REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et informatique

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–*o* ◯ *o*–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=–=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Croissance Des Solutions De Certaines Equations Différentielles Linéaires Non Homogènes

Présenté par **: M$^{\text{elle}}$ HAROUNE Halima**

Soutenu le : 05/2017

devant le jury composé de :

Président	**Mr BELARBI Lakhel**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	Mme **AZIZ HAMANI Karima**	**Pr.**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**Mr FETTOUCH Houari**	**M.C.B**	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2016-2017

Table des matières

Remerciements

Je remercie en premier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience durant toutes ces années d'études.

Je tiens à remercier

Madame AZIZ HAMANI Karima professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté de diriger ce mémoire et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail,

Monsieur BELARBI Lakhel Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur FETTOUCH Houari Maître de conférences B à l'université de Mostaganem ,qui a accepté d'examiner ce travail .

Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon chemin dans l'université sans oublier le personnel administratif.

Mon mari qui m'a donné le courage pour terminer mes études .

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements a tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé pendant la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et a toutes.

RÉSUMÉ

Ce mémoire consiste essentiellement à étudier la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients fonctions entières. On a étudié les résultats obtenus par Wang et Laine [15]*. En imposant des conditions sur ces coefficients, ils ont démontré que chaque solution est d'ordre infini.*

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna nécéssaires par la suite dans notre travail.
Le deuxième chapitre est consacré à la démonstration des résultats obtenus par Wang et Laine [15].

INTRODUCTION

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par R. Nevanlinna est un outil très important dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Pour l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = H(z), \tag{0.0.1}$$

où $k \geq 2$ *est un entier,* $A_j\ (j = 0, 1, ..., k-1)$ *et* $H \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières d'ordre fini ,il est connu que toute les solutions de l'équation* $(0.0.1)$ *sont entières et si certains coefficients sont des fonctions transcendentes, alors l'équations* $(0.0.1)$ *admet plusieurs solutions d'ordre infini.*

Si les coefficients $A_j\ (j = 0, 1, ..., k-1)$ *sont des polynômes, les propriétés de croissance des solutions de l'équation* $(0.0.1)$ *ont été largement étudiées.* (*Voir* [4]).
Dans le cas où

$$\max_{j \neq d} \{\rho(A_j), \rho(H)\} < \rho(A_d) \leq \frac{1}{2},$$

Hellerstein, Miles et Rossi [8] *ont démontré que chaque solution transcendante de* $(0.0.1)$ *est d'ordre infini. En ce qui concerne le cas particulier de* $k = 2$, *Wang et Laine* [14] *ont étudié les équations différentielles du second ordre non homogènes de la forme*

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = H(z) \tag{0.0.2}$$

où $A_1 \not\equiv 0, A_0 \not\equiv 0$ *et* H sont *des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à un et* a, b sont *des nombres complexes non nuls. Ils ont prouvé que toute solution non triviale de l'équation* $(0.0.2)$ *est d'ordre infini si* $a \neq b$.

On remarque que l'équation (0.0.1) *peut avoir des solutions d'ordre fini si*

$$\rho(H) \geq \max \rho(A_j)\,(j = 0, ..., k)\,.$$

Par exemple, la fonction $f(z) = e^z$ *vérifie l'équation*

$$f^{(k)} + f^{(k-1)} + ... + f^{''} + e^{-z} f^{'} + Q(z)\, f = (k - 1 + Q(z))\, e^z + 1, \qquad (0.0.3)$$

où $Q(z)$ *peut être toute fonction entière. En choisissant* $Q(z) = 1-k$*, l'équation* (0.0.3) *peut avoir une solution d'ordre fini même si* $\rho(H) < \max\{\rho(A_j)\,(j = 0, ..., k)\}$ *. D'autre part, en prenant* $Q(z) = e^z$*, on trouve le cas où* $\rho(H) = \max\{\rho(A_j)\,(j = 0, ..., k)\}$ *.*

Dans ce mémoire, on continue l'étude de ce type de problème et on considère le cas où $\rho(H) < \max\{\rho(A_j)\,(j = 0, ..., k)\}$ *. On étudie trois résultats obtenus par Wang et Laine* [15] .

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre, on va énoncer quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna dont on aura besoin dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à létude de la croissance des solutions des équations de la forme (0.0.1) *, où on va étudier les résultats obtenus par Wang et Laine* [15].

