METHODE DE MONOTONIE POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLEMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES

Extrait du livre de J. L. Lions; Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires

Sara Amour

Résumé

Ce mémoire traite quelques problèmes aux limites non linéaires, du type Dirichlet ou Neumann.
On a utilisé la méthode de monotonie pour la résolution de ces problèmes.

Table des matières

Intoduction

On développe dans ce travail une méthode de résolution d'un problème aux limites pour les équations aux dérivées partielles non linéaires; cette méthode est appelée méthode de Monotonie.

Ce manuscrit est composi essentiellement de trois Chapitre. Dans la première partie du Chapitre 1 on rappelle les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev qui sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans la deuxième partie de ce Chapitre on rappelle la définition et les propriétés des opérateurs monotones.

Le Chapitre 2 concacré l'étude de la topologie faible et faible étoile, pour lesquelles la boule unité fermé est compacte, ce qui permet à partir des suites obtenues par la méthode de Faedo-Galerkin (Chapitre 3), d'extraire des sous suites convergentes.

le dernier Chapitre est consacrée à l'étude des problèmes aux limites non linéaires du type

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f \ \text{, dans}\Omega \ \ Q_T = \Omega \times]0, T[\\ u = g \quad \text{, sur } \ \Gamma = \partial\Omega. \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \ \Omega, \ \ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

où A est un opérateur monotone.

On traite, en particulier le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \text{ dans } Q_T = \Omega \times]0, T[\\ u = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \ \Omega, \ \ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

En commençant par le cas $p > 2$ puis on généralise par une petite modification dans la démonstration au cas $1 < p < 2$. Il clair que pour $p = 2$, l'équation du problème se réduit à l'équation de la chaleur. On traite aussi une condition aux limites du type Neumann.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev et opérateurs monotones

Pour toute la suite, Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, +\infty[$ et p' son conjugué; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Définition 1.1 L'espace $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compact dans Ω . i.e.

$$D(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega) \text{ et } \mathit{supp}\, u \ \subset \ K \ \subset \ \Omega,\ \text{K compact}\}$$

Définition 1.2

$$L^p(\Omega) = \left\{ u :\ \Omega\ \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_{\Omega} \mid f(x) \mid^p dx < +\infty \right\}.$$

$$\textit{Il est muni de la norme } :\| \ u \ \| = \left(\int_{\Omega} \mid u(x) \mid^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.3

1. $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach .
2. En particulier pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\ dx$

Remarque 1.4 Si

$$u \in L^p(\Omega) \quad \text{alors } |u|^{p-2}\, u \ \in \ L^{p'}(\Omega) \ \textit{où} \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

car

$$\int_\Omega \left|| \ u \ |^{p-2} \ u\right|^{p'} dx = \int_\Omega | \ u \ |^{(p-1)p'} \ dx = \int_\Omega | \ u \ |^p \ dx$$

Définition 1.5 Soit X un espace de Banach de norme $\| \ . \ \|_X$ et $I \subset \mathbb{R}$.
On note :

$$L^p(I;X) := \left\{ u : t \in I \mapsto u(t) \in \ X \text{ et } \int_I \| \ u(t,.) \ \|_X^p \ dt \ < \ +\infty \right\}$$

Définition 1.6 L'application : $u \mapsto \left(\int_I \| \ u(t) \ \|_X^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(I;X)$. De plus, cet espace est un espace de Banach .

1.1 Les espaces de Sobolev

<u>**Notations**</u> : Pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{et} \quad D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} ....\partial x_n^{\alpha n}$$

.

Définition 1.7 *[1]* On note par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), | \ \alpha \ | \leq m\}$$

il est muni de la norme :

$$\| \ u \ \| = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \ D^\alpha u \ \|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} .$$

Proposition 1.8
1. *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

2. En particulier pour $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ noté $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 1.9
1. $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n, D(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Exemple : Pour : $\Omega =]0, 1[$, $m = 1$ *et* $p = 2$, soit $u \in D(\Omega)^\perp$. Alors

$$< u, \varphi >_{H^1} = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega (u'\varphi' + u\varphi) = 0$$
$$\Rightarrow < -u'' + u, \varphi >_{D' \times D} = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$
$$\Rightarrow -u'' + u = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\Omega)$$
$$\Rightarrow \ u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \neq 0.$$

Donc

$$u \neq 0 \ et \ u \in D(\Omega)^\perp \Leftrightarrow D(\Omega) \text{ n'est pas dense dans } H^1(\Omega).$$

Définition 1.10 On note: $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$ *l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.
D'aprés la définition de $W_0^{m,p}(\Omega)$, l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$.
En d'autres termes :
$\forall u \in W_0^{m,p}(\Omega); \exists (\varphi_k) \subset D(\Omega) : \| \varphi_k - u \|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \ (k \to +\infty)$.

On a vu dans la remarque (1.9) que, $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.
On définit alors :

$$D(\overline{\Omega}) = \{u\,|_\Omega \ : u \in D(\mathbb{R}^n)\}$$

où $u|_\Omega$ désigne la restriction de u à Ω.

Proposition 1.11 $D(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

1.1.1 Traces sur $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $\Gamma = \partial\Omega$ *(le bord de* Ω*).*

Théorème 1.12 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & C^\infty(\Gamma) \\ u & \longmapsto & \gamma_0 u = u|_\Gamma \end{array}$$

est linéaire et continue de $D(\overline{\Omega})$ *muni de la norme de* $W^{m,p}(\Omega)$ *dans* $C^\infty(\Gamma)$ *muni de la norme de* $W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$*.*
Elle se prolonge alors en une application linéaire et continue notée encore γ_0*.*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : W^{m,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \\ u & \longmapsto & \gamma_0 u \end{array}$$

De plus elle est surjective .

Dans la suite on prend $m = 1$, et c'est suffisant pour notre travail.

Proposition 1.13 *Si* Ω *est régulier, on a :*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \ \text{ et } \ \gamma_0 u = 0 \ sur \ \Gamma \right\}.$$

Théorème 1.14 *(Inégalité de Poincaré)*
Si Ω *est borné dans une direction (au moins) alors :*
$\exists \ c > 0 \ , \ \| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Définition 1.15 Le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est *noté* $W^{-1,p'}(\Omega)$ où p' est le conjugué de p.

Proposition 1.16 *soit* $T : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *une application linéaire. Alors*

$$T \in W^{-1,p'}(\Omega) \Leftrightarrow \exists \ c > 0 \, , \ | \ T(\varphi) \ | \ \leq \ c \| \varphi \|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall \ \varphi \in D(\Omega).$$

Théorème 1.17 *(caractérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$)*

$$f \in W^{-1,p'}(\Omega) \Longleftrightarrow f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i f_i, \quad f_0, f_1, ..., f_n \in L^{p'}(\Omega).$$

1.1.2 Les injections de Sobolev

Théorème 1.18 *[1] - Soit $1 \leq p < N$, alors $W^{1,P}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ où p^* est donné par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,*
et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n).$$

On note alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Corollaire 1.19 *Le cas limite $p = N$*
- On a $W^{1,N}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [N, +\infty[$ avec injection continue.

