

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

*Sur la relation entre l'ordre inférieur des coefficients et la croissance
des solutions des équations différentielles linéaires.*

Présenté

Par

KERIM HANAA

Devant le jury :

Encadreur : BELAÏDI Benharrat	Professeur, Université de Mostaganem.
Présidente : AZIZ HAMANI Karima	Professeur, Université de Mostaganem.
Examineur : LATREUCH Zinelâabidine	Maitre de Conférences B, Université de Mostaganem

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016/2017

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	4
Introduction	1
1 Quelques notions de base sur la théorie de Nevanlinna	1
1.1 La fonction caractéristique	1
1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna	4
1.3 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe ou entière	4
1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique	7
1.5 Les densités supérieures et inférieures	8
1.6 Les densités logarithmiques supérieures et inférieures	8
1.7 L'exposant de convergence des zéros	9
1.8 Lemmes auxiliaires	10
2 Sur la relation entre l'ordre inférieur des coefficients et la croissance des solutions des équations différentielles linéaires	16
2.1 Résultats principaux	16
2.2 Preuve de Théorème 2.1.1	18
2.3 Preuve de Corollaire 2.2.1 :	20
2.4 Preuve de théorème 2.1.2	21
2.5 Preuve de théorème 2.1.3	24
2.6 Preuve de théorème 2.1.4 :	25
2.7 Exemples :	28
2.8 Conclusion	34
Bibliographie	35

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sûr à Monsieur BELAÏDI Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir dirigé ce mémoire, pour sa disponibilité, pour toute l'aide et les conseils qu'il a su m'apporter pendant ces années. Je lui exprime donc toute ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Madame AZIZ HAMANI Karima président du jury, Professeur à l'université de Monstaganem et à l'examineur Monsieur LATREUCH Zinelâabidine, Maître de Conférences B à l'université de Monstaganem.

Résumé

Dans ce mémoire, on donne quelques critères sur l'ordre inférieur des coefficients des équations différentielles linéaires d'ordre deux permettant d'obtenir que toutes les solutions non triviales soient d'ordre infini. Les résultats obtenus sont similaires ■ ceux obtenus pour l'ordre usuel. Ce mémoire est une synthèse sur l'article " Long, Jianren ; Heittokangas, Janne ; Ye, Zhuan. On the relationship between the lower order of coefficients and the growth of solutions of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 444 (2016), no. 1, 153–166. '".

Introduction

Dans ce mémoire on étudie la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0 \tag{0.0.1}$$

telles que $A(z)$ et $B(z)$ sont deux fonctions entières ayant un ordre inférieur fini.

Beaucoup de mathématiciens se sont intéressés à cette équation (0.0.1). Gundersen a démontré que si l'ordre usuel de $A(z)$ est strictement inférieur de l'ordre de $B(z)$, alors l'ordre de croissance de la solution f de (0.0.1) est infini. Plus tard, Kwon a montré que si l'ordre de $B(z)$ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, alors l'hyper-ordre de f est strictement supérieur à l'ordre usuel de $B(z)$.

Kwon a démontré un notre résultat lié à la croissance asymptotique du coefficient $A(z)$, il a considéré une estimation entre la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, A)$ et $\log M(r, A)$.

Dans le premier chapitre, on va donner des notions fondamentaux de la théorie de Nevanlinna, et présenter les lemmes auxiliaires qui nous aident à démontrer les résultats du deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on va donner les démonstrations des résultats principaux de Jianren Long, Janne Heittokangas, Zhuan Ye [17] qui généralisent les résultats de G. G. Gundersen [6] et K. Kwon [11 – 12].

Quelques notions de base sur la théorie de Nevanlinna

Nous considérons les résultats fondamentaux et les notations standards de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes.

Pour une fonction méromorphe $f(z)$ dans le plan complexe \mathbb{C} , on utilise les notations $\rho(f)$ et $\mu(f)$ pour désigner son ordre et l'ordre inférieur respectivement.

Théorème 1.0.1 [13] *formule de Jensen*

Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$, et soient a_1, a_2, \dots, a_n (respectivement b_1, b_2, \dots, b_n) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.0.1 [13] Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1.1 La fonction caractéristique

Définition 1.1.1 [13] (*Fonction a -point*) *fonction de comptage*

Soit f une fonction méromorphe, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation

$f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. On désigne par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté selon son ordre de multiplicité. On définit fonction a -points de f par

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$, et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

Définition 1.1.2 [13] *La fonction de proximité*

Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction de proximité de f par :

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$, et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Lemme 1.1.1 [13] *On a les propriétés suivantes :*

- a) $\ln x \leq \ln^+ x$
- b) $\ln^+ x \leq \ln^+ y$ si $x \leq y$
- c) $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$
- d) $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$
- e) $\ln^+ \left(\prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ f_i$
- f) $\ln^+ \left(\sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ f_i + \ln n$

Définition 1.1.3 [13] *La fonction caractéristique*

Soit f une fonction méromorphe. Alors la fonction caractéristique de Nevanlinna est définie par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Lemme 1.1.2 [13] Soit f, f_1, f_2, \dots, f_n des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - cb \neq 0$.

Alors, on a les propriétés suivantes :

$$(a) \quad T(r, \sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j) + \ln n$$

$$(b) \quad T(r, \prod_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j)$$

$$(c) \quad T(r, f^n) = nT(r, f) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(d) \quad T(r, \frac{af + b}{cf + d}) = T(r, f) + O(1)$$

Exemple 1 Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{z^2}$, $a \in \mathbb{C}$; on calcule la fonction caractéristique de Nevanlinna.

On a $z = 0$ est un pôle de degré qui est égale deux. Alors

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r = 2 \ln r$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{e^{are^{i\varphi}}}{r^2 e^{2i\varphi}} \right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{e^{|a|re^{i(\theta+\varphi)}}}{r^2 e^{2i\varphi}} \right| d\varphi, \text{ avec } a = |a|e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \ln^+ \left| \frac{e^{|a|re^{i\Psi}}}{r^2 e^{2i(\Psi-\theta)}} \right| d\Psi, \text{ avec } \Psi = \theta + \varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{e^{|a|re^{i\Psi}}}{r^2 e^{2i(\Psi-\theta)}} \right| d\Psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{e^{|a|r \cos \Psi}}{r^2} d\Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{e^{|a|r \cos \Psi}}{r^2} d\Psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |a|r \cos \Psi d\Psi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r^2 d\Psi \\
&= \frac{|a|r}{\pi} - \ln r
\end{aligned}$$

donc,

$$T\left(r, \frac{e^{az}}{z^2}\right) = N\left(r, \frac{e^{az}}{z^2}\right) + m\left(r, \frac{e^{az}}{z^2}\right) = \frac{|a|r}{\pi} + \ln r$$

1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2.1 [13] Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe et soit

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j z^j, \quad a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction $f(z) - a$ autour de l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \ln |a_m| + \varphi(r, a)$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a_m| + \ln 2.$$

Remarque 1.2.1 Le premier théorème fondamental de Nevanlinna peut être formulé comme suit :

Pour tout $a \in \mathbb{C}$

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

1.3 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe ou entière

Définition 1.3.1 [13] Soit f une fonction méromorphe, on définit l'ordre de f par

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

Remarque 1.3.1 Si f une fonction entière, on remplace $T(r, f)$ par $\ln M(r, f)$ ou

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

alors l'ordre de f est défini par

$$\rho(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$$

Remarque 1.3.2 L'ordre inférieur $\mu(f)$ de f est défini de même mais la limite inférieur au lieu de la limite supérieure

$$\mu(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

ce qui implique que $\forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0$, tel que $\forall r > r_0$, on ait

$$T(r, f) \geq r^{\mu(f) - \varepsilon}.$$

Exemple 2 L'ordre de $f(z) = \frac{e^{az}}{z^2}$ est

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \left(\frac{|a|r}{\pi} + \ln r \right)}{\ln r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \frac{|a|r}{\pi} \left(1 + \frac{\pi \ln r}{|a|r} \right)}{\ln r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln r + \ln \frac{|a|}{\pi} + \ln \left(1 + \frac{\pi \ln r}{|a|r} \right)}{\ln r} = 1. \end{aligned}$$

Exemple 3 Calculons l'ordre usuel et l'ordre inférieur respectivement si $T(r, f) = r^{2+\sin(\ln^+ \ln^+ r)}$.
On a

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln[r^{2+\sin(\ln^+ \ln^+ r)}]}{\ln r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup [2 + \sin(\ln^+ \ln^+ r)] = 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{\ln[r^{2+\sin(\ln^+ \ln^+ r)}]}{\ln r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \inf [2 + \sin(\ln^+ \ln^+ r)] = 1. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 [13] L'hyper-ordre d'une fonction méromorphe f , est défini par

$$\rho_2(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Exemple 4 Déterminons l'hyper-ordre de $f(z) = \tanh z = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}$.

