REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–*o* ◯ *o*–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

LES SURFACES MINIMALES DANS LE GROUPE DE LORENTZ – HEISENBERG DE DIMENSION 3

Présentée par : *ALLALI SEDDIK*

Soutenue le : devant le jury composé de :

Président :
Examinateur :
Encadreur : *BELARBI LAKEHAL*

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherches,Monsieur BELARBI LAKEHAL, pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Je voudrais également remercier les membres du jury, examinateur et président pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que tous les enseignants de lines.

Je tiens aussi à remercier monsieur le chef du département de mathématique et l'informatique et tous les enseignants du département pour leur soutien inestimable.

A tous mes enseignants qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect.

Merci à vous tous.

Dédicace

A la mémoire de mon défunt père.
A la plus belle créature que Dieu a créée sur terre .
A cet source de tendresse, de patience et de générosité.
A ma mère .
A mes mon père Abdelkader.
A tous mes frères et sœurs, ainsi que leurs enfants.
A toute ma famille.
A tous mes amis .
A tous les étudiants de la faculté descience exacte et de l'informatique.
A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer .....

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire nous sommes donnés quelques préliminaires sur les variétés différentielles.Loin d' être complet, ce texte expose des définitions et des résultats importants dans ce domaine .

Peu des exemples développés et quelques calculs téchniques.

L'objet de ce travail est la classifications des surfaces minimales dans le groupe de Lorentz-Heisenberg.

Ce mémoire est départagé, en gros, en trois chapitres :

1−Le premier chapitre est réserver aux rappells et définitions des outiles mathématiques de géomètrie euclidienne, Riemannienne.

On rappelle la définition de la variété topologique,variété différentielle, l'espace tangent , variété Riemannienne, métrique Riemannienne.

On donne la définition de la connèxion linéaire, connèxion de Levi-Civita, symbol de Christoffel (la fourmule de Kosul), et la courbure (tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et la courbure scalaire).

On rappelle la définition de première et deuxième forme fondamentales, la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

2− Le deuxième chapitre est entièrement consacré à l'espace de Lorentz-Heisenberg, on commence d'abord par la métrique de Lorentz-Heisenberg.

On donne la base orthonormé de $\mathbb{H}_3$ et on calcul les crochet de Lie.

On cacul la connèxion linéaire de Levi-Civita, le tenseur de Ricci, la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

On cherche l'equation des surfaces minimales telles que, on calcul les coefficients de la première et deuxième forme fondamentales puis on remplace dans la relation de la courbure moyenne qui l'on pose egale zéro on obtient à la fin l'equation des surfaces minimales.

3− Le troisième chapitre concerne les surfaces minimales dans l'espace de Lorentz-Heisenberg.

On donne les Hélicoids dans $\mathbb{H}_3$ et les surfaces minimales axiales symètriques.

On fait un changement et on cherche les solution de léquation des surfaces minimales, à la fin on calcul les surfaces minimales de translation.

Dans[11] et[12] , ils ont montrer que modulo d'un automorphisme de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg existent trois classes de métriques lorentziennes invariantes sur le groupe de Heisenberg dont l'un est plat.

L'espace de Lorentz- Heisenberg $\mathbb{H}_3$ peut être vu comme l'espace $\mathbb{R}^3$ doué avec une métrique Lotrentzienne invariante à gauche g_ξ est donnée par :

$$g_\xi = dx^2 + dy^2 - (dz + \xi (ydx - xdy))^2 , \xi \in \mathbb{R}.$$

Cette métrique est invariante sous la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

où θ, a, b et $c \in \mathbb{R}$ et

$$A = \xi (a \sin\theta - b\cos\theta).$$

$$B = \xi (a \cos\theta + b\sin\theta).$$

Dans le [1], M. Bekkar a étudié les surfaces minimales dans l'espace Riemanniènne-Heisenberg $\mathbb{H}_3$.

En particulier, dans [2], M. Bekkar et T. Sari donnent une classification de toutes les surfaces minimales reglées par des lignes dans l'espace $\mathbb{H}_3$.

D'autre part, dans[13], I. Van De Woestijne a donné l'équation des surfaces minimales dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ et il a montré que le plan, le caténoïde, l'hélicoïde et la surface d'Enneper sont minimums en $\mathbb{R}^3_1$.

Il convient de remarquer que L. McNertney complètement classé comme une surface manimale d'un type temps dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ dans son doctorat.

R. Lopez a étudié les surfaces minimales et des surfaces de type temps, et les surfaces à courbure moyenne constantes de type temps. En particulier il a montrer que si une surface à courbure moyenne constante de type temps, alors est une surface de révolution.

Dans ce travail en traite la géométrie des surfaces miinimales dans l'espace de Lorentz-Heisenberg suivant les travaux de Bekkar et Zoubir .

La théorie des surfaces minimales dans l'espace Euclidien $3 - \mathbb{E}^3$ a commencé avec la construction et la classification d'exemples fondamentaux de surfaces minimales : surfaces minimales de révolution, surfaces minimales réglées, ou surfaces minimales de translation ect. (Pour plus d'informations sur la théorie des surfaces minimales dans $\mathbb{E}^3$, nous référons à Nitsche livre [6] et le livre d'Osserman [10]).

D'autre part dans [13] I. Van De Woestijne a étudié et classé les surfaces minimales dans l'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^3_1$.

Chapitre 1

Préliminaires :

1.1 Variété topologique :

Définition 1.1 *Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique non vide, séparé (au sens de $Haussdorff$) et à base dénombrable d'ouverts (U_i) , dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2 *On dit que Ω est un espace topologique séparé si et seulement si :*

$$\forall (x,y) \in \Omega^2 : \exists v_x \text{ et } v_y \text{ voisinage de } x \text{ et } y \text{ (respectivement) tels que : } v_x \cap v_y = \varnothing.$$

Exemple 1.1 *$\mathbb{R}$ est une variété topologique car $\mathbb{R}$ est séparé.*

1.2 Carte :

Définition 1.3 *Soit M une variété topologique et U une partie de M, on dit que le couple(U,φ) est une carte si et seulement si :*

$$\begin{cases} (1) \ U \text{ un ouvert de } M. \\ (2) \ \varphi : U \to \varphi(U) \text{ est un homéomorphisme.} \end{cases}$$

Définition 1.4 *Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont l'inverse est continue .*

Où bien une application bijective de classe C^0 et son inverse de classe C^∞.

