REPUE AUBLIQLGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie
Département de Mathématiques

THESE DE MASTER

=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : **Modélisation, Contrôle et Optimitation**

Thème

Fonctions Harmoniques sur les variétés Riemanniennes

Présentée par : **Benali Naima**

Soutenue le : 22 /05/2017

devant le jury composé de :

Encadreur	**Mr BELARBI Lakehal**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinatrice	**Mr Fatouch**	**U. MOSTAGANEM.**
Président		**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2016-2017

Table des matières

Remerciements

Je remercie ALLAH qui m'a donné la force et le courage de faire ce travail.

Il a également exprimé sincères remerciements à Mr. Belarbi Lakehal pour aider et donner des conseils.

Je remercie les membres du jury. Tout d'abord, Mme Aziz Hamani Karima, et Mr. Andasmas Maamar.

Je remercie mes parents pour leur soutien à moi tout au long de mes études.

Enfin, je voudrais remercier tous mes amis.

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à l'étude des applications Harmoniques dans les variétés Riemanniennes.

Une fonction $f : (M,\ g) \to \mathbb{R}$, est dit harmonique si sont Laplacien est nulle. C'est-à-dire que: $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0.$

La motivation des fonctions harmoniques sur les variétés Riemanniennes, est de caractérisées les sous-variétés minimales, c'est-à-dire que la courbure moyenne est nulle.

INTRODUCTION

Les variétés Riemanniennes ont été étudiées où utilisés dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie Riemannienne.

Une fonction $f : (M,\ g) \to \mathbb{R}$, est dit harmonique si sont Laplacien est nulle. C'est à dire que: $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0.$

L'application des fonctions harmoniques sur les sous-variétés Riemanniennes, est de caractérisées les sous-variétés minimales, c'est à dire que la courbure moyenne est nulle.

Mon travail est divisé en deux chapitres:

Le premier chapitre est consacré à donnés quelques notions de bases sur les variétés topologiques, les variétés différentiables, espace tangente, champ de vecteurs, variétés Riemanniennes, métrique Riemannienne, connexion linéaire, dérivée covariante d'un champ de vecteur le long d'une courbe, connexion de Levi-Civita, le gradient Riemannienne d'un champ de vecteurs, et le Laplacien Riemannienne d'une application.

Le deuxième chapitre, nous procèderons à l'étude des fonctions harmoniques sur les variétés Riemanniennes. Nous présenterons: Géodésiques, courbes géodésiques, Energie d'une courbe dans une variété Riemannienne, la première variation de l'énergie d'une courbe, la deuxième variation de l'énergie d'une courbe, la première variation de la longueur d'une courbe, la deuxième variation de la longueur d'une courbe, courbure de Ricci, et on montre que $\Delta_\Sigma X = 2NH$, où X est le vecteur position de la surface Σ et N est le vecteur normal unitaire de la surface Σ et H est la courbure moyenne de la surface Σ et Δ_Σ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la surface Σ, la première variation de L'aire d'une surface, ainsi la deuxième variation de l'aire d'une surface.

Chapitre 1

Généralités sur les variétés Riemanniennes

1.1 Notions de la variété

1.1.1 Variété topologique

Définition 1.1.1 *Une variété topologique est un espace topologique M séparé (espace de Hausdorff) et à chaque point $x \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x, et un homéomorphisme*

$$\varphi : \ U \to W \subset \mathbb{R}^n$$

Où W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 *Le cercle unité est une variété topologique, où*

$$S^1 = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Définition 1.1.2 *Soit M un espace topologique, et U un ouvert de M. Une application*

$$\varphi : \ U \to \varphi(U)$$

est homéomorphisme si φ est bijective et continue et

$$\varphi^{-1} : \ \varphi(U) \to U$$

est continue.

Soit M un espace topologique, et U un ouvert de M. Une application

$$\varphi : \ U \to \varphi(U)$$

est difféomorphisme si φ est bijective et de classe C^k $(1 \leq k \leq +\infty)$ et

$$\varphi^{-1} : \ \varphi(U) \to U$$

de classe C^k.

Définition 1.1.3 *Soit M une variété topologique et $U \subset M$. On dit que le couple $(U,\ \varphi)$ est une carte si et seulement si:*

1. *U un ouvert de M,*

2. *$\varphi : U \to \varphi(U)$ homéomorphisme.*

Définition 1.1.4 *Un atlas de classe C^k $(1 \leq k \leq +\infty)$ sur une variété topologique M est une famille de cartes $\{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i \in I}$ telle que*

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i = M$,

2. *$\forall\ i \neq j$ l'application $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme de classe C^k.*

Définition 1.1.5 *M est une variété différentiable de classe C^k $(k \geq 1)$ si:*

i. *M est une variété topologique,*

ii. *Il existe un atlas $\{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M tel que $\forall\ i \neq j$, $U_i \cap U_j \neq \phi$,*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \ \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est difféomorphisme.

Exemple 1.1.2 *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de l'atlas $(\mathbb{R}^n,\ Id_{\mathbb{R}^n})$ est une variété différentiable.*

1.1.2 Espace tangent

Soit M une variété différentiable de classe C^∞.