Théorème 1.20 *- Soit $p > N$, alors*

$$W^{1,P}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ avec injection continue.}$$

1.2 Les opérateurs monotones

Pour toute la suite, on note par V un espace de Banach de norme $\| \, . \, \|$, et V' son dual de norme $\| \, . \, \|_*$
Exemple : Etude de l'opérateur A défini par :

$$A(\varphi) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } V = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Propriétés axiomatiques de A.

Proposition 1.21 *Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $Au \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et*

$$\| Au \|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \| u \|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} .$$

De plus, si $u \in L^p(0,T\,;W_0^{1,p}(\Omega))$ alors $Au \in L^{p'}(0,T\,;W^{-1,p'}(\Omega))$ et on a :

$$\| Au \|_{L^{p'}(0,T\,;W_0^{-1,p'}(\Omega))} \leq \| u \|^{p/p'}_{L^p(0,T\,;W_0^{1,p}(\Omega))}\,. \tag{1.1}$$

Preuve : Pour u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}| = \left| \left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|$$

car $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega)$, d'aprés la Remarque (1.4)

Utilisant l'inégalité de *Hölder*, on a:

$$|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^{p/p'} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p \leq \| \nabla u \|_p^{p-1} \| v \| \leq \| u \|^{p-1} \| v \|$$

Donc

$$|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}| \leq \| u \|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)} \| v \|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

On obtient alors

$$\| Au \|_* = \sup_{v\in V} \frac{|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}|}{\| v \|} \leq \| u \|^{p-1}\,.$$

On déduit $\int_0^T \| Au(t) \|_*^{p'}\,dt \leq \int_0^T \| u(t) \|^{(p-1)p'}\,dt \leq \int_0^T \| u(t) \|^p\,dt.$

Alors

$$\| Au \|_{L^{p'}(0,T;V')} \leq \| u \|^{p/p'}_{L^p(0,T;V)}\,.$$

Remarque 1.22 On déduit de (1.1) que si u est borné dans $L^p(0,T;V)$ alors, Au est borné dans $L^{p'}(0,T;V')$.

Soit $A : V \to V'$ un opérateur non linéaire.

Définition 1.23 *[2]*

On dit que A est hémicontinu si, $\forall u, v, w \in V$, la fonction

$$\lambda \to (A(u+\lambda v), w) \ \textit{est continue de}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Définition 1.24 On dit que A est monotone si :

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \ \geq 0, \ \ \forall u, v \in V \tag{1.3}$$

où $\langle ., .\rangle$ est le crochet de dualité entre V' et V .

- On peut rattacher les propriétés (1.2) (1.3) de A à une propriété plus générale.

Intoduisons la fonctionnelle sur V :

$$J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \mid D_i v \mid^p dx, \ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

Définition 1.25 Soit $J : V \to \mathbb{R}$ une application.
on dit que J est différentiable au sens de Gateaux en tout $u \in V$, s'il existe une application linéaire continue : $v \to J'(u)v$ de $V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(J(u + \lambda v) \ - J(u)\right) \ = \ J'(u) \cdot v \tag{1.5}$$

Propriétés de J :
1. J est convexe.
2. J est différentiable au sens de Gateaux en tout $u \in V$.
3. $J'(u) = A(u)$.

Proposition 1.26 - *Si la fonctionnelle $v \to J(v)$ est différentiable au sens de Gateaux sur V et convexe alors l'application $u \to J'(u)$ de $V \to V'$ est monotone et hémicontinue .*

Preuve :
D'après la convexité de J on a :

$$J((1-\theta)u + \theta v) \leqslant (1-\theta)J(u) + \theta J(v) \quad \forall \theta \in \,]0,1[\,,$$

$$J(u + \theta(v-u)) \leq \ J(u) + \theta(J(v) - J(u))$$

donc

$$\frac{1}{\theta}\left(J(u + \theta(v-u)) - J(u)\right) \ \leq \ J(v) - J(u),$$

d'où

$$J'(u) \cdot (v-u) \leq J(v) - J(u). \tag{1.6}$$

Echangeant le *rôle* de u et v

$$J'(v) \cdot (u-v) \leq J(u) - J(v) \tag{1.7}$$

Faisant la somme de (1.6) et (1.7) on a :

$$J'(u)(v-u) + J'(v)(u-v) \leq 0$$

donc on trouve

$$(J'(u) - J'(v)) \cdot (u-v) \geq 0.$$

Corollaire 1.27 *Du point* 3. *des propriétés de* J*, on déduit que* A *est monotone et hémicontinue.*

Chapitre 2

La topologie faible et faible étoile

Introduction :
Soit E un espace vectoriel normé de norme $\| \, . \, \|$
On pose $B_E = \{x \in E, \ \| x \| \leq \ 1\}$ la boule unité fermée.
On rappelle le Théorème :

Théorème 2.1 *[1] La boule unité fermé B_E est compacte si et seulement si, E est de dimension finie.*

Donc, si E n'est pas de dimension finie, comme c'est le cas des espaces dont nous travailleront, alors la boule unité fermée B_E n'est pas compacte. Donc, si on a une suite (u_n) bornée dans E, on ne sait pas extraire une sous suites convergente.
Pour pouvoir extraire des sous suites convergentes à partir des suites bornées, on est amené à chercher des topologies pour lesquelles la boule unité fermée B_E est compacte.

2.1 - La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit $f \in E'$, on désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$; telle que :

$$\varphi_f(x) \ = \ \langle f, x \rangle_{E' \times E}, \ \ \forall x \in E.$$

Définition 2.2 La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E qui laisse continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ i.e U est un ouvert pour $\sigma(E, E')$ ssi $\exists\, I$ ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f \in E'$ tq : $U = f^{-1}(I)$.

Remarque 2.3 La topologie $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie usuelle (forte) .
En effet, comme $f \in E'$ alors f est linéaire et continue sur E pour la topologie forte, alors $\forall\, I$ ouvert dans $\mathbb{R}$, on a : $f^{-1}(I)$. est un ouvert de E pour la topologie forte. i.e:
$U \in \sigma(E, E') \Rightarrow U$ est ouvert pour la topologie forte .

Proposition 2.4 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Soit (x_n) une suite dans E.
1. si (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E')$ on dit que (x_n) converge vers x faiblement dans E et on note $x_n \to x$ dans E faible ou $x_n \rightharpoonup x$ dans E.
2. si $\| x_n - x \|_E \to 0$, on dit que (x_n) converge vers x fortement dans E, ou $x_n \to x$ dans E fort .

Le théorème suivant nous permet de mieux manipuler les suites faiblement convergentes .

Théorème 2.5 *Soit (x_n) une suite dans E. On a :*

1. *$x_n \to x$ dans E faible $\Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \ \forall f \in E'$.*
2. *Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \to x$ faiblement .*
3. *Si $x_n \to x$ faiblement, alors $(\| x_n \|)$ est bornée et $\| x \| \leq \liminf \| x_n \|$*
4. *Si $x_n \to x$ faiblement dans E et si $f_n \to f$ fortement dans E' alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Proposition 2.6 - *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement .*

2.1.1 Topologie faible, ensemble convexes et opérateurs linéaires

Théorème 2.7 - *Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé .*

Théorème 2.8 - *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire et continu de E dans F. Alors T est continu de E faible $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$. Et réciproquement.*

2.2 La topologie faible étoile, $\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique.
Sur l'espace dual E', on a déja défini deux topologies :
(a) la topologie forte.
(b) la topologie faible $\sigma(E', E'')$ définie dans (2.2).
On va définir une autre topologie sur E' comme suit :
Pour tout $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle_{E' \times E}, \quad \forall f \in E'.$$

On obtient une famille d'applications linéaires $(\varphi_x)_{x \in E}$ de $E' \to \mathbb{R}$.