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 ([11]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$, chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Notons*

$$N(r,a,f)=\int_0^r \frac{[n(t,a,f)-n(0,a,f)]}{t}dt+n(0,a,f)\log r;\ \ (a\neq\infty),\ t\geq 0 \tag{1.1.1}$$

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r \frac{[n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)]}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r, \tag{1.1.2}$$

$$m(r,a,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta\ \ (a\neq\infty), \tag{1.1.3}$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta, \tag{1.1.4}$$

où

$$\log^+ x=\max\{0,\log x\},x>0\ \ et\ 0<r<+\infty. \tag{1.1.5}$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$ et $m(r,a,f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

Définition 1.1.2 ([11]) *On définit la fonction caractéristique de R-Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f), \ \ 0 < r < +\infty. \tag{1.1.6}$$

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.1 *Soit la fonction $f(z) = \frac{e^z}{z}$*

On a

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^r \frac{[n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \log r = \log r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{e^{re^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}} \right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\frac{e^{r\cos(\varphi)}}{r}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log r d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T(r,f) &= m(r,f) + N(r,f) \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r + \log r \\ &= \frac{r}{\pi} + \frac{1}{2}\log r \end{aligned}$$

1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 ([11]) *Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, m \in z, z \in \mathbb{C}. \tag{1.2.1}$$

le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour de l'origine.

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a). \tag{1.2.2}$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2, 0 < r < +\infty \tag{1.2.3}$$

1.3 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 ([11]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f est défini par*

$$\rho(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.3.1}$$

Si

$$\rho(f) = +\infty, \tag{1.3.2}$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini.

Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par

$$\rho(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.3.3}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.1 *Soit la fonction* $f(z) = e^z$.

On a $N(r,f) = 0$

et

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{r\cos\varphi} \right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi \, (\textit{car elle est } 2\pi \textit{ périodique}) \\ &= \frac{r}{2\pi} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}[\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(f) = \lim_{r\longrightarrow+\infty} \sup \frac{\log(\frac{r}{\pi})}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.3.2 *Soit la fonction* $f(z) = \cos(az^2)$.

On a

$$\begin{aligned} M(r,f) &= \max_{|z|=r} \left|\cos\left(az^2\right)\right| \\ &= \max_{|z|=r} \left| \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{a^{2n} z^{4n}}{(2n)!} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{|a|^{2n} r^{4n}}{(2n)!} = Ch\left(|a| r^2\right). \end{aligned}$$

Pour le point $z_0 = \sqrt{i} r e^{-i\frac{\arg a}{2}}$, *on a*

$$f(z_0) = \cos a \left(\sqrt{i} r e^{-i\frac{\arg a}{2}}\right)^2 = Ch\,|a|\, r^2.$$

Alors

$$M(r,f) = ch\,|a|\, r^2 = \frac{e^{|a|r^2} + e^{-|a|r^2}}{2} \sim \frac{e^{|a|r^2}}{2}, r \longrightarrow +\infty.$$

D'où

$$\rho(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log \left(\frac{e^{|a| r^2}}{2} \right)}{\log r} = 2.$$

Exemple 1.3.3 *Soit la fonction* $f(z) = \frac{e^z}{z}$.

On a

$$\rho(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\log \left[\frac{r}{\pi} + \circ (\log r) \right]}{\log r} = 1.$$

1.4 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 ([11]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros de la fonction f noté $\lambda(f)$ est défini par*

$$\lambda(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log N(r, 1/f)}{\log r}. \tag{1.4.1}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(r, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r. \tag{1.4.2}$$

L'exposant de convergence des zéros de la fonction $1/f$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f.

Exemple 1.4.1 *Pour la fonction $f(z) = e^z + b$, où b est un nombre complexe non nul, on a* $\lambda(f) = 1$.

1.5 Théorème de Phragmén-Lindelöf

Soit $\alpha > 0$. Notons

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbf{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}, \tag{1.5.1}$$

$$\gamma_r = \left\{ z : z = re^{i\theta}, z \in S_\alpha \right\}, \tag{1.5.2}$$

et

$$M(r, \gamma_r, f) = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|, \tag{1.5.3}$$

Théorème 1.5.1 ([12]) *Soit f une fonction analytique dans le secteur S_α et continue sur ∂S_α telle que $\forall z \in \partial S_\alpha : |f(z)| \leq M$, où $M > 0$ est une constante.*
Si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r, \gamma_r, f)}{\log r} < \alpha, \tag{1.5.4}$$

Alors

$$\forall z \in S_\alpha : |f(z)| \leq M. \tag{1.5.5}$$

1.6 Dérivée logarithmique

Théorème 1.6.1 ([5]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f) = \circ(T(r, f)), \tag{1.6.1}$$

où

$$S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r) \tag{1.6.2}$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie.
Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r). \tag{1.6.3}$$

Corollaire 1.6.1 ([5]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un nombre entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f), \tag{1.6.4}$$

où

$$S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r) \tag{1.6.5}$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie.
Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r). \tag{1.6.6}$$

1.7 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.7.1 ([7]) *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt, \tag{1.7.1}$$

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt, \tag{1.7.2}$$

où χ_H *est la fonction caractéristique d'un ensemble* H.

