d'autres séquences n'est rien d'autre que la combinaison linéaire des transformées correspondantes. Si donc

$$x(j) = ax_1(j) + bx_2(j)$$

alors

$$\begin{aligned} x(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} \\ &= a\sum_{j=0}^{\infty} x_1(j)z^{-j} + b\sum_{j=0}^{\infty} x_2(j)z^{-j} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned}$$

Convolution

Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en z pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret. Si $y(n)$ est obtenu par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, on a que

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)g(n-j) = x(j) * g(j)$$

La transformée en Z, $Y(z)$, de $y(n)$ est donc obtenue par

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} y(j)z^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x(m)g(j-m)z^{-j} \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} x(m)z^{-m}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} g(j-m)z^{-(j-m)}\right] \\ &= X(z)G(z). \end{aligned}$$

1.2.2 La transformée en Z d'une fonction discrète à deux variables

Définition 1.2.2 *La transformée en Z d'une fonction discrète à deux variables x_{ij} est définie par la relation :*

$$X(z_1, z_2) = Z\left[x_{ij}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} \tag{1.2.2}$$

Propriétés :

De la relation (1.2.2), nous pouvons extraire quelques propriétés de la tansformée en Z utiles pour la suite de notre étude.

En posant $x_{ij} = x(i, j)$, alors nous aurons :

1. $Z\left[x(i+1, j+1)\right] = z_1 z_2 \left[X(z_1, z_2) - X(z_1, 0) - X(0, z_2) - X_{00}\right]$
2. $Z\left[x(i, j+1)\right] = z_2 \left[X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)\right]$
3. $Z\left[x(i+1, j\right] = z_1 \left[X(z_1, z_2) - X(0, z_2)\right]$
4. $Z\left[x(i-p, j-q)\right] = z_1^{-p} z_2^{-q} X(z_1, z_2)$
5. $Z\left[x(i+1-p, j+1)\right] = z_1^{-p+1} z_2 \left[X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)\right]$
6. *Convolution*

$$\begin{aligned} x(k, i) * y(k, i) &= \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} x(k-e, i-f) y(e, f) \\ &= X(z_1, z_2) Y(z_1, z_2) \end{aligned}$$

1.3 Transformation en Z inverse $(Relation - Intégrale)$

Définition 1.3.1 *La transformée inverse en Z est donnée par :*

$$x(n) = Z^{-1}\left\{X(z)\right\} = \frac{1}{2\Pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

Valable pour tout les valeur de n, le chemin d'intégration C doit être dans la région de convergence. Il doit être fermé et il foi entourer l'origine du plan des z dans le sens positif (sens invers des aiguilles d'une montre).

Remarque 1.3.1 *D'aprés la propriétée (6), on trouve*

$$Z\left[x(k, i) * y(k, i)\right] = X(z_1, z_2) Y(z_1, z_2)$$

Alors

$$Z^{-1}\left[X(z_1, z_2) Y(z_1, z_2)\right] = x(k, i) * y(k, i).$$

1.4 Coefficient binomial (*binôme de Newton*)

Les coefficients binomiaux, définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donnent le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments, On les note $\binom{n}{k}$ (lu « k parmi n »), ou C_n^k (lu « combinaison de k parmi n »),

$$\tbinom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Pour le cas fractionnaire, particulier $0 < \alpha < 1$ et $i \in \mathbb{N}^*$

$$C_i^\alpha = \frac{\alpha!}{i!(\alpha-i)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)}{i!}$$

Lemme 1.4.1 *Si* $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$(-1)^i \tbinom{\alpha}{i} < 0, \quad i = 1, 2, ... \; . \tag{a}$$

Preuve : Soit $0 < \alpha < 1$ et $i \in \mathbb{N}^*$,alors

$$C_i^\alpha = (-1)^i \tbinom{\alpha}{i} = (-1)^i \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)}{i!}$$

Notons que le nombre de facteur du produit $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)$ est égale à i

Le seul facteur positif du produit étant α, alors le nombre de facteur négatifs étant de $(i-1)$,

- ▷ Si i est paire les deux réels $(-1)^i$ et $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)$ sont de signes opposés $(-1)^i = 1 > 0$ et $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1) < 0$ car le nombre de facteurs négatifs est impaire.
- ▷ Si i est impaire les deux réels $(-1)^i$ et $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)$ sont de signes opposés $(-1)^i = -1 < 0$ et $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1) > 0$ car le nombre de facteurs négatifs est paire.

Remarque 1.4.1 *Si* $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$(-1)^{i+1} \tbinom{\alpha}{i} > 0, \quad i = 1, 2, ... \; .$$

Chapitre 2

Les Systèmes Linéaires à deux dimensions(2D)

Nous rappelons brièvement dans ce chapitre les representations des différentes types des systèmes linéaires.

2.1 Description d'un système linéaire continu

La représentation d'état d'un systéme linéaire continu est de la forme,

$$\begin{cases} \frac{dx(t_1,t_2)}{dt_1} = A_1x(t_1,t_2) + B_1u(t_1,t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{dx(t_1,t_2)}{dt_2} = A_2x(t_1,t_2) + B_2u(t_1,t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \\ y(t_1,t_2) = Cx(t_1,t_2) + Du(t_1,t_2). \end{cases}$$

Où

$\frac{dx(t_1,t_2)}{dt_i} = \frac{\partial x(t_1,t_2)}{\partial t_i}, i = 1, 2$

$x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie

Et $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}, i = 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

2.2 Description d'un système linéaire continu-discret $(hyprid)$

Le système linéaire à deux dimensions discret-continu peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\begin{cases} \dot{x}(t,k) = Ax(t,k) + Bu(t,k), t \geq 0, k \in \mathbb{Z}_+, \\ y(t,k) = Cx(t,k) + Du(t,k), \end{cases}$$

Où $\dot{x}(t,k) = \frac{dx(t,k)}{dt}$

$x(t,k) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,k) \in \mathbb{R}^m$, $y(t,k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie

Et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

2.3 Description d'un système linéaire discret

Le système linéaire discret à deux dimensions définis par,

$$\begin{cases} x(k,i) = A_0x(k,i) + A_1x(k+1,i) + A_2x(k,i+1) + Bu(k,i), \; k,i \in \mathbb{Z}_{+,} \\ y(k,i) = Cx(k,i) + Du(k,i), \end{cases}$$

Où

$x(k,i) \in \mathbb{R}^n$, $u(k,i) \in \mathbb{R}^m$, $y(k,i) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie

Et $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, j = 0,1,2,$ $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

2.4 Description d'un système fractionnaire linéaire

Au début de cette section on définit : la fonction Gamma, la dériveé au sens de Caputo et la définition au sens de GRÜNWALD-LETNIKOV (G-L).

Dans la fin de cette section, on donne la représentation du système fractionnaire, on se basant sur les références suivantes [9],[10],[11] et [14].

2.4.1 La fonction Gamma

Définition 2.4.1 *La fonction Gamma* Γ *est la généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle, définie pour les nombres entiers positifs, elle est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1}e^{-y}dy, \; x > 0 \tag{2.4.1}$$

Propriétés :

A partir de l'éxpression (2.4.1) , on deduit que :

$$\Gamma(1) = 1$$

Ainsi que :

$$\Gamma(x+1) = x \times \Gamma(x), \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

Et pour $x \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(x+1) = x!$$

La fonction Gamma permet également de définir la fonction causale $\Phi_x(t)$ comme suit :

$$\Phi_x(t) = \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}, x \in \mathbb{R}_+^*$$

Cette fonction est utilisée pour donner un sens alternatif aux deux concepts : dérivation/intégration fractionnaire.