Définition 1.1.6 *On définit un courbe différentiable sur M de classe C^∞ comme une application*

$$\gamma : \ ]-\varepsilon,\ \varepsilon[\ \subset \mathbb{R} \to M$$

est de classe C^∞.

Définition 1.1.7 *Un vecteur tangent à la courbe $\gamma(t)$ au point x est une application V_x définie par:*

$$V_x : \text{Ғ}(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \to V_x(f) = \frac{df}{dt}(\gamma(t))\mid_{t=0}$$

Où $\text{Ғ}(M)$ l'ensemble des fonctions différentiable.

Définition 1.1.8 *Sur les courbes différentiables $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \to M$, on définit une relation d'équivalence*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0).$$

Définition 1.1.9 *On appelle espace tangent à M au point x, noté T_xM, l'ensemble des vecteurs tangents à M en point x.*

$$T_xM = \begin{cases} V_x : \text{Ғ}(M) \to \mathbb{R} \\ \quad f \to V_x(f) \end{cases} / f \in C^\infty$$

L'espace T_xM est un espace vectoriel de dimension n, les $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$, $i = 1, ..., n$ forment une base de cet espace.

1.1.3 Champ de vecteurs

Définition 1.1.10 *Soit U un ouvert de M, on appelle champ de vecteur sur U toutes applications*

$$X : U \to TM = \cup_{x \in U} T_xM$$

On note $\chi(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur U.

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.2.1 *Une métrique Riemannienne sur M est une application qui à chaque couple de vecteur $(X, Y) \in (T_xM)^2$ donnée un scalaire $g(X, Y) \in \mathbb{R}$ tel que:*

L'application

$$g: \ T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

$$(X,\ Y) \to g(X,\ Y)$$

est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

On note une métrique g de composantes g_{ij} par

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

Où

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Définition 1.2.2 *On appelle variété Riemannienne tout variété différentiable M muni d'une métrique g. Noté $(M,\ g)$ tel que*

$$\forall\ X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}\ \in T_xM,\ X \neq 0,\ g(X,\ X) = \sum_{i,\ j=1}^{n} X^i g_{ij} X^j > 0.$$

Exemple 1.2.1 *L'espace Euclidienne $\boldsymbol{E}_3$ où $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$ est une variété Riemannienne. Car*

1. $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0$,

2. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible,*

3. *Soit* $X = (V^1,\ V^2,\ V^3)$, $g(X,\ X) = \sum_{i,\ j=1}^{n} X^i g_{ij} X^j = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 > 0.$

1.2.2 Connexion Linéaire

Soit $(M,\ g)$ une variété Riemannienne et $\chi(M)$: L'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Définition 1.2.3 *Il existe une seule application*

$$\nabla : \begin{cases} \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ (X,\ Y) \to \nabla_X Y \end{cases}$$

vérifiant:

i. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,\ Y]$,

ii. $X \cdot g(Y,\ Z) = g(\nabla_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla_X Z)$.

Propriété de ∇

1. ∇ est bilinéaire,

2. $\nabla_{fX}Y = f\ \nabla_X Y$, pour tout fonction $f : M \to \mathbb{R}$ et pour tous les $X,\ Y \in \chi(M)$

3. $\nabla_X(fY) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$.

∇ est complétement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k définis par:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k$$

tels que
$(e_i) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{1 \le i \le n}$ une base de $T_x M$.
En effet, on a alors

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k Y^j\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

et

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$$

Exemple 1.2.2 *Dans la carte* $(\mathbb{R}^3,\ Id_{\mathbb{R}^3})$ *on a*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = 0$ *pour tout* $(i,\ j,\ k)$.

Définition 1.2.4 *Le tenseur de courbure de* $(M,\ g)$ *noté* R *est donnée par:*

$$R:\ \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,\ Y) \to R(X,\ Y)$$

Où

$$\begin{aligned} R(X,\ Y) &= [\nabla_X,\ \nabla_Y] - \nabla_{[X,\ Y]} \\ &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,\ Y]} \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\forall\ Z \in \chi(M)$

$$R(X,\ Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,\ Y]} Z.$$

Remarque 1.2.1 *Le tenseur de courbure est un tenseur de type* (1, 3).

On note aussi

1. $R(X,\, Y,\, Z,\, W) = g(R(X,\, Y)W,\, Z)$,

2. $R(X,\, Y)Z = -R(Y,\, X)Z$.