Définition 2.9 La topologie faible étoile, sur E' est la topologie la moins fine qui laisse continues toutes les application $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Proposition 2.10 *La topologie faible étoile est séparée .*

Proposition 2.11 - *Soit (f_n) une suite de E'. On a*
(i) $f_n \overset{\star}{\to} f$ pour $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \ \forall x \in E$.
(ii) Si $f_n \to f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \overset{\star}{\to} f$ pour $\sigma(E', E)$.
(iii) Si $f_n \overset{\star}{\to} f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $\| f_n \|$ est bornée et
$\| f \| \leq \liminf \| f_n \|$.
(iv) si $f_n \overset{\star}{\to} f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \to x$ fortement dans E, alors
$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

- En fin, le résultat le plus important pour cette topologie, que nous utiliseront dans le chapitre suivant est :

Théorème 2.12 *L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E', \| f \|_{E'} \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$.*

Remarque 2.13 La boule fermé $B_{E'}$ n'est pas compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$.

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que $B_{E'}$ soit compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$.

- L'injection cannonique

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\mapsto Jx \end{aligned} \tag{2.1}$$

définie par:

$$\langle Jx, f\rangle_{E''\times E'} = \langle x, f\rangle_{E\times E'}$$

est une isométrie i.e

$$\| Jx \|_{E''} = \| x \|_E$$

donc, J est linéaire, continue, injective et à image fermé alors :
$J : E \to J(E)$ est un isomorphisme donc, E est isomorphe à $J(E)$ qui est un sous espace fermé de E''. En d'autre termes par cet isomorphisme, on peut identifier E à un sous espace fermé de E''.

Remarque 2.14 L'application J n'est généralement pas surjective. Mais si elle est surjective, alors E devient isomorphe à E'', on peut donc identifiée E et E'' .

Définition 2.15 Si l'application J est surjective, on dit que E est reflexif.

Exemple :

1. si $1 < p < +\infty$; l'espace L^p est reflexif .
2. L^1 n'est pas reflexif . en effet $(L^1)' = L^\infty$ mais $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$.

Remarque 2.16 Comme $E \subset E''$, alors, sur E', la topologie faible étoile est moins fine que la topologie faible .
En effet, pour $g \in E''$ on a : $\varphi_g(f) = \langle g, f\rangle_{E''\times E} \quad \forall f \in E'$
mais, si $g = J(x) \in J(E)$, alors $\varphi_g(f) = \langle Jx, f\rangle = \langle x, f\rangle_{E\times E'}$
donc, $\varphi_g = \varphi_x$ si $g = J(x) \in J(E) \subset E''$.
Donc, si φ_g est continue $\quad \forall g \in E'' \Rightarrow \varphi_x$ est continue $\forall x \in E$
On déduit alors que tout ouvert U de $\sigma(E', E)$ est ouvert de $\sigma(E', E'')$.

Théorème 2.17 - *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si*

$$B_E = \{x \in E; \| x \| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Remarque 2.18 De ce qui précède, on peut déduire que, si une suite (u_n) est bornée dans un espace E de dimension infinie alors :

1. si E est reflexif, alors on peut extraire une sous suite (x_μ) qui converge faiblement dans E .
2. si E n'est pas reflexif, on peut extraire une sous suite (x_μ) qui converge dans E faible étoile.

Chapitre 3

Méthode de Monotonie

3.1 Equations paraboliques monotones

3.1.1 Le cas p>2

Il s'agit de trouver une fonction

$$u = u(x,t), x \in \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n,\ t\ \in]0,T[,$$

solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \text{ dans } Q_T = \Omega\times]0,T[\qquad (3.1)$$

où $p > 2$ est donné, avec les conditions

$$u = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma = \Gamma \times]0,T[, \qquad (3.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega,\ u_0 \text{ donné.} \qquad (3.3)$$

Nous allons démontrer le résultat suivant, en insistant sur la méthode (de monotonie) que nous allons utiliser (puis généraliser):

Théorème 3.1 *on donne f et u_0 avec les hypothèses*

$$f \in L^{p'}(0,T\,;\,W^{-1,p'}(\Omega)),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{3.4}$$

$$u_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.5}$$

Il existe alors une fonction u et une seule telle que

$$u \in L^p(\,0,T\,;\,W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{3.6}$$

et vérifie (3.1) - (3.3) .

Le théorème suivant nous permet de justifier la condition initiale (3.3)

Théorème 3.2 *Soit V un espace de Banach réflexif contenu dans un espace de Hilbert H, $V \subset H$ avec injection continue, V étant dense dans H; identifiant H à son dual et V' désignant le dual de V, on peut alors identifier H à un sous-espace de V', de sorte que*

$$V \subset H \subset V'.$$

Si on donne alors une fonction $u \in L^p(0,T;V)$ telle que $u' \in L^{p'}(0,T;V')$, la fonction u est (aprés modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) continue de $[0,T] \to H$ et l'application $u \to u(0)$ est surjective sur H.

Remarque 3.3 Posons

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{3.7}$$

D'aprés la proposition (1.21) l'opérateur A applique $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et que si u vérifie (3.6) alors $A(u) \in L^{p'}(0,T\,;\,W^{-1,p'}(\Omega))$.
Il résulte alors de (3.6) et de l'équation (3.1) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = f - Au \in L^{p'}(0,T\,;\,W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{3.8}$$

Du fait que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ car $p > 2$, on déduit alors du Théorème (3.2) que, en particulier, u est presque partout égale à une fonction continue de $[0, T] \to L^2(\Omega)$, de sorte que la condition initiale (3.3) a un sens.

Remarque 3.4 La condition aux limites (3.2) est «contenue» dans l'appartenance (presque partout) de $u(t)$ à $W_0^{1,p}(\Omega)$.