2.4.2 Formule de GRÜNWALD-LETNIKOV

Genéralisation de la définition usuelle de la dérivation : formule de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler.
Une définition élémentaire de la dérivée en x d'une fonction peut être formalisée de la façon suivante.

Pour f fonction de la variable réelle x et h appartenant à $\mathbb{R}$, on a la définition classique :

$$Df(x) = \frac{\delta f}{\delta x}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

et on en déduit la dérivée seconde

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

nous avons plus généralement la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de la fonction $f(x)$ est défini par la série :

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x-mh)}{h^n},$$

où la notation $\binom{n}{m}$ représente le binôme de Newton.

Posant $x = kh$

La dérivée généralisée d'ordre α est donnée comme suit :

$$D^{\alpha} f(kh) = f^{(\alpha)}(kh) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f\left((k-i)h\right)}{h^{\alpha}} \tag{2.4.2}$$

Dans le cas ou $f(x)$ est causale, en posant $x = kh$, cette condition se traduit par $f(kh - jh) = 0$ pour $kh - jh < 0$ c'est à dire pour $j > k$, donc l'intervalle de la somme de l'équation (2.4.2) sera réduit de $[0, \infty[$à $[0, k[$, on obtient la dérivée d'ordre non entier de la

fonction $f(x)$ $(avec\ x = kh)$à l'ordre α selon la définition **GRÜNWALD-LETNIKOV**

$$D^{\alpha} f(kh) = f^{(\alpha)}(kh) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f\left((k-i)h\right)}{h^{\alpha}}$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, h \in \mathbb{R}_+^*$ est le pas d'échantillonnage,$k \in \mathbb{N}$

et $\binom{\alpha}{i}$ sont des coefficients binomiaux que nous définirons dans la section 1.4

Définition 2.4.2 *de GRÜNWALD-LETNIKOV (G-L)*

La dérivée d'ordre fractionnaire de d'ordre $\alpha > 0, T > 0$, et pour $t = kT$,$k \in \mathbb{Z}$ de G-L est donnée par :

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = D^{\alpha}x(kt) = \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} x((k+1-p)T), T > 0, et\ pour\ t = kT, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.4.3}$$

Cette définition de Grünwald-Letnikov sera utilisée tout au long du mémoire pour la disritisation du système continu (voir section 3.2).

Remarque 2.4.1 *On d'apres l'équation (2.4.3)*

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = D^{\alpha}x(kt) = \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} x((k+1-p)T)$$

d'où

$$D^{\alpha}x(kt) = \frac{1}{T^{\alpha}} \left[x((k+1)T) - \alpha x(kT) + \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} x((k+1-p)T) \right]$$

donc

$$x((k+1)T) = T^{\alpha} D^{\alpha} x(kt) + \alpha x(kT) - \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} x((k+1-p)T) \ .$$

2.4.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4.3 *Soient $0 < \alpha < 1$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C', la dérivée d'ordre α au sens de Caputo de f et donnée par :*

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) = \overset{1-\alpha}{J} f'(x)$$

Remarque 2.4.2

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

Remarque 2.4.3 *La modèle d'état d'un système d'ordre fractionnaire est défini comme dans le cas entier par deux équations :*

★ *Une équation d'état : dans le cas des systèmes commensurables ; tous les états $x(t,k)$ sont dérivés à un même ordre non entier α.*

★ *Une équation de sortie : qui est une combinaison linéaire des états, comme le cas entier.*

Remarque 2.4.4 *Dans les système continu-discrets, la variable du temps continue et la variable discret interagissent et ces composantes ne peuvent pas être séparées, de tels systèmes sont appelés les systèmes hypride.*

Définition 2.4.4 *Le modèle hypride, écrit sous la forme compacte suivante :*

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha} x(t,k) &= \frac{d^{\alpha} x(t,k)}{dt^{\alpha}} = Ax(t,k) + Bu(t,k), \qquad 0 < \alpha \leq 1. \\ y(t,k) &= Cx(t,k) + Du(t,k), \qquad t \geq 0, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, ...\}, \end{aligned}$$

Où $x(t,k) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,k) \in \mathbb{R}^m$, $y(t,k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie Et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Chapitre 3

Formulation du problème

Le principal objectif de ce travail est de maintenir les conditions de positivité pour le modéle discrétisé obtenu par discrétisation à partir d'un système linéaire fractionnaire positif de type continu-discret qui été introduit par **Kaczorek** [1]. Notons qu'un cas particulier de ce modèle a été traité par **Ghezzar, Bouagada** dans [12], et nous nous attaquons dans ce mémoire au modèle générales.

3.1 Le modèle

Le système linéaire fractionnaire de type continu-discret est défini par :

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha}x(t,i+1)}{dt^{\alpha}} &= A_0x(t,i)+A_1\frac{d^{\alpha}x(t,i)}{dt^{\alpha}}+A_2x(t,i+1)+Bu(t,i), 0<\alpha\leq 1 \quad (3.1.1)\\ y(t,i) &= Cx(t,i)+Du(t,i), t\in\mathbb{R}, i\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,...\}, \quad (3.1.2)\end{aligned}$$

Où $x(t,i)\in\mathbb{R}^n$, $u(t,i)\in\mathbb{R}^m$, $y(t,i)\in\mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie
Et $A_k\in\mathbb{R}^{n\times n}, k=0,1,2$; $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$.
Les conditions aux limites pour le système (3.1.1) ont la forme suivante :

$$x(t,0)\in\mathbb{R}^n, \forall t\in\mathbb{R};\ x(0,i)\in\mathbb{R}^n, \forall i\in\mathbb{Z}_+ \quad (3.1.3)$$

La solution et les conditions de positivité du modèle (3.1.1) ont aussi été données dans [1].

3.2 Le modèle discret

Théorème 3.2.1 *Soit le système* (3.1.1) *et soit* $T > 0$ *un pas de discrétisation. Le modèle discret associé au modèle* (3.1.1) *est donné par la relation :*

$$\begin{aligned}
x((k+1)T, i+1) &= (A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)x(kT,i) + (A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)x(kT,i+1) \\
&+ \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} [A_1x((k+1-p)T,i) - x((k+1-p)T,i+1)] \\
&+ A_1x((k+1)T,i) + BT^{\alpha}u(kT,i). \\
y(kT,i) &= Cx(kT,i) + Du(kT,i).
\end{aligned}$$

Preuve. : Soit $T > 0$, considérons le système (3.1.1) pour $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}_+$, et la relation (2.4.3) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}x(kT,i+1) &= \frac{d^{\alpha}x(kT,i+1)}{dt^{\alpha}} \\
&= A_0x(kT,i) + A_1\frac{d^{\alpha}x(kT,i)}{dt^{\alpha}} + A_2x(kT,i+1) + Bu(kT,i)
\end{aligned}$$