Soit $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{1\leq i\leq n}$ une base de T_xM alors:

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^{l}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

tel que

$$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial\Gamma_{jk}^{l}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^{l}}{\partial xj} + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}\right).$$

Proposition 1.2.1 ***(Identité de Bianchi)***

$R(X,\, Y)Z + R(Y,\, Z)X + R(Z,\, X)Y = 0.$

Preuve.

$$\begin{aligned} R(X,\ Y)Z + R(Y,\ Z)X + R(Z,\ X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,\, Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\ &\quad -\nabla_{[Y,\, Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[X,\, Z]}Y \\ &= \nabla_X\left(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\right) - \nabla_{[Y,\, Z]}X + \nabla_Y\left(\nabla_Z X - \nabla_X Z\right) \\ &\quad -\nabla_{[Z,\, X]}Y + \nabla_Z\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right) - \nabla_{[X,\, Y]}Z \\ &= [X,\ \ [Y,\ Z]] + [Y,\ \ [Z,\ X]] + [Z,\ \ [X,\ Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.2 *Le tenseur* R *est tri linéaire i.e*:

$\forall\ X_1,\, X_2,\, Y,\, Z \in \chi(M),\ \forall\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$

1. $R(\alpha X_1 + \beta X_2,\, Y)Z = \alpha R(X_1,\, Y)Z + \beta R(X_2,\, Y)Z$,

2. $R(X_1,\, \alpha X_2 + \beta Y)Z = \alpha R(X_1,\, X_2)Z + \beta R(X_1,\, Y)Z$,

3. $R(X_1,\, Y)(\alpha X_2 + \beta Z) = \alpha R(X_1,\, Y)X_2 + \beta R(X_1,\, Y)Z$.

Définition 1.2.5 *Soit M une variété différentiable et ∇ une connexion sur M. On définit la tenseur de torsion par:*

$$T: \ \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,\ Y) \to T(X,\ Y)$$

telle que

$$T\left(X,\ Y\right) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X,\ Y\right].$$

Remarque 1.2.2 *Le tenseur de torsion est un tenseur de type* $(1,\ 2)$.
Et
$T(X,\ Y) = -T(Y,\ X)$.

Soit $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{1\leq i\leq n}$ une base de T_xM alors:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Si $T = 0 \Longleftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,\ Y]$.

1.2.3 Dérivée covariante d'un champ de vecteur le long d'une courbe

Définition 1.2.6 *Soit $(M,\ g)$ une variété Riemannienne et soit $c: I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe régulière de classe C^∞ dans M, X un champ de vecteurs.*
On dit que X champ de vecteurs de classe C^∞ le long de la courbe c si seulement si X est une courbe $t \to X(t)$ de classe C^k de TM telle que $X(t) \in T_{c(t)}M$.

Définition 1.2.7 *Soit $(M,\ g)$ une variété Riemannienne, soit ∇ sa connexion linéaire, la dérivée covariante le long de la courbe c est l'unique opérateur noté $\frac{D}{dt}$ sur les champs de vecteurs Y le long de la courbe c vérifiant:*
i. $\frac{D}{dt}$ *est linéaire,*
ii. $\frac{D}{dt}(fY) = \frac{df}{dt}Y + f\frac{D}{dt}Y$,
iii. *Si $Y(t)$ est la restriction d'un champ de vecteurs X définit sur un voisinage de $c(t_0)$ (pour t voisinage de t_0). Alors*

$$\frac{D}{dt}Y(t_0) = \nabla_{c'}X\big|_{c(t_0)}.$$

1.2.4 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.2.8 *On appelle connexion de Levi-Civita sur une variété Riemannienne* (M, g), *l'unique connexion linéaire* ∇ *vérifiant:*

1. ∇ *est métrique* $(\nabla g = 0)$,

2. ∇ *est sans torsion* $(T = 0)$.

On dit que ∇ *est compatible avec* g, *si pour tous champs de vecteurs* X, Y, Z :

$$X\ g(Y,\ Z) = g(\nabla_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla_X Z).$$

1.3 Gradient Riemannienne

Définition 1.3.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *une application de classe* C^k $(k \geq 1)$.

Le gradient de f *noté* ∇f *est un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$, *définie par:*

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ ...,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}). \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) \to x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_3^3$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \left(3x_1^2 + x_2^2\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + (2x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - \left(3x_3^2\right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \left(3x_1^2 + x_2^2,\ 2x_1 x_2,\ \ -3x_3^2\right). \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 *Soit* $f : (M,\ g) \to \mathbb{R}$, *une application définie sur une variété Riemannienne, le gradient de* f *noté* ∇f *est donner par:*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Exemple 1.3.2 *Soit*

$$f: \ \left(\mathbb{R}^3, \ g\right) \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \ x_2, \ x_3) \to x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_3^3$$

et

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1+x^2)dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (dx, \ dy, \ dz) \begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i,j=1}^{3} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{3x_1^2 + x_2^2}{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 3x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

1.4 Laplacien sur une variété Riemannienne

Définition 1.4.1 *Dans $\mathbb{R}^n$, le laplacien d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est noté Δf et donner par:*

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.2 *Soit $(M, \ g)$ une variété Riemannienne, et $f : (M, \ g) \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k $(k \geq 2)$. Le laplacien de f sur M est noté Δf donnera:*

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \, (\nabla f)^i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Propriétés

Soient $f_1,\ f_2 \in C^{\infty}(M)$

1. $\Delta\left(f_1+f_2\right)=\Delta f_1+\Delta f_2$,

2. $\Delta\left(f_1 f_2\right)=f_2\Delta f_1+f_1\Delta f_2-2g(\operatorname{grad} f_1,\ \operatorname{grad} f_2)$,

telle que

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Exemple 1.4.1 *Le laplacien d'une fonction $f: M\to\mathbb{R}$ en coordonnées cylindriques $r,\ \theta,\ z$.*

On a:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$

L'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$.

