UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de

MASTER

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Quelques résultats sur l'hyper ordre des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients méromorphes.

Présenté par : Mlle Nadia CHAMOUMA

Président	**M**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**M**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	**Mme SAIDANI**	**U. MOSTAGANEM.**

Année universitaire : 2016-2017

Dédicace

Grâce à mon Dieu elkadir

Je dédie ce travail à mes très chers parents qui ont tant prié à ma réussite, et pour leur soutien moral, je les remercie de m'avoir encouragé et aidée à devenir ce que je suis.

A mes frères, mes sœurs, mes grands mères, Mes grands- pères.

Et à toute la famille chamouma.

A mes très chers amis qui ont contribué dans ce travail et à tous ceux que j'aime.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU le miséricordieux de m'avoir donnés la possibilité de réaliser mon projet, d'arriver à mes souhaits et d'atteindre mes objectifs.

Je remercie toutes les personnes qui d'une manière ou d'une autre, ont contribué au bon déroulement de mon travail, tout au niveau humain qu'au niveau scientifique.

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Mme Mansouria SAIDANI . Je n'ai pu bénéficier à la fois de ses compétences scientifiques, et de sa grande disponibilité, tant pour résoudre les difficultés rencontrés lors de mes réalisations, de répondre à mes questions.

Mes remerciements les plus sincères vont à Mme Louiza Tabharit qui m'a honoré en acceptant d'être présidente du jury.

Je tiens à adresser mes remerciement à Mme Amina FERRAOUN pour l'intérêt qu'elle a porté pour mon travail en participant à ce jury en tant qu' examinatrice.

A mes très chers parents qui ont tant prié à ma réussite, de soutien moral. Je les remercie de m'avoir encouragée et aidé à devenir ce que je suis. A mes frères, mes sœurs, mes grands-parents, Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction **1**

1 Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna **3**

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna 3

1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière . . 14

1.3 Exposant de convergence des pôles d'une fonction méromorphe 15

1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles 15

1.4.1 **Théorème de factorisation de Hadamard** 16

1.4.2 Indice central et le terme maximal 17

1.5 Lemmes préliminaires 17

1.5.1 **Preuve du lemme 1.5.6** 19

2 l'hyper ordre des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients méromorphes. **22**

2.1 Introduction et résultats 22

2.2 Preuve du Théorème 2.1.6 25

2.3 Preuve de théorème 2.1.7 27

3 Applications **30**

3.1 Application 1 30

3.2 Application 2 31

Conclusion **33**

Bibliographie **33**

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $k \geq 0$, $A_0(z) \neq 0$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini.

Sous certaines conditions sur les coefficients, une estimation précise de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations ci-dessus est donnée à condition qu'il existe un coefficient dominant.

Introduction

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes et donné des outils très efficaces pour l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe, plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus par des chercheurs effectuant des recherches dans la même thématique.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre**, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques définitions concernant la mésure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Dans **le deuxième chapitre**, on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $k \geq 0$, $A_0(z) \neq 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Sous certaines conditions sur les coefficients, une estimation précise de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations ci-dessus est donnée à condition qu'il existe un coefficient dominant.

Le dernier chapitre contient des exemples d'applications des résultats obtenus au deuxième chapitre et une bibliographie.

Chapitre 1

Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir W.K. Hayman ([11]) et I.Laine ([15]).

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 ***(Formule de Jensen)*** ([11], [15]) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1.1 ([11], [15]) *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([15]) *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\ln x \leq \ln^+ x$ *pour* $x \geq 0$,

(b) $\ln^+ x \leq \ln^+ y$ *pour* $0 < x \leq y$,

(c) $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$ *pour* $x > 0$,

(d) $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$*pour* $x > 0$,

(e) $\ln^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \ln_j^+ x$,

(f) $\ln^+\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \ln n + \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j.$

Preuve

Montrons (c), (d), (e) et (f).

(c) On a

$$\begin{aligned}\ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) - \max\left(\ln \frac{1}{x}, 0\right)\\ &= \max(\ln x, 0) - \max(-\ln x, 0)\\ &= \ln x\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}\ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) + \max\left(\ln \frac{1}{x}, 0\right)\\ &= \max(\ln x, 0) + \max(-\ln x, 0)\\ &= |\ln x| .\end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$, alors l'inégalité est évidente. Supposons que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\ln^+\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \ln(x_j)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j, \text{ d'après } (a) .\end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned}\ln^+(\sum_{j=1}^{n} x_j) &\leq \ln^+(n \max_{1\leq j\leq n} x_j)\\ &\leq \ln n + \ln^+(\max_{1\leq j\leq n} x_j)\\ &\leq \ln n + \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j.\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 ***(Fonction a-points)***([*11*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t, a, f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans* *le disque* $|z| \leq t$*, et on désigne par* $n(t,\infty,f)$ *le nombre des pôles de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq t$ *, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par* $\overline{n}(t,\infty,f)$ *le nombre des pôles distincts de* f *dans le disque* $|z| \leq t$*. Posons*

$$N\left(r,a,f\right) = \int_0^r \frac{n\left(t,a,f\right) - n\left(0,a,f\right)}{t} dt + n\left(0,a,f\right)\log r, \qquad a \neq \infty,$$

$$N\left(r,\infty,f\right) = N\left(r,f\right) = \int_0^r \frac{n\left(t,\infty,f\right) - n\left(0,\infty,f\right)}{t} dt + n\left(0,\infty,f\right)\log r,$$

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,\frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\log r \quad (a \neq \infty),$$

et

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\log r \ .$$

$N(r,a,f)$ *(respectivement* $\overline{N}(r,a,f)$*) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq r$*. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation* $f(z) = a$ *dans le disque* $|z| \leq r$*.*