En remplaçant la relation (2.4.3) dans (3.1.1), pour les deux dérivations fractionnaires ; nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
& T^{-\alpha}\left[x((k+1)T,i+1) - \alpha x(kT,i+1) + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}x((k+1-p)T,i+1)\right] \\
= \; & A_0x(kT,i) + A_1T^{-\alpha}\left[x((k+1)T,i) - \alpha x(kT,i)\right. \\
& \left. + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}x((k+1-p)T,i)\right] + A_2x(kT,i+1) + Bu(kT,i)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3.2.1) par T^{α}et en faisant sortir $x((k+1)T, i+1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
x((k+1)T, i+1) &= (A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)x(kT,i) + (A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)x(kT,i+1) \\
&+ \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} [A_1x((k+1-p)T,i) - x((k+1-p)T,i+1)] \\
&+ A_1x((k+1)T,i) + BT^{\alpha}u(kT,i).
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
x((k+1)T,i+1) &= (A_0T^\alpha - \alpha A_1)x(kT,i) + (A_2T^\alpha + \alpha I_n)x(kT,i+1) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} \left[A_1x((k+1-p)T,i) - x((k+1-p)T,i+1)\right] \\
&\quad + A_1x((k+1)T,i) + BT^\alpha u(kT,i). \\
y(kT,i) &= Cx(kT,i) + Du(kT,i).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 3.2.1 *Par convention, on pose :* $x(kT,i) = x(k,i)$, $y(kT,i) = y(k,i)$, $u(kT,i) = u(k,i)$ *pour tout* $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

Définition 3.2.1 *Le modèle discret obtenue aprés discrétisation du modèle* (3.1.1) *prends la forme suivante :*

$$
\begin{aligned}
x((k+1),i+1) &= (A_0T^\alpha - \alpha A_1)x(k,i) + (A_2T^\alpha + \alpha I_n)x(k,i+1) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} \left[A_1x((k+1-p),i) - x((k+1-p),i+1)\right] \\
&\quad + A_1x((k+1),i) + BT^\alpha u(k,i). \qquad (3.2.2) \\
y(k,i) &= Cx(k,i) + Du(k,i).
\end{aligned}
$$

Avec les conditions intiales suivantes :

$$x(k,0) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+; x(0,i) \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{Z}_+ \qquad (3.2.3)$$

3.3 Solution du problème

Dans les travaux de **Kaczorek**([1]) les condition de positivité ont été établis pour le système hypride(3.1.1). Dans les travaux **Ghezzar-Bouagada**([12]) une étude sur l'influence de la valeur de chantillenage sur la positivité a été faite pour un système particulier de système. Pour notre cas, nous proposons une étude sur le cas général, pour cela nous avons besions de solution de système discret et extraire ses conditions de positivité.

Pour la résolution, nous utilisons les propriété la transformée $Z(2D)$ et des notions algèbriques matricielles, théorem de l'inverce et de covolution, nous avons pu déduire les solution du problème (3.2.2), avec des conditions initials (3.2.3).

Théorème 3.3.1 *Les solutions du système* (3.2.2) *avec les conditions initiales* (3.2.3) *sont données par la relation :*

$$\begin{aligned} x(k,i) &= \sum_{e=1}^{k}\left[T_{k-e-1,i-1}\left(A_0T^{\alpha}-\ A_1\alpha\right)+T_{k-e,i-1}A_1+\sum_{p=2}^{k-e}(-1)^p\tbinom{\alpha}{k-e-p}T_{p,i-1}A_1\right]x(e,0) \\ &+\left[T_{k-1,i-1}\left(A_0T^{\alpha}-\ A_1\alpha\right)-\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{k-p}T_{k-p,i}+T_{k-1,i}\ \ (A_2T^{\alpha}\ +\ \alpha I_n)+T_{k,i-1}A_1\right. \\ &\left.+\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{k-p}A_1T_{k-p,i-1}\right]x(0,0)+\sum_{f=1}^{i}\left[T_{k-1,i-f}(A_2T^{\alpha}+\alpha I_n)\right. \qquad (b) \\ &\left.-\sum_{p=2}^{k-1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{k-p}T_{p,i-f}\right]x(0,f)+\sum_{e=0}^{k}\sum_{f=0}^{i}T_{k-e-1,i-f-1}BT^{\alpha}u(e,f). \qquad (3.3.1) \end{aligned}$$

Où les matrices de transition sont définies :

$$T_{ef=}\begin{cases} I_n & si \quad e=f=0 \\ T_{e-1,f-1}\left(A_0T^{\alpha}-\ A_1\alpha\right)+T_{e-1,f}\left(A_2T^{\alpha}\ +\ \alpha I_n\right) & \\ \quad +T_{e,f-1}A_1-\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{p}T_{e-p,\ f}+\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{p}A_1T_{e-p,,f-1} & si \quad e+f>0 \\ 0_n & si \qquad e<0 \ \ et, ou f<0 \end{cases} \qquad (c)$$

Preuve :

Consédirons le système (3.2.2)

$$\begin{aligned} x((k+1),i+1) &= (A_0T^{\alpha}-\alpha A_1)x(k,i)+(A_2T^{\alpha}+\alpha I_n)x(k,i+1) \\ &+\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\tbinom{\alpha}{p}\left[A_1x((k+1-p),i)-x((k+1-p),i+1)\right] \\ &+A_1x((k+1),i)+BT^{\alpha}u(k,i). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée en $Z \ \ 2D$

$$
\begin{aligned}
&Z_1Z_2\left(x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)-x(0,Z_2)+x_{00}\right)=(A_0T^\alpha-\alpha A_1)x(Z_1,Z_2)\\
&+Z_2(A_2T^\alpha+\alpha I_n)\left[x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)\right]\\
&+A_1Z_1\left[x(Z_1,Z_2)-x(0,Z_2)\right]+BT^\alpha u(Z_1,Z_2)\\
&+\sum_{p=2}^{k+1}A_1\ (-1)^p\binom{\alpha}{p}Z_1^{-p+1}\left[x(Z_1,Z_2)-x(0,Z_2)\right]\\
&-\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}Z_1^{-p+1}Z_2\left[x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)\right].
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

Par multiplication les deux membres de la relation (3.3.2) par $Z_1^{-1}Z_2^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
&x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)-x(0,Z_2)+x_{00}=(A_0T^\alpha-\alpha A_1)Z_1^{-1}Z_2^{-1}x(Z_1,Z_2)\\
&+Z_1^{-1}(A_2T^\alpha+\alpha I_n)\left[x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)\right]\\
&+A_1Z_2^{-1}\left[x(Z_1,Z_2)-x(0,Z_2)\right]+BT^\alpha Z_1^{-1}Z_2^{-1}u(Z_1,Z_2)\\
&-\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}Z_1^{-p}\left[x(Z_1,Z_2)-x(Z_1,0)\right]+\\
&\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}A_1Z_1^{-p}Z_2^{-1}\left[x(Z_1,Z_2)-x(0,Z_2)\right].
\end{aligned}
$$

En suite,

$$
\begin{aligned}
&x(Z_1,Z_2)\Bigl[I_n-(A_0T^\alpha-\alpha A_1)Z_1^{-1}Z_2^{-1}-\ Z_1^{-1}(A_2T^\alpha+\alpha I_n)\ -\ A_1Z_2^{-1}\\
&+\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}Z_1^{-p}\ I_n-\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}A_1Z_1^{-p}Z_2^{-1}\Bigr]=-x_{00}+BT^\alpha Z_1^{-1}Z_2^{-1}u(Z_1,Z_2)\\
&x(Z_1,0)\left[I_n\ -\ Z_1^{-1}(A_2T^\alpha+\alpha I_n)+\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}Z_1^{-p}I_n\right]\\
&+x(0,Z_2)\left[I_n\ -\ A_1Z_2^{-1}-\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p}A_1Z_1^{-p}Z_2^{-1}\right].
\end{aligned}
$$