En coordonnées cylindriques la métrique devient $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2$.

D'où la tenseur g associé à cette métrique est

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$g^{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_{i;j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= g^{11}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+g^{22}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+g^{33}\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= g^{11}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+g^{22}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}+g^{33}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\Delta_{(r,\ \theta,\ z)}f &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Fonctions Harmoniques sur les variétés Riemanniennes

2.1 Géodésique

Une géodésique est une courbe paramétrique donné par:

$$c: \ I = [a, \ b] \ \subset \mathbb{R} \to M$$

$$(t, \ s) \to c(t, \ s)$$

la longueur de cette courbe noté par "l" est donnée par:

$$l(s) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t, \ s), \ \frac{\partial c}{\partial t}(t, \ s) \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Il existe toujours des courbes géodésiques dans une variété Riemannienne, tel que ces courbes réalisent la plus petite distance entre deux points donnés pour la métrique considérée.

2.1.1 Courbe géodésique

Définition 2.1.1 *Soit $(M, \, g)$ une variété Riemannienne muni d'une connexion ∇, soit $c : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe de classe C^∞. On dit que c est une géodésique si et seulement si $\nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial t} = 0$ (ou $\frac{D}{dt}\frac{\partial c}{\partial t} = 0$).*
Ecrire en coordonnées locales les géodésique $c(t) = (x_1(t), \, .., \, x_n(t))$ se lisent comme les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0.$$

Exemple 2.1.1 *les géodésique sur $\mathbb{R}^n$ sont des droits.*

2.2 Energie d'une courbe dans une variété Riemannienne

Définition 2.2.1 *Soit $c : I = [a,\ b] \subset \mathbb{R} \to M^n$ une courbe dans une variété Riemannienne $(M,\ g)$ de dimension n muni d'une connexion de Levi-Civita. La longueur d'arc l est définie par:*

$$l\,(s) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s)\,,\ \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s) \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

de la courbe c.

L'énergie de la courbe c est donnée par:

$$E\,(s) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s)\,,\ \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s) \right\rangle dt.$$

2.2.1 La première variation de l'énergie et de la longueur d'une courbe

Lemme 2.2.1 *Soit $l(s)$ et $E(s)$ sont différentiables, et nous avons*

$$\begin{aligned} l^{'}(0) &= \int_a^b \left(\frac{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \langle \acute{c},\ \dot{c} \rangle}{\langle \dot{c},\ \dot{c} \rangle^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left\langle \acute{c},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c} \right\rangle}{\langle \dot{c},\ \dot{c} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt \,|_{s=0}\ , \\ E^{'}(0) &= \langle \acute{c}(b,\ 0),\ \dot{c}\,(b,\ 0) \rangle - \langle \acute{c}(a,\ 0),\ \dot{c}\,(a,\ 0) \rangle - \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \,|_{s=0}\ . \end{aligned}$$

Preuve. Soit $c : I = [a,\ b] \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe dans une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-Civita ∇ :

$$c_s :\ [a,\ b] \times [-\varepsilon,\ \varepsilon] \to M$$

$$(t,\ s) \to c(t,\ s)$$

on a

$$E(s) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s)\,,\ \frac{\partial c}{\partial t}\,(t,\ s) \right\rangle dt,$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(s)}{\partial s} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt \qquad \text{(puisque } \nabla \text{ conserve la métrique)} \\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt \\
&= \int_a^b \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt \\
&= \left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial E(0)}{\partial s} = \langle \acute{c}(b,\ 0),\ \dot{c}\,(b,\ 0)\rangle - \langle \acute{c}(a,\ 0),\ \dot{c}\,(a,\ 0)\rangle - \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle dt\,|_{s=0}\,.$$

Et de manière similaire,

$$l(s) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(s)}{\partial s} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_a^b \frac{\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle}{\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t\ ,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s)\right\rangle^{\frac{1}{2}}} dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\langle \acute{c},\ \dot{c}\rangle}{\langle \dot{c},\ \dot{c}\rangle^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left\langle \acute{c},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}\right\rangle}{\langle \dot{c},\ \dot{c}\rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt.
\end{aligned}$$

□

Dans le cas c est paramétré proportionnellement à une longueur d'arête, c'est-à-dire que $\|\frac{\partial c(t,\ 0)}{\partial t}\| = \|(\dot{c}(t,0)\| =$cte, devient

$$\frac{\partial l(0)}{\partial s} = \frac{1}{\langle \dot{c},\ \dot{c}\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\langle \acute{c},\ \dot{c}\rangle|_{t=a,\ s=0}^{t=b,\ s=0} - \int_a^b \left\langle \acute{c},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}\right\rangle dt\,|_{s=0} \right).$$

Pour le cas c est géodésique, nous avons maintenant calculé les secondes dérivées de E et l à $s=0$.