3.1.2 Démonstration de l'existence

On utilise la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à approcher l'espace V par une suite d'espaces de dimensions finies et donc approcher le problème par une suite de problèmes posés dans des espaces de dimensions finies. On pose :
$E_m =< w_1, ..., w_m >$ l'espace *engendré par les vecteures*$(w_1, ..., w_m)$, on introduit $u_m(t)$ « solution approchée» du *problème* de la façon suivante :
On cherche $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) \cdot w_j$, vérifiant :

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_j) \; + \; (A(u_m(t), w_j) \; = \; (f(t), w_j), \quad 1 \leq j \leq m, \\ u_m(0) \; = \; u_{0m} \; \in \; [w_1, ..., w_m] \; , u_{0m} \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.9}$$

où (,) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ défini dans la remarque (1.3). En multipliant (3.9) par $u_j(t)$ en faisant la somme sur j et en intégrant de 0 a t , on obtient :

$$\int_0^t (u'_m(\sigma), u_m(\sigma))d\sigma + \int_0^t (A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma))d\sigma = \int_0^t f(\sigma), u_m(\sigma)d\sigma.$$

Mais

$$(u'_m(\sigma) \cdot u_m(\sigma)) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma} \mid u_m(\sigma) \mid^2,$$

alors on déduit de (3.9) que

$$\frac{1}{2} \mid u_m(t) \mid^2 + \int_0^t (A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma))d\sigma = \int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)d\sigma) + \frac{1}{2} \mid u_{0m} \mid^2 \tag{3.10}$$

D'une part, on a pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$< A\varphi, \varphi > = \left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \varphi\right\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p} = \int_\Omega |\nabla\varphi|^p \;\geq\; \alpha \parallel \varphi \parallel^p,$$

d'aprés l'inégalité de poincaré (1.14). Donc l'opérateur A vérifie :

$$\langle A(u), u\rangle_{V'\times V} \geq \alpha \parallel u \parallel^p,\ \alpha > 0,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.11}$$

et donc,

$$\int_0^t \langle A(u_m(\sigma)), u_m(\sigma)\rangle d\sigma \geq \alpha \int_0^t \parallel u_m(\sigma) \parallel^p d\sigma \tag{3.12}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))d\sigma &\leq \int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_* \cdot \parallel u_m(\sigma) \parallel d\sigma \\ &\overset{Holder}{\leq} \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t \parallel u_m(\sigma) \parallel^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Remarquons que d'aprés la concavité de la fonction $x \mapsto \ln x$ on a :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}. \qquad \forall\ a, b > 0\ et\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{3.13}$$

et donc :

$$ab = (\varepsilon a)\cdot\frac{b}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\mathrm{p}}\mathrm{a}^{\mathrm{p}} + \frac{\varepsilon^{-\mathrm{p}'}}{\mathrm{p}'}\mathrm{b}^{\mathrm{p}'},\quad \forall\varepsilon > 0 \tag{3.14}$$

On aura alors

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))d\sigma \leq \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma + \frac{\varepsilon^p}{p}\int_0^t \parallel u_m(\sigma) \parallel^p d\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $\varepsilon^p/p = \alpha/2$, on a :

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma))d\sigma \leq c_1 \int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \parallel u_m(\sigma) \parallel^p d\sigma. \tag{3.15}$$

De plus, comme $u_{0m} \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ alors :

$$\exists\ c_2 > 0 : \| u_{0m} \|_{L^2(\Omega)} \leq c_2. \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

De (3.12), (3.15) et (3.16) on déduit que:

$$\frac{1}{2} \mid u_m(t) \mid^2 + \alpha \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma \ \leq\ c_1 \int_0^t \| f(\sigma) \|_*^{p'} \, d\sigma + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma + c_2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \frac{1}{2} \mid u_m(t) \mid^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma \ &\leq\ c_1 \int_0^t \| f(\sigma) \|_*^{p'} \, d\sigma + c_2 = c_3. \\ &\leq\ c_1 \int_0^T \| f(\sigma) \|_*^{p'} \, d\sigma + c_2 = c_4. \end{aligned}$$

On déduit alors :
$\sup\limits_{t \in [0,T]} \mid u_m(t) \mid_{L^2(\Omega)}^2 \ \leq\ c_3$ et $\int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \quad d\sigma \ \leq c_3 \ \ \forall t \in [0,T]$.

Et donc

$$\int_0^T \| u_m(\sigma) \|^p \quad d\sigma \ \leq c_3.$$

Alors la suite (u_m) *demeure dans un borné de* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V)$. (3.17)

De ce résultat et de l'inégalité (1.1), la suite (Au_m) reste dans un borné de $L^{p'}(0,T;V')$.
Du fait que les espaces $L^2(\Omega), L^p(0,T;V)$ *et* $L^{p'}(0,T;V')$ sont reflexifs et que l'espace $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ne l'est pas alors, d'aprés la remarque (2.18) on peut extraire une sous-suite (u_μ) telle que :

$$u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \text{faible étoile}, \tag{3.18}$$

$$u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad L^p(0,T;V) \ \text{faible}, \tag{3.19}$$

$$u_\mu(T) \to \xi \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \ \text{faible}, \tag{3.20}$$

$$A(u_\mu) \to \chi \quad \text{dans} \quad L^{p'}(0,T;V') \ \text{faible}. \tag{3.21}$$

Introduisons $\widetilde{u}_m(t), A(\widetilde{u_m}(t)), ...,$ prolongement à $\mathbb{R}$ de $u_m(t), A(u_m(t)), ...$ par

0 hors de $[0, T]$; alors (3.9) donne

$$\left\{ \left(\frac{d}{dt}\widetilde{u_m}(t), w_j\right) + A(\widetilde{u_m}(t), w_j) = (\widetilde{f}(t), w_j) + (u_{0m}, w_j)\delta(t-0) - (u_m(T), w_j)\delta(t-T). \right. \tag{3.22}$$

On peut maintenant passer à la limite dans (3.22) avec $m = \mu$ et j fixé , d'où l'on déduit:

$$\left(\frac{d}{dt}\widetilde{u}, w_j\right) + (\widetilde{\chi}, w_j) = (\widetilde{f}, w_j) + (u_0, w_j)\delta(t-0) - (\xi, w_j)\delta(t-T) \ \forall j \tag{3.23}$$

et par conséquent

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \widetilde{\chi} = \widetilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \tag{3.24}$$

Restreignant (3.24) à $]0, T[$, on en déduit que

$$u' + \chi = f, \tag{3.25}$$

d'où $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, donc d'aprés le Théorème (3.2) $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens. Comparant à (3.24) on en déduit que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \xi$.
On aura donc démontré l'existence d'une solution si l'on montre (c'est le point crucial de la démonstration) que

$$\chi = A(u). \tag{3.26}$$

De la propriété de monotonie de A (1.3) résulte que

$$\chi_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t))dt \geq 0 \ \ \forall v \in L^p(0, T; V). \tag{3.27}$$

Or de (3.10) résulte que

$$\int_0^T (A(u_\mu), u_\mu)dt = \int_0^T (f, u_\mu)dt + \frac{1}{2} \mid u_{0\mu} \mid^2 - \frac{1}{2} \mid u_\mu(T) \mid^2$$

et donc

$$\chi_\mu = \int_0^T (f, u_\mu)dt + \frac{1}{2} \mid u_{0\mu} \mid^2 - \frac{1}{2} \mid u_\mu(T) \mid^2 - \int_0^T (A(u_\mu), v)dt - \int_0^T (A(v), u_\mu - v)dt \tag{3.28}$$

D'aprés (3.18) - (3.21) on a :

$$\int_0^T (f, u_\mu)dt \quad \to \quad \int_0^T (f, u)dt, \tag{3.29}$$

$$\int_0^T (A(u_\mu), v)dt \quad \to \quad \int_0^T (\chi, v)dt, \tag{3.30}$$

$$\int_0^T (A(v), u_\mu)dt \quad \to \quad \int_0^T (A(v), u)dt, \tag{3.31}$$

D'aprés le Théorème (2.5) point 3.