On a

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}\right) &= T(r, e^{-2z}) + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi}r + O(1). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho_2(f) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \left(\frac{2r}{\pi} + O(1) \right)}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{2r}{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right)}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\ln r + \ln \frac{2}{\pi} + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right)}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln r \left(1 + \frac{\ln \frac{2}{\pi} + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right)}{\ln r} \right)}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln r + \ln \left(1 + \frac{\ln \frac{2}{\pi} + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right)}{\ln r} \right)}{\ln r} = 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 [21] Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions méromorphes non constantes telles que $\rho(f)$ est l'ordre de f et $\mu(f)$ l'ordre inférieur de g . Alors

$$\mu(f + g) \leq \max\{\rho(f), \mu(g)\},$$

$$\mu(f.g) \leq \max\{\rho(f), \mu(g)\}.$$

De plus, si

$$\rho(f) < \mu(g)$$

alors

$$\mu(f + g) = \mu(f.g) = \mu(g)$$

Lemme 1.3.1 [13] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0$, $n \geq 1$ avec $a_n \neq 0$ un polynôme. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $r_0 > 0$ telle que pour tout $r = |z| > r_0$, on a la double inégalité

$$(1 - \varepsilon)|a_n|r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n|r^n.$$

Lemme 1.3.2 [3] Soit $f(z) = \exp P(z)$, où $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ un polynôme. Alors

$$\begin{aligned} T(r, \exp P(z)) &\sim \frac{|a_n| r^n}{\pi}, \\ \rho(\exp P(z)) &= \mu(\exp P(z)) = n. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Définition 1.3.3 [19] Une fonction méromorphe $f(z)$ est dite de croissance régulière si

$$\rho(f) = \mu(f).$$

1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.4.1 [20] On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E .

Exemple 5 Pour l'ensemble $E = [1, 2] \cup [4, 5] \subset [0, \infty)$, on a

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_1^2 dt + \int_4^5 dt = 2$$

Définition 1.4.2 [20] La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ est donné par

$$m_1(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt,$$

où χ_F est la fonction caractéristique de l'ensemble F .

Exemple 6 Pour l'ensemble $F = [e, e^2] \subset [1, \infty)$, on a

$$m_1(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_e^{e^2} = 1.$$

1.5 Les densités supérieures et inférieures

Définition 1.5.1 [20] *Les densités supérieures et inférieures d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ sont données respectivement par*

$$\overline{\text{dens}}(E) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r},$$

$$\underline{\text{dens}}(E) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 7 *Pour l'ensemble $E = [e, e^2]$, on a*

$$\begin{aligned} \overline{\text{dens}}(E) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m([e, e^2] \cap [0, r])}{r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m([e, e^2])}{r} = 0, \\ \underline{\text{dens}}(E) &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m([e, e^2] \cap [0, r])}{r} \\ &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m([e, e^2] \cap [0, r])}{r} = 0. \end{aligned}$$

1.6 Les densités logarithmiques supérieures et inférieures

Définition 1.6.1 [20] *Les densités logarithmiques supérieures et inférieures d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ sont données respectivement par*

$$\overline{\log \text{dens}}(F) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(F \cap [1, r])}{\ln r},$$

$$\underline{\log \text{dens}}(F) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(F \cap [1, r])}{\ln r}.$$

Exemple 8 *Pour l'ensemble $F = [1, 2] \subset [1, \infty)$, on a*

$$\begin{aligned} \overline{\log \text{dens}}(F) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1([1, 2] \cap [1, r])}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1([1, 2])}{\ln r} = 0. \end{aligned}$$

Pour l'ensemble $F = [2, \infty)$, on a

$$\begin{aligned} \underline{\log \text{dens}}(F) &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1([2, \infty) \cap [1, r])}{\ln r} \\ &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1([2, r])}{\ln r} \\ &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln r - \ln 2}{\ln r} = 1. \end{aligned}$$

1.7 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.7.1 [13] *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\ln r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log N(r, \frac{1}{f})}{\ln r}$$

où

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log r$$

telle que $n(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 9 *On cherche l'exposant et l'hyper-exposant de la fonction $f(z) = \cos z$.*

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-2iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow 2z = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n(t, \frac{1}{f}) = 2 \left[\frac{t}{\pi} \right] \\ N(r, \frac{1}{f}) &= \int_0^r \frac{2 \left[\frac{t}{\pi} \right]}{t} dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{t}{\pi} - 1 < \left[\frac{t}{\pi} \right] \leq \frac{t}{\pi}$$

Donc

$$\int_0^r \frac{2(\frac{t}{\pi} - 1)}{t} dt < N(r, \frac{1}{f}) \leq \int_0^r \frac{2\frac{t}{\pi}}{t} dt$$

$$2\frac{r}{\pi} - \int_0^r \frac{2}{t} dt < N(r, \frac{1}{f}) \leq 2\frac{r}{\pi}$$

$$2\frac{r}{\pi} - \int_1^r \frac{2}{t} dt \leq N(r, \frac{1}{f}) \leq 2\frac{r}{\pi}$$

$$2\frac{r}{\pi} - 2 \log r \leq N(r, \frac{1}{f}) \leq 2\frac{r}{\pi}.$$

Donc

$$N(r, \frac{1}{f}) \sim 2\frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$N(r, \frac{1}{f}) = 2\frac{r}{\pi} + o(1).$$

Ainsi

$$\lambda(\cos z) = 1, \quad \lambda_2(\cos z) = 0.$$

Définition 1.7.2 [19] *Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est appelé un C_0 -ensemble si il peut être couvert par un système de disques $U_j = u(a_j, r_j)$ tels que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{\{j: |a_j| < R\}} r_j = 0$$

Définition 1.7.3 [19] *La fonction indicatrice $h_A(\theta)$ de Phragmen Lindelof est définie par*

$$h_A(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |A(z)|}{r^\rho}.$$

1.8 Lemmes auxiliaires

Lemme 1.8.1 [13, p. 37] *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et $k > 1$ un nombre entier. Si f est d'ordre infini, alors*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = S(r, f),$$

où $S(r, f) = O(\ln T(r, f) + \ln r)$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\ln r).$$

Lemme 1.8.2 [13, p. 37] *Pour toute fonction transcendante f , on a*

$$T(r, f') \leq 2T(r, f) + O(\ln T(r, f) + \ln r).$$

Lemme 1.8.3 [5] *Soit f une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini $\rho(f)$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante réelle donnée, et soient k, j deux entiers tels que $k > j \geq 0$. Alors, on a les assertions suivantes :*

i) Il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E \cup [0, 1]$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho(f)-1+\varepsilon)}.$$

ii) Il existe un ensemble $F \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin F$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho(f)+\varepsilon)}.$$

Lemme 1.8.4 [5] Soit f une fonction méromorphe transcendante. soient $\alpha > 1$ une constante donnée, k et j deux entiers tels que $k > j \geq 0$. Alors il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, et une constante $c > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E \cup [0, 1]$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq c \left[\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log r)^\alpha \log T(\alpha r, f) \right]^{k-j}$$

Lemme 1.8.5 [15 – 16] Soit $T : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ une fonction non constante croissante d'ordre inférieur fini

$$\mu = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r}.$$

Pour $\mu_1 > \mu$, on définit

$$E(\mu_1) = \{r \geq 1 : T(r) < r^{\mu_1}\}.$$

Alors

$$\overline{\log dens}(E(\mu_1)) > 0$$

Preuve. [17] On suppose le contraire que $\overline{\log dens}(E(\mu_1)) = 0$, nous obtiendrons une contradiction.

On a

$$\begin{aligned} \mu_1 > \mu &\implies \frac{\mu}{\mu_1} < 1 \\ &\implies \frac{(\frac{\mu}{\mu_1} + 1)}{2} < 1 \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel donné $\alpha = \frac{(\frac{\mu}{\mu_1} + 1)}{2} < 1$, il existe $r_0 = r_0(\alpha) > 1$ tel que

$$\begin{aligned} \overline{\log dens}(E(\mu_1)) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(E(\mu_1) \cap [1, r])}{\log r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\log r} \int_{E(\mu_1) \cap [1, r]} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$= 0 < \frac{1 - \alpha}{2}$$

pour tout $r_0 < r$. On a

$$1 < r_0 = r^\alpha < r \implies [r^\alpha, r] \subset [1, r].$$

Donc

$$\int_{E(\mu_1) \cap [r^\alpha, r]} \frac{dt}{t} < \frac{1 - \alpha}{2} \log r.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} [r^\alpha, r] &= [r^\alpha, r] \cup \emptyset \\ &= [r^\alpha, r] \cup (E(\mu_1) \cap E^c(\mu_1)) \\ &= ([r^\alpha, r] \cap E(\mu_1)) \cup ([r^\alpha, r] \cap (E^c(\mu_1))). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \log r &= \int_{r^\alpha}^r \frac{dt}{t} = \int_{E(\mu_1) \cap [r^\alpha, r]} \frac{dt}{t} + \int_{E^c(\mu_1) \cap [r^\alpha, r]} \frac{dt}{t} \\ &< \frac{1 - \alpha}{2} \log r + \int_{E^c(\mu_1) \cap [r^\alpha, r]} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1 - \alpha}{2} \log r < \int_{E^c(\mu_1) \cap [r^\alpha, r]} \frac{dt}{t}.$$

Il existe

$$\begin{aligned} t \in E^c(\mu_1) \cap [r^\alpha, r] &\implies t \in E^c(\mu_1) \quad \text{et} \quad t \in [r^\alpha, r] \\ &\implies T(t) \geq t^{\mu_1} \quad \text{et} \quad t \leq r \quad \text{i. e.,} \quad T(t) \leq T(r) \end{aligned}$$

Alors pour tout $\alpha < 1$, on a

$$r^{\alpha\mu_1} \leq t^{\mu_1} \leq T(t) \leq T(r)$$

pour tous $r_0 < r$. Par conséquent

$$\alpha\mu_1 \leq \frac{\ln T(r)}{\ln r}.$$

Par passage à la limite on obtient $\alpha\mu_1 \leq \mu$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\mu_1} + 1\right) \mu_1 \leq \mu &\implies \frac{\mu_1 + \mu}{2} \leq \mu \\ &\implies \mu_1 \leq \mu. \end{aligned}$$

C'est une contradiction avec le choix de α .