Définition 1.5 (*Deux cartes compatible*) *Soit M une variété topologique et soient (U,φ) et (V,ψ) deux cartes de M.*

On dit que les deux cartes sont compatibles si et seulement si :

$$\begin{cases} (1) \ U \cap V = \varnothing. \\ \quad \textit{où bien} \\ (2) \ \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to U \cap V \ \to \psi(U \cap V) \text{ est un difféomorphisme.} \end{cases}$$

Définition 1.6 *Un difféomorphisme est une application bijective de classe C^k et dont l'inverse de classe C^k $(k \geq 1)$.*

1.3 Structure différentille :

Définition 1.7 *Un Atlas sur une variété topologique M est une collection des cartes $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$, tel que :*

$$\begin{cases} (1) & \cup U_i = M. \\ (2) & \text{les cartes } (U_i, \varphi_i) \text{ sont compatibles deux à deux.} \end{cases}$$

1.4 variété différentielle :

Définition 1.8 *Soit M une variété topologique et A un atlas sur M, on dit que le coupte (M, A) est une variété différentielle.*

Exemple 1.2 *Soit $S^1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. On considère les ouverts U_1 et U_2 telle que :*

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & S^1 - \{(0,1)\} = \left\{(x,y) \in S^1 / y < a\right\} \text{ telle que } 0 < a < 1. \\ U_2 & = & S^1 - \{(0,-1)\} = \left\{(x,y) \in S^1 / y > -a\right\} \text{ telle que } 0 < a < 1. \end{array}$$

et les applications :

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \to \frac{x}{1-y}. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y) \to \frac{x}{1+y}. \end{array}$$

$I\ i)$ On montre que le couple (U_1, φ_1) est une carte :

1)On a U_1 est un ouvert de S^1 car $\complement_{S^1}^{U_1} = S^1 - U_1 = \{(0,1)\}$ fermé .

2) On a φ_1 est continue car elle est bien définie (quotion de deux fonction continue) .

3) On détermine $\varphi_1(U_1)$
On a :
$x^2 < 1$ car :

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{1-y} < \dfrac{x}{1-y} < \dfrac{1}{1-y} \\ & \Rightarrow & \left| \dfrac{x}{1-y} \right| < \dfrac{1}{1-y} \ldots (*) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} y & < & a \Rightarrow -y < -a \\ & \Rightarrow & 1 - y < 1 - a \\ & \Rightarrow & \dfrac{1}{1-y} < \dfrac{1}{1-a} \ldots (**) \end{array}$$

D'aprés $(*)$ et $(**)$ on a :

$$\begin{aligned} & \mid \frac{x}{1-y} \mid < \frac{1}{1-a} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} < \frac{x}{1-y} < \frac{1}{1-a} \\ \Rightarrow & \frac{-1}{1-a} < X < \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

Alors : $\varphi_1(U_1) = \left\{X \in \mathbb{R} / \frac{-1}{1-a} < X < \frac{1}{1-a}\right\}$.
4) On montr que φ_1 est bijective :

$$(\varphi_1 \text{ est bijective}) \Longleftrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}, \exists! (x,y) \in U_1 / \varphi_1(x,y) = X).$$

Soit$X \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= X \Rightarrow X = \frac{x}{1-y} \\ &\Rightarrow X^2 = \frac{x^2}{(1-y)^2} = \frac{1-y^2}{(1-y)^2} = \frac{(1+y)(1-y)}{(1-y)^2} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\Rightarrow X^2(1-y) = 1+y \\ &\Rightarrow X^2 - X^2 y = 1+y \\ &\Rightarrow X^2 - 1 = \left(X^2+1\right) y \\ &\Rightarrow y = \frac{X^2-1}{X^2+1}. \end{aligned}$$

Deplus

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{1-y} \Rightarrow x = X(1-y) \\ &\Rightarrow x = X\left(1 - \frac{X^2-1}{X^2+1}\right) \\ &\Rightarrow x = \frac{2X}{X^2+1}. \end{aligned}$$

5) On détermine φ_1^{-1} :

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : B_0\left(0_{\mathbb{R}}, \tfrac{1}{1-a}\right) &\to U_1 \\ X &\to \varphi_1^{-1}(X) = \left(\tfrac{2X}{X^2+1}, \tfrac{X^2-1}{X^2+1}\right). \end{aligned}$$

φ_1^{-1} est continue car ses composantes sont continues.
Donc φ_1 est un homéomorphisme .
D'ou (U_1, φ_1) est une carte.

ii) On montre que le couple (U_2, φ_2) est une carte :

1)On a U_2 est un ouvert de S^1 car $\complement_{S^1}^{U_2} = S^1 - U_2 = \{(0,-1)\}$ fermé .

2) On a φ_2 est continue car elle est bien définie (quotion de deux fonction continue).

3) On détermine $\varphi_2(U_2)$
On a :

$$\begin{aligned} y &> -a \\ &\Rightarrow 1+y > 1-a \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+y} < \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{x^2}{(1+y^2)^2} < \frac{1}{(1+y)^2} < \frac{1}{(1-a)^2} \\ &\Rightarrow X^2 < \frac{1}{(1-a)^2} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{1-a} < X < \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

Alors : $\varphi_2(U_2) = \left\{X \in \mathbb{R} / \frac{-1}{1-a} < X < \frac{1}{1-a}\right\}$.
4) On montr que φ_2 est bijective :

$$(\varphi_2 \text{ est bijective}) \Longleftrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}, \exists!\,(x,y) \in U_2 / \varphi_2(x,y) = X).$$

Soit$X \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,y) &= X \Rightarrow X = \frac{x}{1+y} \\ &\Rightarrow X^2 = \frac{x^2}{(1+y)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y)^2} = \frac{(1+y)(1-y)}{(1+y)^2} = \frac{1-y}{1+y} \\ &\Rightarrow X^2(1+y) = 1-y \\ &\Rightarrow X^2 + X^2 y = 1-y \\ &\Rightarrow 1-X^2 = \left(1+X^2\right) y \\ &\Rightarrow y = \frac{1-X^2}{X^2+1}. \end{aligned}$$

Deplus

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{1+y} \Rightarrow x = X(1+y) \\ &\Rightarrow x = X\left(1 + \frac{1-X^2}{X^2+1}\right) \\ &\Rightarrow x = \frac{2X}{X^2+1}. \end{aligned}$$

5) On détermine φ_2^{-1} :

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} : B_0\left(0_{\mathbb{R}}, \tfrac{1}{1-a}\right) &\to U_2 \\ X &\to \varphi_2^{-1}(X) = \left(\tfrac{2X}{X^2+1}, \tfrac{1-X^2}{X^2+1}\right). \end{aligned}$$

φ_2^{-1} est continue car ses composantes sont continues.
Donc φ_2 est un homéomorphisme .

