UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de master en mathématique

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Etude d'un problème de transmission abstrait dans le cadre L^p

Présenté par

DOUARA Zineb

Soutenu le 21 / 05 /2017 devant le Jury

Président	M. BELAIDI Benharrat
Examinateur	M.MENAD Abdallah
Encadreur	M.MEDEGHRI Ahmed

Année universitaire : 2016-2017

Table des matières

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude d'un problème traité dans l'article [10], "An abstract transmission problem in a thin layer, I : sharp estimates", de : Giovanni Dore, Angelo Favinni, Rabah Labbas et Keddour Lemrabet, paru dans le Journal " Journal of Functional Analysis 261(2011)1865−1922 ".

Considérons dans un espace de Banach complexe $UMD \quad X$, le problème de transmission abstrait de type elliptique

$$(p_A)\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} u_-''(x) + Au_-(x) = \ -g_-(x) \ , x \in \left]-1, 0\right[, \\ u_+''(x) + Au_+(x) = \ -g_+(x) \ , x \in \left]0, \delta\right[, \end{array}\right. \\ \text{avec des conditions aux limites :} \\ \left\{\begin{array}{l} u_-(-1) \ = f_- \ , \\ u_+'(\delta) = f_+ \ , \end{array}\right. \\ \text{et des conditions de transmission :} \\ \left\{\begin{array}{l} u_-(0) \ = u_+(0) \ , \\ p_- \ u_-'(0) \ = p_+ \ u_+'(0) , \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$, non nécessairement dense, inclus dans X , p_- , $p_+ \in \mathbb{R}^+$, δ est un petit paramètre, $g_+ \in L^p\left(\left]0, \delta\right[, X\right)$, $g_- \in L^p\left(\left]-1, 0\right[, X\right)$, $f_+, f_- \in X$.

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur des problèmes de transmission. On cite, par exemples, dans [15] l'utilisation d'un changement d'échelle sur l'épaisseur de la couche mince pour transformer (p_A) en un problème dans un domaine fixé et l'obtention des résultats d'existence, d'unicité et de régularité dans les espaces L^p, par la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da prato - Grisvard. Dans le cadre des espaces de Sobolev construits sur $L^p, p \in [1, +\infty]$, des données non homogènes sont considérées avec un second membre dans un espace d'interpolation, ce qui permet des applications -concrètes dans des Banach quelconques .

Dans [4] et [5] l'explication de la représentation de la solution est basée sur le calcul fonctionnel d'intégrale de Dunford contenant des Noyau de Green, les auteurs ont considéré des données non -homogènes et ont supposé un second membre dans un espace de Hölder. Dans les références [1, 3, 6, 16, 17] les auteurs ont utilisé des méthodes basées sur une estimation a priori établie dans le cadre Hilbertien et un développement asymptotique par rapport au paramètre δ .

Ce travail est basé fondamentalement sur une représentation explicite de la solution utilisant la racine carrée de l'opérateur $-A$ et les semi groupes analytiques .

On utilise quelques outils d'analyse fonctionnelle, en particulier les notions d'opérateurs linéaires fermés, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, la théorie de l'interpolation, le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels, et la théorie des somme d'opérateurs de Dore et Venni. Ce la nous a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution. Le résultat obtenu dans ce cas est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *Sous les hypothèses* $(2.1.1), (2.1.2)$, $(2.1.3)$*et* $(2.1.4)$ *(voir chapitre 2), et* $g_- \in L^p(]-1,0[\,,X)$ *;* $g_+ \in L^p(]0,\delta[\,,X)$, *le problème* (p_A) *admet une unique solution stricte* (u_-,u_+) *telle que* $u_- \in W^{2,p}(]-1,0[\,,X) \cap L^p(]-1,0[\,,D_A)$ *et* $u_+ \in W^{2,p}(]0,\delta[\,,X) \cap L^p(]0,\delta[\,,D_A)$ *si et seulement si* $f_- \in (D_A,X)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $f_+ \in (D_A,X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Exemples physiques du problème :