□

Lemme 1.8.6 [17] Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $\mu(A) < \mu(B)$. Alors pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{\mu(B)-\mu(A)}{2})$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1, \infty)$ avec $\overline{\log dens}(E) > 0$ tel que

$$T(r, A) < r^{\mu(A)+\varepsilon}$$

$$T(r, B) > r^{\mu(B)-\varepsilon}$$

pour tout $r \in E$.

Preuve. [17] Pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{\mu(B)-\mu(A)}{2})$, on pose

$$E_0(\varepsilon) = \{r \geq 1 : T(r, A) < r^{\mu(A)+\varepsilon}\}.$$

Par le Lemme 1.8.5, on obtient $\overline{\log dens}(E_0(\varepsilon)) > 0$. Pour $\varepsilon \in (0, \frac{\mu(B)-\mu(A)}{2})$, il existe une constante $r_0 > 1$, tel que

$$T(r, B) > r^{\mu(B)-\varepsilon}$$

pour tout $r > r_0$. Posons $E = E_0(\varepsilon) \cap [r_0, \infty)$. On a évidemment

$$[r_0, \infty) \subset [1, \infty) \implies [r_0, \infty) \cap [1, \infty) = [r_0, \infty).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m_1(E \cap [1, r]) &= m_1(E_0(\varepsilon) \cap [r_0, \infty) \cap [1, r]) \\ &= m_1(E_0(\varepsilon) \cap [r_0, \infty)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite on a alors

$$\overline{\log dens}(E) = \overline{\log dens}(E_0) > 0$$

□

Lemme 1.8.7 [2] Soit f une fonction entière avec $0 \leq \mu(f) < 1$. Notons

$$m(r) = \inf_{|z|=r} \log |f(z)|$$

et

$$M(r) = \sup_{|z|=r} \log |f(z)|.$$

Alors pour tout $\alpha \in (\mu(f), 1)$, on a

$$\overline{\log dens}(\{r \in [1, \infty) : m(r) > M(r) \cos \pi \alpha\}) \geq 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha}.$$

Lemme 1.8.8 [8] Soient $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E avec $\overline{dens}(E) < 1$. Alors pour tout $\alpha > \frac{1}{1 - \overline{dens}(E)}$, il existe un $r_0 > 0$ tel que

$$g(r) \leq h(\alpha r)$$

pour tout $r > r_0$.

Preuve. [17] Soit $F = [0, \infty) \setminus E$ et $\alpha > \frac{1}{1 - \overline{\text{dens}}(E)}$. Nous affirmons qu'il existe un $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \geq r_0$, l'intervalle $[r, \alpha r]$ rencontre l'ensemble F . Supposons le contraire de cette affirmation : qu'il existe une suite $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ telle que $r_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et $[r_n, \alpha r_n] \subset E$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Définissons l'ensemble

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n, \alpha r_n]$$

Alors $I \subset E$, mais

$$\begin{aligned} \overline{\text{dens}}(I) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m(I \cap [0, r_n])}{r_n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m(I \cap [0, \alpha r_n])}{r_n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m(I \cap [0, \alpha r_n])}{\alpha r_n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m([r_n, \alpha r_n])}{\alpha r_n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m([r_n, \alpha r_n])}{\alpha r_n} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \\ &\geq \frac{\frac{1}{1 - \overline{\text{dens}}(E)} - 1}{\frac{1}{1 - \overline{\text{dens}}(E)}} = \overline{\text{dens}}(E) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction avec $I \subset E$. Finalement, soit $r \geq r_0$ et prenons $t \in [r, \alpha r] \cap F$. Alors

$$r \leq t \leq \alpha r \implies g(r) \leq g(t)$$

et

$$t \in [0, \infty) \setminus E \implies g(t) \leq h(t).$$

Donc on obtient

$$g(r) \leq g(t) \leq h(t) \leq h(\alpha t)$$

par la monotonie de $g(r)$ et $h(t)$. □

Lemme 1.8.9 [17] Soit f une fonction entière telle que $\mu(f) < \rho(f)$, et posons $\mu(f) < a < b < \rho(f)$. Alors les ensembles

$$E = \{r \geq 0 : T(r, f) < r^a\}$$

$$F = \{r \geq 0 : T(r, f) > r^b\}$$

sont de densité inférieure zéro et de densité supérieure un.

Preuve. [17] D'une part, nous avons

$$r^a \leq T(r, f), \quad r \notin E.$$

Si $\overline{\text{dens}}(E) < 1$, alors par le Lemme 1.8.8, il existe une constante $\alpha > 1$ et $r_0 > 0$ tels que pour tout $t = \alpha r$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^a \leq T\left(\alpha \cdot \frac{t}{\alpha}, f\right) &\Leftrightarrow a \ln\left(\frac{t}{\alpha}\right) \leq \ln T(t, f) \\ &\Leftrightarrow a \leq \frac{\ln T(t, f)}{\ln t} \cdot \frac{\ln t}{\ln t - \ln \alpha} \end{aligned}$$

Par passage à la limite inférieure on obtient $a \leq \mu(f)$ car $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\ln t - \ln \alpha} = 1$. C'est une contradiction, donc

$$\overline{\text{dens}}(E) = 1$$

D'autre part, on a

$$T(r, f) < r^a, \quad r \notin E^c,$$

où $E^c = [0, \infty) \setminus E$, si $\overline{\text{dens}}(E^c) < 1$. Alors par le Lemme 1.8.8, il existe une constante $\alpha > 1$ et $r_0 > 0$ tels que pour tout $t = \alpha r$, on a

$$\begin{aligned} T\left(\frac{t}{\alpha}, f\right) < t^a &\Leftrightarrow \ln T\left(\frac{t}{\alpha}, f\right) < a \ln t \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln T\left(\frac{t}{\alpha}, f\right) \ln \frac{t}{\alpha}}{\ln \frac{t}{\alpha}} \leq a \end{aligned}$$

Par passage à la limite supérieure, on obtient $\rho(f) < a$, c'est une contradiction, donc

$$\overline{\text{dens}}E^c = 1$$

Puis, nous avons

$$\overline{\text{dens}}(E^c) = 1 - \underline{\text{dens}}(E)$$

on conclut que $\underline{\text{dens}}(E) = 0$ □

Lemme 1.8.10 [6] *Soit f une fonction entière non constante. Alors il existe un nombre $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$ il existe z_r avec $|z_r| = r$ satisfaisant*

$$\left| \frac{f(z_r)}{f'(z_r)} \right| \leq r.$$

Lemme 1.8.11 [18] *Soit f une fonction entière non constante d'ordre $\rho < \infty$. Soit pour $\beta \in (0, 1)$ et $r > 0$, on a*

$$U_r = \left\{ \theta \in [0, 2\pi) : r \left| \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| \geq \beta n(r, 0, f) \right\}.$$

Alors pour $M > 3$, il existe un ensemble $E_M \subset [1, \infty)$ avec densité logarithmique inférieure au moins $1 - \frac{3}{M}$ tel que

$$m(U_r) > \left(\frac{1 - \beta}{7M(\rho + 1)} \right)^2, \quad r \in E_M.$$

Sur la relation entre l'ordre inférieur des coefficients et la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

2.1 Résultats principaux

Il y a beaucoup de résultats sur la croissance des solutions des équations différentielles linéaires lié à la croissance des coefficients en terme d'ordre usuel.

Le but principal dans ce mémoire est de montrer que les conclusions très similaires peuvent obtenues si l'ordre usuel est remplacé par l'ordre inférieur.

Notre point de départ est un résultat dû à G.G.Gundersen.

Théorème A : [5] Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $\rho(A) < \rho(B)$. Alors chaque solution non triviale de (0.0.1) est d'ordre infini.

Notre réponse au **Théorème A** on peut remplacé l'ordre usuel par l'ordre inférieur .

Théorème 2.1.1 Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $\mu(A) < \mu(B)$. Alors chaque solution non triviale de (0.0.1) est d'ordre infini.

Pour que (0.0.1) possède une solution non triviale d'ordre fini, il faut donc que $\mu(B) \leq \mu(A)$. Pour l'égalité voir l'exemple 10.