Exemple 1.1.1 *Calculons* $n\left(r,0,e^z-1\right)$*. On a*

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= 0 \Longrightarrow \exp z = 1 = \exp\left(2k\pi i\right),\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow z_k = 2k\pi i \quad ,k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Alors

$$n\left(r,0,e^z-1\right) = 1 + 2\left[\frac{r}{2\pi}\right].$$

De plus, pour $n\left(r,\infty,\frac{1}{\sin^2 z}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \sin z &= 0 \Longrightarrow z_k = k\pi\,;\, k \in z \\ n\left(r,\infty,\frac{1}{\sin^2 z}\right) &= 2\left(1 + 2\left[\frac{r}{\pi}\right]\right). \end{aligned}$$

Lemme 1.1.2 ([*11*], [*15*]) *Soit* f *une fonction méromorphe avec a-points ;* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *dans le disque* $|z| \leq r$ *tel que :*$0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < ... < |\alpha_n| < r$ *et* $f\left(0\right) \neq 0$*, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|\alpha_j|<r} \log \frac{r}{|\alpha_j|}$$

Preuve Posons $|\alpha_j| = r_j\ (j = 1, 2, ..., n)$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{0<|\alpha_j|<r} \log \frac{r}{|\alpha_j|} &= \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{r_j} = n \log r - \sum_{j=1}^{n} \log r_i \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} j \left(\log r_{j+1} - \log r_j\right) + n \left(\log r - \log r_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{r_{ji}}^{r_{j+1}} \frac{j}{t} dt + \int_{r_n}^{r} \frac{n}{t} dt \\ &= \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt.\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 ([*11*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \epsilon \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + N\left(r, f\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

Preuve Considérons la fonction $h(z) = f(z)z^{-m}$. Il est clair que $h(0) \neq 0, \infty$ et $m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$. En effet

si $m > 0$, alors

$$n(0, 0, f) = m \ \text{ et } \ n(0, \infty, f) = 0,$$

si $m < 0$, alors

$$n(0, 0, f) = 0 \ \text{ et } n(0, \infty, f) = -m,$$

si $m = 0$, alors

$$n(0, 0, f) = 0 \ \text{ et } \ n(0, \infty, f) = 0.$$

Donc h et f possèdent les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $0 \leq |z| \leq r$.

La formule de Jensen et le lemme 1.1.2 impliquent

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \log|h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \log\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - [n(0,0,f) - n(0,\infty,f)]\log r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t,0,f)-n(0,0,f)}{t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.3 ***(Fonction de proximité)*** ([*11*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on définit la fonction de proximité de f par*

$$m(r,a,f) = m(r,\frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(r\exp(i\theta)) - a|}d\theta \qquad (a \neq \infty)$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\exp(i\theta))|\, d\theta.$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction caractéristique)*** ([*11*], [*15*]) *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.2 *Soit $f(z) = \exp(az)$, $a \in \mathbb{C}^*$. On a $n(t,\infty,f) = 0$, par suite $N(r,f) = 0$, et*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |\exp(ar\exp(i\varphi))|\, d\varphi.$$

Posons $a = |a|\exp(i\psi)$, alors

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ (\exp(|a|\, r\cos(\varphi+\psi)))\, d\varphi.$$

Posons $\varphi + \psi = \theta$, donc

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_\psi^{\psi+2\pi} \log^+ (\exp(|a|\, r\cos(\theta)))\, d\theta,$$

d'où

$$m(r,f)=\frac{|a|\,r}{\pi}.$$

Pour $a=1$, on a

$$T(r,\exp(z))=\frac{r}{\pi}.$$

Proposition 1.1.2 ***(Propriétés de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna)***([*15*]) *soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telles que $ab-cd\neq 0$. Alors*

1.
$$T(r,\sum_{j=1}^{n}f_j)\leq\sum_{j=1}^{n}T(r,f_j)+\log n \ \mathit{pour}\ r\geq 1,$$

2.
$$T(r,\prod_{j=1}^{n}f_j)\leq\sum_{j=1}^{n}T(r,f_j),\ \ \mathit{pour}\ r\geq 1,$$

3.
$$T(r,f^n)=nT(r,f),\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

4.
$$T(r,\frac{af+b}{cf+d})=T(r,f)+O(1),\ \ f\not\equiv\frac{-d}{c}.$$

Preuve

1. On a.

$$T(r,\sum_{j=1}^{n}f_j)=m(r,\sum_{j=1}^{n}f_j)+N(r,\sum_{j=1}^{n}f_j),$$

$$\begin{aligned}
m(r,\sum_{j=1}^{n}f_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\sum_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right|d\theta\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(re^{i\theta})\right|+\log n\right)\,d\theta\\
&= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j)+\log n.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$N(r,\sum_{j=1}^{n}f_j) \leq \sum_{j=1}^{n}N(r,f_j)$$

car si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j, alors z_0 est un pôle d'ordre au plus $\max\lambda_j \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j$, par suite

$$\begin{aligned} T(r,\sum_{j=1}^{n}f_j) &= m(r,\sum_{j=1}^{n}f_j) + N(r,\sum_{j=1}^{n}f_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j) + \log n \ . \end{aligned}$$

2.On a

$$T(r,\prod_{j=1}^{n}f_j) = m(r,\prod_{j=1}^{n}f_j) + N(r,\prod_{j=1}^{n}f_j),$$

comme

$$\begin{aligned} m(r,\prod_{j=1}^{n}f_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j), \end{aligned}$$

de plus, si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j ,alors z_0 est un pôle d'ordre au plus $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j$ pour la fonction $\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_j$, ce qui donne

$$N(r,\Pi_{j=1}^{n}f_j) \leq \sum_{j=1}^{n}N(r,f_j).$$

Donc

$$T(r,\prod_{j=1}^{n}f_j) \leq \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j).$$

3.On a $|f| \leq 1$ équivaut à $|f|^n \leq 1$.