D'ou (U_2, φ_2) est une carte.
$II)$ On montre que $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas différentiable de S^1.

$$A\ atlas \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\, U_1 \cup U_2 = S^1. \\ (2) \text{ les cartes } (U_1, \varphi_1) \text{ et } (U_2, \varphi_2) \text{ sont compatibles deux à deux.} \end{cases}$$

1) On a $U_1 \cup U_2 = S^1$.

$$2)\, (U_1, \varphi_1) \text{ et } (U_2, \varphi_2) \text{ sont compatibles} \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ U_1 \cap U_2 = \varnothing. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Où \\ (ii)\, \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to U_1 \cap U_2 \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ \qquad\qquad \text{est un difféomorphisme.} \end{cases}$$

On a :
$U_1 \cap U_2 = S^1 - \{(0,1), (0,-1)\} = U_1 - \{(0,-1)\} = U_2 - \{(0,1)\} \neq \varnothing$.

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_1(U_1 - \{(0,-1)\}) = \left]\tfrac{-1}{1-a}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{1}{1-a}\right[.$$

$$\varphi_2(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_2 - \{(0,1)\}) = \left]\tfrac{-1}{1-a}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{1}{1-a}\right[.$$

$$\varphi_2\left(\tfrac{2X}{X^2+1}, \tfrac{X^2-1}{X^2+1}\right) = \frac{\frac{2X}{X^2+1}}{1+\frac{X^2-1}{X^2+1}} = \frac{2X}{2X^2} = \frac{1}{X}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\to U_1 \cap U_2 \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ X &\to \varphi_1^{-1}(X) \ \to \tfrac{1}{X}. \end{aligned}$$

De plus $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ bijective par construction et de classe C^∞ car les déréivées successives existent et continues.

On a :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(X) &= \frac{1}{X} \Rightarrow \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)'(X) = \frac{-1}{X^2} = \frac{(-1)}{X^2}. \\ &\Rightarrow \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)''(X) = \frac{1}{X^3} = \frac{(-1)^2\, 2!}{X^3}. \\ &\Rightarrow \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)'''(X) = \frac{-1}{X^4} = \frac{(-1)^3\, 3!}{X^4}. \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\Rightarrow \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)^{(n)}(X) = \frac{(-1)^n\, n!}{X^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a :

$\varphi_1\left(\frac{2X}{X^2+1},\frac{1-X^2}{X^2+1}\right)=\frac{\frac{2X}{X^2+1}}{1-\frac{1-X^2}{X^2+1}}=\frac{2X}{2X^2}=\frac{1}{X}.$

$$\begin{array}{l}\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2\left(U_1\cap U_2\right)\to U_1\cap U_2\to\varphi_2\left(U_1\cap U_2\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad X\to\varphi_2^{-1}\left(X\right)\ \ \to\frac{1}{X}.\end{array}$$

De plus $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ de classe C^∞.

Alors, $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme.

D'ou $A=\left\{\left(U_1,\varphi_1\right),\left(U_2,\varphi_2\right)\right\}$ est un atlas différentielle de S^1.

1.5 Espace tangent :

Soit M une variété différentielle de classe C^∞.

Définition 1.9 *Soit M une variété différentielle et $m\in M$, on note C l'ensemble des courbes $\gamma\left(t\right):U\subset\mathbb{R}\to M$ qui passent par m telle que : $\gamma\left(0\right)=m$.*

Alors $\exists\varepsilon>0$ suffisamment petit telle que $\left[-\varepsilon,\varepsilon\right]\subset U$ où U un ouvert de la carte $\left(U,\varphi\right)$ et les x_i sont des applications associées à la carte $\left(U,\varphi\right)$ sur C, nous définissons une relation d'equivalence :

$$\gamma_1\sim\gamma_2\Leftrightarrow\left(\frac{dx_i\left(\gamma_1\left(t\right)\right)}{dt}\right)|_{t=0}=\left(\frac{dx_i\left(\gamma_2\left(t\right)\right)}{dt}\right)|_{t=0}.$$

L'espace tangent en point m de M est noté par T_mM, est l'espace de classe d'équivalence de la relation $\sim$.

1.6 Variété Riemannienne :

1.6.1 Métrique Riemannienne :

Soit M une variété différentielle,T_mM espace tangent de M en m.

Définition 1.10 *Une métrique Riemannienne dans T_mM est un produit scalaire qui est une forme bilinéaire symètrique définie positive , on note g où g_m telle que :*

$$\begin{array}{r}g:T_mM\times T_mM\mapsto C^\infty\left(M\right)\\ \left(X,Y\right)\mapsto g\left(X,Y\right).\end{array}$$

C^∞ :L'ensemble des applications définies sur M et à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

Exemple 1.3 *M $=\mathbb{R}^n$, g_0 : la métrique euclidienne $\left(définie\ sur\ \mathbb{R}^n\right)$*

$$\begin{aligned} g_0 &= dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2. \\ &= (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ . \\ . \\ . \\ dx_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 1.11 *Soit M une variété différentielle et $m \in T_mM$,g est la métrique définie sur T_mM ,$\forall m \in M$, on dit que (M, g) est une **variété Riemannienne.***

Définition 1.12 *On appelle variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 1.4 $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est une variété Riemannienne.*

1.6.2 La connèxion de Levi-Civita :

Soit(M, g) une variété Riemannienne et $\chi(M)$:l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Définition 1.13 *On appelle connèxion de Levi-Civita sur M tout application :*

$$\begin{array}{rl} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) & \mapsto \chi(M) \\ (\ X \quad , \quad Y\ ) & \mapsto \nabla_X Y\ , \end{array}$$

qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire et telle que pour tout $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$,on a :
i) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y.$
ii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + df(x) Y.$

1.6.3 La connèxion linéaire :

Définition 1.14 *Il existe une seule application ∇ telque :*

$$\begin{array}{rl} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) & \mapsto \chi(M) \\ (\ X \quad , \quad Y\ ) & \mapsto \nabla_X Y\ . \end{array}$$

vérifiant :
i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ tels que X,Y et Z$\in \chi(M)$.