Le **Théorème A** nous laisse une question sur ce qui pourrait arriver si $\rho(B) \leq \rho(A)$. Puisque $f(z) = -z$ est une solution de $f'' - ze^z f' + e^z f = 0$, alors les solutions polynômiales sont possibles dans le cas $\rho(A) = \rho(B)$. On sait que si $A(z)$ et $B(z)$ sont entières vérifiant $\rho(B) < \rho(A)$, alors toute solution f de (0.0.1) satisfait $\rho(f) \geq \rho(A)$ [11, Théorème 2] . À la suite de ce raisonnement, nous montrons que l'ordre usuel peut être remplacé par l'ordre inférieur.

Corollaire 2.1.1 Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $\mu(B) < \mu(A)$. Alors toute solution non triviale f de (0.0.1) satisfait $\mu(f) \geq \mu(A)$.

L'exemple précédent $f'' - ze^z f' + e^z f = 0$ avec la solution polynôme $f(z) = -z$ montre également que la conclusion dans le corollaire est fautive si $\mu(A) = \mu(B)$.

Ici nous citons un résultat de Kwon.

Théorème B : [11] Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec avec $0 < \rho(B) < \frac{1}{2}$, et on suppose qu'il existe une constante réelle $\rho < \rho(B)$ et un ensemble $E_\rho \subset [1, \infty)$ avec $\underline{\text{dens}}(E_\rho) = 1$ tel que pour tout $r \in E_\rho$, on a

$$\min_{|z|=r} |A(z)| \leq \exp(r^\rho).$$

Alors toute solution f non triviale de (0.0.1) satisfait $\rho_2(f) \geq \rho(B)$.

Une fois de plus, l'ordre usuel dans le **Théorème B** peut être remplacé par l'ordre inférieur. Mais au détriment du remplacement de la condition de densité par la condition de densité logarithmique.

Théorème 2.1.2 Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $0 < \mu(B) < \frac{1}{2}$, et on suppose qu'il existe une constante réelle $\mu < \mu(B)$ et un ensemble $E_\mu \subset [1, \infty)$ avec $\underline{\log \text{dens}}(E_\mu) = 1$ tel que pour tout $r \in E_\mu$, on a

$$\min_{|z|=r} |A(z)| \leq \exp(r^\mu).$$

Alors toute solution f non triviale de (0.0.1) satisfait $\rho_2(f) \geq \mu(B)$.

Ensuite, nous voyons que dans [6, Théorème 6], les ordres usuels $\rho(B)$ et $\rho(A)$ peuvent être remplacés respectivement par les ordres inférieurs $\mu(B)$ et $\mu(A)$. La preuve est différente de celle de [6, Théorème 6] dans le sens où nous utilisons (0.0.1), ce qui n'est pas nécessaire pour prouver [6, Théorème 6].

Théorème 2.1.3 Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières avec $\mu(B) < \mu(A) < \frac{1}{2}$. Alors, chaque solution non triviale de (0.0.1) est d'ordre infini.

Dans les résultats restants, la fonction $T(r, A)$ et $\log M(r, A)$ sont asymptotiquement comparables, où $A(z)$ est la fonction coefficient dans (0.0.1).

Théorème C : [12] On suppose que $A(z)$ et $B(z)$ sont deux fonctions entières avec $\rho(B) < \rho(A) < \infty$, et $T(r, A) \sim \log M(r, A)$ quand $r \rightarrow \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieure strictement inférieure à $\frac{\rho(A) - \rho(B)}{\rho(A)}$. Alors toute solution non triviale de (0.0.1) est d'ordre infini.

Avant le **Théorème C**, la même conclusion a été prouvée sous les hypothèses plus fortes selon lesquelles $\rho(B) < \rho(A) < \infty$ et $T(r, A) \sim \log M(r, A)$ quand $r \rightarrow \infty$ en dehors de l'ensemble de la mesure logarithmique finie, voir [15].

Ensuite, nous indiquons un résultat analogue impliquant l'ordre inférieur et une classe de fonctions entières $A(z)$ satisfaisant

$$T(r, A) \sim \alpha \log M(r, A), \quad r \rightarrow \infty \tag{2.1.1}$$

en dehors d'un ensemble exceptionnel, où $\alpha \in (0, 1]$.

Dans la preuve du résultat suivant, nous utilisons une estimation de [18] pour l'inverse d'une dérivée logarithmique. Cette estimation n'est pas nécessaire pour prouver le **Théorème C**.

Théorème 2.1.4 *On suppose que $A(z)$ et $B(z)$ sont deux fonctions entières avec $\mu(B) < \mu(A) < \infty$ et (2.1.1) est satisfaite à l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieure zéro. Alors toute solution non triviale de (0.0.1) satisfait*

$$\rho(f) \geq \frac{\mu(A) - \mu(B)}{21(\mu(A) + \mu(B))\sqrt{2\pi(1 - \alpha)}} - 1, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Si $\alpha = 1$ alors $\rho(f) = \infty$.

2.2 Preuve de Théorème 2.1.1

Preuve. On suppose le contraire de l'assertion, qu'il existe une solution non triviale f de (0.0.1) telle $\rho(f) < \infty$. Par le Lemme 1.8.3 (i), il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ avec

$$m_1(E_1) = \int_{E_1} \frac{dt}{t} < \infty, \text{ tel que pour tout } z \text{ satisfaisant } |z| \notin E_1 \cup [0, 1]$$

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{k\rho(f)}, \quad k = 1, 2. \tag{2.2.1}$$

D'après le Lemme 1.8.6, on a pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{\mu(B) - \mu(A)}{2})$ donné, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, \infty)$ avec $\overline{\log dens}(E_2) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} T(r, A) &< r^{\mu(A) + \varepsilon} \\ T(r, B) &> r^{\mu(B) - \varepsilon} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

pour tout $r \in E_2$. Posons $E = E_2 \setminus (E_1 \cup [1, 0])$, on a $\overline{\log dens}(E) > 0$. En effet,

$$\overline{\log dens}(E) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_1(E \cap [1, r])}{\log r}$$

et

$$\begin{aligned} m_1(E \cap [1, r]) &= m_1(E_2 \setminus (E_1 \cup [0, 1]) \cap [1, r]) \\ &= m_1(E_2 \cap (E_1 \cup [0, 1])^c \cap [1, r]) \\ &= m_1(E_2 \cap [1, r] \cap E_1^c \cap [0, 1]^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_1(E_2 \cap [1, r]) + m_1(E_1^c \cap [0, 1]^c) - m_1((E_2 \cap [1, r]) \cup (E_1^c \cap [0, 1]^c)) \\
&= m_1(E_2 \cap [1, r]) + m_1(E_1^c \cap [0, 1]^c) - m_1((E_2 \cup E_1^c) \cap (E_2 \cup [0, 1]^c) \cap (E_2 \cup [1, r]))
\end{aligned}$$

et on a $\overline{\log dens}(E_2) > 0$. Par conséquent, il existe une suite (r_j) dans E avec $r_j \rightarrow \infty$ quand $j \rightarrow \infty$ telle que $|z| = r = r_j$. De l'équation différentielle

$$(0.0.1) \implies -B(z) = \frac{f''}{f} + A(z) \frac{f'}{f}$$

ce qui implique

$$m(r_j, B) \leq m(r_j, A) + m(r_j, \frac{f''}{f}) + m(r_j, \frac{f'}{f}) + O(1).$$

Puisque les fonctions A et B sont des entières, alors

$$N(r_j, A) \equiv N(r_j, B) \equiv 0.$$

Donc

$$T(r_j, B) \leq T(r_j, A) + m(r_j, \frac{f''}{f}) + m(r_j, \frac{f'}{f}) + O(1) \quad (2.2.3)$$

D'autre part, par le lemme 1.8.1 on obtient

$$m(r_j, \frac{f''}{f}) = O(\ln r_j),$$

$$m(r_j, \frac{f'}{f}) = O(\ln r_j)$$

Alors (2.2.3) donne

$$T(r_j, B) \leq T(r_j, A) + O(\ln r_j) + O(1) = T(r_j, A) + O(\ln r_j) \quad (2.2.4)$$

De(2.2.2)et (2.2.4) on obtient

$$r_j^{\mu(B)-\varepsilon} \leq T(r_j, B) \leq T(r_j, A) + O(\ln r_j) \leq r_j^{\mu(A)+\varepsilon} + O(\ln r_j)$$

$$\ln r_j^{\mu(B)-\varepsilon} \leq \ln[r_j^{\mu(A)+\varepsilon} + O(\ln r_j)]$$

$$(\mu(B) - \varepsilon) \ln r_j \leq (\mu(A) + \varepsilon) \ln r_j + \ln \left[1 + O \left(\frac{\ln r_j}{r_j^{\mu(A)+\varepsilon}} \right) \right]$$

Évidemment, c'est une contradiction avec $\mu(A) < \mu(B)$ pour j assez grand. Alors toute solution nont triviale de (0.0.1) est d'ordre infini.