2.2.2 La deuxième variation de l'énergie et de la longueur d'une courbe

Soit $c : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe dans une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-Civita ∇ :

$$c_s : \ [a,\ b] \times [-\varepsilon,\ \varepsilon] \to M$$

$$(t,\ s) \to c(t,\ s)$$

Lemme 2.2.2 *Soit* $c : [a,\ b] \to M$ *géodésique. Puis*

$$\begin{aligned} E''(0) \ &= \ \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0) \right\rangle dt \\ &\quad - \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \,|_{s=0} \\ &\quad + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle \Big|_{t=a,\ s=0}^{t=b,\ s=0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l''(0) \ &= \ \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left\{ \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\acute{c} - \left\langle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|},\ \acute{c} \right\rangle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\acute{c} - \left\langle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|},\ \acute{c} \right\rangle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right) \right\rangle dt \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b} \right\} |_{s=0} \,. \end{aligned}$$

Preuve. Selon les formules de la preuve de **lemme 2.2.1**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} E(s) \ &= \ \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s), \frac{\partial c}{\partial t}\ (t,\ s) \right\rangle dt \\ &= \ \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s) \right\rangle dt \\ &\quad + \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \quad \text{(puisque } \nabla \text{ est métrique et sans torsion)} \\ &= \ \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s) \right\rangle dt \quad \text{(Par définition de } R\text{)} \\ &\quad + \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \\ &\quad - \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \end{aligned}$$

Comme c est géodésique, nous avons $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ 0) = 0$, et concluons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2}E(0) &= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0) \right\rangle dt \\
&\quad - \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \,|_{s=0} \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle \Big|_{t=a,s=0}^{t=b,s=0}.
\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2}l(0) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt \,|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}\|} \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0) \right\rangle dt \,|_{s=0} \\
&\quad - \frac{1}{\|\dot{c}\|} \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt \,|_{s=0} \\
&\quad + \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle \Big|_{t=a,\ s=0}^{t=b,\ s=0} \\
&\quad - \frac{1}{\|\dot{c}\|^3} \int_a^b \left(\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ 0),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ 0) \right\rangle \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left\{ \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\acute{c} - \left\langle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|},\ \acute{c} \right\rangle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right),\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\acute{c} - \left\langle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|},\ \acute{c} \right\rangle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right) \right\rangle dt \right. \\
&\quad \left. - \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle dt + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(t,\ s),\ \frac{\partial c}{\partial t}(t,\ s) \right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b} \right\} \Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Courbure de Ricci

Définition 2.3.1 *C'est un 2-tenseur symétrique au point x, noté $Ric(X,\ Y) =$ trace de l'endomorphisme*

$$\begin{aligned}
T_xM &\to T_xM \\
V &\to R(V,\ X)Y
\end{aligned}$$

Si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq \infty}$ est une base orthonormée de T_xM

$$Ric_x(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X,\ e_i,\ Y,\ e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X,\ e_i)e_i,\ Y).$$

Définition 2.3.2 *Soit x_0 un point dans M. Soit $\{e_i\}_{1\leq i\leq\infty}$ une base orthonormée de $T_{x_0}M$, soient $\{\eta^i\}_{1\leq i\leq\infty}$ la base duale associée, tel que*

$$\eta^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

Nous avons

$$-\Delta\langle\eta,\ \eta\rangle = -2\langle\Delta\eta,\ \eta\rangle + 2\langle\nabla_{e_i}\eta,\ \nabla_{e_i}\eta\rangle - 2\left\langle\eta,\ \eta^i \wedge \imath(e_j)R(e_i,\ e_j)\eta\right\rangle. \tag{1}$$

Où $\imath$ est le produit intérieur tel que

$$\imath :\ \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M),$$

$\forall\ \omega \in \Omega^p(M)$, $\forall\ Y_0,\ ...,\ Y_{p-1} \in T_yM$, *on a*

$$(\imath(Y_0)\,\omega)(Y_1,\ ...,\ Y_{p-1}) = \omega(Y_0,\ Y_1,\ ...,\ Y_{p-1}).$$

Définition 2.3.3 *La formule de Bochner est donnée par:*

$$-\Delta\langle\eta,\ \eta\rangle = -2\langle\Delta\eta,\ \eta\rangle + 2|\nabla\eta|^2 + 2Ric(\eta,\ \eta)$$

où $|\nabla\eta|^2 = \langle\nabla_{e_i}\eta,\ \nabla_{e_i}\eta\rangle$ et écrivons $\eta = f_i\eta^i$,

$$Ric(\eta,\ \eta) = Ric(f_ie_i,\ f_je_j) = f_if_jRic(e_i,\ e_j).$$

Preuve. Nous calculons le terme en (1)

$$\begin{aligned}
\left\langle\eta,\ \eta^i \wedge \imath(e_j)R(e_i,\ e_j)\eta\right\rangle &= \left\langle f_l\eta^l,\ \eta^i \wedge \imath(e_j)R(e_i,\ e_j)f_k\eta^k\right\rangle \\
&= -f_lf_k\left\langle\eta^l,\ \eta^i \wedge \imath(e_j)R_{imkj}\eta^m\right\rangle \\
&= -f_lf_k\left\langle\eta^l,\ R_{ijkj}\eta^i\right\rangle \\
&= -f_lf_kR_{ljkj} \\
&= -f_lf_kR_{lk} \\
&= -Ric(\eta,\ \eta).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.1 *Soit $\Sigma : z = f(x,\ y)$ une surface régulière dans $\mathbb{R}^3$, Paramétrer par:*

$$X:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,\ y) = X(x,\ y)\ \to (x,\ y,\ f(x,\ y))$$

On a:

$$\Delta_\Sigma X = 2NH.$$

Où Δ_Σ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et H est la courbure moyenne de Σ et N le vecteur normale unitaire de Σ et X le vecteur position.