Exemple 1.7.1 *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [2, 6] \subset [0, +\infty)$ *est*

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt \\ &= \int_2^6 dt = 4. \end{aligned}$$

Exemple 1.7.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e^2] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$\begin{aligned} lm(F) &= \int_1^{+\infty} \chi_F(t)\, \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes

2.1 Introduction et résultats

De nombreux auteurs [1, 2, 6] *ont étudié l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$f'' + h_1(z)\, e^{P(z)} f' + h_0(z)\, e^{Q(z)} f = 0, \tag{2.1.1}$$

où $P(z)$ *et* $Q(z)$ *sont des polynômes non constants,* $h_1(z)$ *et* $h_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions entières telles que* $\rho(h_1) < \deg P$ *et* $\rho(h_0) < \deg Q$*. Gundersen a montré dans* [6, *p.* 419] *que si* $\deg P \neq \deg Q$*, alors toute solution non constante de l'équation* (2.1.1) *est d'ordre infini. Si* $\deg P = \deg Q$*, alors l'équation* (2.1.1) *peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. En effet,* $f(z) = z$ *satisfait l'équation*

$$f'' - z^3 e^z f' + z^2 e^z f = 0. \tag{2.1.2}$$

Z. X. Chen et K. H. Shon ont également étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre et ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 ([2]) *Soient* $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1$*,* a *et* b *des constantes complexes telles que* $ab \neq 0$ *et* $\arg a \neq b$ *ou* $a = ab$ $(0 < c < 1)$.

Alors toute solution f $(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)\, e^{az} f' + A_0(z)\, e^{bz} f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini.

En 2008, Wang et Laine [14] *ont étudié l'équation différentielle linéaire non homogène*

$$f'' + A_1(z)\, e^{az} f' + A_0(z)\, e^{bz} f = H, \tag{2.1.4}$$

où $A_j(z)\,(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières et a, b sont des constantes complexes et ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 ([14]) *Supposons que $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ et H sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1 et les constantes complexes a, b vérifie $ab \neq 0$ et $b \neq a$. Alors toute solution nontrivale f de l'équation* (2.1.4) *est d'ordre infini.*

Considérons maintenant l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, f^{(k-1)} + ... + A_1(z)\, f' + A_0(z)\, f = H, \tag{2.1.5}$$

où $k \geq 2$ est un nombre entier, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et H $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Il est bien connu que toutes les solutions de l'équation (2.1.5) *sont des fonctions entières et si certains des coefficients sont des fonctions transcendantes, alors la plupart des solutions de l'équation* (2.1.5) *sont d'ordre infini.*

Alors une question naturelle qui se pose est :Quelles conditions sur $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ...k-1)$ et H garantira que chaque solution de l'équation (2.1.5) *soit d'ordre infini ?*

Wang et Laine [15] *ont étudié le problème et ont prouvé le résultat suivant qui généralise le théorème 2.1.2 pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur :*

Théorème 2.1.3 ([15]) *Supposons que $A_j(z) = h_j(z)\, e^{p_j(z)}\,(j = 0, ...k-1)$, où $p_j(z) = a_{jn} z^n + ...a_{j0}$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $h_j(z)$ sont des fonctions entières non toutes nulles d'ordre strictement inférieur à n, et $H \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre strictement inférieur à n .Si les nombres complexes a_{jn} $(j = 0, ...k-1)$ sont distincts, alors toutes les solutions de l'équation* (0.0.1) *sont d'ordre infini.*

Ils ont également considéré l'équation (0.0.1) *dans le même article et ont étudié l'ordre de croissance de leurs solutions transcendantes. Ils ont démontré les deux résultats suivants :*

Théorème 2.1.4 ([15]) *Supposons que* $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)}$ $(j = 0, ...k-1)$, *où* $p_j(z) = a_{jn}z^n + ...a_{j0}$ *sont des polynômes de degré* $n \geq 1$, $h_j(z)$ *et* $H \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* n. *De plus, supposons qu'il existe deux coefficients* A_s *et* A_l *telle que* $a_{sn} = |a_{sn}|e^{i\theta_S}$ *et* $a_{ln} = |a_{ln}|e^{i\theta_l}$, *où* $0 \leq s < l \leq k-1$, θ_s, $\theta_l \in [0, 2\pi)$, $\theta_s \not\equiv \theta_l$, $h_s h_l \not\equiv 0$ *et pour* $j \not\equiv s, l$, $a_{jn} = d_j a_{sn}$ $(0 < d_j < 1)$ *ou* $a_{jn} = d_j a_{ln}$ $(0 < d_j < 1)$. *Alors toute solution transcendante de l'équation* (0.0.1) *est d'ordre infini.*

Théorème 2.1.5 ([15]) *Supposons que* $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)} + g_j(z)$ $(j = 0, ...k-1)$, *où* $p_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}$ *sont des polynômes de degré* $n \geq 1$, $h_j(z)$, $g_j(z)$ *et* $H \not\equiv 0$, *sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* n. *En outre, supposons qu'il existe* $a_{sn} = d_s e^{i\varphi}$ *et* $a_{ln} = -d_l e^{i\varphi}$ *avec* $d_s > 0, d_l > 0$ *et* $0 \leq s < l \leq k-1$ *tels que pour* $j \not\equiv s, l$, $a_{jn} = d_j e^{i\varphi}$ $(d_j \geq 0)$ *ou* $a_{jn} = -d_j e^{i\varphi}$ $(d_j \geq 0)$ *et* $\max\{d_j : j \neq s, l\} = d < \min\{d_s, d_l\}$. *Si* $h_s h_l \not\equiv 0$, *alors chaque solution transcendante de l'équation* (0.0.1) *est d'ordre infini.*