□

2.3 Preuve de Corollaire 2.2.1 :

Preuve. On suppose que f est une solution non triviale de (0.0.1). Alors

$$\frac{f''}{f'} + B(z) \frac{f}{f'} = -A(z)$$

ce qui donne

$$m(r, A) \leq m(r, \frac{f''}{f'}) + m(r, B) + m(r, \frac{f}{f'}) + O(1)$$

Puisque A et B sont des fonction entières, alors

$$T(r, A) \leq m(r, \frac{f''}{f'}) + T(r, B) + m(r, \frac{f}{f'}) + O(1)$$

On pose

$$f' = h \implies f'' = h'$$

Donc

$$m(r, \frac{f''}{f'}) = m(r, \frac{h'}{h}).$$

Et d'après le lemme 1.8.1, on a

$$m(r, \frac{f''}{f'}) = O(\ln r + \ln T(r, f)).$$

Alors

$$T(r, A) \leq T(r, B) + m(r, \frac{f}{f'}) + O(\ln r + \ln T(r, f)).$$

Des lemmes 1.8.1 et 1.8.2 et le premier théorème de Nevanlinna, on a

$$\begin{aligned} m(r, \frac{f}{f'}) &\leq m(r, f) + m(r, \frac{1}{f'}) \\ &\leq T(r, f) + T(r, \frac{1}{f'}) \\ &\leq T(r, f) + T(r, f') + O(1) \\ &\leq T(r, f) + 2T(r, f) + O(\ln r T(r, f)) + O(1) \\ &\leq 3T(r, f) + O(\ln r T(r, f)) + O(1). \end{aligned}$$

Alors

$$T(r, A) \leq T(r, B) + 3T(r, f) + O(\ln r + \ln T(r, f)) \tag{2.3.1}$$

quand $r \rightarrow \infty$ et $r \notin F$, où $m(F) < \infty$. Puisque la mesure linéaire est finie alors la mesure logarithmique est finie, par passage à la limite on obtient

$$\overline{\log dens}(F) = 0.$$

Donc d'après l'inverse du Lemme 1.8.6 on a, pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{\mu(A)-\mu(B)}{2})$ donné

$$T(r, A) \geq r^{\mu(A)-\varepsilon} \quad (2.3.2)$$

$$T(r, B) \leq r^{\mu(B)+\varepsilon} \quad (2.3.3)$$

pour tout $r \in E$. De (2.3.1) et (2.3.2) on obtient

$$r^{\mu(A)-\varepsilon} \leq r^{\mu(B)+\varepsilon} + 3T(r, f) + O(\ln r + \ln T(r, f))$$

$$r^{\mu(A)-\varepsilon} [1 - r^{\mu(B)-\mu(A)+2\varepsilon}] \leq 3T(r, f) + O(\ln r + \ln T(r, f))$$

$$\mu(A) - \varepsilon + \frac{\ln [1 - r^{\mu(B)-\mu(A)+2\varepsilon}]}{\ln r} \leq \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} + \frac{\ln \left[3 + \frac{K(\ln r + \ln T(r, f))}{T(r, f)} \right]}{\ln r}$$

Par passage à la limite supérieure on obtient le résultat . □

2.4 Preuve de théorème 2.1.2

Preuve. Soient μ et β deux constantes satisfaisant $0 < \mu < \beta < \mu(B)$, et soit f une solution non triviale de (0.0.1). D'après l'hypothèse du théorème, il existe un ensemble $E_\mu \subset [1, \infty)$ avec $\overline{\log dens}(E_\mu) = 1$ tel que $A(z)$ vérifie

$$\min_{|z|=r} |A(z)| \leq \exp(r^\mu)$$

pour tout $r \in E_\mu$. Posons

$$E_1 = \{z : |z| = r \in E_\mu, |A(z)| = \min_{|z|=r} |A(z)|\}.$$

Alors

$$\overline{\log dens}(\{|z| : z \in E_1\}) = 1$$

et

$$|A(z)| \leq \exp(r^\mu) \quad (2.4.1)$$

pour tout $z \in E_1$. On applique le Lemme 1.8.7 sur $B(z)$, alors pour tout $\alpha \in (\mu(B), \frac{1}{2})$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, \infty)$ et $\overline{\log dens}(E_2) \geq 1 - \frac{\mu(B)}{\alpha}$ tels que pour tout $|z| = r \in E_2 \setminus [0, r_0]$ où $r_0 > 1$ une constante, on a

$$\log |B(z)| > \inf_{|z|=r} \log |B(z)| > \sup_{|z|=r} \log |B(z)| \cos \pi \alpha \quad (2.4.2)$$

$$> \log \sup_{|z|=r} |B(z)| \cos \pi \alpha > \cos \pi \alpha \log M(r, B). \quad (2.4.3)$$

Par la définition de l'ordre inférieur, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$, tel que

$$\log M(r, B) > r^{\mu(B)-\frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.4.4)$$

pour tout $r > r_0$. Donc de (2.4.2) et (2.4.4) on obtient

$$\log |B(z)| > \cos \pi \alpha r^{\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}}$$

et on a pour tout $r > r_0$.

$$\frac{\cos(\pi \alpha) r^{\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}}}{r^{\mu(B) - \varepsilon}} \rightarrow +\infty, \quad (r \rightarrow +\infty)$$

d'où

$$\log |B(z)| > \cos(\pi \alpha) r^{\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}} > r^{\mu(B) - \varepsilon}$$

On pose $\mu(B) - \varepsilon = \beta$ car $\mu(B) > \beta$. Ainsi

$$|B(z)| > \exp(\cos \pi \alpha r^{\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}}) > \exp r^\beta. \quad (2.4.5)$$

Par le lemme 1.8.4, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, \infty)$ avec $m_1(E_3) < \infty$ et on prend $\{\alpha = 2; j = 0\}$

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq c_1 \left[\frac{T(2r, f)}{r} (\log r)^2 \log T(2r, f) \right]^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_3 \cup [0, 1]$. Puisque $|z| = r \notin E_3 \subset (1, \infty)$ alors $\frac{(\log r)^2}{r} < 1$ et on sait que $(\log T(\alpha r, f))^k < T(\alpha r, f)$. Alors

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq d [T(2r, f)]^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4.6)$$

où d est une constante. Pour $k = 1$

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq d T(2r, f)^2 \leq d (T(2r, f))^4$$

Pour $k = 2$

$$\left| \frac{f''(z)}{f(z)} \right| \leq d T(2r, f)^4$$

$\forall |z| \notin E_3 \cup [0, 1]$.

On pose $E_4 = \{|z| : z \in E_1\} \cap (E_2 \setminus ([0, r_0] \cup E_3))$

$$\begin{aligned} E_4 &= \{|z| : z \in E_1\} \cap (E_2 \setminus ([0, r_0] \cup E_3)) \\ &= \{|z| : z \in E_1\} \cap E_2 \cap ([0, r_0] \cup E_3)^c \\ &= \{|z| : z \in E_1\} \cap E_2 \cap [0, r_0]^c \cap E_3^c \\ E_4 \cap [1, r] &= \{|z| : z \in E_1\} \cap E_2 \cap [0, r_0]^c \cap E_3^c \cap [1, r] \\ m_1(E_4 \cap [1, r]) &= m_1(\{|z| : z \in E_1\} \cap E_2 \cap [0, r_0]^c \cap E_3^c) \end{aligned}$$

$$m_1(E_2 \cap [1, r]) + m_1(\{|z| : z \in E_1\} \cap [0, r_0]^c \cap E_3^c) - m_1((E_2 \cap [1, r]) \cup \{|z| : z \in E_1\} \cap [0, r_0]^c \cap E_3^c)$$

Puisque $\overline{\log dens}(E_2) \geq 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha} > 0$ alors $\overline{\log dens}(E_4) > 0$. Donc, Il existe une suite (r_j) dans E_4 avec $r_j \rightarrow \infty$ quand $j \rightarrow \infty$ telle que (2.4.1), (2.4.5), (2.4.6), pour tout $|z| = r = r_j$. D'autre part de (0.0.1), on a

$$|B(z)| \leq \left| \frac{f''(z)}{f(z)} \right| + |A(z)| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|. \quad (2.4.7)$$

Donc, de (2.4.7), (2.4.1), (2.4.5), (2.4.6), on a

$$\exp(r_j^\beta) \leq (1 + \exp(r_j^\mu)) dT(2r_j, f)^4 \quad (2.4.8)$$

Ainsi, on a

$$\mu < \beta < 1 \implies \exp(r_j^\mu) < \exp(r_j^\beta)$$

donc

$$\frac{\exp(r_j^\mu) + 1}{\exp(r_j^\beta)} = \frac{\exp(r_j^\mu)}{\exp(r_j^\beta)} + \frac{1}{\exp(r_j^\beta)} < 1 \implies \exp(r_j^\mu) + 1 = \exp(r_j^\beta) o(1).$$

Alors

$$\frac{\exp(r_j^\beta)}{(1 + \exp(r_j^\mu))} = \frac{\exp(r_j^\beta)}{\exp(r_j^\beta) o(1)} = \exp(r_j^\beta) \cdot \exp[-(r_j^\beta) o(1)] = \exp((1 - o(1))r_j^\beta).$$