Preuve. Soit Σ une surface paramétrer par:

$$X:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,\ y) = X(x,\ y) \to (x,\ y,\ f(x,\ y))$$

On a:

$X_x = (1\ ,0,\ f_x)$, $X_y = (0,\ 1,\ f_y)$, $X_{xx} = f_{xx}$, $X_{yy} = f_{yy}$, $X_{xy} = f_{xy}$, $X_x \wedge X_y = (-f_x,\ -f_y,\ 1)$
et $E = X_x X_x = 1 + f_x^2$, $F = X_x X_y = f_x f_y$, $G = X_y X_y = 1 + f_y^2$
et $l = X_{xx}N = -X_x N_x = \dfrac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$, $m = X_{xy}N = -X_x N_y = -X_y N_x = \dfrac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$,
$n = X_{yy}N = -X_y N_y = \dfrac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$.
La courbure moyenne:

$$\begin{aligned} H &= \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{(1+f_y^2)f_{xx} + (1+f_x^2)\,f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy}}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Le vecteur normale unitaire de Σ est donner par:

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(-f_x,\ \ -f_y,\ 1\right). \end{aligned}$$

On a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

la métrique induite de la surface $\Sigma : z = f(x,\, y)$ est

$$ds^2_\Sigma = \left(1+f_x^2\right) dx^2 + \left(1+f_y^2\right) dy^2 + 2 f_x f\ dx\ dy$$

donc

$$g_{ij_\Sigma} = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$$

et

$$g_\Sigma^{ij} = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2} \begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix}$$

on a

$$\Delta_\Sigma X = (\Delta_\Sigma x,\ \Delta_\Sigma y,\ \Delta_\Sigma f)$$

on a

$$\begin{aligned} \nabla_\Sigma x &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{1+f_y^2}{1+f_x^2+f_y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{f_x f_y}{1+f_x^2+f_y^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma x &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij_\Sigma})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij_\Sigma})} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial x}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) \right) \\ &= \frac{-2 f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \left(\frac{(1+f_y^2) f_{xx} + (1+f_x^2)\, f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy}}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{-2 f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} H. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \nabla_\Sigma y &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{-f_x f_y}{1+f_x^2+f_y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+f_x^2}{1+f_x^2+f_y^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma y &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{-f_xf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1+f_x^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\\
&= \frac{-2f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(\frac{(1+f_y^2)f_{xx}+(1+f_x^2)\,f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= \frac{-2f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}H.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\nabla_\Sigma f &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&= \left(\frac{\left(1+f_y^2\right)f_x}{1+f_x^2+f_y^2}-\frac{f_xf_y^2}{1+f_x^2+f_y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{-f_yf_x^2}{1+f_x^2+f_y^2}+\frac{(1+f_x^2)\,f_y}{1+f_x^2+f_y^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma f &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\left(1+f_y^2\right)f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}-\frac{f_xf_y^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-f_yf_x^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}+\frac{(1+f_x^2)\,f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\end{array}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(\frac{(1+f_y^2)f_{xx}+(1+f_x^2)\,f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}H.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma X &= (\Delta_\Sigma x,\ \Delta_\Sigma y,\ \Delta_\Sigma f)\\
&= \left(\frac{-2f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}H,\ \frac{-2f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}H,\ \frac{2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}H\right)\\
&= 2\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)H\\
&= 2NH.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.1 *Soit M une variété différentiable.*

Soit

$$X:\ M \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1,\ ..,\ x_n) \to (X^1,\ ..,\ X^m)$$

On dit que X *est harmonique si les fonctions composantes le sort.*

C'est-à-dire

$$\Delta_M X = 0 \iff \Delta_M X^i = 0.$$

Exemple 2.3.1 *Soit*

$$X:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,\ y) = X(x,\ y) \to (x,\ y,\ f(x,\ y))$$

On a $\Delta_\Sigma X = 2NH$, *et soit*

$$\begin{array}{rcl} X & : & U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ x(u,\ v) & = & (u,\ v,\ u^2+v^2) \end{array}$$

On a $N = \dfrac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,\ -2v,\ 1)$, $\Delta_\Sigma X = 2NH = 2H\dfrac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,\ -2v,\ 1)$ *d'autre part*

$$\begin{array}{rcl} H & = & \dfrac{(1+4u^2)\,2+(1+4v^2)\,2}{2(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = & \dfrac{(1+4u^2)+(1+4v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \neq & 0. \end{array}$$

donc X *n'est pas harmonique.*

Proposition 2.3.2 *Soit* $\Sigma : z = f(x,\ y)$ *une surface régulière dans* $\mathbb{R}^3$, *paramétrer par:*

$$X:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,\ y) \to (x,\ y,\ f(x,\ y))$$