(a) Si $|f| \leq 1$, alors

$$m(r,f^n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f^n(re^{i\theta})\right|d\theta = 0,$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

(b) Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f^n(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= nm(r, f), \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

4. Posons $g = \frac{af+b}{cf+d}$, alors

$$\begin{aligned} gcf + gd &= af + b \\ &\Leftrightarrow \quad f = \frac{b - gd}{gc - a}\ ,\ avec\ ad - cb \neq 0 \end{aligned}$$

il suffit donc de montrer que

$$T(r, g) = T(r, f) + O\left(1\right).$$

(a) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T(r, \frac{af + b}{d}) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

(b) Si $c \neq 0$,alors

$$\begin{aligned}
T(r,g) &= T(r,\frac{af+b}{cf+d}) \\
&= T(r,\frac{\frac{a}{c}(cf+d)-\frac{ad}{c}+b}{cf+d}) \\
&= T(r,\frac{a}{c}+\frac{cb-ad}{c^2}.\frac{1}{f+\frac{d}{c}}) \\
&\leq T(r,\frac{a}{d})+T(r,\frac{cb-ad}{c^2})+T(r,\frac{1}{f+\frac{d}{c}})+\log 2 \\
&\leq \log^+\left|\frac{a}{d}\right|+\log^+\left|\frac{cb-ad}{c^2}\right|+T(r;f)+\log^+\left|\frac{d}{c}\right|+\log 2+O(1) \\
&= T(r,f)+O(1).
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.3 *Soit* $g(z)=\tan z$

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\
&= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{i(\exp(iz)+\exp(-iz))} \\
&= \frac{1}{i}\frac{f-1}{f+1},
\end{aligned}$$

où $f(z)=\exp(2iz)$ et $ad-cb=2\neq 0$, et comme $T(r,\exp(2iz))=\frac{|2i|r}{\pi}$ d'après l'exemple précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
T(r,g) &= T(r,f)+O(1) \\
&= \frac{2r}{\pi}+O(1).
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.2 ***(Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le plan complexe)*** ([*11*], [*15*]) *Soit* f *une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent de* $f-a$ $(a\in\mathbb{C})$ *à l'origine,*

$$f(z)-a=\sum_{j=m}^{+\infty}c_j z^j,\quad c_m\neq 0,\quad m\epsilon\mathbb{Z},\quad z\epsilon\mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a),$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$

Preuve Montrons le théorème pour $a = 0$, d'après la proposition 1.1.1 et lemme 1.1.1 *c*) on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| \\
&= T(r,f) - \log|c_m| \qquad\qquad (I)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,0) = 0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
N(r,h) &= N(r, f-a) = N(r,f).
\end{aligned}$$

On a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^{+}|a| + \log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^{+}|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on obtient

$$-(\log^{+}|a| + \ln 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^{+}|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^{+}|a| + \log 2.$$

Alors $\varphi(r,a) \leq \log^{+}|a| + \log 2$. On aura

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit :*

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty.$$

Exemple 1.1.4 *On a*

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{-ie^{2iz} + i}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{\tan z}) &= T(r,\tan z) + O(1) = T(r,e^{2iz}) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1). \end{aligned}$$

1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.2.1 ([11], [15]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de la croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini si

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

Définition 1.2.2 ([11], [15]) *Soit f une fonction entière non constante ; alors l'ordre de la croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Dans le cas où l'ordre d'une fonction méromorphe est infini, on introduit une autre notion qui donne plus de précision sur la croissance qui est appelée l'hyper ordre et est définie comme suit

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r},$$

et pour une fonction entière, on a

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2.1 *Pour la fonction $f(z) = e^z$,*

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\frac{r}{\pi}}{\log r} = 1 \\ \text{et} \quad \rho_2(f) &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *Si f est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nul.*

Théorème 1.2.1 ([10]) *Soient f et g deux fonctions méromorphes non constantes. Alors*

1. $\rho(f+g) \le \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
2. $\rho(fg) \le \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
3. Si $\rho(g) < \rho(f)$. Alors

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f).$$

1.3 Exposant de convergence des pôles d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 ([*14*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des pôles de la fonction f noté $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ est défini par*

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,f)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence des pôles distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \bar{N}(r,f)}{\log r}.$$

Définition 1.3.2 ([*14*], [*15*]) *Soit f une fonction entière non constante. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de cette fonction sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \\
\mu_2(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Soit $f(z) = \frac{1}{z}\exp(z^n)$. Alors*

$$\mu(f) = n.$$

1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.4.1 ([*6*], [*7*]) *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,\infty)$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E. La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1,\infty)$ est définie par

$$m_l(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.4.1 *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [0,1] \subset [0,+\infty[$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Exemple 1.4.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [e^2, e^4] \subset [1,+\infty[$ *est*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_{e^2}^{e^4} \frac{dt}{t} = 2.$$

Définition 1.4.2 ([6], [7]) *La densité inférieur et la densité supérieur d'un sous ensemble* $H \subset [0,\infty)$ *sont définies respectivement par*

$$\begin{aligned} \underline{dens}H &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(H\cap[0,r])}{r}, \\ \overline{dens}H &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{m(H\cap[0,r])}{r}. \end{aligned}$$

Exemple 1.4.3 *La densité inférieur et la densité supérieur d'un sous ensemble* $H = [1,2] \subset [0,\infty)$ *sont*

$$\underline{dens}H = \overline{dens}H = 0.$$

1.4.1 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.4.3 ***(Produits canonique)*** ([15]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante et soient* $z_1, z_2, ..$ *ses zéros avec* $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ...$ *Soient* p *l'entier minimal tel que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge. On appelle

$$\begin{aligned} E(u,0) &= (1-u), \\ E(u,p) &= (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + ... + \frac{u^p}{p}) \quad p = 1,2,... \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p),$$

converge uniformément dans chaque domaine fini dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ est entier et s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f. L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.4.1 ([20]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f)$ telle que*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ..., (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$ et soient $\{a_1, a_2, ...\}$ et $\{b_1, b_2, ...\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivement. Alors

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $Q(z)$ est un polynôme de degré $\leq \rho(f)$ et $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produit canoniques de f formés à partir des zéros et des pôles non nuls de f.