D'où

$$\exp((1 - o(1))r_j^\beta) \leq dT(2r_j, f)^4$$

quand $j \rightarrow \infty$. Donc

$$(1 - o(1))r_j^\beta \leq \log T(2r_j, f)^4 \implies \log r_j^\beta \leq \log 4 \log T(2r_j, f)$$

$$\implies \beta \leq \frac{\log 4 + \log \log T(2r_j, f)}{\log r_j}$$

$$\implies \beta \leq \frac{\log^+ \log^+ T(2r_j, f)}{\log r_j}.$$

Alors

$$\beta \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ T(2r, f)}{\log r}.$$

Comme $\beta < \mu(B)$ est arbitraire, on obtient $\rho_2(f) \geq \mu(B)$. □

2.5 Preuve de théorème 2.1.3

Preuve. On suppose le contraire de l'assertion, qu'il existe une solution non triviale de (0.0.1) avec $\rho(f) < \infty$. Nous visons une contradiction. Soit μ une constante satisfaisant $\mu(B) < \mu < \mu(A) < \frac{1}{2}$. On applique le Lemme 1.8.7 sur $A(z)$. Alors pour tout $\alpha \in (\mu(A), \frac{1}{2})$ il existe un ensemble $E_1 \subset [1, \infty)$ avec $\overline{\log dens}(E_1) \geq 1 - \frac{\mu(A)}{\alpha}$ tel que pour tout $|z| = r \in E_1 \setminus [0, r_0]$ où $r_0 > 1$ une constante, on a

$$\log |A(z)| > \inf_{|z|=r} \log |A(z)| > \sup_{|z|=r} \log |A(z)| \cos \pi \alpha \quad (2.5.1)$$

$$> \log \sup_{|z|=r} |A(z)| \cos \pi \alpha > \log M(r, A) \cos \pi \alpha. \quad (2.5.2)$$

D'autre part, par la définition de l'ordre inférieur on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$T(r, A) = \log M(r, A) > r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.5.3)$$

pour tout $r > r_0$. De (2.5.1) et (2.5.3) on obtient

$$\log |A(z)| > \cos(\pi \alpha) r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}}$$

et on a pour tout $r > r_0$

$$\frac{\cos(\pi \alpha) r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}}}{r^{\mu(A) - \varepsilon}} \rightarrow \infty, (r \rightarrow \infty).$$

D'où

$$\log |A(z)| > \cos(\pi \alpha) r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}} > r^{\mu(A) - \varepsilon}$$

On pose $\mu(A) - \varepsilon = \mu$ car $\mu(A) > \mu$. Donc

$$|A(z)| > \exp(\cos(\pi \alpha) r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}}) > \exp r^\mu. \quad (2.5.4)$$

Par le Lemme 1.8.3 il existe un ensemble $E_2 \subset (1, \infty)$ avec $m_1(E_2) < \infty$ tel que (2.4.6) est satisfaite pour tout z avec $|z| = r \notin E_2 \cup [0, 1]$. Par conséquent de (0.0.1), (2.4.6) et (2.5.4) il existe un ensemble $E_3 = E_1 \setminus (E_2 \cup [0, r_0])$ avec $\overline{\log dens}(E_3) > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, on a

$$\exp r^\mu \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq |A(z)| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq |B(z)| + |z|^{2\rho(f)} \quad (2.5.5)$$

Par le Lemme 1.8.10, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$, il existe un z_r avec $|z_r| = r$ satisfaisant

$$\left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| \leq r \quad (2.5.6)$$

Donc, en combinant (2.5.5) et (2.5.6), il existe un ensemble $E_4 = E_3 \cap [R, \infty)$ avec

$$\overline{\log dens}(E_4) = \overline{\log dens}(E_3) > 0$$

tel que pour tout $|z| = r \in E_4$ on a

$$\frac{\exp r^\mu}{r} \leq |B(z)| + |z|^{2\rho(f)}$$

ce qui donne

$$\mu + \frac{\log[1 - \frac{\log r}{r^\mu}]}{\log r} \leq \frac{\log \log |B(z)|}{\log r} + \frac{\log[2\rho(f) \log r]}{\log r}$$

Par passage à la limite inférieure on obtient $\mu < \mu(B)$ c'est une contradiction avec $\mu(B) < \mu$. \square

2.6 Preuve de théorème 2.1.4 :

Preuve. On définit

$$M_\varepsilon = \frac{3(\mu(A) + \mu(B))}{\mu(A) - \mu(B) - 2\varepsilon} \quad (2.6.1)$$

où $\varepsilon \in \left[0, \frac{\mu(A) - \mu(B)}{2}\right)$. Alors pour $\alpha \in (0, 1)$ l'assertion est équivalente à $\rho(f) \geq \frac{1}{7M_0\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} - 1$. On peut supposer que $\frac{1}{7M_0\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} > 1$, car autrement l'assertion est triviale. Supposons le contraire que (0.0.1) admet une solution non triviale f pour laquelle

$$\rho(f) < \frac{1}{7M_0\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} - 1$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$\rho(f) < \frac{1-\varepsilon}{7M_\varepsilon\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} - 1 < \frac{1}{7M_0\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} - 1.$$

Alors

$$\frac{1}{\rho(f) + 1} > \frac{7M_\varepsilon\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}{1-\varepsilon} \implies \left(\frac{1-\varepsilon}{7M_\varepsilon(\rho(f) + 1)}\right)^2 > 2\pi(1-\alpha)$$

On définit

$$U_r = \{\theta \in [0, 2\pi) : r \left| \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| \geq \varepsilon n(r, 0, f)\}. \quad (2.6.2)$$

Par le Lemme 1.8.11, il existe un ensemble $E_{M_\varepsilon} \subset [1, \infty)$ avec $\underline{\log dens}(E_{M_\varepsilon}) \geq 1 - \frac{3}{M_\varepsilon}$ tel que

$$m(U_r) > \left(\frac{1-\varepsilon}{7M_\varepsilon(\rho(f) + 1)}\right)^2 > 2\pi(1-\alpha), \quad r \in E_{M_\varepsilon}.$$

Soit $0 < d < 1$ donné, on définit

$$I_d(r) = \{\theta \in [0, 2\pi) : \log |A(re^{i\theta})| < (1-d) \log M(r, A)\}. \quad (2.6.3)$$

Alors, on a $[0, 2\pi] = I_d(r) \cup I_d^c(r)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2\pi T(r, A) &= \int_0^{2\pi} T(r, A) d\theta = \int_{I_d(r)} \log^+ |A(re^{i\theta})| d\theta + \int_{I_d^c(r)} \log^+ |A(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq (1-d)m(I_d(r)) \log M(r, A) + m(I_d^c(r)) \log M(r, A) \\ &= (1-d)m(I_d(r)) \log M(r, A) + (2\pi - m(I_d(r))) \log M(r, A). \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Par (2.1.1) on a $2\pi T(r, A) \sim 2\pi\alpha \log M(r, A)$ quand $r \rightarrow \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieur à zéro. Alors nous divisons par $\log M(r, A)$ dans (2.6.4) pour conclure que

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha \log M(r, A) &\leq (1-d)m(I_d(r)) \log M(r, A) + (2\pi - m(I_d(r))) \log M(r, A) \\ \implies m(I_d(r)) &\leq 2\pi \frac{1-\alpha}{d} \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

à l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieur à zéro. Par conséquent, pour $d \in (0, 1)$ assez proche de 1, il existe un ensemble $F_1 \subset [1, \infty)$ avec $\underline{\log dens}(F_1) = 1$ tel que

$$m(U_r) > m(I_d(r)), \quad r \in F_1 \cap E_{M_\varepsilon}. \quad (2.6.5)$$

Par le même raisonnement que dans [6, p.426], on sait qu'il existe au moins un zéro pour une solution non triviale de (0.0.1). D'après le Lemme 1.8.11 et (2.6.5) il existe $\theta_0 \in U_r \setminus I_d(r)$, tel que pour $r \in F_1 \cap E_{M_\varepsilon}$ suffisamment grand,

$$r \left| \frac{f'(re^{i\theta_0})}{f(re^{i\theta_0})} \right| \geq \varepsilon. \quad (2.6.6)$$

Il existe un $r_0 > 1$, tel que pour tout $r \geq r_0$,

$$\log M(r, A) > r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Donc pour $\theta_0 \in U_r \setminus I_d(r)$ et $r \in F_1 \cap \{r : r \geq r_0\}$

$$\log |A(re^{i\theta_0})| \geq (1-d) \log M(r, A) \geq (1-d)r^{\mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (2.6.7)$$

Il existe une suite (r_n) avec $r_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ telle que pour n suffisamment grand

$$\log M(r_n, B) < r_n^{\mu(B) + \varepsilon}.$$

On pose

$$F_2 = \bigcup_n \left[r_n^{\frac{\mu(B) + \varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon}}, r_n \right]$$

Alors

$$\overline{\log dens}(F_2) = \lim_{r_n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{\log r_n} \int_1^{r_n} \frac{1}{t} dt = 1.$$