Si $f(x,\ y) = ax+by+c$ *alors* X *est harmonique.*

Preuve. On a

$$ds_\Sigma^2 = (1+a^2)dx^2 + (1+b^2)dy^2 + 2ab\ dx\ dy$$

alors

$$g_{ij_\Sigma} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

et

$$g_\Sigma^{ij} = \frac{1}{1+a^2+b^2} \begin{pmatrix} 1+b^2 & -ab \\ -ab & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

on a

$$\Delta_\Sigma X = (\Delta_\Sigma x,\ \Delta_\Sigma y,\ \Delta_\Sigma f)$$

donc

$$\begin{aligned} \nabla_\Sigma x &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{1+b^2}{1+a^2+b^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ab}{1+a^2+b^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma x &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \nabla_\Sigma y &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= -\frac{ab}{1+a^2+b^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+a^2}{1+a^2+b^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma y &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla_\Sigma f &= \sum_{i,j=1}^{2} g_\Sigma^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \left(\frac{(1+b^2)\,a}{1+a^2+b^2} - \frac{ab^2}{1+a^2+b^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + \left(\frac{(1+a^2)\,b}{1+a^2+b^2} - \frac{a^2 b}{1+a^2+b^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\Delta_\Sigma f &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\left(\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(1+b^2)\,a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}-\frac{ab^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right)\\+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(1+a^2)\,b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}-\frac{a^2b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right)\end{array}\right)\\&= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_\Sigma X = (\Delta_\Sigma x,\ \Delta_\Sigma y,\ \Delta_\Sigma f) = 0$$

alors X est harmonique, donc la surface Σ est minimal. □

2.4 La première et la deuxième variation de L'aire d'une surface

Soit une surface minimal M, bornée par une courbe c et nous prenons la variation $Y^t(u, v) = X(u,\ v) + t\ V(u,\ v)$ où $V(u,\ v) = \rho(u,\ v)U(u,\ v)$ est un champ de vecteurs normal sur M de longueur variable ρ avec $\rho(c) = 0$. Prônons ici les conditions nécessaires pour la minimisation de l'aire.

Dans ce qui suit nous utilisons la notation:

$$\begin{aligned}* &= (X_u \times X_v)\cdot(X_u \times V_v) + (X_u \times X_v)\cdot(V_u \times X_v)\\ ** &= 2(X_u \times X_v)\cdot(V_u \times V_v) + (X_u \times V_v)\cdot(X_u \times V_v)\\ &\quad +2(X_u \times V_v)\cdot(V_u \times X_v) + (V_u \times X_v)\cdot(V_u \times X_v)\end{aligned}$$

et

$$S = \sqrt{|X_u \times X_v|^2 + 2t * + t^2 ** + O\ (t^3)}.$$

Où $O\ (t^3)$ désigne des termes impliquant une puissance de t supérieur ou égal trois. Avec cette note, on voit que la surface de l'aire $A(t)$ est donnée par:

$$A(t) = \iint S\ du\ dv.$$

Maintenu nous supposons que M est minimal, donc $A^{'}(0) = 0$.

Lemme 2.4.1 *Si M est minimal alors $* = 0$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
* &= (X_u \times X_v) \cdot (X_u \times V_v) + (X_u \times X_v) \cdot (V_u \times X_v) \\
&= (X_u \cdot X_u)(X_v \cdot V_v) - (X_u \cdot V_v)(X_v \times X_u) \\
&\quad + (X_u \cdot V_u)(X_v \cdot X_v) - (X_u \cdot X_v)(X_v \cdot V_u).
\end{aligned}$$

Nous présents, $V_u = \rho_u\, U + \rho\, U_u$ et $V_v = \rho_v\, U + \rho\, U_v$, donc nous avons

$$\begin{aligned}
X_u \cdot V_u &= X_u \cdot (\rho_u\, U + \rho\, U_u) \\
&= \rho\, X_u \cdot U_u \quad \text{car } X_u \cdot U = 0 \\
&= -\rho l.
\end{aligned}$$

De même $X_u \cdot V_v = -\rho m$, $X_v \cdot V_u = -\rho m$ et $X_v \cdot V_v = -\rho n$. Le fait de brancher ces quantités en $*$ donne

$$\begin{aligned}
* &= -\rho E n + \rho F m - \rho G l + \rho F m \\
&= -\rho (En + Gl - 2Fm) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $En + Gl - 2Fm$ est le numérateur de la courbure moyenne et M est minimal. $\square$

On a

$$A'(t) = \frac{* + t ** + O\ (t^2)}{\sqrt{|X_u \times X_v|^2 + 2t * + t^2 ** + O\ (t^3)}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
A'(0) &= \iint \frac{*}{|X_u \times X_v|} du\ dv \\
&= \iint \frac{-\rho (En + Gl - 2\ Fm)}{|X_u \times X_v|} du\ dv \\
&= \iint \frac{-2\rho (En + Gl - 2\ Fm)}{2(EG - F^2)} \sqrt{EG - F^2} du\ dv \\
&= \iint -2\rho H\ dA \qquad (dA = \sqrt{EG - F^2}\ du\ dv) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors $A'(0)$ est minimal.