D'autrepart :

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1} \Gamma_{ij}^k e_k.$$

1.6.4 Symboles de Christoffel d'une variété Riemannienne :

La formule de Kosul :

$$2g\left(\nabla_X Y,Z\right)=Xg\left(Y,Z\right)+Yg\left(X,Z\right)-Zg\left(X,Y\right)+g\left(\left[X,Y\right],Z\right)-g\left(\left[Y,Z\right],X\right)+g\left(\left[Z,X\right],Y\right)\ ...\ (*)$$

tel que : $X,Y,Z\in\chi\left(M\right).$

On utilisant la formule $(*)$ pour : $X=\frac{\partial}{\partial x_j},Y=\frac{\partial}{\partial x_i},Z=\frac{\partial}{\partial x_l}$,
on obtient :

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\\
&\Leftrightarrow\ 2g\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)=\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\\
&\Leftrightarrow\ 2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)=\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\\
&\Leftrightarrow\ \Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right).
\end{aligned}$$

Définition 1.15 *On définie sur (M,g) les symboles de Christoffel Γ_{ij}^{k} par :*

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$$

1.7 La courbure :

1.7.1 Tenseur de courbure :

Définition 1.16 *R : le tenseur de courbure de (M,g) est donnée par :*

$$R\left(X,Y,Z,W\right)=\left\langle R\left(X,Y\right)W,Z\right\rangle=g\left(R\left(X,Y\right)W,Z\right),$$

tel que :

$$\begin{aligned}
R\left(X,Y\right)W &= \left[\nabla_X,\nabla_Y\right]W-\nabla_{[X,Y]}W\\
&= \nabla_X\nabla_Y W-\nabla_Y\nabla_X W-\nabla_{[X,Y]}W.
\end{aligned}$$

1.7.2 La courbure sectionnelle :

Définition 1.17 *On définie sur (M,g) la fonction K biquadratique de courbure comme suit :*

$$\begin{aligned} K(u,v) &= R(u,v,u,v) \\ &= \langle R(u,v)v,u)\rangle \\ &= g(R(u,v)v,u). \end{aligned}$$

pour tout $(u,v) \in \chi(M) \times \chi(M)$.

Si $\{u,v\}$ est une base orthonormée d'un plan P ,on définit alors sa courbure sectionnelle par :

$$K(P) = K(u,v).$$

Si $\{u,v\}$ n'est pas orthonormée ,alors :

$$K(u,v) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g^2(u,v)}.$$

1.7.3 La courbure de Ricci :

Définition 1.18 *C'est un $2-$tenseur symetrique en point m,on note $Ric(X,Y)$: la trace de l'endomorphisme*

$$\begin{aligned} T_mM &\mapsto T_mM \\ V &\mapsto R(V,X)Y. \end{aligned}$$

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de T_mM alors :

$$\begin{aligned} Ric_m(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} R(X,e_i,Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(X,e_i)e_i,Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,e_i)e_i,Y\rangle. \end{aligned}$$

1.7.4 La courbure scalaire :

Définition 1.19 *C'est une fonction $M \mapsto \mathbb{R}$ noté k tel que $k(m)$est la trace de l'endomorphisme symetrique associèe à Ric_m :*

$$\begin{aligned} k(m) &= \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j) \\ &= \sum_{i,j} K(e_i,e_j) \\ &= 2Trace(P). \end{aligned}$$

Exemple 1.5 *Soit H_3 l'espace de Heisenberg muni de la métrique :*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2.$$

et muni de sa base orthonorme : $e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}$, $e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

$i)$Calculons les crochet $[e_i, e_j]$ telque $[e_i, e_j] = e_ie_j - e_je_i$.
on a $[e_i, e_j] = 0$ sauf $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$.

$ii)$Déterminons (g_{ij}) et (g^{ij}) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\tfrac{Y}{2}dx - \tfrac{x}{2}dy + dz\right)^2$$
$$= (dx, dy, dz)\begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1+\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1+\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

et $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

$iii)$Calculons les Γ_{ij}^k telque : $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$.

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{33}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \tfrac{y}{4}, \Gamma_{22}^1 = -x, \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \tfrac{1}{2},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\tfrac{y}{2}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \tfrac{y}{4}, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = -\tfrac{1}{2}, \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0; \Gamma_{33}^2 = 0.$$

$iiii)$Calculons les $\nabla_{e_i}e_j$ telque : $\nabla_{e_i}e_j = \sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k e_k$.

$\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = \nabla_{e_3}e_3 = 0$, $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3$,
$\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2$, $\nabla_{e_2}e_3 = \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1$.

$iiiii)$Calculons les courbure sectionnelle K telque :

$K(u, v) = R(u; v, u, v) = \langle R(u, v)v, u)\rangle = g(R(u, v)v, u)$.

pour calculer les courbure sectionnelle il faut calculer premierement les tenseur R telque :

$R(X, Y)W = \nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W.$

$R(e_1, e_1) e_1 = 0.$
$R(e_1, e_2) e_2 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_2$

$= -\frac{3}{4}e_1.$
$R(e_1, e_3) e_3 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_3$
$= -\frac{1}{4}e_1.$

$R(e_2, e_3) e_3 = \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{[e_3,e_2]}e_2$

$= \frac{1}{4}e_2.$
puis on calcul les courbure sectionnelle K :
$K(e_1, e_2) = g(R(e_1, e_2) e_2, e_1)$
$= g\left(-\frac{3}{4}e_1, e_1\right)$
$= -\frac{3}{4}.$
$K(e_1, e_3) = g(R(e_1, e_3) e_3, e_1)$
$= g\left(\frac{1}{4}e_1, e_1\right)$
$= -\frac{1}{4}.$
$K(e_2, e_3) = g(R(e_2, e_3) e_3, e_2)$
$= g\left(\frac{1}{4}e_2, e_2\right)$
$= \frac{1}{4}.$