1.4.2 Indice central et le terme maximal

Définition 1.4.4 ([15])*Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ est convergente. D'où*

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| r^n = 0,$$

et le terme maximal $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n, n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central de la fonction f par

$$\nu(r, p) = \{m : \mu(r, f) = |a_m| r^m\}$$

Exemple 1.4.4 *Pour $f(z) = a_n z^n + ... + a_0$, alors quand $|z| = r \to +\infty$, on a le terme maximal est $|a_n| r^n$ et par conséquent $\nu(r, f) = n = \deg(f)$.*

1.5 Lemmes préliminaires

Pour prouver les principaux résultats dans le chapitre 2, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 1.5.1 ([9]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante réelle donnée. Soient k et j deux entiers tels que $k > j \geq 0$. Alors il existe un* *ensemble* $E \subset (1, \infty)$ *avec* $m_l(E) < \infty$, *et une constante* $B > 0$ *dépendant seulement de* α *et* j, k, *telle que pour tout* z *satisfaisant* $|z| \notin (E \cup [0,1])$, *on a :*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq B \left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} \log^{\alpha} r \log T(\alpha r, f) \right)^{k-j}.$$

Lemme 1.5.2 ([3]) *Soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* $\rho(f) = \beta < \infty$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *donnée , il existe un ensemble* $E \subset (1, \infty)$ *avec* $m_l(E) < \infty$, *tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z| \notin ([0,1] \cup E)$,

$$|f(z)| \leq \exp\left(r^{\beta+\varepsilon}\right).$$

Lemme 1.5.3 ([4]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, où* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières satisfaisant*

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f) \leq \infty, \qquad \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \beta \ < \ \mu.$$

Alors il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ *avec* $m_l(E) < \infty$, *tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z| \notin ([0,1] \cup E)$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$, $M(r, g) = \max_{|z|=r} |g(z)|$, *on a*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)), \quad n \geq 1,$$

où $v_g(r)$ *note l'indice central de* $g(z)$.

Lemme 1.5.4 ([16]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, où* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières. Si* $0 \leq \rho(d) < \mu(f)$, *alors* $\mu(g) = \mu(f), \rho(g) = \rho(f)$. *De plus, si* $\rho(f) = \infty$, *alors* $\rho_2(f) = \rho_2(g)$.

Lemme 1.5.5 ([3]) *Soit* f *une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper-ordre* $\rho_2(f) < \infty$, *et soit* $v_f(r)$ *l'indice central de* f. *Alors*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log v_f(r)}{\log r} = \rho_2(f).$$

Lemme 1.5.6 ([5]) *Soient* $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions monotones non décroissantes telle que* $g(r) \leq h(r)$ *en dehors d'un ensemble exceptionnel* E *avec* $m_l(E) < \infty$, *Alors, pour tout* $\alpha > 1$, *il existe* $r_0 > 1$ *tel que* $g(r) \leq h(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 1.5.7 *Soit f une solutin méromorphe de l'équation* $(2.1.1)$, *où* $A_0(z)$, $A_1(z)$,..., $A_{k-1}(z)$ *sont des fonctions méromorphes. S'il existe un nombre entier* $s \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ *satisfait*

$$\max\{\rho(A_j), j \neq s\} < \mu(A_s),$$

alors $\rho(f) \geq \rho(A_s)$, $\mu(f) \geq \mu(A_s)$.

1.5.1 Preuve du lemme 1.5.6

Par l'équation (2.2.1), on a :

$$-A_s = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + ... + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + ... + A_1\frac{f'}{f^{(s)}} + A_0\frac{f}{f^{(s)}}.$$

Combinant la formule ci-dessus et le premier théorème de Nevanlinna, nous obtenons

$$T(r, A_s) \leq \sum_{j\neq s}^{k} T\left(r, f^{(j)}\right) + \sum_{j\neq s}^{k-1} T(r, A_j) + kT\left(r, f^{(s)}\right) + O(1).$$

D'autre part, on a

$$T(r, f') \leq 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

voir ([22], p 97), pour tout $j \in [1, k]$,

$$T\left(r, f^{(j)}\right) \leq m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\right) + 2m\left(r, \frac{f^{(j-1)}}{f^{(j-2)}}\right) + ... + 2^{j-1}m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2^{j}T(r, f).$$

Combinant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$T(r, A_s) \leq \sum_{j\neq s}^{k-1} T(r, A_j) + c_1T(r, f) + c_2\sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\right) + O(1), \tag{1.5.1}$$

où c_1, c_2 sont des constantes positives.