En pose

$$H = \Big[I_n - (A_0T^\alpha - \alpha A_1)Z_1^{-1}Z_2^{-1} - Z_1^{-1}(A_2T^\alpha + \alpha I_n) - A_1Z_2^{-1} + \textstyle\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p}I_n$$
$$- \textstyle\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} A_1Z_1^{-p}Z_2^{-1}\Big].$$

D'où

$$H = \Big[I_n - (A_0T^\alpha - \alpha A_1)Z_1^{-1}Z_2^{-1} - Z_1^{-1}(A_2T^\alpha + \alpha I_n) - A_1Z_2^{-1} + \textstyle\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p}\left(I_n - Z_2^{-1}A_1\right)\Big].$$

La matrice H est inversible i.e., le déterminant de la matrice H peut s'écrire sous la forme

$$\det(H) = \sum_{p=0}^{2k+2}\sum_{q=0}^{2k+2} a_{pq}Z_1^{-p}Z_2^{-q} \neq 0$$

On suppose que $\det(H) \neq 0$, pour certain $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,ou $a_{pq} \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\begin{aligned} x(Z_1,Z_2) \;&=\; H^{-1}\Bigg(x(Z_1,0)\left[I_n \;-\; Z_1^{-1}(A_2T^\alpha + \alpha I_n) + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p}I_n\right] \\ &-x_{00} + BT^\alpha Z_1^{-1}Z_2^{-1}u(Z_1,Z_2) \\ &+x(0,Z_2)\left[I_n \;-\; A_1Z_2^{-1} - \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} A_1Z_1^{-p}Z_2^{-1}\right]\Bigg) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Posant

$$H^{-1} = \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef}Z_1^{-e}Z_2^{-f}. \tag{3.3.4}$$

Alors le calculs de la transformée en Z de la solution repose sur le calcul de H^{-1} et par conséquent par le calcul des matrices de transition T_{ef} .

Par la définition de l'inverse d'une matrice nous avons :

$$H^{-1}.H = H.H^{-1} = I_n$$

Donc

$$\Big[\textstyle\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef}Z_1^{-e}Z_2^{-f}\Big]\Big[I_n + \textstyle\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p}(I_n - Z_2^{-1}A_1) - (A_0T^\alpha - \alpha A_1)Z_1^{-1}Z_2^{-1}$$
$$-Z_1^{-1}(A_2T^\alpha + \alpha I_n) - A_1Z_2^{-1}\Big] = I_n$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f} - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f-1} (A_0 T^{\alpha} - \alpha A_1)\\
&- \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f} (A_2 T^{\alpha} + \alpha I_n) - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f-1} A_1 +\\
&\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{ef} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f} - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{ef} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f-1} A_1\\
= \; & I_n
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} \Big(T_{ef} - T_{e-1,f-1} A_0 T^{\alpha} + \alpha T_{e-1,f-1} A_1 - T_{e-1,f} A_2 T^{\alpha}\\
&- \alpha T_{e-1,f} - T_{e,f-1} A_1 + \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{e-p,\,f} - \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{e-p,\,f_{-1}} A_1 \Big)\\
= \; & I_n
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} \Big(T_{ef} - T_{e-1,f-1} (A_0 T^{\alpha} - A_1 \alpha) - T_{e-1,f} (A_2 T^{\alpha} + \alpha I_n)\\
&- T_{e,f-1} A_1 + \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{e-p,\,f} - \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{e-p,\,f_{-1}} A_1 \Big)\\
= \; & I_n
\end{aligned}$$

Par identification et en comparant les coefficients de la même puissance de Z_1 et Z_2, nous obtenons

$$T_{ef} = \begin{cases} I_n & \text{si} \quad e = f = 0 \\ \begin{array}{l} T_{e-1,f-1} (A_0 T^{\alpha} - A_1 \alpha) + T_{e-1,f} (A_2 T^{\alpha} + \alpha I_n) + T_{e,f-1} A_1 \\ \quad - \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} T_{e-p,\,f} + \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} A_1 T_{e-p,,f-1} \end{array} & \text{si } e + f > 0 \\ 0_n & \text{si} \quad e < 0 \ \text{ et,ou } f < 0 \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer les deux égalités matricielles, $T_{10} = (A_2 T^{\alpha} \ + \ \alpha I_n)\,, T_{01} = A_1$.

Nous obtenons par conséquent une relation récurrente pour le calcul des matrices de transitions T_{ef} du cas 2D discret défini par le système.

En remplacant (3.3.4) dans (3.3.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} x(Z_1,Z_2) \ &= \ \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f} \left(x(Z_1,0)\left[I_n \ - \ Z_1^{-1}(A_2T^{\alpha}+\alpha I_n) + \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p} I_n \right] \right. \\ &\left. +x(0,Z_2)\left[I_n \ - \ A_1 Z_2^{-1} - \sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \binom{\alpha}{p} A_1 Z_1^{-p} Z_2^{-1}\right] - x_{00} + BT^{\alpha} Z_1^{-1} Z_2^{-1} u(Z_1,Z_2) \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x(Z_1,Z_2) \ &= \ \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f}\left[x(Z_1,0) + x(0,Z_2) - x_{00}\right] - \\ &\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f}(A_2T^{\alpha}+\alpha I_n) x(Z_1,0) + \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1} T_{ef}(-1)^p\binom{\alpha}{p} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f} x(Z_1,0) \\ &-\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f-1} A_1 x(0,Z_2) - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p\binom{\alpha}{p} A_1 T_{ef} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f-1} x(0,Z_2) \\ &+\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f-1} BT^{\alpha} u(Z_1,Z_2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x(Z_1,Z_2) \ &= \ \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f}\left[x(Z_1,0) + x(0,Z_2) - x_{00}\right] - \\ &\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f}(A_2T^{\alpha}+\alpha I_n) x(Z_1,0) + \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1} T_{ef}(-1)^p\binom{\alpha}{p} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f} x(Z_1,0) \\ &-\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{k+1} T_{ef}(-1)^p\binom{\alpha}{p} Z_1^{-e-p} Z_2^{-f-1} A_1 x(0,Z_2) - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f-1} A_1 x(0,Z_2) \\ &+\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f-1} BT^{\alpha} u(Z_1,Z_2). \end{aligned}$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
x(Z_1, Z_2) \;\; = \;\; & \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f} \left[I_n - Z_1^{-1}(A_2 T^{\alpha} + \alpha I_n) + \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p} I_n \right] x(Z_1, 0) \\
& + \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f} \left[I_n - Z_2^{-1} A_1 - \sum_{p=2}^{k+1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} Z_1^{-p} Z_2^{-1} A_1 \right] x(0, Z_2) \\
& - \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e} Z_2^{-f} x_{00} + \sum_{e=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} Z_1^{-e-1} Z_2^{-f-1} B T^{\alpha} u(Z_1, Z_2).
\end{aligned}
$$