Remarque 2.1.1 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1.5, *des solutions polynômiales peuvent exister. Par exemple, l'équation*

$$f^{(4)} + \left(e^{3z} + 1\right) f^{(3)} + \left(e^{-2z} + z\right) f^{''} + (ze^z + 1) f^{'} - (e^z + 1) f = 1 - z$$

admet le polynôme $f(z) = z$ *comme solution.*

Remarque 2.1.2 *Dans les trois Théorèmes précédents, si* $\rho(f) = \infty$, *alors on a aussi* $\lambda(f) = \infty$. *En effet, en réécrivant* (2.2.1) *dans la forme suivante*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{H}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_0\right), \tag{2.1.6}$$

on a

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{1}{H}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=0}^{k-1} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) \\ &= \circ\left(r^{\beta}\right) + s(r, f) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

pour un certain β *fini. Par conséquent,* $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ *doit être d'ordre infini.*

2.2 Lemmes Préliminaires

Lemme 2.2.1 ([16]) *Supposons que* $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes et* $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv 0,$

(ii) $g_j(z) - g_k(z)$ *ne sont pas constantes pour* $1 \leq j < k \leq n,$

(iii) Pour $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n,$

$$T(r, f_j) = \circ\left\{T\left(r, e^{g_h - g_k}\right)\right\}, (r \longrightarrow \infty, r \notin E), \tag{2.2.1}$$

où E *est un ensemble de mesure linéaire finie.*

Alors

$$f_j \equiv 0 \ \ (j = 1, 2, ...n). \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2 ([16]) *Supposons que* $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes linéairement indépendantes vérifiant l'égalité suivante :*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \equiv 1. \tag{2.2.3}$$

Alors pour $1 \leq j \leq n,$ *on a*

$$\begin{aligned} T(r, f_j) \ \leq \ & \sum_{j=1}^{k} N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + N(r, f_j) + N(r, D) - \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k) \\ & -N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

où D *est le déterminant Wronskien* $W(f_1, f_2, ..., f_n)$,

$$S(r) = \circ\left(\max_{1 \leq k \leq n}\{T(r, f_k)\}\right), (r \longrightarrow \infty, r \notin E), \tag{2.2.5}$$

E *est un ensemble de mesure linéaire finie.*

Lemme 2.2.3 ([12]) *Supposons que* $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ... (\alpha, \beta$ *sont des nombres réels,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ *est un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et que* $A(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière avec*

$\rho(A) < n$, $g(z) = A(z)e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta) = \alpha\cos(n\theta) - \beta\sin(n\theta)$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire finie telle que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \diagdown (H_1 \cup H_2)$, *il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *on ait*

(i) si $\delta(P,\theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \tag{2.2.6}$$

(ii) si $\delta(P,\theta) < 0$,*alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \tag{2.2.7}$$

où

$$H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(P,\theta) = 0\}. \tag{2.2.8}$$

Lemme 2.2.4 ([5]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini* ρ *et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $H \subset (1, \infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| \notin H \cup [0, 1]$ *et pour tout* $0 \leq j < k$, *on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.9}$$

De même, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout* $z = re^{i\theta}$ *avec* $|z|$ *suffisamment grand et* $\theta \in [0, 2\pi) \diagdown E$ *et pour tout* k, j $(0 \leq j < k)$, *l'inégalité* (2.2.8) *soit vérifiée.*

Lemme 2.2.5 ([15]) *Soit* $f(z)$ *une fonction entière. Supposons que*

$$G(z) = \frac{\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^\rho} \tag{2.2.10}$$

n'est pas bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ *avec une constante* $\rho > 0$. *Alors il existe une suite infini de points* $\left\{z_n = r_n e^{i\theta}\right\}$ $(n = 1, 2, ...)$, *où* $r_n \longrightarrow \infty$ *telle que* $G(z) \longrightarrow \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!}(1+\circ(1))\, r_n^{k-j}, \quad j = 0, ..., k-1 \tag{2.2.11}$$

quant $n \longrightarrow \infty$.

Preuve. Posons

$$M(r, G, \theta) = \max\{G(z) : 0 \leq |z| \leq r, \arg z = \theta\} \tag{2.2.12}$$

On peut prendre la suite $\{z_n\}$ dans la première assertion telle que

$$G(z_n) = M(r_n, G, \theta) \tag{2.2.13}$$

Comme

$$G(z_n) \longrightarrow \infty \tag{2.2.14}$$

quand $n \longrightarrow \infty$, on voit immédiatement que

$$\left|f^{(k)}(z_n)\right| = M\left(r_n, f^{(k)}, \theta\right) \longrightarrow \infty \tag{2.2.15}$$

quand $n \longrightarrow \infty$. En utilisant maintenant le même raisonnement que dans la preuve du ([6], Lemme 4) ,voir aussi ([10], Lemme 3.1), la deuxième assertion (2.2.10) est vérifiée. □

Lemme 2.2.6 ([15]) *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < \infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que*

$$\log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq Mr^\sigma \tag{2.2.16}$$

pour tout rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E$, où M est une constante positive dépendant de θ et σ est une constante positive indépendante de θ. Alors $\rho(f) \leq \sigma$.