$iiiiii)$Calculons les courbure de Ricci Ric telque :
$Ric(e_i, e_j) = R_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, e_k) e_k, e_j).$
$Ric(e_1, e_1) = R_{11}$
$= g(R(e_1, e_1) e_1, e_1) + g(R(e_1, e_2) e_2, e_1) + g(R(e_1, e_3) e_3, e_1)$
$= K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3)$
$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
$= -1.$
$Ric(e_1, e_2) = R_{12}$
$= g(R(e_1, e_1) e_1, e_2) + g(R(e_1, e_2) e_2, e_2) + g(R(e_1, e_3) e_3, e_2)$
$= -\frac{3}{4}.$
$Ric(e_2, e_2) = R_{22}$
$= g(R(e_2, e_1) e_1, e_2) + g(R(e_2, e_2) e_2, e_2) + g(R(e_2, e_3) e_3, e_2)$
$= -\frac{1}{2}.$
$Ric(e_1, e_3) = R_{13}$
$= g(R(e_1, e_1) e_1, e_3) + g(R(e_1, e_2) e_2, e_3) + g(R(e_1, e_3) e_3, e_3)$
$= -\frac{1}{4}.$
$Ric(e_2, e_3) = R_{23}$
$= g(R(e_2, e_1) e_1, e_3) + g(R(e_2, e_2) e_2, e_3) + g(R(e_2, e_3) e_3, e_3)$
$= 0.$
$Ric(e_3, e_3) = R_{33}$
$= g(R(e_3, e_1) e_1, e_3) + g(R(e_3, e_2) e_2, e_3) + g(R(e_3, e_3) e_3, e_3)$
$= -\frac{1}{4}.$
$iiiiiii)$Calculons la courbure scalaire k :

$$\begin{aligned} k(m) &= \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{i,j} K(e_i, e_j) = 2Trace(P) = \sum_{i,j} R_{ij}. \\ &= K(e_1, e_2) + K(e_2, e_3) + K(e_1, e_3) \\ &= -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \\ &= -\tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

1.8 Première et deuxième forme fondamentale :

1.8.1 Première forme fondamentale :

Définition 1.20 *On appelle première forme fondamentale de la surface S paramétrisé par* $\begin{array}{c} f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \to f(u, v) \end{array}$ *, la forme quadratique qu'on noté I et qui s'écrit par la matrice symétrique définie positive suivante :*

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) & I\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ I\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) & I\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\rangle & \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle \\ \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle & \langle\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où E, F et G sont appelées les coefficients de la première forme fondamentale données par :

$$\begin{cases} E = \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\rangle. \\ F = \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle. \\ G = \langle\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle. \end{cases}$$

On peut écrire la première forme fondamentale sous la forme quadratique comme suit :

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

1.8.2 Deuxième forme fondamentale :

Définition 1.21 *On définit l'expression de la deuxième forme fondamentale par :*

$$II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

où L, M et N sont appelées les coefficient de la deuxième forme fondamentale données par :

$$\begin{cases} L = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\mathbf{N}. \\ M = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\mathbf{N}. \\ N = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\mathbf{N}. \end{cases},$$

tel que **N** : le vecteur normal unitaire qui donné par :

$$\mathbf{N} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right\|}.$$

1.8.3 La courbure moyenne et la courbure de Gauss :

Soit $k_1$et k_2 des courbures principales .

La courbure moyenne :

Définition 1.22 *On appelle courbure moyenne (en tout point de S) la moyenne entre les courbures principales noté H, telque :*

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Si $H = 0$, on dit que la surface est minimale .

La courbure de Gauss :

Définition 1.23 *On appelle courbure de Gauss (en tout point de S) le produit des courbures principales noté K_G,telque :*

$$\begin{aligned} K_G &= k_1 k_2 \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\det(II)}{\det(I)}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

L'espace de Lorentz-Heisenberg :

Soit $\mathbb{H}_3$ le groupe de Lorentz-Heisenberg doté d'une métrique lorentzienne invariante à gauche est donnée par :

$$g_\xi = dx^2 + dy^2 - (dz + \xi(ydx - xdy))^2, \xi \in \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que le produit de $\mathbb{H}_3$ est donné par :

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x, y, z) = (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{z} + z - \bar{x}y + x\bar{y}).$$

$\mathbb{H}_3$ est un group de Lie tridimensionnel, connecté, simplement connecté et a $2 - pas$.

L'algèbre de Lie de $\mathbb{H}_3$a une base orthonormée $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ qui définie par :

$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \xi y \frac{\partial}{\partial z}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \xi x \frac{\partial}{\partial z}, e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

On peut facilement vérifier que ε satisfait $g_\xi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, ici désigne les symboles de kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Nous avons les crochets de Lie :

$$[e_1, e_2] = 2\xi e_3, \qquad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

avec

$$g_\xi(e_1, e_1) = g_\xi(e_2, e_2) = 1, \qquad g_\xi(e_3, e_3) = -1.$$

La connèxion de Levi-Civita ∇ de g_ξ est explicitement donné comme suit :

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} e_1 = 0, \nabla_{e_1} e_2 = \xi e_3, \nabla_{e_1} e_3 = \xi e_2 \\ \nabla_{e_2} e_1 = -\ \xi e_3, \nabla_{e_2} e_2 = 0, \nabla_{e_2} e_3 = -\ \xi e_1 \\ \nabla_{e_3} e_1 = \xi e_2, \nabla_{e_3} e_2 = -\ \xi e_1, \nabla_{e_3} e_3 = 0 \end{cases}.$$

La base dualede $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ associé à $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ est un triplet de $1 - forme$ qui satisfait pour la condition $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$.

La base duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donnée par :

$$\theta^1 = dx, \theta^2 = dy, \theta^3 = dz + \xi(ydx + xdy).$$

Notons que le $1 - forme$ θ^3 est une forme de contact sur $\mathbb{H}_3$ si et seulement si $\xi \neq 0$.

En autre, les formes de connexion sont déterminées par :

$$g_\xi = (\nabla_X e_i, e_j) = \theta^{ij}(X),$$

Nous obtenons alors :

$$\theta^{13} = -\xi\theta^2, \theta^{12} = -\xi\theta^3, \theta^{23} = \xi\theta^1.$$

Le tenseur de Ricci est défini par :

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{3} e_i g_\xi (R(X,e_i)Y, e_j).$$

Où X et Y sont des champs vecteurs sur $\mathbb{H}_3$ et $e_1 = e_2 = 1$ et $e_3 = -1$.
Les composantes du tenseurs de Ricci sont :

$$R_{11} = R_{22} = -2\xi^2, R_{33} = 2\xi^2, \text{ et } R_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

La courbure scalaire est donnée par :

$$k = \sum_{i=1}^{3} R_{ij} \text{ et } k = -2\xi^2.$$

2.0.4 Equation des surfaces minimales :

Soit S une surface immergée dans $\mathbb{H}_3$ qui est donnée comme un graphe de la fonction $z = f(x,y)$.

Le vecteur de position $X(x,y)$ de S est exprimé sous la forme d'un vecteur fonctionel évaluée $X(x,y) = (x,y,f(x,y))$.