$$\liminf \mid u_\mu(T) \mid^2 \geq \mid u(T) \mid^2 .$$

Alors, en prennant la $\limsup \chi_\mu$ on obtient :

$$\int_0^T (f, u)dt + \frac{1}{2} \mid u_0 \mid^2 - \frac{1}{2} \mid u(T) \mid^2 - \int_0^T (\chi, v)dt - \int_0^T (A(v), u - v)dt \geq 0. \tag{3.32}$$

En multipliant (3.25) par u et un intégration sur $[0, T]$, on obtient

$$\int_0^T (f, u)dt + \frac{1}{2} \mid u_0 \mid^2 - \frac{1}{2} \mid u(T) \mid^2 = \int_0^T (\chi, u)dt. \tag{3.33}$$

En passant à la limite ($\mu \to +\infty$) dans (3.28) et en utilisant (3.29) - (3.33) on obtient

$$\int_0^T (\chi - A(v), u - v)dt \geq 0, \qquad \forall v \in L^p(0, T; V) \tag{3.34}$$

En prenant $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, *avec* $w \in L^p(0, T; V)$ quelconque; Alors (3.34) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)dt \geq 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V).$$

donc (comme $\lambda > 0$)

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)dt \geq 0; \quad \forall w \in L^p(0, T; V). \tag{3.35}$$

Faisant $\lambda \to 0$ dans (3.35) d'aprés l'hémicontinuité de A (définition (1.23)) et d'aprés le Théorème de Lebesgue on en déduit que

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)dt \geq 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V). \tag{3.36}$$

Prenant maintenant $v = u + \lambda w$ dans (3.34), on aboutit, avec les mêmes arguments, à :

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)dt \leq 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V). \tag{3.37}$$

De (3.36) et (3.37) on a:

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)dt = 0 \quad \forall w \in L^p(0, T; V),$$

donc $\chi - A(u) = 0$ dans $L^{p'}(0, T; V')$ et on déduit alors que

$$\chi = A(u).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution u du problème (3.1) - (3.3).

Remarque 3.5 l'hémicontinuité et la monotonie de l'opérateur A nous ont permi d'obtenir le résultat précédent .

3.1.3 Démonstration de l'unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème . Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, \ w(0) = 0,$$

En multipliant par w on a :

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0$$

et grâce à la monotonie :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid w(t) \mid^2 \leq 0,$$

donc l'application : $t \mapsto \mid w(t) \mid^2$ est décroissante . Comme elle est positive et $\mid w(0) \mid^2 = 0$ alors $\mid w(t) \mid^2 = 0 \ \forall t \ \Rightarrow \ w = 0,$ ce qui preuve l'unicité de la solution du problème (3.1)

3.1.4 Un résultat général

Nous avons souligné dans les démonstrations précédentes les hypothèses qui sont intervenues. Nous avons donc implicitement démontré le résultat suivant:

Théorème 3.6 *-Soient V, H comme dans la situation du Théorème* (3.2)*, V étant séparable. Soit A un opérateur (non linéaire) de $V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :*

$$A \ \textit{est hémicontinu et} \ \parallel A(v) \parallel_* \leq c \parallel v \parallel^{p-1}, \tag{3.38}$$

$$A \ \textit{est monotone}, \tag{3.39}$$

$$\langle A(v), v \rangle \geq \alpha \parallel v \parallel^p, \alpha > 0, \ \forall v \in V \ \ (2 < p < \infty). \tag{3.40}$$

Soient f et u_0 donnés avec

$$f \in L^{p'}(0, T; V') \ \text{et} \ u_0 \in H. \tag{3.41}$$

Il existe alors une fonction u et une seule telle que

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T;V), \dots\dots\dots\dots(1) \\ u' + A(u) = f, \ \dots\dots\dots\dots(2) \\ u(0) = u_0 \ \dots\dots\dots\dots(3) \end{cases} \tag{3.42}$$

Notons que (1)*,* (2) *et* (3.38) *-* (3.41) *donne* $u' \in L^{p'}(0,T;V')$ *et donc la condition initiale* (3) *a un sens, d'aprés le Théorème* (3.2)*.*
Dans les applications (comme on verra dans les Exemples 3.1.5 *et* 3.1.6 *ci-dessous), l'hypothèse* (3.40) *peut être trop forte. Il est utile d'introduire la variante suivante: on se donne sur* V *une semi-norme* $[v]$ *telle que*

$$\textit{il existe}\, \lambda > 0 \ \text{ et } \ \beta > 0 \text{ tels } \ \text{que } [v] + \lambda \mid v \mid \geq \beta \parallel v \parallel \quad \forall v \in V \tag{3.43}$$

et on suppose que

$$\langle A(v), v \rangle \geq \alpha \, [v]^p, \quad 1 < p < \infty. \tag{3.44}$$

On a alors le

Théorème 3.7 *-Les hypothèses sont celles du Théorème* (3.6) *mais avec* (3.40) *remplacée par* (3.43) *et* (3.44)*. Alors les conclusions du Théorème* (3.6) *sont encore valables .*

Preuve : utilisant les mêmes calculs de la démonstration du Théorème (3.6), on arrive à l'inégalité :

$$\frac{1}{2} \mid u_m(t) \mid^2 + \alpha \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \leq \frac{1}{2} \mid u_{0m} \mid^2 + \int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_* \parallel u_m(\sigma) \parallel d\sigma. \tag{3.45}$$

Mais d'après (3.43) et l'inégalité de *Hölder* le deuxième membre de (3.45) est majoré par

$$\frac{1}{2} \mid u_{0m} \mid^2 + c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \right)^{1/p}$$
$$+ c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{1/p}.$$

D'une part utilisant (3.15) on a :

$$\left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \right)^{1/p} \leq c_2 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right) + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma$$
$$\leq c_3 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma.$$

D'autre part, comme $a = 1 \cdot a \leq \frac{1}{2}(1 + a^2)$ alors :

$$\left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{1/p} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{2/p} \right)$$

donc

$$c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{1}{2} c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left[\left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right].$$

Et comme : $\parallel u_{0m} \parallel \; \leq \; c_4$
Alors le deuxième membre de (3.45) est majoré par

$$\frac{1}{2} \mid u_{0m} \mid^2 + c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \right)^{1/p}$$
$$+ c_1 \left(\int_0^t \parallel f(\sigma) \parallel_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{1/p}$$
$$\leq c_5 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma + c_6 \left[\left(\int_0^t \mid u_m(\sigma) \mid^p d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right].$$

et donc (3.45) donne

$$| \ u_m(t) \ |^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \leq c_7 + c_8 \left(\int_0^t | \ u_m(\sigma) \ |^p \ d\sigma \right)^{2/p}. \tag{3.46}$$

On déduit de (3.46) que

$$| \ u_m(t) \ |^2 \leq \ c_7 + c_8 \left(\int_0^t | \ u_m(\sigma) \ |^p \ d\sigma \right)^{2/p}$$

et donc,

$$| \ u_m(t) \ |^p \leq \ c_9 + c_{10} \int_0^t | \ u_m(\sigma) \ |^p \ d\sigma,$$

On déduit alors du lemme de Gronwall que :

$$| \ u_m(t) \ | \leq c_{11}, \tag{3.47}$$

ce qui joint à (3.46) donne:

$$\int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \leq c_{12}$$

et grâce à (3.43) on a donc

$$\int_0^t \| \ u_m(\sigma) \ \|^p \ d\sigma \leq c.$$

On achève comme à la démonstration du Théorème (3.6).