D'autre part

$$\frac{\mu(A) - \mu(B) - 2\varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon} = 1 - \frac{\mu(B) + \varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon} < 1.$$

D'où

$$\overline{\log dens}(F_2) > \frac{\mu(A) - \mu(B) - 2\varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon}.$$

Pour tout $r \in \left[r_n^{\frac{\mu(B) + \varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon}}, r_n \right]$ on a

$$\log M(r, B) < \log M(r_n r, B) < r_n^{\mu(B) + \varepsilon}$$

$$\left(\frac{\mu(B) + \varepsilon}{r_n^{\mu(A) - \varepsilon}} \right)^{\mu(A) - \varepsilon} < r^{\mu(A) - \varepsilon} \quad (2.6.8)$$

Par le Lemme 1.8.3, il existe un ensemble $F_3 \subset (1, \infty)$ avec $m_1(F_3) < \infty$ tel que (2.4.6) est satisfaite pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin F_3 \cup [0, 1]$. On note que l'ensemble $F_0 = E_{M_\varepsilon} \cap \{r : r \geq r_0\} F_1 \cap F_2$ satisfait

$$\begin{aligned} \overline{\log dens}(F_0) &= \lim_{r_n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{\log r_n} m_1(E_{M_\varepsilon} \cap \{r : r \geq r_0\} F_1 \cap F_2 \cap [1, r]) \\ &= \lim_{r_n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{\log r_n} m_1(E_{M_\varepsilon} \cap F_1 \cap F_2 \cap [1, r]) \\ &\geq \overline{\log dens}(F_2) - \overline{\log dens}(E_{M_\varepsilon}^c) - \overline{\log dens}(F_1^c) \\ &= \overline{\log dens}(F_2) - (1 - \overline{\log dens}(E_{M_\varepsilon})) - (1 - \overline{\log dens}(F_1)) \\ &\geq \frac{\mu(A) - \mu(B) - 2\varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon} - (1 - 1 - \frac{3}{M_\varepsilon}) \\ &\geq \frac{\mu(A) - \mu(B) - 2\varepsilon}{\mu(A) - \varepsilon} - \frac{3}{M_\varepsilon} > 0 \end{aligned}$$

Donc, il existe une suite (t_j) dans $F_0 \setminus (F_3 \cup [0, 1])$ avec $t_j \rightarrow \infty$ quand $j \rightarrow \infty$ telle que (2.6.6) et (2.6.7) et (2.6.8) et (2.4.6) sont satisfaites pour $|z| = r = t_j$. Donc par (0.0.1), et on pose $z = t_j e^{i\theta_0}$, on obtient

$$\left| A(t_j e^{i\theta_0}) \frac{f'(t_j e^{i\theta_0})}{f(t_j e^{i\theta_0})} \right| \leq |B(t_j e^{i\theta_0})| + \left| \frac{f''(t_j e^{i\theta_0})}{f(t_j e^{i\theta_0})} \right|.$$

Ainsi

$$\exp((1-d)t_j^{\mu(A)-\frac{\varepsilon}{2}}) \frac{\varepsilon}{t_j} \leq \exp(t_j^{\mu(A)-\varepsilon}) + t_j^{2\rho(f)}$$

Puisque

$$\frac{\exp((1-d)t_j^{\mu(A)-\frac{\varepsilon}{2}}) \frac{\varepsilon}{t_j}}{\exp(t_j^{\mu(A)-\varepsilon}) + t_j^{2\rho(f)}} \rightarrow +\infty$$

quand $j \rightarrow \infty$. Donc c'est une contradiction. Soit $\alpha = 1$ et supposons le contraire de l'assertion que $\rho(f) < \infty$. On définit M_ε et U_r comme dans (2.6.1) et (2.6.2). Par le Lemme 1.8.12, il existe un ensemble $E_{M_\varepsilon} \subset [1, \infty)$ avec

$$\underline{\log dens}(E_{M_\varepsilon}) \geq 1 - \frac{3}{M_\varepsilon}$$

tel que

$$m(U_r) > \left(\frac{1-\varepsilon}{7M_\varepsilon(\rho(f)+1)} \right)^2 > 0, \quad r \in E_{M_\varepsilon}.$$

Ensuite on définit $I_d(r)$ comme dans (2.6.3) et on conclut que pour $\alpha = 1$ on a $m(I_d(r)) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieure nulle. Par conséquent, il existe un ensemble $F_1 \subset [1, \infty)$ avec $\underline{\log dens}(F_1) = 1$ tel que

$$m(U_r) > m(I_d(r)), \quad r \in F_1 \cap E_{M_\varepsilon} \tag{2.6.9}$$

Le reste de preuve est le même que dans le cas $\alpha < 1$. □

2.7 Exemples :

Nous donnons des exemples qui illustrent certaines possibilités qui peuvent se produire dans nos résultats et nos conditions. Les deux premiers montrent que $\mu(B) \leq \mu(A)$ l'égalité ou l'inégalité est stricte lorsque (0.0.1) possède une solution d'ordres fini.

Exemple 10 Soit $H(z)$ est une fonction d'ordre inférieur fini et positive, et soit k un entier positive. Alors $f(z) = \exp(z^k)$ solution de (0.0.1), où

$$A(z) = H(z) - kz^{k-1}$$

$$B(z) = -(k(k-1)) - kz^{k-1}H(z)$$

(i) On prend $H(z) = \cos z$; $k = 2$, et

$$A(z) = \cos z - 2z$$

$$B(z) = -2 - 2z \cos z$$

Alors $f(z) = \exp(z^2)$ est une solution de

$$f'' + (\cos z - 2z)f' + (-2 - 2z \cos z)f = 0$$

D'autre part on a

$$\mu(\cos z) = 1 > 0, \rho(f) = 2$$

On sait que $\rho(-2z) = 0 < \mu(\cos z)$. Alors par la Proposition 1.3.1 on a

$$\mu(A) = \mu(\cos z) = 1.$$

Même chose pour $B(z)$. Puisque $\rho(-2z) = 0 < \mu(\cos z)$ alors par la Proposition 1.3.1 on a

$$\mu(B) = \mu(\cos z) = 1.$$

Donc

$$\mu(B) = \mu(A) = \mu(H).$$

(ii) On prend $H(z) = \exp z^2$; $k = 3$, et

$$A(z) = \exp z^2 - 3z^2$$

$$B(z) = -6z - 3z^2 \exp z^2$$

Alors $f(z) = \exp z^3$ est une solution de

$$f'' + (\exp z^2 - 3z^2)f' + (-6z - 3z^2 \exp z^2)f = 0.$$

D'autre part on a

$$\mu(\exp z^2) = 2 > 0, \rho(f) = 3.$$

On sait que $\rho(-3z^2) = 0 < \mu(\exp z^2)$ alors par la Proposition 1.3.1, on a

$$\mu(A) = \mu(\exp z^2) = 2.$$

Même chose pour $B(z)$. Puisque

$$\rho(-6z) = \rho(3z^2) = 0 < \mu(\exp z^2).$$

Alors par la Proposition 1.3.1, on a

$$\mu(B) = \mu(\exp z^2) = 2.$$

Donc

$$\mu(B) = \mu(A) = \mu(H).$$

Exemple 11 Soit $Q(z)$ un polynôme non constant, et soit $B(z)$ une fonction entière avec $\mu(B) \leq \rho(B) < \deg(Q)$. De plus, soit f la primitive de $e^{Q(z)}$ satisfaisant $\lambda(f) = \deg(Q)$, et on définit

$$A(z) = -Q'(z) - B(z)fe^{-Q(z)}.$$

Alors f est une solution de (0.0.1).

i) On prend

$$Q(z) = z, \quad B(z) = z^2, \quad f(z) = e^z + a = \int e^z, \quad a \neq 0, \infty, \quad A(z) = -1 - z^2(e^z + a)e^{-z}.$$

On a

$$\lambda(f) = \deg(Q) = 1$$

car

$$\begin{aligned} e^z = -a &\iff z = \log |a| + i \operatorname{Arg}(-a) + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ |z| \leq t &\iff \sqrt{(\log |a|)^2 + (\operatorname{Arg}(-a) + 2k\pi)^2} \leq t \\ &\iff (\operatorname{Arg}(-a) + 2k\pi)^2 \leq t^2 - (\log |a|)^2 \\ &\iff -\sqrt{t^2 - (\log |a|)^2} + \operatorname{Arg}(-a) \leq 2k\pi \leq \sqrt{t^2 - (\log |a|)^2} - \operatorname{Arg}(-a) \\ &\iff \frac{-\sqrt{t^2 - (\log |a|)^2} + \operatorname{Arg}(-a)}{2\pi} \leq k \leq \frac{\sqrt{t^2 - (\log |a|)^2} - \operatorname{Arg}(-a)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} n(t, \frac{1}{f}) &\sim \frac{\sqrt{t^2 - (\log |a|)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi}, \quad t \rightarrow \infty \\ &\iff N(t, \frac{1}{f}) = \int_0^t \frac{\frac{t}{\pi} + o(1)}{t} dt \\ &\iff N(t, \frac{1}{f}) = \frac{t}{\pi} + o(1) \\ &\iff \lambda = 1. \end{aligned}$$

Alors $f(z) = e^z + a$ est une solution de

$$f'' + (-1 - z^2(e^z + a)e^{-z})f' + z^2f = 0.$$

D'autre part

$$\mu(B) = \rho(B) = 0 < \deg(Q)$$

et $\rho(z^2) = 0 < \mu(e^{-z})$. Alors

$$\mu(A) = \rho(A) = \mu(e^{-z}) = 1.$$

D'où

$$\mu(B) = \rho(B) = 0 < \deg(Q) = \mu(A) = \rho(A) = \mu(f) = \rho(f).$$

Les deux exemples suivants illustrent la condition dans le Théorème 2.1.4.