Les vecteurs tangents $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$ et $X_y = \frac{\partial X}{\partial y}$ sont décrits par :

$$\begin{cases} X_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} = e_1 + Pe_3. \\ X_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} = e_2 + Qe_3. \end{cases}$$

En termes de la forme orthonormale ε. Ici, les fonctions P et Q sont définies par :

$$\begin{cases} P = f_x + \xi y. \\ Q = f_y - \xi x. \end{cases}$$

La première forme fondamentale I de S est définie par :

$$I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2,$$

où :

$$\begin{cases} E = g_\xi(X_x, X_x). \\ F = g_\xi(X_x, X_y). \\ G = g_\xi(X_y, X_y). \end{cases}$$

Les coefficients fonctionnels E, F et G sont données par :

$$\begin{cases} E = 1 - P^2. \\ F = -PQ. \\ G = 1 - Q^2. \end{cases}$$

Prenez le vecteur normal unitaire $\mathbf{N}$ à S. A savoir que $\mathbf{N}$ est le long d'un champ vectoriel de S qui satisfait :

$$g_\xi\left(X_x, \mathbf{N}\right) = g_\xi\left(X_y, \mathbf{N}\right) = 0 \text{ et } g_\xi\left(\mathbf{N}, \mathbf{N}\right) = 1.$$

La deuxième forme fondamentale II dérivée de $\mathbf{N}$ est définie par :

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2,$$

où :

$$\begin{cases} L = g_\xi\left(\nabla_{X_x} X_x, \mathbf{N}\right). \\ M = g_\xi\left(\nabla_{X_y} X_x, \mathbf{N}\right). \\ N = g_\xi\left(\nabla_{X_y} X_y, \mathbf{N}\right). \end{cases}$$

Puisque S est un graphe de la fonction f, on peut choisir le vecteur normal unitaire $\mathbf{N}$ tel que :

$$\mathbf{N} = \frac{Pe_1 + Qe_2 + e_3}{W}, W = \sqrt{P^2 + Q^2 - 1}.$$

Les coefficients fonctionnels de la deuxième forme fondamentale de cet vecteur normal unitaire est donnée par :

$$\begin{cases} L = \frac{1}{W}\left(f_{xx} + 2\xi PQ\right). \\ M = \frac{1}{W}\left(f_{xy} + \xi P^2 - \xi Q^2\right). \\ N = \frac{1}{W}\left(f_{yy} - 2\xi PQ\right). \end{cases}$$

Notons les fonctions matricielles suivantes associées à I et II par les mêmes lettres I et II, respectivement :

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique $\det(II - \lambda I) = 0$ sont appelées les courbures principales de S.

Rappelons que la courbure moyenne

$$H = \frac{(k_1 + k_2)}{2},$$

tel que$k_1$et k_2 sont appelées les courbures principales de S.

La courbure moyenne H est calculée par la formule :

$$H = \frac{EN + GL - EFM}{2 \mid EG - F^2 \mid}.$$

Une surface $S : z = f(x, y)$ est dite minimale si $H = 0$.

D'autre part, la courbure gaussienne K_G de S est donnée par la formule :

$$K_G = g_\xi\left(\mathbf{N}, \mathbf{N}\right) \frac{\det II}{\det I}.$$

Une surface$S$: $z = f(x, y)$ est dite plat si $K_G = 0$.

L'équation différentielle $H = 0$ pour une surface S définie comme un graphe $(x, y, f(x, y))$ est appelée l'équation de la surface minimale dans $\mathbb{H}_3$.

L'équation de la surface minimale est donnée explicitement par :

$$(E_\xi) \qquad \left(1 - Q^2\right) f_{xx} + \left(1 - P^2\right) f_{yy} + 2PQf_{xy} = 0.$$

Il est clair que si $\xi = 0$, cette équation se réduit à l'équation de la surface minimale de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$.

L'équation de la surface minimale (E_ξ) peut être réécrite sous la forme de divergence suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q}{W}\right) = 0.$$

Chapitre 3

Surfaces minimales dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$:

Dans cette section, nous étudions des exemples élémentaires et fondamentaux de la surface minimale dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$.

Il est facile d'observer que dans $\mathbb{H}_3$, la fonction linéaire $f(x, y) = ax + by + c$ est une solution de l'équation de surface minimale (E_ξ).

Proposition 3.1 *Soit* $\mathbb{H}_3$ *un espace de Lorentz-Heisenberg de dimension* 3*, alors la surface de type espace* $z = ax + by + c$ *est minimale pour* a, b *et* C *sont arbitraires.*

Par analogie dans l'espace de Heisenberg $\mathbb{H}_3$, où le parabole hyperbolique est une surface minimale, nous avons dans $\mathbb{H}_3$ également la surface minimale particulière

$$z = f(x, y) = \pm\xi xy, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.1 *Dans* $\mathbb{H}_3$*, la surface* $z = f(x, y) = \pm\xi xy + \alpha$ *où* α *et* $\xi \in \mathbb{R}$*, est minimale dans* $\mathbb{H}_3$*.*

3.0.5 Hélicoïdes dans $\mathbb{H}_3$:

Les hélicoïdes euclidiens peuvent être caractérisés comme les surfaces minimales dans $\mathbb{E}^3$ qui sont des graphes des fonctions sous la forme $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$.

D'autre part, le minimum des hélicoïdes semblables à des intervalles de $\mathbb{R}_1^3$ ont été examinés dans [5] et les Hélicoïdes minimales Lorentzeinne de $\mathbb{R}_1^3$ ont été examinés dans [woestijne].

Dans cette sous-section, nous voyons que les surfaces minimales sont déterminées par la solution de l'equation de la surface minimale $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ dans $\mathbb{H}_3$.

Soit S une surface qui est un graphe d'une fonction sous la forme $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Mettre $u = \frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f_x &= -\frac{y}{x^2}g', f_y = \frac{1}{x}g', \\
f_{xx} &= \frac{2y}{x^3}g' + \frac{y^2}{x^4}g'', f_{xy} = -\frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g'', f_{yy} = \frac{1}{x^2}g''.
\end{aligned}$$

Ici g' et g'' sont les dérivés par rapport à u.

Maintenant nous insérons ces données à l'équation de la surface minimale (E_ξ), alors nous avont l'équation différentielle :

$$\left(1+u^2\right)g''+2ug'=0.$$

On peut vérifier facilement que la solution générale à cette O. D. E. est donnée explicitement par :

$$f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)=\alpha\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\beta,\text{ où }\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Théorème 3.2 *La seule surface minimale dans $\mathbb{H}_3$ qui a la forme $z=f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ sont les surfaces :*

$$f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)=\alpha\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\beta,\text{où}\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

3.0.6 Les surfaces minimales axiales symétriques :

Il est facile de voir les métriques g_ξ sont invariantes sous les rotations autour du $z-$axis et la long de la translation du même axe.