D'après l'hypothèse $\rho(A_j) < \mu(A_s)$ et comme $\mu(A_s) < \rho(A_s)$, on obtient $\rho(A_j) < \rho(A_s)$, $j \neq s$ et par le lemme 1.5.10, on a :

$$\rho(A_s) \leq \rho(f).$$

On pose $b = \max\{\rho(A_j), j \neq s\}$. Alors pour tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{\mu(A_s)-b}{2}\right)$ donné, il existe une constante $R > 1$, telle que pour tout $r > R$,

$$T(r, A_s) \geq r^{\mu(A_s)-\varepsilon}, \qquad T(r, A_j) \leq r^{b+\varepsilon} \quad, j \neq s.$$

Combinant les deux inégalités ci-dessus et (1.5.1), on obtient :

$$r^{\mu(A_s)-\varepsilon} \leq c_1 T(r, f) + c_2 \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\right) + kr^{b+\varepsilon} + O(1)$$

Alors d'après le lemme de la dérivée logarithmique, on a :

$$r^{\mu(A_s)-\varepsilon} \leq c_1 T(r, f) + kc_2 O(\log(rT(r, f))) + kr^{b+\varepsilon} + O(1)$$

comme $\varepsilon \in \left(\frac{\mu(A_s)-b}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned} r^{\mu(A_s)-\varepsilon} - kr^{b+\varepsilon} &\leq c_1 T(r, f) + kc_2 O(\log(rT(r, f))) + O(1) \\ &\Rightarrow r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\left(1 - k\frac{r^{b+\varepsilon}}{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}}\right) \leq c_1 T(r, f) + kc_2 O(\log(rT(r, f))) + O(1) \\ &\Rightarrow r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\left(1 - k\frac{1}{r^{\mu(A_s)-b-2\varepsilon}}\right) \leq c_1 T(r, f) + kc_2 O(\log(rT(r, f))) + O(1) \end{aligned}$$

comme $\varepsilon \in \left(\frac{\mu(A_s)-b}{2}\right)$, alors

$$\mu(A_s) \leq \mu(f).$$

d'où la preuve.

Lemme 1.5.8 ([*16*]) *Soit f une solution méromorphe de l'équation* $(2.1.2)$ *, où* $A_0(z), A_1(z), \ldots,$ $A_{k-1}(z),\ F(z) \neq 0$ *sont des fonctions méromorphes. S'il existe un nombre entiers* $s \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-1\}$ *satisfait*

$$\max\{\rho(F), \rho(A_j), j \neq s\} \ < \ \mu(A_s),$$

alors $\rho(f) \geq \rho(A_s),\ \mu(f) \geq \mu(A_s).$

Lemme 1.5.9 ([*16*]) *Soient* $A_0(z), A_1(z), \ldots., A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-1\}$ *, tel que*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} \ < \ \mu(A_s).$$

Alors toute solution méromorphe f d'ordre infini dont les pôles sont des multiplicités uniformément bornées, de l'équation (2.1.1) vérifie $\rho_2(f) \leq \rho(A_s)$.

Lemme 1.5.10 ([*16*]) *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ *et* $F(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s \in \{0,\ 1,\ 2, ...,\ k-1\}$, *tel que*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right), \rho(F)\right\} < \mu(A_s).$$

Alors chaque solution méromorphe f d'ordre infini dont les pôles sont des multiplicités uniformément bornées, de l'équation (2.1.2) vérifie $\rho_2(f) \leq \rho(A_s)$.

Parmi les résultats remarquables des dérivées logarithmiques, on cite le résultat suivant.

Lemme 1.5.11 ([*11*]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante , et soit* $k \geqslant 1$ *un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r,f))),$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E *de mesure linéaire finie. Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Chapitre 2

l'hyper ordre des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients méromorphes.

2.1 Introduction et résultats

Nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.2}$$

où $k \geq 0$, $A_0(z) \neq 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Sous certaines conditions sur les coefficients, une estimation précise de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations ci-dessus est donnée à condition qu'il existe un coefficient dominant.

Avant d'entamer notre étude , on cite, d'abord, quelques résultat dans ce domaine.
Dans [18], une recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich et ses étudiants dans les années 1950 et 1960, l'ordre de croissance des solutions de l'équation (2.1.1) était le but principal de l'étude des équations différentielles linéaires où $k \geq 0$, $A_0(z) \neq 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ sont des fonctions entières. Pour le cas $k = 2$, on sait

d'après ([8], [12], [17]) que toute solution non triviale de

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini si $(i)\, \rho(A(z)) < \rho(B(z))$; ou (ii) $\rho(B(z)) < \rho(A(z)) \leq \frac{1}{2}$; ou $A(z)$ est polynomial et $B(z)$ est transcendante d'ordre nul.

Plusieurs auteurs ont été motivé par les résultats si dessus, et ils ont prouvé que si le coefficient A_0 est un coefficient dominant sur les autres coefficients alors toute solution non triviale de (2.1.1) est d'ordre infini.

Hellerstein-Miles-Rossi dans [13] a prouvé une condition généralisée comme suit.

Théorème 2.1.1 *[13] Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z), F(z)$ des fonctions entières. Supposons qu'il existe s, $0 \leq s \leq k-1$ tel que :*

$$\max\left\{\rho(F), \max_{\substack{0\leq j\leq k-1 \\ j\neq s}} \rho(A_s)\right\} < \rho(A_s) \leq \frac{1}{2}.$$

Alors toute solution de (2.1.2) est soit une fonction polynômiale ou une fonction entière d'ordre infini.

En 2000, dans [6], Chen and Yang ont étudié l'hyper ordre de la solution de l'équation (2.1.1).

Théorème 2.1.2 ([6]) *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions entières satisfaisant*

$$\max\{\rho(A_j), j = 1, 2, ..., k-1\} < \rho(A_0) < \infty.$$

Alors toute solution f non nulle de (2.1.1) satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Dans les théorèmes 2.1.1 et 2.1.2, les auteurs ont considéré tous les coefficients sont des fonctions entières. Quand les coefficients $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions méromorphes, plusieurs auteurs dans ([1], [2], [4]) ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles (2.1.1) et (2.1.2). Spécialement, on mentionne le résultat suivant donné par Chen, dans lequel il a obtenu une estimation sur l'hyper ordre de la solution de (2.1.1).