3.1.5 Applications des résultats généraux

Opérateur (3.1) avec les conditions aux limites du type « Neumann ». On prend A donné par

$$(A(u), v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega | \ D_i u \ |^{p-2} \ D_i u \ D_i v \ dx = a(u, v), \quad p > 2 \tag{3.48}$$

Pour $u, v \in V = W^{1,p}(\Omega)$; prenant $H = L^2(\Omega)$, on vérifie que l'on est dans le cas (3.43) (3.44), avec

$$[v] = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \mid D_i v \mid^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On peut donc appliquer le Théorème (3.7)
On choisit $f \in L^{p'}(0,T;V')$ de la façon suivante :

$$(f(t), v) = \int_{\Omega} f_0(x,t)\, v(x) \; dx + \langle g(x,t), v(x) \rangle_{W^{-1/p',p'}(\Gamma) \times W^{1/p,p}(\Gamma)}, \tag{3.49}$$

où

$$f_0 \in L^{p'}(0,T\,; L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q_T) \tag{3.50}$$

et

$$g \in L^{p'}(0,T\,; W^{-1/p',p'}(\Gamma)); \tag{3.51}$$

où $W^{1/p',p}(\Gamma) = W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ est l'espace des traces sur Γ des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1/p',p'}(\Gamma)$ est son dual topologique.
L'équation (3.42) équivaut à

$$\langle u'(t)), v \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v) = (f(t), v) \;\; \forall v \in V. \tag{3.52}$$

On a donc l'existence et l'unicité d'une fonction u dans $L^p(\,0,T\,;\, W^{1,p}(\Omega))$ telle que l'on ait

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f_0 \;\; \text{dans} \;\;\; Q(t), \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \;\; \cos(n, x_i) = g \;\;\; sur \;\; \Sigma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.53}$$

L'égalité (2) du problème (3.53) est une condition aux limites du type Neumann.

Remarque 3.8 Il faut en fait justifier la condition aux limites du problème

(3.53) ce qui peut être fait par des méthodes analogues à celles utilisées dans Lions-Magenes [3], que nous ne pouvons pas reproduire dans ce manuscrit.

Remarque 3.9 Dans le problème traité au n^{ro} (3.1) on peut remplacer la condition « homogène » (3.2) par

$$u = g \quad sur \;\; \Sigma, \tag{3.54}$$

où g est donnée sur Σ de façon qu'il existe w vérifiant

$$\begin{cases} w \in L^p(\,0,T\,;\,W^{1,p}(\Omega)),\;\; w' \in L^{p'}(0,T\,;W^{-1,p'}(\Omega)), \\ w|_\Gamma = g. \end{cases} \tag{3.55}$$

si l'on introduit alors $\psi = u - w$, tout revient à chercher ψ solution de

$$\begin{cases} \psi \in L^p(\,0,T\,;\,W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \psi' + A(\psi + w) = f - w' = f_1 \in L^{p'}(0,T\,;W^{-1,p'}(\Omega)) \\ \psi(0) = u_0 - w(0) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Les raisonnements utilisés pour la démonstration du Théorème (3.1) s'adaptent à cette situation .

Remarque 3.10 On résoudra de façon analogue le cas où l'on a une condition de Dirichlet sur $\Gamma_1 \times]0,T[$ et du type Neumann (i.e. du type de l'équation (2) (3.53)) sur $\Gamma_2 \times]0,T[$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

3.1.6 Le cas $1 < p < 2$

On considère le problème du n^{ro}2.1 mais avec $1 < p < 2$. Alors on n'a pas nécessairement $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (l'inclusion n'est vraie que si $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ Théorème (1.18)) et on est alors conduit à introduire

$$V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \;\; H = L^2(\Omega) \tag{3.56}$$

L'espace V est muni de la norme usuelle.

$$\| u \|_V = \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

On a

$$V' = W^{-1,p'}(\Omega) + L^2(\Omega).$$

On pose :

$$[v] = \| v \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \ \ semi - norme \ \ sur \ V, \ \ et \ \ |v| = \| v \|_{L^2(\Omega)}$$

On a bien

$$\| v \|_V = [v] + |v|, \ \ qui\ est\ l'équivalent\ de\ la\ condition\ (3.43)$$

avec $\lambda = \beta = 1$.

Si A est donné par (3.7) on a :

$$\langle Av, v \rangle = \sum \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p dx = \| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} = [v]^p.$$

On obtient la condition (3.44) avec $\alpha = 1$.

Donc le Théorème (3.7) est applicable, ce qui montre que les conclusions du Théorème (3.1) sont valables également dans le cas $1 < p < 2$, mais, en utilisant la démonstration du Théorème (3.7).

Remarque 3.11 Pour $p = 2$ l'opérateur A devient le laplacien et l'équation (3.1) n'est autre que l'équation de la chaleur, qui est linéaire. La théorie variationnelle permet de résoudre le problème (3.1)- (3.3).

3.1.7 Opérateurs d'ordre $>$ 2 .

Considérons un exemple simple d'opérateur non linéaire d'ordre 4.

Pour $u, v \in W_0^{2,p}(\Omega)$, on pose

$$a(u, v) = \int_\Omega | \triangle u |^{p-2} \triangle u \triangle v \, dx,$$

Ce qui définit l'opérateur A de $V = W_0^{2,p}(\Omega) \to V' = W^{-2,p'}(\Omega)$:

$$A(u) = \triangle(| \triangle u |^{p-2} \triangle u).$$

Cet opérateur est égal à $J'(u)$ si

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} \mid \triangle u \mid^{p} dx$$

et on peut donc appliquer le Théorème (3.6). On a donc l'existence et l'unicité de $u \in L^p(\,0, T\,;\, W_0^{2,p}(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \triangle(|\triangle u|^{p-2}\,\triangle u) = f, \\ u = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.57}$$

3.1.8 Résultats de régularité

Naturellement, lorsque la méthode de monotonie est applicable, toute estimation a priori supplémentaire donne un résultat de régularité; voici un exemple.

Théorème 3.12 - *On se place dans les hypothèses du Théorème* (3.1) *avec en outre*

$$f, f' \in L^{p'}(Q), \quad f(0) \in L^2(\Omega), \quad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad A(u_0) \in L^2(\Omega).$$

Alors la solution u donnée par le Théorème (3.1) satisfait en outre à

$$u' \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.58}$$

$$\mid D_i u \mid^{\frac{p-2}{2}} D_i u' \in L^2(Q) \quad \forall i. \tag{3.59}$$

Preuve :

On dérive (3.9) par rapport à t ; on suppose que $A(u_{0m})$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$ et on applique à u_m les estimations analogues à celles de la méthode de la compacité (que nous n'avons pas traité dans ce travail).on en déduit que u'_m (resp.$\mid D_i u_m \mid^{\frac{(p-2)}{2}} D_i u'_m$) demeure dans un borné de$L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ (resp. de $L^2(Q)$ et puisque on sait (d'aprés la démonstration du Théorème (3.1) que $u_m \to u$ dans $L^p(0,T\,;W^{1,p}(\Omega))$ faible, on en déduit (3.58) et (3.59) .