En utilisant la transformée inverse et la définition de la transformée inverse de la convolution, nous obtenons la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
x(k, i) \;\; = \;\; & \sum_{e=1}^{k} \left[T_{k-e-1,i-1} \left(A_0 T^{\alpha} - \; A_1 \alpha \right) + T_{k-e,i-1} A_1 + \sum_{p=2}^{k-e} (-1)^p \binom{\alpha}{k-e-p} T_{p,i-1} A_1 \right] x(e, 0) \\
& + \left[T_{k-1,i-1} \left(A_0 T^{\alpha} - \; A_1 \alpha \right) - \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \binom{\alpha}{k-p} T_{k-p,i} + T_{k-1,i} \; \left(A_2 T^{\alpha} \; + \; \alpha I_n \right) \right. \\
& \left. + T_{k,i-1} A_1 \; + \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \binom{\alpha}{k-p} A_1 T_{k-p,i-1} \right] x(0, 0) \\
& \sum_{f=1}^{i} \left[T_{k-1,i-f-1} \; \left(A_0 T^{\alpha} - \; A_1 \alpha \right) + T_{k-1,i-f} (A_2 T^{\alpha} + \alpha I_n) - \sum_{p=2}^{k-1} (-1)^p \binom{\alpha}{k-p} T_{p,i-f} \right] x(0, f) \\
& + \sum_{e=0}^{k}\sum_{f=0}^{i} T_{k-e-1,i-f-1} B T^{\alpha} u(e, f).
\end{aligned}
$$

Chapitre 4

La positivité

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la notion de positivité concernant le système (3.2.2). Nous considèrons dans ce qui suit, que la suite $x(.,i)$ est croissante par rapport à deuxieme variable .

Définition 4.0.1 *Un système est dit positif si pour toute entrée positive et condition intiale positive correspond un état positif et une sortie positive (i.e)*

$$\forall x(k,0) \in \mathbb{R}_+^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall x(0,i) \in \mathbb{R}_+^n, \forall i \in \mathbb{Z}_+, \forall u(k,i) \in \mathbb{R}_+^m \ \ alors \ \ x(k,i) \in \mathbb{R}_+^n \ \ et \ \ y(k,i) \in \mathbb{R}_+^p. \tag{4.0.1}$$

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ (frontières incluses) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Théorème 4.0.2 *Le système fractionnaire linéaire* (3.2.2) *est positif si et seulement si :*

$$(A_0T^\alpha - \alpha A_1) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, (A_2T^\alpha + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n} B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}.$$

Preuve

1/ *Condition suffisante :*

Supposons que

$$(A_0T^\alpha - \alpha A_1) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, (A_2T^\alpha + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n} B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}.$$

D'après les relations : a, c, b

Si

$$(A_0T^\alpha - \alpha A_1) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, (A_2T^\alpha + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n} et B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, u(k,i) \in \mathbb{R}_+^p$$

alors les matrices de transition $T_{ef} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ du faite de la relation de récurrence et la positivité du terme $-C_\alpha(p)$.

Alors

$$x(k,i) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Et nous avons

$$x(k,i) \in \mathbb{R}_+^n, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}, u(k,i) \in \mathbb{R}_+^p$$

alors d'après le relation (3.1.2) nous aurons $y(k,i) \in \mathbb{R}_+^n$ donc le système (3.2.2) est positif.

2/ *Condition nécessaire :*

Supposons que le système (3.1.1) est positif et démontrons la positivité des matrices

$$(A_0T^\alpha - \alpha A_1) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, (A_2T^\alpha + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}.$$

Supposons que

$$x(0,0) = e_{ni}, \forall i = 1, ...n,$$

Où e_{ni} étant la $i^{éme}$ colonne de la matrice identité I_n, (i.e) $e_{ni} = (0, ..., 1, 0, 0)^T$.

Supposons aussi que

$$x(0,1) = 0,\ x(1,0) = 0 \quad et \quad u(0,0) = 0.$$

Par la relation (3.2.2)

$$x(1,1) = (A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)\, x(0,0) = (A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)\, e_{ni} = (A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)_i$$

Où $(A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)_i$ étant la $i^{éme}$ colonne de la matrice $(A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)$.

Donc

$$(A_0T^{\alpha} - \alpha A_1)_i \in \mathbb{R}_+^n$$

Car

$$x(k,i) \in \mathbb{R}_+^n, \forall k, i.$$

En balayant toutes les colonnes nous déduisons que $(A_0T^{\alpha} - \alpha A_1) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

De la même manière nous supposons que

$$x(0,1) = e_{ni}, \forall i = 0, ..., n$$

Et que

$$x(0,0) = 0,\ x(1,0) = 0 \ \ et \ \ u(0,0) = 0.$$

En remplaçant dans la relation (3.2.2), nous aurons

$$x(1,1) = (A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)x(0,1) = (A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)e_{ni} = (A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)_i$$

Où $(A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)_i$ étant la $i^{éme}$ colonne de la matrice $(A_2T^{\alpha} + \alpha I_n)$.

Donc

$$(A_2T^{\alpha} + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Supposons maintenant que

$$x(1,0) = e_{ni}, \forall i = 0, ..., n$$

Et que

$$x(0,0) = 0,\ x(0,1) = 0 \ \ et \ \ u(0,0) = 0.$$

De la relation (3.2.2) nous obtenons

$$x(1,1) = A_1x(0,0) = A_1e_{ni} = A_{1i}$$

Où A_{1i} étant la $i^{éme}$ colonne de la matrice $A_{1.}$

Puisque $x(1,1)$ est positif alors touts les colonnes de la matrice A_1 le sont ; alors $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.
Maintenant on suppose que

$$x(0,0) = 0, \ x(0,1) = 0 \ \ et \ \ x(1,0) = 0.$$

Et que

$$u(0,0) = e_{ni}, \forall i = 0, ..., n$$

En remplaçant dans la relation (3.2.2) nous trouvons

$$x(1,1) = BT^{\alpha}u(0,0) = BT^{\alpha}e_{ni} = (BT^{\alpha})_i$$

Nous déduisons que $BT^{\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.
En suivant le même raisonnement nous pouvons démontrer la positivité des matrices C et D.

4.1 Influence de la valeur du pas de discrétisation sur la Positivité de modèles linéaires fractionnaires à temps discret-continu

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier l'influence du pas de discrétisation sur un nouvelle classe de systèmes fractionnaires linéaires positifs 2D continu-discret introduite dans [1]. Nous intéresse a trouvées quelles conditions le modèle général linéaire discret à deux dimensions (3.2.2) obtenu par discrétisation à partir de (3.1.1) pourra t-il aussi être positif ?

Théorème 4.1.1 *: [1]*
Le système (3.1.1) *est positif si et seulement si*
i) $A_0, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A = A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.
ii) A_2 *est une matrice de Metzler.*

Théorème 4.1.2 *Le modèle général discret* (3.2.2) *est positif ssi le modèle à temps discret continu* (3.1.1) *est positif et de plus les conditions suivantes sont satisfaites :*
◀ 1 $\sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} \leq T \leq \sqrt[\alpha]{\max\left(\frac{\alpha}{\left|a_{ii}^{(2)}\right|}\right)}$ *avec* $i, j = 1, 2...n$ *où* $a_{ij}^{(0)} \neq 0$ *et* $a_{ii}^{(2)} \neq 0$ *si* A_2 *est une matrice de Metzler non positive.*

◀ 2 $T \geq \left(\sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)}\right)$ *avec* $i, j = 1, 2...n$ *où* $a_{ij}^{(0)} \neq 0$, *si* A_2 *est une matrice de Metzler positive.*

Preuve :

Le but de notre travail est d'étudier l'influence du pas de discrétisation T sur la positivité du système (3.2.2). Les conditions du théorème (3.5.1) étant vérifiées ; Nous allons voir sous quelle conditions le modèle discrétisé (3.2.2) restera positif.