Théorème 2.1.3 ([*4*]) *Soit* $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont des fonctions méromorphes .il existe un entier* s, $0 \leq s \leq k-1$,*satisfaisant*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) < \frac{1}{2}.$$

Si l'équation (2.1.1) *a une solution méromorphe, alors toute solution méromorphe transcendante* f *de* (2.1.1) *satisfait* $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

En 2005, Xiao and Chen ont considéré l'équation non homogène (2.1.2) et ils ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 2.1.4 ([*19*]) *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z), F(z)$ *des fonctions méromorphes. Il existe un entier* s, $0 \leq s \leq k-1$, *satisfaisant*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right), \rho(F)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) < \frac{1}{2}$$

Si l'équation (2.1.2) *a une solution méromorphe, alors toute solution méromorphe transcendante* f *de* (2.1.2) *satisfait* $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

Dans [21], Yang a considéré d'autre conditions que celle citée au ci-dessus, et il a obtenu une estimation précisé de l'hyper ordre de la solution l'équation $(2.1.1)$, en localisant et limitant la croissance des coefficients de l'équation dans un ensemble de densité positive.

Théorème 2.1.5 ([*21*]) *Soient* E *un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{dens}(\{|z| : z \in E\}) > 0$, *et* $A_j(z), j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions entières tel que*

$$\max\{\rho(A_j), j = 1, ..., k-1\} \leq \rho(A_0) = \rho < \infty,$$

et pour certaines constantes $0 \leq \beta < \alpha$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$|A_0(z)| \geq \exp\left(\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}\right), |A_j(z)| \leq \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right), j = 1, 2, ..., k-1,$$

lorsque $z \to \infty$ pour $z \in E$. Alors toute solution non nulles f de (2.1.1) satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Dans ce chapitre, nous continuons l'étude de la croissance des solutions des équations (2.1.1) et (2.1.2) et notre but principal est améliorer et étendre les résultats ci-dessus (les téorèmes 2.1.3 et 2.1.4), d'autre part, nous considérons le cas des coefficients méromorphes dans le théorème 2.1.5. Nous obtenons les résultats suivant.

Théorème 2.1.6 *Soit E un ensemble des nombres complexes satisfait $m_l(\{|z| : z \in E\}) = \infty$, est soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$, des fonctions meromorphes. Supposons qu'il existe un entier s, $0 \leq s \leq k-1$ tel que*

$$\max\left\{\rho(A_j),\ j \neq s,\ \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) = \rho < \infty;$$

et pour quelques constantes $0 \leq \beta < \alpha$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |A_j(z)| &\leq \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right),\ j \neq s, && (2.1.4) \\ |A_s(z)| &\geq \exp\left(\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}\right), && (2.1.5) \end{aligned}$$

lorsque $z \to \infty$ pour $z \in E$. Alors toute solution meromorphic non triviale f dont les pôles sont de multiplicités uniformément bornées de l'équation (2.1.1) satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

Théorème 2.1.7 *Soit E un ensemble des nombres complexes satisfait $m_l(\{|z| : z \in E\}) = \infty$, est soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$, $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions meromorphes. Supposons qu'il existe un entier s, $0 \leq s \leq k-1$ tel que*

$$\max\left\{\rho(A_j),\ j \neq s,\ \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right),\ \rho(F)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) = \rho < \infty;$$

et pour quelques constantes $0 \leq \beta < \alpha$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les coditions (2.1.4) et (2.1.5) lorsque $z \to \infty$ pour $z \in E$. Alors toute solution meromorphic non triviale f dont les pôles sont de multiplicités uniformément bornées de l'équation (2.1.2) satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

2.2 Preuve du Théorème 2.1.6

Pour montrer que $\rho_2(f) = \rho(A_s)$, nous divisons la preuve en deux parties :

$$\begin{cases} \rho_2(f) \geq \rho(A_s), \\ \rho_2(f) \leq \rho(A_s). \end{cases}$$

$\underline{1^{ier}\ \text{cas}}$: $\rho_2(f) \geq \rho(A_s)$.

D'après le lemme 1.5.7, il est un facile de voir que l'équation (2.1.1) ne peut avoir aucune solution rationnelle non nulle. Alors de (2.1.1), on a

$$\begin{aligned}
-A_s &= \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + \ldots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + \ldots + A_1\frac{f'}{f^{(s)}} + A_0\frac{f}{f^{(s)}} \\
&= \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + \ldots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \\
&\quad + \frac{f}{f^{(s)}}\left(A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f} + \ldots + A_1\frac{f'}{f} + A_0\right) \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |A_s| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + \ldots + |A_{s+1}|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right| + \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\left(|A_{s-1}|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \ldots + |A_1|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0|\right). \qquad (2.2.2)$$

D'après le lemme 1.5.1, pour $\alpha = 2$, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie $(m_l(E_1) < \infty)$ et une constante $B > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0, R_1] \cup E_1)$, où $R_1 > 1$ est une constante,

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq BrT(2r, f)^{j-s+1}, j = s+1, s+2, .., k, \qquad (2.2.3)$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leq B\left(\frac{T(2r, f)}{r}\log^2 r \log T(2r, f)\right)^j \\
&\leq BrT(2r, f)^{j+1} \quad , j = 1, 2, ..., s-1. \qquad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Pour majorer $\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|$, on a par lemme 1.5.3, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, \infty)$ avec $m_l(E_2) < \infty$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0, 1] \cup E_2)$ et $|g(z)| = M(r, g)$

$$\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^s (1 + o(1)). \qquad (2.2.5)$$