Sur la base de cette propriété fondamentale, dans cette sous-section, nous étudierons des graphes minimaux axialement symétriques dans $\mathbb{H}_3$.

Une surface $S : z=f(x,y)$ est dite axialement symétrique si f ne dépend que $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

maintenant soit S un graphe d'axiale symétrique de la fonction $f(x,y)=T(r)$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{x}{r}T',\, f_y=\frac{y}{r}T' \\
f_{xx} &= \frac{y^2}{r^3}T'+\frac{x^2}{r^2}T'',\, f_{yy}=\frac{x^2}{r^3}T'+\frac{y^2}{r^2}T'',\, f_{xy}=-\frac{xy}{r^3}T'+\frac{xy}{r^2}T''.
\end{aligned}$$

Ici T' et T'' sont des dérivés par rapport à r. De là, nous obtenons l'équation de la surface minimale suivante :

$$r\left(1-\xi^2r^2\right)T''+\left(1-T'^2\right)T'=0.$$

Pour résoudre cette équation, nous mettons $T'=u$. Puisque $r\left(1-\xi^2r^2\right)\neq0$, nous avons

$$u'+\frac{u}{r\left(1-\xi^2r^2\right)}=\frac{u^3}{r\left(1-\xi^2r^2\right)}.$$

Cette équation est une équation de Bernoulli. Maintenant nous mettons $v=\frac{1}{u^2}$ puis l'équation précédente est réécrite comme suit :

$$v'-\frac{2v}{r\left(1-\xi^2r^2\right)}=-\frac{2}{r\left(1-\xi^2r^2\right)}.$$

Les solutions générales de cette équation sont données par :

$$v=\frac{1+cr^2}{1-\xi^2r^2},\qquad c>0\ .$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
(T')^2 &= \frac{1-\xi^2 r^2}{1+cr^2} \\
&= \frac{\xi^2}{c}\frac{\frac{1}{\xi^2-r^2}}{\frac{1}{c+r^2}}, \quad c>0 \ .
\end{aligned}
$$

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin de discussions séparées en fonction des valeurs de ξ, on a :

(1) Si $\xi = 0$: Dans ce cas nous avons :

$$T'(r)^2 = \frac{1}{1+cr^2}, c>0.$$

La solution est la surface axialement symétrique

$$T(r) = \frac{1}{\sqrt{c}}\cosh^{-1}\sqrt{c}r + c_1.$$

Donc la surface est une caténoïde dans l'espace de Minkowski.

(2) Si $\xi \neq 0$: La solution est la surface axialement symétrique :

$$T(r) = \frac{\mid \xi \mid}{\sqrt{c}}\int_r^{|\xi|}\sqrt{\frac{\frac{1}{\xi^2-t^2}}{\frac{1}{c+t^2}}}dt + c_2.$$

Cette intégrale elliptique peut être exprimée par les intégrales elliptiques de la forme Legendre de premier et de deuxième genre.

En fait, l'intégrale :

$$I(t) = \int_b^t \sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}dx.$$

est représenté comme :

$$I(u) = \sqrt{a^2+b^2}\left(F(\gamma,s) - E(\gamma,s)\right) + t\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}.$$

avec $b \geq t > 0$.

Ici $F(\gamma,s)$ et $E(\gamma,s)$ sont les intégrales elliptiques de la forme de Legendre de premier et deuxième type, respectivement, telles que :

$$
\begin{cases}
F(\gamma,s) = \displaystyle\int_0^{\gamma}\left(1-s^2\sin^2\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha. \\
E(\gamma,s) = \displaystyle\int_0^{\gamma}\left(1-s^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha.
\end{cases}
$$

Le module γ et la variable s sont donnés par :

$$\begin{cases} \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{t}{b}\right)\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2+t^2}}. \\ s = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Théorème 3.3 *les seules surfaces minimales axialement dans $\mathbb{H}_3$ sont des graphes de fonctions $f(x,y) = T(r)$ avec $r^2 = x^2 + y^2$, où :*

$$\begin{cases} (1)\, T(r) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cosh^{-1} \sqrt{c} r + c_1, c > 0 \quad pour \xi = 0. \\ (2)\, T(r) = \frac{|\xi|}{\sqrt{c}} \int_r^{|\xi|} \sqrt{\frac{\frac{1}{\xi^2 - t^2}}{\frac{1}{c+t^2}}} dt + c_2, c > 0 \ pour \xi \neq 0. \end{cases}$$

3.0.7 Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg :

Une approche similaire à celle de trouver les surfaces de Sherch. On pose $f(x,y) = u(x) + v(y) - \xi xy$ et nous substituons dans l'équation (E_ξ). Nous obtenons l'équations suivante :

$$\left(1 - (v' - 2\xi x)^2\right) u'' + \left(1 - u'^2\right) v'' - 2\xi u' (v' - 2\xi x) = 0.$$

Cette équation devient lorsque on prend $v(y) = cte$, on obtient :

$$\left(1 - 4\xi^2 x^2\right) u'' + 4\xi^2 x u' = 0.$$

L'intégration nous donne :

$$u(x) = \frac{c_1}{4\xi}\left(\arcsin 2\xi x + 2\xi x\sqrt{1 - 4\xi^2 x^2}\right) + c_2.$$

Les équations des surfaces sont :

$$f(x,y) = \frac{c_1}{4\xi}\left(\arcsin 2\xi x + 2\xi x\sqrt{1 - 4\xi^2 x^2}\right) - \xi xy + c_2.$$

Sont minimales dans $\mathbb{H}_3$.