En dimension 1 :

Le problème stationnaire de diffusion de la chaleur dans une tige hétérogène $]-1,\delta[$ constituée par un corps fixe $]-1,0[$ et une couche mince $]0,\delta[$, est modélisé par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} u_-''(x) - au_-(x) = \ -g_-(x) \ , x \in]-1,0[\,, \\ u_+''(x) - au_+(x) = \ -g_+(x) \ , \ x \in]0,\delta[\,, \end{array}\right. \\ \text{avec des conditions aux limites :} \\ \left\{\begin{array}{l} u_-(-1) \ = f_- \ , \\ u_+'(\delta) = f_+ \ , \end{array}\right. \\ \text{et des conditions de transmission :} \\ \left\{\begin{array}{l} u_-(0) \ = u_+(0) \ , \\ p_- \ u_-'(0) \ = p_+ \ u_+'(0) \ . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où $u_\pm(x)$ représente la température au point x, p_-, p_+ sont les coefficients de conductivité des corps $]-1,0[$ et $]0,\delta[$ respectivement, $a > 0$ le coefficient d'échange avec l'extérieur, $g_\pm$ les sources de chaleur, f_- la température au point $x=-1$ et f_+ le flux de chaleur en $x=\delta$.

En dimension 2 :

Le problème de la propagation de la chaleur dans une plaque homogène par morceaux $]-1,\delta[\times]-\pi,\pi[$, constituée par une jonction de deux corps, (le premier, $]-1,0[\times]-\pi,\pi[$, le second, $]0,\delta[\times]-\pi,\pi[$, formant la couche mince), s'écrit sous forme :

$$\begin{cases}
\Delta u_-(x,y)=\dfrac{\partial^2 u_-}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u_-}{\partial y^2}(x,y)=-g_-(x,y)\,, \quad (x,y)\in\,]-1,0[\times]-\pi,\pi[\,,\\[2ex]
\Delta u_+(x,y)=\dfrac{\partial^2 u_+}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u_+}{\partial y^2}(x,y)=-g_+(x,y)\,, \quad (x,y)\in\,]0,\delta[\times]-\pi,\pi[\,,\\[2ex]
\text{avec des conditions aux limites}\\[1ex]
\begin{cases}
u_-(-1,y) \;=f_-(y) \quad,\; y\in\,]-\pi,\pi[\,,\\[1ex]
\dfrac{\partial u_+}{\partial x}(\delta,y) \;=f_+(y) \quad,\; y\in\,]-\pi,\pi[\,,\\[1ex]
u_-(x,\pi)=u_-(x,-\pi) \quad,\; x\in\,]-1,0[\,,\\
u_+(x,\pi)=u_+(x,-\pi) \quad,\; x\in\,]0,\delta[\,,\\[1ex]
\dfrac{\partial u_-}{\partial x}(x,\pi)=\dfrac{\partial u_-}{\partial x}(x,-\pi)\,,\; x\in\,]-1,0[\,,\\[1ex]
\dfrac{\partial u_+}{\partial x}(x,\pi)=\dfrac{\partial u_+}{\partial x}(x,-\pi)\,,\; x\in\,]0,\delta[\,,
\end{cases}\\[2ex]
\text{et les conditions de transmission}\\[1ex]
\begin{cases}
u_-(0,y)=u_+(0,y) \quad,\; y\in\,]-\pi,\pi[\,,\\[1ex]
p_-\dfrac{\partial u_-}{\partial x}(0,y)=p_+\frac{\partial u_+}{\partial x}(0,y)\,,\; y\in\,]-\pi,\pi[\,.
\end{cases}
\end{cases}$$

où $u_\pm(x,y)$ représente la température au point (x,y), p_-, p_+ sont les coefficients de conductivité des corps $]-1,0[\times]-\pi,\pi[$ et $]0,\delta[\times]-\pi,\pi[$ respectivement, $g_\pm$ les sources de chaleur, $f_-(y)$ la température au point $(-1,y)$ et $f_+(y)$ le flux de chaleur au point (δ,y).