Par le théorème (3.5.2) le système (3.2.2) est positif si et seulement si

$$(A_0T^\alpha - \alpha A_1) \geq 0, (A_2T^\alpha + \alpha I_n) \geq 0, A_1 \geq 0, BT^\alpha \geq 0.$$

Or $T > 0$ et $0 < \alpha < 1$ et $A_0 \geq 0$,$B \geq 0$ donc A_0T^α, BT^α sont des matrices positives.

- Condition nécessaire :

Nous constatons deux cas possibles :

★ Le premier cas

$C1$: A_2 est une matrice de Metzler positive : Dans ce cas $(A_2T^\alpha + \alpha I_n) \geq 0$

$C2$: Pourque le système soit positif il faut que : $A_0T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0$

Pour que

$$A_0T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0$$

Il faut que

$$A_0T^\alpha \geq \alpha A_1$$

Par suite

$$a_{ij}^{(0)}T^\alpha \geq \alpha a_{ij}^{(1)}, \forall i, j$$

Alors

$$T^\alpha \geq \alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}, \forall i, j = 1, 2...n \text{ } avec \text{ } a_{ij}^{(0)} \neq 0.$$

d'où

$$T \geq \sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)}, \forall i, j = 1, 2...n \ avec \ a_{ij}^{(0)} \neq 0$$

$C3$: On suppose que la suite $x(k,i)$ est croissante par rapport à la deuxieme variable (i).

D'aprés $C1$,$C2, C3$, alors le systéme (3.2.2) est positif pour

$$T \geq \max \sqrt[\alpha]{\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} avec \ i, j = 1, 2...n \ où \ a_{ij}^{(0)} \neq 0.$$

★★ Le second cas

$C4$: A_2 est une matrice de Metzler avec au moins un élément diagonal négatif : Dans ce cas la matrice $(A_2T^\alpha + \alpha I_n)$ n'est pas obligatoirement positive.

Pour que

$$(A_2T^\alpha + \alpha I_n) \geq 0$$

Il faut que

$$A_2 \geq -\frac{\alpha}{T^\alpha} I_n$$

Sachant que les éléments hors diagonaux de la matrice A_2 sont tous positifs,

et que ceux de la matrice $-\frac{\alpha}{T^\alpha}I_n$ sont tous nuls. La comparaison entre les deux matrices se base alors sur les éléments diagonaux strictement négatifs de la matrice A_2 .

Si $a_{ii}^{(2)}$ est un élément diagonal positif il doit obligatoirement satisfaire

$$a_{ii}^{(2)} \geq 0 > -\frac{\alpha}{T^\alpha}, i = 1, 2...n.$$

si $\exists i \in \{, 2, ...n\} : a_{ii}^{(2)} < 0$; dans ce cas il faut que :

$$a_{ii}^{(2)} \geq -\frac{\alpha}{T^\alpha}$$

Danc

$$T^\alpha \leq \frac{\alpha}{a_{ii}^{(2)}}, car \ a_{ii}^{(2)} < 0$$

Par conséquent

$$0 < T^\alpha \leq \frac{\alpha}{\max_i \left|a_{ii}^{(2)}\right|}$$

D'aprés $C4, C2, C3$, alors le systéme (3.2.2) est positif pour

$$\sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} \leq T \leq \sqrt[\alpha]{\max\left(\frac{\alpha}{a_{ii}^{(2)}}\right)}$$

avec $i, j = 1, 2...n$ où $a_{ij}^{(0)} \neq 0$ et $a_{ii}^{(2)} \neq 0$.

- Condition suffisante :

1. D'aprés la remarque (4.0.1) ,la suite $x(k, i)$ est croissante par rapport à la deuxieme variable (i).

supposant que, la matrice A_2 de metzler positive et que $T \geq \sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)}, \forall i, j = 1, 2...n$ *avec* $a_{ij}^{(0)} \neq 0$, et on montrons que la matrice $A_0T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0$

on a

$$T \geq \sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)}, \forall i, j = 1, 2...n \ avec \ a_{ij}^{(0)} \neq 0$$

Alors,

$$T^\alpha \geq \alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}, \forall i, j = 1, 2...n \ avec \ a_{ij}^{(0)} \neq 0.$$

Par suite,

$$a_{ij}^{(0)}T^\alpha \geq \alpha a_{ij}^{(1)}, \forall i, j$$

Donc,

$$A_0T^\alpha \geq \alpha A_1$$

d'où

$$A_0T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0.$$

2. D'aprés la remarque (4.0.1) ,la suite $x(k, i)$ est croissante par rapport à la deuxieme variable (i).

supposant que, la matrice A_2 de metzler non positive et que $\sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} \leq T \leq \sqrt[\alpha]{\max\left(\frac{\alpha}{\left|a_{ii}^{(2)}\right|}\right)}$ avec $i, j = 1, 2...n$ où $a_{ij}^{(0)} \neq 0$ et $a_{ii}^{(2)} \neq 0$, et on montrons que la matrice $A_0T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0$ et $(A_2T^\alpha + \alpha I_n) \geq 0$.

On a

$$T \geq \sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)}, \forall i, j = 1, 2...n \ avec \ a_{ij}^{(0)} \neq 0$$

Alors,

$$T^\alpha \geq \alpha \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}, \forall i, j = 1, 2...n \ avec \ a_{ij}^{(0)} \neq 0.$$

Par suite,

$$a_{ij}^{(0)} T^\alpha \geq \alpha a_{ij}^{(1)}, \forall i, j$$

Donc,

$$A_0 T^\alpha \geq \alpha A_1$$

d'où

$$A_0 T^\alpha - \alpha A_1 \geq 0.$$

Et nous avons, $a_{ii}^{(2)}$ l'élément diagonal négatif de la matrice doit vérifier

$$0 \leq T \leq \sqrt[\alpha]{\max\left(\frac{\alpha}{a_{ii}^{(2)}}\right)}$$

Donc,

$$0 < T^\alpha \leq \frac{\alpha}{\max_i \left|a_{ii}^{(2)}\right|}$$

$$a_{ii}^{(2)} \geq 0 > -\frac{\alpha}{T^\alpha}, i = 1, 2...n.$$

Alors,

$$T^\alpha \leq \frac{\alpha}{a_{ii}^{(2)}},$$

Par suite,

$$T^\alpha a_{ii}^{(2)} \geq -\alpha, \text{ car } a_{ii}^{(2)} \leq 0,$$

Par conséquent

$$(A_2 T^\alpha + \alpha I_n) \geq 0.$$

Chapitre 5

Application

5.1 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques qui illustrent les résultats théoriques dérivés de la section précédente

Exemple 5.1.1 *Considérez le système* (3.1.1) *et* (3.2.2) *pour* $\alpha = 0.5$ *avec les matrices*

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.25} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } D = 0. \end{aligned}$$

L'entrée $u(t,i) = 1$ *pour* $t \geq 0$ *et* $i \in \mathbb{Z}_+$ *avec les conditions aux limites* $x(t,0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ *pour* $t \geq 0$ *et* $x(0,i) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ *pour* $i \in \mathbb{Z}_+$.