Preuve. De toute évidence, nous pouvons supposer que $\sigma < \rho$. Comme E est de mesure linéaire nulle, nous pouvons choisir

$$\theta_j \in [0, 2\pi) \setminus E \tag{2.2.17}$$

tel que

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n+1} = 2\pi \tag{2.2.18}$$

et

$$\max\{\theta_{j+1} - \theta_j, 1 \leq j \leq n\} \leq \frac{\pi}{\rho + 1}. \tag{2.2.19}$$

Nous étudions d'abord le sécteur

$$H_1 = \{z : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}, \tag{2.2.20}$$

Définissons

$$\Phi(z) = f(z) \exp\left\{-be^{i\theta_0} z^\sigma\right\}, \tag{2.2.21}$$

où

$$\theta_0 = \frac{\sigma(\theta_1 + \theta_2)}{2} \tag{2.2.22}$$

et b est une constante positive qu' on peut déterminer. Alors $\Phi(z)$ est holomorphe à l'intérieur du secteur H_1. De $(2.2.19)$, on a

$$\rho \leq \frac{\pi}{(\theta_2 - \theta_1) - 1}. \tag{2.2.23}$$

Par conséquent,

$$0 > \arg\left(e^{-i\theta_0} z^\sigma\right) = \arg\left(e^{-i\theta_0} r^\sigma e^{i\sigma\theta_1}\right) = \frac{\sigma(\theta_1 - \theta_2)}{2} \geq \frac{-\pi}{2} + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \tag{2.2.24}$$

sur le rayon $\arg z = \theta_1$ et respectivement

$$0 < \arg\left(e^{-i\theta_0} z^\sigma\right) = \arg\left(e^{-i\theta_0} r^\sigma e^{i\sigma\theta_2}\right) = \frac{\sigma(\theta_1 - \theta_2)}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \tag{2.2.25}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta_2$. Ainsi on peut maintenant fixer $b > 0$ de telle façon que

$$b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) > M. \tag{2.2.26}$$

Par un calcul élémentaire, $|\Phi(z)| \leq M$ sur la frontière de H_1, où $M > 0$ est une constante bornée pas le même à chaque occurrence. Par la définition de Φ dans $(2.2.21)$, il est immédiat de voir que Φ est d'ordre au plus que ρ. Par le théorème de Phragmén-Lindelöf, on conclut que

$$|\Phi(z)| \leq M \tag{2.2.27}$$

est vérifiée sur tout l'ensemble du secteur H_1. Ainsi

$$|f(z)| \leq \left|\exp\left\{be -^{i\theta_0} z^\sigma\right\}\right| \leq \exp\{br^\sigma\}$$

dans H_1. En répétant le même raisonnement pour tous les secteurs

$$H_j = \{z : \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}\}, \tag{2.2.28}$$

où θ_j sont déterminés dans (2.2.18), l'affirmation immédiatement est vérifiée. □

2.3 Preuves des théorèmes

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1.3

Preuve. Supposons que f est une solution de (0.0.1) avec $\rho(f) = \rho < \infty$. Alors $n \leq \rho$. Si $f^{(k)} = H$, on peut appliquer le Lemme (2.2.1) pour conclure que $h_s f^{(s)} \equiv 0$ pour un certain s, $(0 \leq s \leq k-1)$ tel que $h_s \not\equiv 0$. Alors f est un polynôme de degré inférieur à s et donc $H \equiv 0$; c'est une contradiction. Ainsi on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$. Par le lemme (2.2.2) , il est facile de voir que $n \leq \rho$ puisque les fonctions exponentielles e^{P_j} $(j = 0, 1, ..k-1)$ sont linéairement indépendantes. D'après le lemme (2.2.3) , il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$.de mesure linéaire tel que à chaque fois que $\theta \in [0, 2\pi) \diagdown E$, alors $\delta(P_j, \theta) \neq 0$ pour tout $0 \leq j \leq k-1$ et $\delta(P_j - P_i, \theta) \neq 0$ pour tout i, j avec $0 \leq i < j \leq k-1$. Si $z = re^{i\theta}$ avec r assez grand, alors chaque $A_j(z)$ vérifie les deux inégalité (2.2.5) ou (2.2.6). D'après le Lemme (2.2.4) , on peut supposer que

$$\left| \frac{f^j(z)}{f^i(z)} \right| \leq |z|^{k\rho}, 0 \leq i < j \leq k. \tag{2.3.1}$$