Exemple 12 $f(z) = e^{-z}$ est solution de

$$f'' + e^z f' + (e^z - 1)f = 0$$

On a

$$A(z) = e^z$$

Alors

$$\begin{aligned} T(r, A) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ e^{r \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi d\varphi, \\ &= \frac{r}{2\pi} \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

D'autre part

$$M(r, A) = \max_{|z|=r} |e^z|,$$

$$|e^z| = e^{r \cos \varphi} \leq e^r$$

et il existe $\varphi_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{r \cos \varphi_0} = e^r$. Donc

$$\max_{|z|=r} |e^z| = e^r$$

Alors

$$\log M(r, A) = r$$

ce qui donne

$$T(r, A) \sim \alpha \log M(r, A), \quad \alpha = \frac{1}{\pi}$$

Exemple 13 Soit $A(z) = P_1(z)e^{Q_1(z)} + \dots + P_n(z)e^{Q_n(z)}$ où $P_j(z)$ et $Q_j(z)$ sont des polynômes de croissance complètement régulière voir [19]. Si $\rho = \rho(A)$. Alors

$$\log |A(z)| = r^\rho h_A(\theta) + o(r^\rho), \quad z = re^{i\theta}$$

se tient en dehors de la possible C_0 - ensemble par [19, Théorème 1.2.1]. Ici $h_A(\theta)$ est la fonction indicatrice de Phragmen Lindelof de $A(z)$, et $h_A^+(\theta) = \max\{0, h_A(\theta)\}$. On a

$$T(r, A) = (1 + o(1)) \frac{r^\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_A^+(\theta) d\theta$$

Et

$$M(r, A) = (1 + o(1))r^\rho \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} h_A(\theta)$$

pour tous $r \notin E$. On conclure que le condition de (2.1.1) se tient pour

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_A^+(\theta) d\theta}{\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} h_A(\theta)}$$

a l'extérieur d'un ensemble de densité logarithmique supérieur zéro.

i) Pour toutes fonction entière f solution de

$$f'' + (e^{2z} + e^z + 1)f' + e^z f = 0$$

On a

$$A(z) = e^{2z} + e^z + 1$$

tel que

$$\begin{cases} P_i(z) = 1, \forall i = \overline{1, 3} \\ Q_1(z) = 2, Q_2(z) = 1, Q_3(z) = 0 \end{cases}$$

D'autre par $\rho = \rho(A) = 1$ et

$$\begin{aligned} |A(z)| &= |e^{2z} + e^z + 1| \leq e^{2r \cos \theta} + e^{r \cos \theta} + 1 \\ &= e^{2r \cos \theta} (1 + e^{-r \cos \theta} + e^{-2r \cos \theta}) \\ &= e^{2r \cos \theta} + o(1) \text{ quand } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc

$$|A(z)| \sim e^{2r \cos \theta}$$

D'où

$$\begin{aligned} h_A(\theta) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |A(z)|}{r} \\ &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

Qui nous donne

$$\log |A(z)| = 2r \cos \theta + \log\left(1 + \frac{o(1)}{e^{2r \cos \theta}}\right), \quad z = re^{i\theta}$$

$$\iff |A(z)| = \exp(2r \cos \theta + o(1))$$

$$M(r, A) = \max_{|z|=r} |A(z)|$$

$$= \max_{|z|=r} |\exp(2r \cos \theta + o(1))|$$

$$= \exp(r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta) + o(1))$$

$$\begin{aligned} \iff \log M(r, A) &= r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta) + o(1) \\ &= r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta) \left[1 + \frac{o(1)}{r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta)} \right] \end{aligned}$$

Quand $r \rightarrow \infty$

$$\log M(r, A) = r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta) [1 + o(1)]$$

et

$$\begin{aligned} T(r, A) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |A(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+(e^{2r \cos \theta} + o(1)) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ e^{2r \cos \theta} \left(1 + \frac{o(1)}{e^{2r \cos \theta}}\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\ln^+ e^{2r \cos \theta} + \ln^+ (1 + \frac{o(1)}{e^{2r \cos \theta}})] d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, \ln(e^{2r \cos \theta})\} d\varphi + o(1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2r \cos \theta\} d\varphi + o(1) \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2 \cos \theta\} d\varphi \left(1 + \frac{o(1)}{\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2 \cos \theta\} d\varphi}\right) \\ T(r, A) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2 \cos \theta\} d\varphi (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Donc

$$T(r, A) \sim \alpha \log M(r, A), \quad \alpha = \frac{\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2 \cos \theta\} d\varphi}{r \max_{|z|=r} (2 \cos \theta)}$$

2.8 Conclusion

Beaucoup de mathématiciens ont étudié la relation entre l'ordre usuel ρ des coefficients et la croissance des solutions des équations différentielles linéaires [6], [11], [12].

Dans ce mémoire on a traité les résultats de *Jianren, Janne, Zhan* concernant l'équation

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0$$

où nous avons remplacé l'ordre usuel par l'ordre inférieur dans les résultats de [6], [11].

Finalement, la question qui se pose : est-ce qu'on peut généraliser les théorèmes précédents pour une équation d'ordre n ?

Bibliographie

- [1] S. Bank, A general theorem Concerning the growth of Solutions of first-order algebraic differential equations , *Compos Math*, 25 (1972) 61-70.
- [2] P. D. Barry, Some theorems related to the $\cos\pi\rho$ theorem, *Proc. Lond. Math. Soc.* 21 (3) (1970), 334-360.
- [3] K. S. Charak, Value Distribution Theory of Meromorphic Functions, Department of Mathematics, University of Jammu, Jammu 180006, India. 2009.
- [4] A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, Value Distribution of Meromorphic Functions, Translated from the 1970 Russian original by Mikhail Ostrovskii. With an appendix by Alexandre Eremenko and James K. Langley, *Transl Math.Monoger vol. 236*, Amer. Math. Soc. Providence RI, 2008.
- [5] G. G. Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, *J. London Math. Soc.* (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.
- [6] G. G. Gundersen, Finite order solutions of second order linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*,305 (1) (1988), 415-429.
- [7] W. K. Hayman ; *Meromorphic Functions* Oxford, Clarendon Press, 1964.
- [8] J. Heittokangas, A survey on Blaschke-Oscillatory differential equations,with updates, in : *Blaschke Products and Their Applications*, in : *Fields Inst. Commun*,vol 65, Springer New York,2013,pp.43-98.
- [9] J. Heittokangas. I. Laine. K. Tohge. Z. T. Wen. completely regular growth solutions of second order complex linear differential equation, *Ann. Acad Sci. Fenn.* 40 (2015) 985-1003.
- [10] T. J. Kobayashi, On the lower order of an entire function, *Kodai Math. Sem. Rep.* 27 (1976), 484-495
- [11] K. Kwon, On the growth of entire function satisfying second order linear differential equations, *Bull. Korean Math. Soc* 33 (3) (1996) 487-496.
- [12] K .Kwon, J. Kim, Maximum modulus. characteristic, deficiency and growth of solutions of second order linear differential equation, *Kodai Math, J.* 24 (3) (2001) 344-351.
- [13] I. Laine ; *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

-
- [14] I. Laine ; Complex Differential Equations, in : Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, vol, 4, Elsevier, Amsterdam, 2008.
 - [15] I. Laine ; P. C. Wu. Growth of solution of second order linear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 128 (9) (2000) 2693-2703.
 - [16] J. R. Long, P. C. Wu, J. Zhu, On zeros and deficiencies of difference of meromorphic functions. Adv. Difference Equ (2014) 128, 10 pp.
 - [17] J. Long, P. C. Wu, J. Zhu, On the relationship between the lower order of coefficients and the growth of solutions of differential equations. J. Math Appl. (2016).
 - [18] J. Miles, J. Rossi, Linear combinations of logarithmic derivatives of entire functions with applications to differential equations, Pacific J, Math. 174 (1) (1996) 195-214.
 - [19] L. I. Ronkin, Functions of completely Regular Growth, Translated from the Russian by A. Ronkin and I. Yedvabnik, Math .Appl (Sov. Ser), vol. 81, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.
 - [20] L. Yang, Value distribution theory, Springer-Verlag, Berlin , 1993.
 - [21] C. C. Yang, H. X. Yi, Uniqueness theory of meromorphic functions, Kluwer Academic publishers, New York, 2003.