Du théorème (4.1.4), *puisque la matrice* A_2 *est une matrice de metzler non positive , puis pour préserver la positivité après la discrétisation. Nous choisirons un pas de discrétisation* T *vérifiant la relation* (◀ 1), *qui conduit à*

$$\sqrt[0.5]{\max\left(0.5\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} \leq T \leq \sqrt[0.5]{\max\left(\frac{0.5}{\left|a_{ii}^{(2)}\right|}\right)}$$

avec $i, j = 1, 2$ *où* $a_{ij}^{(0)} \neq 0$ *et* $a_{ii}^{(2)} \neq 0$.

Alors $0 \leq T \leq 0.25$.

La matrice BT^{α} *est positive.*

Par suite, la matrice $A_0T^{\alpha} - \alpha A_1$ *est definis comme suit,*

$$A_0T^{\alpha} - \alpha A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^{0.5}}{0.25} \end{bmatrix}, \textit{est positive } \forall T \in [0, 0.25].$$

Et la matrice $(A_2T^{\alpha} + \alpha I_2)$ *est définis par :*

$$A_2T^{\alpha} + \alpha I_2 = \begin{bmatrix} -2T^{\alpha} + 0.5 & 0 \\ T^{\alpha} & -2T^{\alpha} + 0.5 \end{bmatrix}.$$

soit $h > 0$.

1. *Pour* $T = T_1 = 0.25 + h > 0$, *l'entrie* T_1^{α} *est positive par contre* $-2T_1^{\alpha} + 0.5$ *est négative, car :*

quand $h > 0$, *nous avons* $-(h + 0.25)^{0.5} < -\frac{0.5}{2} < -0.25$ *donc* $-2T_1^{\alpha} + 0.5 < 0$.

Donc, le système fractionnaire linéaire 2D discret $(3.2.2)$, *trouver aprés la discrétisation est non positif pour* $T = 0.26$, *voir la figure* 2.

2. *Pour* $T = T_2 = 0.25 - h > 0$, *les entries* $T_2^{\alpha}, -2T_2^{\alpha} + 0.5$ *sont positives, car :*

quand $-h < 0$, *nous avons* $-(-h + 0.25)^{0.5} > -\frac{0.5}{2} > -0.25$ *donc* $-2T_1^{\alpha} + 0.5 > 0$.

Donc la maritce $(A_2T^{\alpha} + \alpha I_2) \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}$, *par suite le système* $(3.2.2)$ *est positif, pour* $T = 0.0625$ *voir la figure* 1.

Exemple 5.1.2 *Considérez le système* $(3.1.1)$ *et* $(3.2.2)$ *pour* $\alpha = 0.75$ *avec les matrices*

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \textit{ et } D = 0. \end{aligned}$$

L'entrée $u(t, i) = 1$ *pour* $t \geq 0$ *et* $i \in \mathbb{Z}_+$ *avec les conditions aux limites* $x(t, 0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ *pour* $t \geq 0$ *et* $x(0, i) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ *pour* $i \in \mathbb{Z}_+$.

Du théorème $(4.1.4)$, *puisque la matrice* A_2 *est une matrice de metzler positive , puis pour préserver la positivité après la discrétisation. Nous choisirons un pas de discrétisation* T *vérifiant la relation* $(\blacktriangleleft 2)$, *qui conduit à*

$$T \geq \left(\sqrt[\alpha]{\max\left(\alpha \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)}}\right)} \right) \textit{aveci}, j = 1, 2...n, \textit{ où } a_{ij}^{(0)} \neq 0.$$

Alors $T \geq 0.162$.

Les matrice $(A_2T^\alpha + \alpha I_2)$ *et* BT^α *sont positives pour tout* $T \geq 0.162$.

Par suite, la matrice $A_0T^\alpha - \alpha A_1$ *est definis comme suit,*

$$A_0T^\alpha - \alpha A_1 = \begin{bmatrix} T^{0.75} - 0.112 & 0 \\ 0 & T^{0.75} \end{bmatrix}.$$

soit $r > 0$.

1. *Pour* $T = T_1 = 0.162 + r > 0$, *les entries* $T_1^{0.75}$, $T_1^{0.75} - 0.225$ *sont positives, car :*
quand $r > 0$, *nous avons* $(0.162 + r)^{0.75} > 0.112$ *donc* $T_1^{0.75} - 0.225 > 0$.
Donc la maritce $A_0T^\alpha - \alpha A_1 \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}$, *par suite le système* $(3.2.2)$ *est positif pour* $T = 0.162$, *voir la figure* 3.
2. *Pour* $T = T_2 = 0.162 - r < 0$, *l'entrie* $T^{0.75} > 0$ *mais* $T^{0.75} - 0.112 < 0$, *car :*
quand $r < -0.162$, *nous avons* $(r + 0.162)^{0.75} < 0.112$ *donc* $T^{0.75} - 0.112 < 0$.

Donc, le système fractionnaire linéaire 2D discret $(3.2.2)$, *trouver aprés la discrétisation est non positif pour* $T = 0.02$ *voir la figure* 4.

Les figures suivantes représentent les résultat obtenus dans les examples $(4.1.1)$, $(4.1.2)$.