Comme a_{jn} sont des nombres complexes distincts, alors pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \diagdown E$ fixé, il existe précisément un $s \in \{0, ..., k-1\}$ tel que

$$\delta(p_s, \theta) = \delta : = \max\{\delta(p_j, \theta) : j = 0, ..., k-1\}. \tag{2.3.2}$$

Notons

$$\delta_1 = \max\{\delta(p_j, \theta) : j \neq s\}. \tag{2.3.3}$$

Alors $\delta_1 < \delta$ et $\delta \neq 0$. On discute maintenant deux cas :

Cas 1. Supposons d'abord que $\delta > 0$. D'après le Lemme (2.2.3), pour tout ε donné ε avec

$$0 < 3\varepsilon < \min\{(\delta - \delta_1) \diagup \delta, n - \rho(H)\}, \tag{2.3.4}$$

on a

$$\begin{aligned} \left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right| &\geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\}, \qquad (2.3.5) \\ \left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| &\geq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\} \end{aligned}$$

pour $j \neq s$ et r suffisamment grand. On va maintenant montrer que

$$\frac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.6}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. En supposant le contraire, alors d'après le Lemme $(2.2.5)$, il y a une suite des points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ telle que $r_m \longrightarrow +\infty$ et

$$\frac{\log^+ \left|f^{(s)}(z_m)\right|}{r_m^{\rho(H)+\varepsilon}} \to \infty, \tag{2.3.7}$$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq (1 + o(1))\, r_m^{s-j} \ \ (j = 0, ...s-1)\,. \tag{2.3.8}$$

D'après (2.3.7) et la définition de l'ordre, il est facile de voir que

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \longrightarrow 0 \tag{2.3.9}$$

pour m est assez grand. De (0.0.1), on obtient

$$\begin{aligned} |A_s(z_m)| \ \leq\ & \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_{s+1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \\ & + |A_{s-1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| ... + |A_0(z)| \left|\frac{f'(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

En utilisant (2.3.1), (2.3.5), (2.3.8), et la limite$(2.3.9)$, on conclut de l'inégalité précédente que

$$\exp\{(1-\varepsilon_1)\,\delta r_m^n\} \leq (k+1)\exp\{(1+\varepsilon_1)\,\delta_1 r_m^n\}\, r_m^M, \tag{2.3.11}$$

où $M > 0$ est une constante bornée. Ce qui est une contradiction. Par conséquent,

$$\frac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.12}$$

est bornée, et on a

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+\varepsilon}\} \tag{2.3.13}$$

sur le rayon $\arg z = \theta$. Par le même raisonnement que dans la preuve du $([10],$ Lemme 3.1), on peut immédiatement conclure que

$$|f^{(s)}(z)| \leq (1 + o(1))\, r^s \left|f^{(s)}(z)\right| \leq (1 + o(1))\, M r^s e^{r^{\rho(H)+2\varepsilon}} \leq M e^{r^{\rho(H)+2\varepsilon}} \tag{2.3.14}$$

sur le rayon. $\arg z = \theta$.

Cas 2. Supposons maintenant que $\delta < 0$. De $(0.0.1)$, on a

$$-1 = A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}} + ... + A_j \frac{f^{(j)}}{f^{(k)}} + ... + A_0 \frac{f'}{f^{(k)}} - \frac{H}{f^{(k)}} \tag{2.3.15}$$

D'après le Lemme(2.2.3) , on a pour tout ε donné avec

$$0 < 3\varepsilon < \min\{1, n - \rho(H)\} \tag{2.3.16}$$

$$\left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\} \quad (j = 0, 1, ..., k-1) \tag{2.3.17}$$

pour r assez grand. Comme dans le **Cas 1**, montrons que

$$\frac{\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.18}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons le contraire, de même que dans le **Cas 1**, il résulte du Lemme(2.2.5) qu'il existe une séquence de points $\left\{z_m = r_m e^{i\theta}\right\}$ telle que

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq r_m^{k-j}(1 + \circ(1)) \quad (j = 0, ..., k-1), \tag{2.3.19}$$

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \longrightarrow 0 \tag{2.3.20}$$

pour m assez grand. En substituant les inégalités (2.3.17) et (2.3.19) dans (2.3.15), on trouve une contradiction. Par conséquent, on a

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq M\exp\left\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\right\} \tag{2.3.21}$$

sur le rayon $\arg z = \theta$. Ce qui implique que

$$|f(z)| \leq M\exp\left\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.22}$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\diagdown E$, où E de la mesure linéaire nulle, on obtient (2.3.22) sur le rayon $\arg z = \theta$ à condition que r soit suffisamment grand.