Donc, $S = \sqrt{|X_u \times X_v|^2 + t^2 ** + O\ (t^3)}$ et, en prenant

$$A^{''}(t) = \iint \frac{** S - t **S^{'}}{S^2} du\ dv.$$

Notons que $S^{'} = \dfrac{t ** + O\ (t^2)}{S}$, par le **lemme 2.4.1**, de sorte que

$$S|_{t=0} = |X_u \times X_v|$$

et

$$S^{'}\ |_{t=0} = 0.$$

Donc on a l'expression pour $A^{''}(0)$,

$$A^{''}(0) = \iint \frac{**}{|X_u \times X_v|} du\ dv.$$

Maintenant, récrivons $**$ en utilisant la notation $e = U_u \cdot U_u$, $f = U_u \cdot U_v$, $g = U_v \cdot U_v$. Nous avons

$$\begin{aligned}
** &= 2(X_u \times X_v) \cdot (V_u \times V_v) + (X_u \times V_v) \cdot (X_u \times V_v) \\
&\quad +2(X_u \times V_v) \cdot (V_u \times X_v) + (V_u \times X_v) \cdot (V_u \times X_v) \\
&= 2[(X_u \cdot V_u)\,(X_v \cdot V_v) - (X_u \cdot V_v)\,(X_v \cdot V_u)] \\
&\quad +(X_u \cdot X_u)(V_v \cdot V_v) - (X_u \cdot V_v)(V_v \cdot X_u) + 2[(X_u \cdot V_u)\,(V_v \cdot X_v) \\
&\quad -(X_u \cdot X_v)(V_v \cdot V_u)] + (V_u \cdot V_u)(X_v \cdot X_v) - (V_u \cdot X_v)(X_v \cdot V_u) \\
&= 2[(-\rho l)(-\rho n) - (-\rho m)(-\rho m)] + E(\rho_v^2 + \rho^2 g) - \rho^2 m^2 \\
&\quad +2[(-\rho l)(-\rho n) - F(\rho_u \rho_v + \rho^2 f)] + G(\rho_u^2 + \rho^2 e) - \rho^2 m^2 \\
&= 4\rho^2[ln - m^2] + \rho^2[Eg + Ge - 2Ff] + E\rho_v^2 + G\rho_u^2 - 2F\rho_u\rho_v.
\end{aligned}$$

En connectant cela, avec $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$ donc $A^{''}(0)$ donne

$$A^{''}(0) = \iint \frac{[4\rho^2[ln - m^2] + \rho^2[Eg + Ge - 2Ff] + E\rho_v^2 + G\rho_u^2 - 2F\rho_u\rho_v]}{\sqrt{EG - F^2}} du\ dv.$$

En particulier, on peut d'abord supposer $E = G$, $F = 0$, $l = -n$ (puis que $H = 0$), $K = -\dfrac{(l^2 + m^2)}{E^2}$, $e = U_u \cdot U_u = \dfrac{(l^2 + m^2)}{E} = U_v \cdot U_v = g$. Mettre ces expressions en $A^{''}(0)$

donne

$$\begin{aligned} A''(0) &= \iint \frac{1}{E}\left[4\rho^2(-l^2-m^2)+2\rho^2 E\frac{(l^2+m^2)}{E}+E(\rho_u^2+\rho_v^2)\right]\ du\ dv \\ &= \iint \frac{1}{E}\left[-2\rho^2(l^2+m^2)+E\rho_u^2+E\rho_v^2\right]\ du\ dv \\ &= \iint -2E\rho^2\frac{l^2+m^2}{E^2}+\rho_u^2+\rho_v^2\ du\ dv \\ &= \iint 2E\rho^2 K+\rho_u^2+\rho_v^2\ du\ dv. \end{aligned}$$

CONCLUSION

Le but de ce travail est d'aborder l'étude des applications Harmoniques dans les variétés Riemanniennes. qui sont les solutions de l'équation $\Delta f = 0$.

Où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami donnée par:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Bibliographie

[1] **M. P. do Carmo**, Riemannian Geometry, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, (1992).

[2] **S. Gallot, D. Hulin and J**.Lafontaine, Riemannian geometry. (Second edition) Springer-Verlag,Berlin Heidelberg (1993).

[3] **J. Jost**, Riemannian Goemetry and Geometric Analysis, (Sixth Edition), Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2011) .

[4] **J. M. Lee**, Riemannian manifolds. Graduate texts in math. **176**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1997).

[5] **F. Morgan**, Riemannian Geometry, A Beginer's Guide, A K Peters, Natick, MA, (1998).

[6] **R. Osserman**, A survey of minimal surfaces, Courier Dover Publications, Dover (2002).

[7] **R. Osserman**, Global properties of minimal surfaces in E3 and En, Ann. of Math. 80 (1964), no. 2, 340 364.

[8] **P. Peterssen**, Riemannian Geometry, Graduate Texts in Mathematics 171, Springer, New York, (1998).

[9] **A. Pressley**. Elementary Di erential Geometry, Second Edition, Springer-Verlag, London (2010).

[10] **W. M. Thurston**. Three-dimensional Geometry and Topology I, Princeton Math. Series, **35** (1997), (Levi, S. ed).