Considérons l'équation (2.2.5), il existe une constante $R_2\,(> R_1)$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r > R_2, v_g(r) > 1, [1 + o(1)] > \frac{1}{2}$ et $|\, g(z) \,| = M(r, g), M(r, g) > 1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| &= \left|\frac{z}{v_g(r)}\right|^s \frac{1}{(1 + o(1))} \\
&\leq 2r^s. \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Posons

$$H_1 = \{|z| : z \in E\} \setminus ([0, R_2] \cup E_1 \cup E_2),$$

alors $m_l(H_1) = \infty$. Il résulte de $(2.2.2), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6)$ et les conditions $(2.1.4), (2.1.5)$ que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\begin{aligned}
\exp\left(\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}\right) &\leq |A_s| \\
&\leq (k-s)\exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right) BrT(2r, f)^{k-s+1} + \\
&\quad +s\exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right) Br\left[T(2r, f)\right]^s 2r^s + \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right) 2r^s \\
&\leq 2(k+1) Br^{s+1} (T(2r, f))^{k+1} \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On obtient, alors

$$\exp\left(\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}\right) \leq 2(k+1) Br^{s+1} (T(2r, f))^{k+1} \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right).$$

Alors on obtient

$$\rho_2(f) \geq \rho = \rho(A_s).$$

D'après le lemme 1.5.9, on obtient

$$\rho_2(f) = \rho(A_s).$$

2.3 Preuve de théorème 2.1.7

Par le lemme 1.5.8, on sait que l'équation (2.1.2) admet une solution transcendante. D'après $(2.1.2)$, on a :

$$\begin{aligned}
A_s &= \frac{F}{f}\frac{f}{f^{(s)}} - \{\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + ... + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \\
&\quad +A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + ... + A_1\frac{f'}{f^{(s)}} + A_0\frac{f}{f^{(s)}}\}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |A_s| \leq \left|\frac{F}{f}\right|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| + \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + \\
... + |A_{s+1}|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right| + \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\left(|A_{s-1}|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + ... + |A_1|\left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0|\right). \quad (2.3.1)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.5.1, pour $\alpha = 2$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie $(m_l(E_3) < \infty)$ et une constante $B > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,R_3] \cup E_3)$, où $R_3 > 1$ est une constante, telques (2.2.3) et (2.2.4) sont vérifiées. Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$,où $g(z)$ est une fonction entière, $d(z)$ est est un produit classique de la suite des pôles de f. Étant donné que les pôles de f découlent des pôles de $A_j(z), j = 0,1,...,k-1$,et notons que les pôles de f sont de multiplicités uniformément bornées, tel que

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \lambda(d) = \rho(d) \leq b,$$

où $b = \max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right), \rho(F)\right\}$

Soit η est une constante vérifiant $b < \eta < \mu(A_s)$.

D'après le lemme 1.5.2, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,\infty)$ avec $m_l(E_4) < \infty$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_4)$, on a

$$|F(z)\,d(z)| \leq \exp(r^\eta) \tag{2.3.2}$$

D'après le lemme 1.5.3,il existe un ensemble $E_5 \subset (1,\infty)$ avec $m_l(E_5) < \infty$,tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_5)$ et $|g(z)| = M(r,g)$ tel que la formule (2.2.5) est vérifiée. Par conséquent, il existe une constante $R_4 (> R_3)$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r > R_4, v_g(r) > 1, [1 + o(1)] > \frac{1}{2}$ et $|g(z)| = M(r,g)$, la formule (2.2.6) est vérifiée.

On pose $H_2 = \{|z| : z \in E\} \setminus ([0,R_4] \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5)$. Alors $m_l(H_2) = \infty$.

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{F(z)}{g(z)}d(z)\right| = \left|\frac{F(z)}{M(r,g)}\right| |d(z)| \leq \exp(r^\eta). \tag{2.3.3}$$

D'où, il résulte de $(2.2.3), (2.2.4), (2.2.6), (2.3.1), (2.3.3)$ et les conditions $(2.1.4), (2.1.5)$ que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_2$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a

$$\begin{aligned} \exp\left(\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}\right) &\leq |A_s| \\ &\leq 2(k+1)\,Br^{s+1}\left(T(2r,f)\right)^{k+1} \exp\left(\beta |z|^{\rho-\varepsilon}\right) \exp(r^\eta). \end{aligned}$$

D'où

$$\rho(f) = \infty,$$

de plus, par $\eta < \mu(A_s) \leq \rho$ et pour tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{\mu(A_s)-\eta}{2}\right)$ donné, on déduit que

$$\rho_2(f) \geq \rho(A_s).$$

D'après le lemme 1.5.10, on obtient

$$\rho_2(f) = \rho(A_s).$$

Ceci achève la preuve.

Chapitre 3

Applications

Dans cette partie, on va citer quelques applications de nos résultats prouvés dans le chapitre précédant.

3.1 Application 1

Considérons l'équation différentielle suivante

$$f'' + \frac{1}{2} z f' - z \exp\left(z^3\right) f = 0$$

On a

$$\begin{cases} A_0 = -z \exp\left(z^3\right) \\ A_1 = \frac{1}{2} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho\left(A_0\right) = \rho\left(-z \exp\left(z^3\right)\right) = 3 \\ \rho\left(A_1\right) = \rho\left(\frac{1}{2} z\right) = 0 \end{cases}$$

Il est clair que le coefficient dominant est $A_s = A_0$.