Alors d'après le Lemme (2.2.6), $\rho(f) \leq \rho(H) + 2\varepsilon < n$. C'est une contradiction. Donc toute solution transcendante de(0.0.1) doit être d'ordre infini . □

2.3.2 Preuve du Théorème 2.1.4

Preuve. Supposons que f est une solution transcendantale de l'inégalité (0.0.1) avec $\rho(f) = \rho < \infty$. Si $f^{(k)} \equiv H$ et $\rho < n$, alors d'après (0.0.1), on obtient que

$$f^{(l)}h_l e^{p_l(z)} + f^{(s)}h_s e^{p_s(z)} + \sum_{u=1}^{p} B_u(z)e^{d_{ju}p_l(z)} + \sum_{v=1}^{p} C_v(z)e^{d_{jv}p_s(z)} = 0, \tag{2.3.23}$$

où B_u $(u = 1, ..., p)$, C_v $(v = 1, ...q)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à n. En rassemblant les termes du même type , si nécessaire, alors on peut supposer que les coefficients d_{ju} $(u = 1, ..., p)$ respectivement d_{jv} $(v = 1, ...q)$ sont distincts et étant donné que $\theta_s \neq \theta_l$ et $\theta_s, \theta_l \in [0, 2\pi)$, on peut conclure que $d_{ju}p_l(z) - d_{jv}p_s(z)$ sont des polynômes de degré n. En effet, si $d_{ju}a_{ln} = d_{jv}a_{sn}$, on a

$$0 < \frac{d_{ju}}{d_{jv}} \left| \frac{a_{\ln}}{a_{sn}} \right| = e^{i(\theta_s - \theta_l)}. \tag{2.3.24}$$

Ce qui est impossible.

De même, $p_l(z) - p_s(z)$, $p_l(z) - d_{jv}p_s(z)$ et $p_s(z) - d_{ju}p_l(z)$ sont également des polynômes de degré n. Par conséquent, en appliquant Le lemme (2.2.1) à (2.3.23), on déduit que $f^{(l)}h_l \equiv f^{(s)}h_s \equiv 0$. Comme $h_s h_l \not\equiv 0$, alors f doit être un polynôme de degré inférieur à s. Donc $H \equiv 0$. C'est une contradiction.

Par conséquent, on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$. D'après le Lemme (2.2.2), si $f^{(k)} \neq H$, alors $n \leq \rho$ puisque les fonctions exponentielles $e^{p_l}, e^{p_s}, e^{d_{ju}p_l}$ $(u = 1, 2, ..., p)$ et $e^{d_{jv}p_s}$ $(v = 1, 2, ..., q)$ sont linéairement indépendantes.

Comme $\theta_s \neq \theta_l$, d'après les Lemmes (2.2.3) et (2.2.4), il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in E \backslash [0, 2\pi)$, les $A_j\left(re^{i\theta}\right)$ vérifient (2.2.6)ou (2.2.7), (2.3.1) est vérifiée et

$$\delta(p_s, \theta) \neq \delta(p_l, \theta), \quad \delta_2 = \max\{\delta(p_s, \theta), \delta(p_l, \theta)\} \neq 0. \tag{2.3.25}$$

On applique aussi les notations δ, δ_1 se trouvant dans la démonstration du Théorème (2.1.5).

Cas 1. Tout d'abord supposons que $\delta_2 > 0$.On peut supposer que $\delta_2 = \delta(p_s, \theta)$. De l'hypothèse sur a_{jn}, on sait que $\delta_1 < \delta_2 = \delta$. donc (2.3.5) est vérifiée d'après le Lemme (2.2.3). En utilisant le même raisonnement que dans le **cas 1** dans la démonstration du Théorème (2.1.3), on obtient l'inégalité (2.3.22) sur le rayon $\arg z = \theta$.

Cas 2. Enfin supposons que $\delta_2 < 0$. Encore une fois par la condition sur a_{jn}, on voit que $\delta < 0$. Par le même argument utilisé dans le **cas 2** dans la démonstration

du Théorème (2.1.3), on obtient à nouveau (2.3.22). Par conséquent, par le Lemme (2.2.6), on obtient une contradiction. Donc $\rho(f) = \infty$. $\square$

2.3.3 Preuve du Théorème 2.1.5

Preuve. Supposons que f est une solution transcendante de (0.0.1) d'ordre fini. Si $\rho < n$, alors il résulte de (0.0.1) que

$$f^{(l)} h_l e^{P_l(z)} + f^{(s)} h_s e^{P_s(z)} + \sum_{u=1}^{p} B_u(z) e^{d_{ju} P_l(z)} + \sum_{v=1}^{q} C_v(z) e^{d_{jv} P_s(z)} = F(z), \qquad (2.3.26)$$

où $B_u\ (u = 1, ..., p), C_v\ (v = 1, ..., q)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à n, $d_{ju} \neq 0\ (u = 1, ..., p)$ sont distincts et $d_{jv} \neq 0\ (v = 1, ..., q)$ sont aussi distincts. De façon similaire à la preuve du Théorème (2.1.4), on peut supposer que $n \leq \rho$.
Comme

$$\sigma = \max\{\rho(g_j) \quad (j = 0, ...k-1)\} < n, \qquad (2.3.27)$$

on a

$$\max\{|g_j(z)| \quad (j = 0, ...k-1), \ |H(z)|\} \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \qquad (2.3.28)$$