3.2 Problèmes Stationnaires

3.2.1 Premier résultat général

Théorème 3.13 *-Soit V un espace de Banach réflexif séparable. Soit A un opérateur de $V \to V'$ ayant les propriétés :*

$$A \text{ est borné hémicontinu } (cf. \text{ propriétés axiomatiques de } A), \tag{3.60}$$

$$A \text{ est monotone}, \tag{3.61}$$

$$\frac{(A(v),v)}{\| v \|} \to +\infty \;\; si \;\; \| v \| \to \infty. \tag{3.62}$$

Alors pour $f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que

$$A(u) = f. \tag{3.63}$$

En d'autre termes l'opérateur A est surjectif de $V \to V'$.

Pour la démonstration de ce Théorème, on a besoin du résultat suivant.

Lemme 3.14 *-Soit $\xi \to P(\xi)$ une application continue de $\mathbb{R}^m$ dans lui $-$ même telle que, pour un $\rho > 0$ convenable, on ait :*

$$(P(\xi),\xi) \geq 0 \;\; \forall \xi \; tel\,que \;\; |\xi| = \rho, \tag{3.64}$$

où si $\xi = \{\xi_i\}$, $\eta = \{\eta_i\} \in \mathbb{R}^m$:

$$(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \; \eta_i, |\xi| = (\xi,\xi)^{1/2}. \tag{3.65}$$

Alors il existe ξ, $|\xi| \leq \rho$, tel que $P(\xi) = 0$.

Démonstration
On raisonne par l'absurde; si $P(\xi) \neq 0$ dans la boule $K = \{|\xi||\xi| \leq \rho\}$, on considère l'application de K dans K définie par :

$$g : \xi \to -P(\xi)\frac{\rho}{|P(\xi)|} \tag{3.66}$$

qui est alors continue; le Théorème du point fixe de Brouwer donne alors l'existence d'un ξ tel que

$$\xi = -P(\xi)\frac{\rho}{|P(\xi)|}. \tag{3.67}$$

d'où $|\xi| = \rho$ et prenant le produit scalaire des deux membres de (3.67) par ξ:

$$(P(\xi), \xi) = -\rho|P(\xi)| < 0.$$

Absurde.
Preuve du Théorème :
1. Soit $w_1 ... w_m ...$ une « base » de V; on cherche $u_m \in [w_1, ..., w_m]$, vérifiant

$$(A(u_m), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leq j \leq m. \tag{3.68}$$

L'existence de u_m suit du Lemme (3.14) en notant que

$$(A(u_m), u_m) - (f, u_m) \geq (A(u_m), u_m) - \| f \| \| u_m \| \tag{3.69}$$

et donc, d'après (3.62), $(A(u_m), u_m) - \| f \| \| u_m \| \geq 0$ pour $\| u_m \| = \rho, \rho$ assez grand ; Car

$$\begin{aligned} &\lim_{\|u_m\| \to +\infty} \frac{(A(u_m), u_m)}{\| u_m \|} = +\infty \\ &\Rightarrow \forall\, c \in \mathbb{R},\, \exists\, \rho > 0, \| u_m \| = \rho \Rightarrow \frac{(A(u_m), u_m)}{\| u_m \|} \geq c. \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$La\, fonction\, v \;\to\; (A(v), v) \;\; est\ continue\ sur\, [w_1, ..., w_m] \tag{3.71}$$

Les hypothèses (3.60) et (3.61) entraînent que A est continu de V fort $\rightarrow V'$ faible (cf. propriété 1 plus générale).
Par ailleurs (3.68) donne

$$(A(u_m), u_m) = (f, u_m) \ \leq \| \ f \ \|_* \| \ u_m \ \|$$

ce qui, grâce à (3.62) montre que

$$\| \ u_m \ \| \leq \ c.$$

En effet si (u_m) n'est pas bornée alors :
$\exists (u_\mu)$ tq : $\| \ u_\mu \ \| \rightarrow +\infty$ ce qui implique $\frac{(A(u_\mu), u_\mu)}{\| u_\mu \|} \rightarrow +\infty$,
D'autre part on a :

$$\begin{aligned} &(A(u_\mu), u_\mu) \ \leq \| \ f \ \| \cdot \| \ u_\mu \ \| \\ &\Rightarrow \frac{(A(u_\mu), u_\mu)}{\| \ u_\mu \ \|} \leq \| \ f \ \| \ . \end{aligned}$$

Contradiction.
Comme A est borné, il en résulte que $\| \ A(u_m) \ \|_* \leq \ c$.
2. On peut donc extraire une suite (u_μ) telle que

$$\begin{cases} \quad u_\mu & \rightarrow \ u \quad \text{dans} \quad V \ faible, \\ A(u_\mu) & \rightarrow \ \chi \quad \text{dans} \quad V' \ faible. \end{cases} \tag{3.72}$$

Passant à la limite dans (3.68) (pour $m = \mu, j$ fixé) on voit que

$$(\chi, w_j) = (f, w_j) \quad \forall j,$$

et donc

$$\chi = f. \tag{3.73}$$

Par ailleurs, d'après (3.68), $(A(u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \rightarrow (f, u)$ et donc, d'après (3.73) :

$$(A(u_\mu), u_\mu) \rightarrow (\chi, u). \tag{3.74}$$

On va voir que (3.72) (3.74) et les hypothèses (3.60) (3.61) entraînent que

$$\chi = A(u). \tag{3.75}$$

Ce qui, joint à (3.73), montre le Théorème.
3. On part de (la monotonie de A).

$$(A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) \ \geq \ 0 \ \ \forall v \in V. \tag{3.76}$$

Utilisant (3.72) (3.74) on peut passer à la limite dans (3.76), d'où

$$(\chi - A(v), u - v) \ \geq \ 0 \ \ \forall v \in V. \tag{3.77}$$

On raisonne alors comme à la fin de la démonstration du Théorème (3.1) pour l'existence.

On prend $v = u - \lambda w, \ \lambda > 0, \ \ w \in V$; (3.77) donne

$$\lambda(\chi - A(u - \lambda w), w) \ \geq \ 0,$$

donc

$$(\chi - A(u - \lambda w), w) \ \geq \ 0,$$

et faisant $\lambda \to 0$: $(\chi - A(u), w) \ \geq \ 0 \ \forall w \in V$, d'où (3.75).

Remarque 3.15 On peut « axiomatiser » la preuve précédente (et cela sera utile dans la suite). L'opérateur A est dit avoir la propriété M si

$$\begin{cases} u_\mu \ \rightarrow \ u \, , \text{dans} \quad V \text{ faible} \\ A(u_\mu) \ \rightarrow \ \chi \, \text{dans} \quad V' \text{ faible} \\ \limsup (A(u_\mu), u_\mu) \quad \leq \quad (\chi, u) \end{cases} \tag{3.78}$$

Alors

$$\chi = A(u). \tag{3.79}$$

Le Théorème (3.13) est valable si l'on remplace (3.61) par (3.78) (3.79) (en effet (3.75) résulte maintenant de (3.74) par définition).