Pour tout $z = r \exp(i\theta)$, $r \to +\infty$ et $\frac{\pi}{16} \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$, on a

$$|A_s| = r \exp\left(r^3 \cos(3\theta)\right).$$

D'autre part,

$$\exp\left(r^3 \cos(3\theta)\right) \geq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r^{3-\varepsilon}\right),$$

donc $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a aussi, pour tout $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} |A_1| &= \left|\frac{1}{2} z\right| \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{2} r^{2-\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

donc $\beta = \frac{1}{2}$.

$$\lambda\left(\frac{1}{A_s}\right) = \lambda\left(\frac{-1}{z\exp\left(z^3\right)}\right)$$

et

$$\lambda\left(\frac{1}{z}\right) \leq \rho\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

d'où $\lambda\left(\frac{1}{A_s}\right) = 0 \leq \rho\left(A_s\right).$

il est facile de vérifier que toute les conditions du théorème 2.1.6 sont vérifiés, avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} = \beta$ sur

$$E = \left\{z \in \mathbb{C} : z = r\exp\left(i\theta\right), \frac{\pi}{16} \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}, r \in [5, +\infty[\right\}.$$

On a

$$F = \{|z| : z \in E\} = [5, +\infty[$$

On a

$$\begin{aligned} m_l\left(F\right) &= m_l\left([5, +\infty[\right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Pa suite $\rho_2\left(f\right) = \rho\left(A_s\right).$

3.2 Application 2

Considérons l'équation différentielle suivante

$$f'' + \frac{1}{2}zf' - z\exp\left(z^3\right)f = \exp\left(z\right)$$

De la même manière, on a

$$\left\{\begin{array}{c} \rho\left(A_0\right) = \rho\left(-z\exp\left(z^3\right)\right) = 3 \\ \rho\left(A_1\right) = \rho\left(\frac{1}{2}z\right) = 0 \\ \rho\left(F\right) = \rho\left(\exp\left(z\right)\right) = 1 \end{array}\right.$$

le coefficient dominant est $A_s = A_0$.

$$\mu\left(A_s\right) = \rho\left(A_s\right) = 3$$

Pour tout $z = r\exp(i\theta)$, $r \to +\infty$ et $\frac{\pi}{16} \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$, on a

$$|A_s| = r\exp\left(r^3\cos(3\theta)\right)$$

et

$$\exp\left(r^3\cos(3\theta)\right) \geq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r^{3-\varepsilon}\right),$$

donc $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a aussi, pour tout $0 < \varepsilon < 1$

$$|A_1| \leq \exp\left(\frac{1}{2}r^{2-\varepsilon}\right)$$

donc $\beta = \frac{1}{2}$.

$$\lambda\left(\frac{1}{A_s}\right) = 0$$

il est facile de vérifier que toute les conditions du théorème 2.1.7 sont vérifiés, avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} = \beta$ sur

$$E = \left\{z \in \mathbb{C} : z = r\exp(i\theta), \frac{\pi}{16} \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}, r \in [5, +\infty[\right\}.$$

On a

$$F = \{|z| : z \in E\} = [5, +\infty[$$

On a

$$\begin{aligned} m_l(F) &= m_l([5, +\infty[) \\ & +\infty. \end{aligned}$$

D'où $\rho_2(f) = \rho(A_s) = 3$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.2}$$

où $k \geq 0$, $A_0(z) \neq 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. L'outil principal utilisé dans cette étude étant la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles.

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes d'ordre $[p, q]$?

Bibliographie

[1] **S. Bank and I. Laine**, On the growth of meromorphic solutions of linear and algebraic differential equations, Math. Scand. 40 (1977), 119-126.

[2] **B. Belaïdi and H. Habib**, Properties of meromorphic solutions of a class of second order linear differential equations, Intern. J. Anal. Appl. 5 (2014), no. 2, 198-211.

[3] **Z-X. Chen**, On the zeros of meromorphic solutions of second order differential equation with meromorphic coefficients, Acta Math. Scientia 16 (1996), no. 3, 276-283.

[4] **Z-X. Chen**, On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Acta Math. Sinica 42 (1999), no. 3, 551-558.

[5] **Z- X. Chen**, On the hyper-order of solutions of some second-order linear differential equations, Acta Math. Sinica 18 (2002), no. 1, 79-88.

[6] **Z- X. Chen and C- C. Yang**, Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations, Complex Var. 42 (2000), 119-133.

[7] **Z-X. Chen and C-C. Yang**, Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations, Kodai Math. J., 22 (1999), 273-285.

[8] **G-G. Gundersen**, Finite order solutions of second order linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415-429.

[9] **G-G. Gundersen**, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.

[10] **A- A. Goldberg, I-V. Ostrovskii**, The distribution of values of meromorphic functions, Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.

[11] **W-K. Hayman**, Meromorphic functions, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[12] **S. Hellerstein, J. Miles and J. Rossi**, On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), no. 2, 693-706.

[13] **S. Hellerstein, J. Miles and J. Rossi**, On the growth of solutions of certain linear differential equations, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 17 (1992), no. 2, 343-365.

[14] **L.Kinnunen**, Linear differentiel equations with solutions of finile iterated order,southeast Asian Bull, Math, 22(1998),385-405.

[15] **I. Laine**, Nevanlinna theory and complex differential equations, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1993.

[16] **J. R. Long, J. Zhu**, On hyper-order of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients. Adv. Difference Equ. 2016, 2016 :107, 13 pages.

[17] **M. Ozawa**, On a solution of $w'' + e - zw' + (az+b)w = 0$, Kodai Math. J. 3 (1980), 295-309.

[18] **H. Wittich**, Neuere Untersuchungen Über Eindeutige Analytische Funktionen, Springer-Verlag, 1955.

[19] **L. P. Xiao and Z. X. Chen**, On the growth of meromorphic solutions of a class of higher-order differential equation, J. Study Math. 38 (2005), no. 3, 265-271.

[20] **C.C.Yang**, Uniqueness theory of meromorphic functions, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[21] **L. Z. Yang**, The growth of linear differential equations and their applications, Israel J. Math. 147 (2005), 359-370.

[22] **L. Yang**, Value Distribution Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1993.