Théorème 3.4 *Dans $\mathbb{H}_3$, les translations des surfaces $f(x,y) = \frac{c_1}{4\xi}\left(\arcsin 2\xi x + 2\xi x\sqrt{1 - 4\xi^2 x^2}\right) - \xi xy + c_2, c_1, c_2$ et $\xi \in \mathbb{R}$, sont minimales .*

Dans la suite en travail par la métrique :

$$g_{\xi=1} = dx^2 + dy^2 - (dz + (ydx - xdy))^2 .$$

Théorème 3.5 *Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg qui sont paramétrisées par :*

$$X(x,y) = (x, 0, f(x))(0, y, 0) = (x, y, h(x) - xy),$$

sont :

$$X(x,y) = \left(x, y, \frac{k}{2} x\sqrt{1-4x^2} + k \ \arcsin(2x) - xy\right),$$

où $k \in \mathbb{R}^{*+}$.
Preuve
On pose : $f(x,y) = h(x) - xy$.
Donc :

$$\begin{aligned} f_x &= h' - y, f_y = -x. \\ f_{xx} &= h'', f_{yy} = 0, f_{xy} = -1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} P = f_x + y = h'. \\ Q = f_y - x = -2x. \end{cases}$$

Alors $(E_{\xi=1})$ devient :

$$(E_{\xi=1}) \qquad \left(1 - Q^2\right) f_{xx} + \left(1 - P^2\right) f_{yy} + 2PQ f_{xy} = 0 \Leftrightarrow \left(1 - 4x^2\right) h'' + 4xh' = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(1 - 4x^2\right) h'' + 4xh' &= 0 \Leftrightarrow \int \frac{h''}{h'} = -\int \frac{4x}{1-4x^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(h') = \frac{1}{2}\left(1 - 4x^2\right) + c, \ c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow h'(x) = k\sqrt{1-4x^2}, \ k = \exp(c) \in \mathbb{R}^{*+} \\ &\Leftrightarrow h(x) = \frac{k}{2} x\sqrt{1-4x^2} + k \ \arcsin(2x). \end{aligned}$$

Théorème 3.6 *Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg qui sont paramétrisées par :*

$$X(x,y) = (0, y, 0)(x, 0, h(x)) = (x, y, h(x) + xy),$$

sont :

$$X(x,y) = (x, y, ax + b + xy),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Preuve
On pose : $f(x,y) = h(x) + xy$.
Donc :

$$\begin{aligned} f_x &= h' + y, f_y = x. \\ f_{xx} &= h'', f_{yy} = 0, f_{xy} = 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} P = f_x + y = h' + 2y. \\ Q = f_y - x = 0. \end{cases}$$

Alors $(E_{\xi=1})$ devient :

$$(E_{\xi=1}) \qquad \left(1 - Q^2\right) f_{xx} + \left(1 - P^2\right) f_{yy} + 2PQf_{xy} = 0 \Leftrightarrow h'' = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} h''(x) &= 0 \Leftrightarrow h'(x) = a,\ a = cte \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow h(x) = ax + b,\ b = cte \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Théorème 3.7 *Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg qui sont paramétrisées par :*

$$X(x,y) = (0, y, g(y))(x, 0, 0) = (x, y, g(y) + xy),$$

sont :

$$X(x,y) = \left(x, y, \frac{k}{2} y\sqrt{1 - 4y^2} + k\ \arcsin(2y) + xy\right),$$

où $k \in \mathbb{R}^{*+}$.
Preuve
On pose : $f(x,y) = g(y) + xy$.
Donc :

$$\begin{aligned} f_x &= y, f_y = g' + x. \\ f_{xx} &= 0, f_{yy} = g'', f_{xy} = 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} P = f_x + y = 2y. \\ Q = f_y - x = g'. \end{cases}$$

Alors $(E_{\xi=1})$ devient :

$$(E_{\xi=1}) \qquad \left(1 - Q^2\right) f_{xx} + \left(1 - P^2\right) f_{yy} + 2PQf_{xy} = 0 \Leftrightarrow \left(1 - 4y^2\right) g'' + 4yg' = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(1 - 4y^2\right) g'' + 4yg' &= 0 \Leftrightarrow \int \frac{g''}{g'} = -\int \frac{4y}{1 - 4y^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(g') = \frac{1}{2}\left(1 - 4y^2\right) + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow g'(y) = k\sqrt{1 - 4y^2},\ k = \exp(c) \in \mathbb{R}^{*+} \\ &\Leftrightarrow g(y) = \frac{k}{2} y\sqrt{1 - 4y^2} + k\ \arcsin(2y). \end{aligned}$$

Théorème 3.8 *Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg qui sont paramétrisées par :*

$$X(x,y) = (x,0,0)(0,y,g(y)) = (x,y,g(y)-xy),$$

sont :

$$X(x,y) = (x,y,ay+b-xy),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Preuve

On pose : $f(x,y) = g(y) - xy$.

Donc :

$$\begin{aligned} f_x &= -y, f_y = g' - x. \\ f_{xx} &= 0, f_{yy} = g'', f_{xy} = -1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} P = f_x + y = 0. \\ Q = f_y - x = g' - 2x. \end{cases}$$

Alors $(E_{\xi=1})$ devient :

$$(E_{\xi=1}) \qquad \left(1-Q^2\right) f_{xx} + \left(1-P^2\right) f_{yy} + 2PQ f_{xy} = 0 \Leftrightarrow g'' = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} g''(y) &= 0 \Leftrightarrow g'(y) = a, \ a = cte \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow g(y) = ay + b, \ b = cte \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **M. Bekkar**, Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg,Rend. Sem. Fac. Sci.,Univ. Cagliari, 61-2, pp. 123-130, 1991.

[2] **M. Bekkar, T. Sari**, Surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg, Rend. Sem. Fac. Sci.,Univ. Pol. Torino ; 50-3 pp.243-254, 1992.B-Y.

[3] **Chen**, Total mean curvature and submanifolds of finite type,World Scientific Publiching, Singapore, 1984.

[4] **S. Gradshtein, M. Ryzhik**, Tables of integrals, series and products ; Academic Press ; 1980.

[5] **0. Kobayashi**, Maximal surfaces in the 3 dimensional Minkowsky space L^3 ; Tokyo J. Math., Vol. 6, No. 2 ; 1983.

[6] **J. C. C. Nitsche**, Lectures on minimal Surfaces, Vol. 1, Cambridhe Univ. Press, 1989.

[7] **R. Lopez**, Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space, Tohoku Math. J. 52 (2000), 515-532

[8] **L. McNertney**, One-parameter families of surfaces with constant mean curvature in the Lorentz 3-space, Ph. D. Thesis, Brown Univ., Providence, RI, USA., 1980.

[9] **B. O'Neill**, Semi-Riemnnian Geometry with Application to Relativity, Academic Press, 1983.

[10] **R. Osserman**, A survery on minimal surfaces, Van Nostrand, 1969.

[11] **S. Rahmani**, Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaire de dmension 3, J. Geom. Phys., 9, (1992), 295-302.

[12] **N. Rhmani** and **S. Rahmani**, Lorentzian geomerty of the Heisenberg group, Geom. Dedicata, 118, (2006), 133-140.

[13] **I. Van De Woestijne**, Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space, in geometry topology of submanifolds, II, world scientific, singapore, 1999. pp. 344-369.