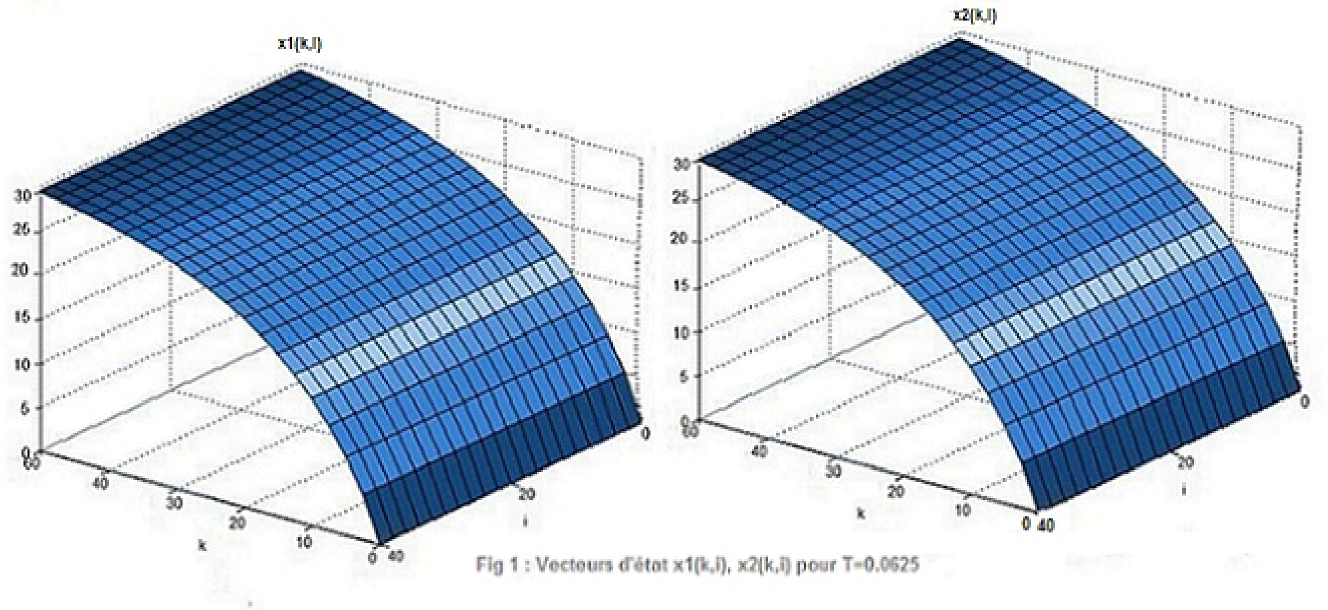

Fig 1 : Vecteurs d'état x1(k,i), x2(k,i) pour T=0.0625

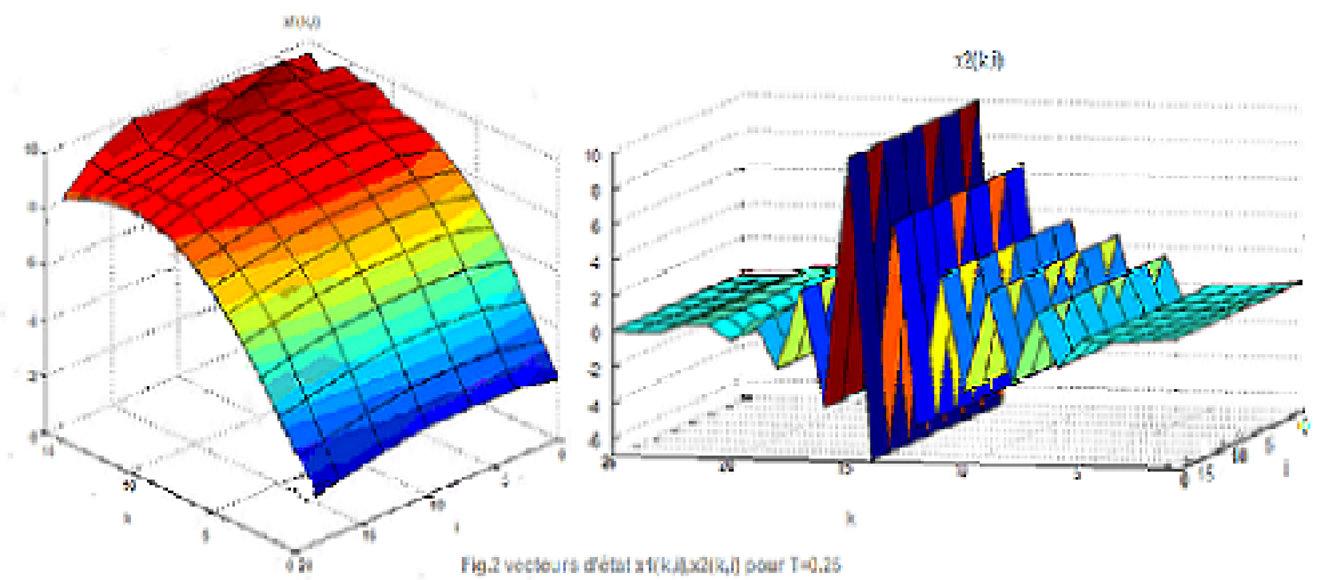

Fig.2 vecteurs d'état x1(k,i),x2(k,i) pour T=0.25

CONCLUSION

L'inflence du pas de discrétisation sur la positivité est l'objectif majeur de ce travail.
Ce travail est une généralisation de ce qu'a été fait par **Ghazzar.M.A** et **Bouagada.D** « Influence of discretization step on positivity of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems » [12].
Dans le travail de **Ghazzar** [12]**,** l'influence du pas de discretisation sur un modèle particulier du modèle générale à été prouvé.
En effet, nous remarquons que le modèle étudié dans [12] est un cas particulier du modèle (3.1.1) où la deuxième dérivation fractionnaire est absente et que le système est gérée par une seule dérivation fractionnaire $\frac{d^{\alpha}x(t,i+1)}{dt^{\alpha}}$.
Un question peut se poser naturallement lors des simulation des systèmes (3.1.1) . Pour un système (3.1.1) verifiant les conditions de positivité établies dans [1] ie. un système (3.1.1) positif, est ce que les systèmes (3.2.2) discretisée correspondant gardera sa proprieté de positivité ?
La réponse et que non, pourque le système (3.1.1) préserve sa positivité lors du passage à la discrétisation lors de la simulation numérique il faut que le pas d'échantillonage vérifie les conditions données au théorème (4.1.4).
La démarche suivie dans ce mémoire est la suivante :

Nous avons commencé d'abord par une étude générale sur la theorie des matrice et le calcul fractionnaire, on introduit les méthodes de calcules de la dérivée fractionnaire. Puis nous avons présenté une étude détaillée sur les différentes types du systèmes fractionnaires à deux dimension. Comme les techniques d'approximation sont très utilisées pour faciliter l'étude et l'analyse et la solvabilité des systèmes $2D$ fractionnaires. Dans le deuxièm temps, nous avons conçu à le modèle de **kazorek** [1].

Le resultats obtenus nous démontre explicitement que lors la simulation le choix de la valeur du pas T de la discrétisation est une procédure obligatoire et qu'elle doit vérifier des contraintes, et qu'un valeur aléatoiredu pas d'échatillonage donnerait une perte de la positivité du modèle discrétisée.

Bibliographie

[1] T. Kaczorek , "Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems", Bulletin of the Polish Academy of Sciences ; Tech. Sci. Vol 59, N4, 2011.

[2] T. Kaczorek, "Selected Problems of Fractional System Theory", Springer Verlag ; 2011.

[3] T. Kaczorek, "Asymptotic stability of positive 2D linear systems with delays" ; Bulletin of the Polish Academy of Sciences ; Tech. Sci. Vol 57 ; N2 ; 2009.

[4] T. Kaczorek, "Approximation of positive stable continuous-time linear systems by Fractional positive stable discrete-time systems" Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 23, No. 3, 501–506 ; 2013.

[5] D .Bouagada, "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs", Thèse de Bouagada.D,2006

[6] Poularikas A. D. "Two-Dimensional Z-Transform" The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing. Ed. Alexander D. Poularikas Boca Raton : CRC Press LLC, 1999.

[7] Integer Sequences : Prime Number, Factorial, Binomial Coefficient, Perfect Number, Carmichael Number, Integer Sequence, Mersenne Prime.

[8] K.A. Nait , "étude de la composition chimique des essences de quatre especes d'eucalyptus poussant dans la region de Tizi ouzou". Mémoire de magister, Tizi ouzou,2012.

[9] L. Amimer, "modélisation et commande des systèmes non linéaires fractionnaires par des réseaux de neurones fractionnaires". Mémoire de magister, Tizi ouzou, 2015.

[10] Z. Dahmani, "l'integrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville et au sens de caputo". Cours de M1 et M2, Mostaganem, 2016.

[11] MONJE, C. A., Chen, Y., vinager, B. M., Xue, D & Feliu, V. (2010) Fractional-Order Systems and Controls, Fundamentals and Application. London Dordrecht Heidelberg New York : Springer.

[12] M.A. Ghazzar, D. Bouagada, M. Chadli, "Influence of discretization step on positivity of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems", IMAMCI. (2017) 000,1-16.

[13] C. Bennani, "Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamique non Linéaires et Applications". Mémoire de magister, Tizi ouzou, 2011.

[14] S. Hammouche , "Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones".Mémoire de magister, Tizi ouzou, 2012.