3.2.2 Un Théorème d'unicité

Naturellement l'équation (3.68) admet une solution unique si

$$(A(u) - A(v), u - v) \; > \; 0 \;\; \forall \; u, v \in V, \; u \neq v. \tag{3.80}$$

Voici dans ce sens un résultat plus raffiné :

Théorème 3.16 - *On se place dans les hypothèses du Théorème* (3.13) *et on suppose en outre que :*

$$\textit{La norme } \parallel v \parallel \textit{ est strictement convexe sur la sphère unité de } V, \tag{3.81}$$

$$A(u) = A(v) \Rightarrow \parallel u \parallel = \parallel v \parallel . \tag{3.82}$$

Alors la solution de l'équation (3.63) *est unique .*

Preuve :
1. Vérifions d'abord le résultat suivant : u vérifie (3.63) si et seulement si

$$(A(v) - f, v - u) \;\; \geq \;\; 0 \;\; \forall v \in V. \tag{3.83}$$

En effet si (3.63) a lieu alors

$$(A(v) - f, v - u) = (A(u) - f, v - u) + (A(v) - A(u), v - u) = A(v) - A(u), v - u) \;\; \geq \;\; 0.$$

Réciproquement si l'on a (3.83) alors prenant $v = u + \lambda w, \lambda > 0, w \in V, ona$ (après division par λ):

$$(A(u + \lambda w) - f, w) \;\; \geq 0$$

et faisant $\lambda \to 0$ on en déduit de l'hémicontinité de l'opérateur A que :

$$(A(u) - f, w) \;\; \geq \;\; 0 \;\; \forall w \in V, \tag{3.84}$$

D'où (3.63).
2. L'ensemble des solutions de l'équation $A(u) = f$ est fermé et convexe.

En effet, soit E l'ensemble des solutions et, pour tout $v \in V$, on note par :

$$S_v = \{u \in V; (A(v) - f, v - u) \geq 0\}.$$

a) Montrons que S_v est convexe :
Soit $u_1, u_2 \in S_v$ et $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$ et comme $v = tv + (1-t)v$ on a :

$$\begin{aligned}\langle Av - f, v - u_t\rangle &= \langle Av - f, t(v - u_1)\rangle + \langle Av - f, (1-t)(v - u_2)\rangle \\ &= t\langle Av - f, v - u_1\rangle + (1-t)\langle Av - f, (v - u_2)\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

b) Montrons que S_v est fermé :
Soit $g : u \mapsto g(u) = \langle A(v) - f, v\rangle - \langle A(v) - f, u\rangle = h(u) + c.$
h est linéaire et continue car :
$|h(u)| = |\langle Av - f, u\rangle| \leq \| Av - f \| \cdot \| u \| \leq c \| u \|$.
Donc g est continue.
$S_v = \{u \in V : g(u) \geq 0\} = g^{-1}([0, +\infty[)$
Comme g est continue et $[0, +\infty[$ est fermé de $\mathbb{R}$ alors $g^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé.
d'après (3.83) :

$$E = \bigcap_{v \in V} S_v,$$

qui est fermé comme intersection de convexes fermés.
3. Si (3.82) a lieu, l'ensemble E des solutions de (3.63) est contenu dans la sphère $\| u \| = \rho, \rho$ convenable; comme E est d'après 2. fermé convexe et comme on a supposé la norme $v \to \| v \|$ strictement convexe, il en résulte que E est réduit à un point, ce qui prouve l'unicité de la solution de l'équation (3.63).
Les méthodes précédentes sont voisines de celles utilisées dans l'étude des applications de dualité et c'est pourquoi nous allons brièvement étudier ces applications de dualité.

3.2.3 Applications de dualité

Soit F un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, de norme $\| \ \|$ et soit $\| \ \|_*$ la norme duale sur le dual F', et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre F et F' .
Soit $r \to \Phi(r)$ une fonction continue monotone strictement croissante de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) \to \infty \quad si \quad r \to \infty$.
Une application J de $F \to F'$ est dite « application de dualité » relative à Φ si les conditions suivantes ont lieu :

$$(J(u), u) = \| J(u) \|_* \| u \| \quad \forall u \in F, \tag{3.85}$$

$$\| J(u) \|_* = \Phi(\| u \|) \qquad \forall u \in F. \tag{3.86}$$

Naturellement cette notion dépend de la norme choisie sur F .
Exemples :
1. Si $F = L^p(\Omega)$, $\| u \| = \| u \|_{L^p(\Omega)}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$,
alors

$$J(u) = | u |^{p-2} u.$$

2. Si $F = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\| u \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$,

alors $\quad J(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$

Avant de montrer qu'il existe toujours des opérateurs de dualité, vérifions des propriétés simples de J, résultant de (3.85) (3.86).

Proposition 3.17 - *Toute application de dualité est monotone.*

Preuve : D'après (3.85) on a :

$$(J(u) - J(v), u - v) = \| J(u) \|_* \| u \| + \| J(v) \|_* \| v \| - (J(u), v) - (J(v), u). \tag{3.87}$$

Utilisons ensuite (3.86);posons: $\| u \| = a, \| v \| = b;$ alors (3.87) donne:

$$(J(u) - J(v), u - v) = (\Phi(a) - \Phi(b))(a - b) \geq 0 \tag{3.88}$$

Car Φ est croissante.
On obtient une autre démonstration de la monotonie de l'opérateur A défini dans

Proposition 3.18 *-Si F est strictement convexe, J est strictement monotone.*

Preuve :
Il faut montrer que si $(J(u) - J(v), u - v) = 0$ alors $u = v$.
Il résulte déjà de (3.88) que $\| u \| = \| v \|$.
Notons que si $g \in F', g \neq 0, \| g \|_* = \sup_{\|v\|=1} (g, v)$ et si F est strictement convexe le sup. est atteint en un point unique de la sphère unité; en effet le sup. est atteint sur un ensemble convexe de la sphère unité.
On en déduit que $u = v$. En effet, si $u \neq v$(non nuls.si par exemple $v = 0$ $alors$ $u = 0$.) alors $\frac{u}{\|u\|} \neq \frac{v}{\|v\|}$ (car $\| u \| = \| v \|$) et donc

$$\| J(u) \|_* = \left(J(u), \frac{u}{\| u \|} \right) > \left(J(u), \frac{v}{\| v \|} \right),$$

donc

$$(J(u), v) < (J(u), u),$$

et de même

$$(J(v), u) < (J(v), v),$$

et alors
$0 = (J(u) - J(v), u - v) > (J(u), u) + (J(v), v) - (J(u), u) - (J(v), v) = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion

Lorsque l'opérateur est monotone, la méthode de monotonie est mieux adaptée à l'étude des problèmes non linéaires, car elle nécessité moins d'estimations que, la méthode de compacité.

Références bibliographiques

[1] H. Brezis; Analyse fonctionnelle Théorie et Application 2^e tirage, Masson 1987.

[2] J. L. Lions; Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod Paris 1969.

[3] J.L. Lions-E. Magenes;Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1, Dunod Paris 1968.