pour tout ε avec $0 < 3\varepsilon < n - \sigma$ et pour tout $|z|$ suffisamment grande. Puisque d_s et d_l dans $a_{sn} = d_s e^{i\varphi}$ et $a_{ln} = -d_l e^{i\varphi}$ sont strictement positifs, l'ensemble
$\{\theta \in [0, 2\pi), \delta(P_s, \theta) = \delta(P_l, \theta)\}$ est de mesure linéaire nulle. Par conséquent, encore une fois d'après les deux Lemmes (2.2.3) et (2.2.4), il existe un ensemble
$E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \diagdown E$ donné, le coefficient $h_j e^{P_j}$ vérifie (2.2.5) ou (2.2.6) et (2.3.1) est vérifiée. De plus, $\delta(P_s, \theta) \neq \delta(P_l, \theta)$. On peut supposer que $\delta_2 = \max\{\delta(P_s, \theta), \delta(P_l, \theta)\} = \delta(P_l, \theta) = -d_l \cos(\varphi + n\theta)$, où $\cos(\varphi + n\theta) < 0$. Alors par (2.2.5) et (2.3.28), pour tout ε vérifiant $0 < 3\varepsilon < (d_l - d) \diagdown d_l$, on obtient pour $|z|$ suffisamment grand que

$$\left|A_l\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\{-(1-\varepsilon) d_l \cos(\varphi + n\theta) r^n\}.$$

Pour tous les autres coefficients $A_j\ (j \neq s)$, en considérant les hypothèses sur a_{j_n}, on a

$$\left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{-(1+\varepsilon) d \cos(\varphi + n\theta) r^n\} \qquad (2.3.29)$$

quand r est assez grand. Il résulte de (0.0.1)que

$$-A_l = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{l+1}\frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}} + A_{l-1}\frac{f^{(l-1)}}{f^{(l)}} + ... + A_0\frac{f}{f^{(l)}} - \frac{H}{f^{(l)}}. \qquad (2.3.30)$$

De façon similaire que celle dans le **cas 1** dans la preuve du Théorème (2.1.4) et en utilisant le Lemme (2.2.5) , on peut prouver que

$$\frac{\log^+ \left|f^{(l)}(z)\right|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.31}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Par conséquent, l'inégalité (2.3.22) est toujours vérifiée sur le rayon $\arg z = \theta$. En utilisant le Lemme(2.2.6) , on trouve une contradiction. Ainsi $\rho(f) = \infty$. □

CONCLUSION

Certains chercheurs ([14], [15]) se sont intéressés à l'étude des propriétés de croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes dont les coefficients sont des fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini.

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance des solutions de certaines de ces équations. On a étudié les résultats obtenus par Wang et Laine [15]. *En imposant des conditions sur ces coefficients, ils ont démontré que chaque solution est d'ordre infini.*

Récemment, de nombreux résultats ont été obtenus pour les équations diférentielles linéaires mais avec des coefficients méromorphes ou analytiques dans le disque unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. X. Chen, *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta Math. Sinica Engl. Ser. 18 (1), pp. 79 - 88, 2002 .

[2] Z. X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$, *where the order (Q)=1*, Sci. China Ser. A 45, pp.290–300, 2002 .

[3] G. G. Gundersen and E. M. Steinbart, "*Finite order solutions of nonhomogeneous linear differential equations*," Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, vol. 17, pp. 327–341, 1992.

[4] G. G. Gundersen, E. M. Steinbart, and S. Wang, "*The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*," Transactions of the American Mathematical Society, vol. 350, no. 3, pp. 1225–1247, 1998.

[5] G. G. Gundersen, "*Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates,*" Journal of the London Mathematical Society, vol. s2-37, no. 121, pp. 88–104, 1998.

[6] G. G. Gundersen, "*Finite order solutions of second order linear differential equations,*" Transactions of the American Mathematical Society, vol. 305, no. 1, pp. 415–429, 1988.

[7] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, UK, 1964.

[8] S. Hellerstein, J. Miles, and J. Rossi, "*On the growth of solutions of certain linear differential equations*," Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A I, vol. 17, no. 2, pp. 343–365, 1992

[9] G. Jank and L. Volkmann, Einführung in die Theorie der ganzen meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1985.

[10] I. Laine and R. Yang, "*Finite order solutions of complex linear differential equations*," Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2004, no. 65, pp. 1–8, 2004.

[11] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 1993.

[12] A. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, vol. 2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1965.

[13] J. Tu and C.-F. Yi, "*On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 340, no. 1, pp. 487–497, 2008.

[14] J. Wang and I. Laine, "*Growth of solutions of second order linear differential equations*," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 342, no. 1, pp. 39–51, 2008.

[15] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations,* Abstr. Appl. Anal. (2009), Art. ID 363927, 1 - 11.

[16] C.-C. Yang and H.-X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, vol. 557 of Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003.