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire. On donne les notions d'opérateurs linéaires fermés, certains résultats classiques sur les semi-groupes, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs, et le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels, et ainsi que les principaux théorèmes de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cas des espaces de Banach UMD.

Dans le deuxième chapitre, on représente la solution du problème posé d'une façon détaillée a partir des hypothèses supposées et en utilisant les semi-groupes, les puissances fractionnaires .

Au troisième chapitre, on étudie l'inversibilité de l'opérateur Δ (déterminant du systéme dans la résolution), à l'aide du calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels et quelques inégalités d'analyse complexe.

Dans le quatrième chapitre, on étudie la régularité de la solution à l'aide des lemmes techniques qui sont basés sur les espaces d'interpolation et l'application des résultats de Dore et Venni aux problèmes de Cauchy. On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données .

Le cinquième chapitre, est une partie d'application et d'illustration de ce qu'on a traité dans les chapitres qui précèdent sous forme d'exemples des problèmes concrects d'E.D.P.

Le mémoire se termine par une bibliographie relative à l'ensemble des travaux présentés .

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs linéaires fermés

On rappelle que A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ (domaine de définition de A) de X à valeurs dans X .
Alors

1) A est dit borné si

$$D(A) = X \text{ et } \exists C > 0, \|A\xi\|_X \leq C \|\xi\|_X$$

et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.

2) A est dit fermé si et seulement si son graphe est fermé, i.e, pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$$

3) A est dit fermable si est seulement si admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X.

Définition 1.1.1 *Soit X un espace de Banach complexe, muni de la norme $\|.\|_X$. On appelle*

• Spectre de A, l'ensemble

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } (A - \lambda I) \text{ non inversible}\}.$$

• Ensemble résolvant de A, le complémentaire du $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ noté $\rho(A)$, c'est -à-dire

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\ \right\}.$$

• Résolvante de A, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$.

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.2.1 *On appelle semi-groupe fortement continu* (*ou vérifiant la* c_0*-condition*), *une application* $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X) \\ t \to G(t) \end{array} \right.$

telle que

$a)$ $G(0) = I$

$b)$$G(t+s) = G(t)\,G(S), \ \ \forall t, s \geq 0$

$c)$ $\forall \varphi \in X$ l'application

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \to X \\ t \to G(t)\,\varphi \end{array} \right.$$

est fortement continue en 0,

$$\left(\forall \varphi \in X \quad \lim_{t \to 0^+} \|G(t)\,\varphi - \varphi\|_X = 0\right)$$

Remarque :

1) si $t \in \mathbb{R}$, $(G(t))$ est dit groupe.

2) la condition $c)$ n'implique pas que

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\|_X = 0.$$

Définition 1.2.2 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe* $(G(t))$, *l'opérateur linéaire non borné* A *définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_A = \left\{\varphi \in X \ : \ \lim_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)\,\varphi - \varphi}{t} \quad \textit{existe dans } X \right\} \\ \forall \varphi \in D_A, \qquad A\varphi = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)\,\varphi - \varphi}{t} \end{array} \right.$$

1.2.1 Semi-groupes différentiables

Définition 1.2.3 *Un* c_0 *-semi groupe* $\{G(t)\}$ *dans* X *est dit différentiable pour* $t > t_0$ *si* $\forall \varphi \in X$ *, la fonction* $t \to G(t)\varphi$ *est différentiable pour* $t > t_0$ *. Le semi groupe est dit différentiable si* $t_0 = 0$.

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.4 *Soit* X *un espace de Banach complexe. Soit le secteur*

$$\sum = \{z \in \mathbb{C} : \ \theta_1 < \arg z < \theta_2 \ et \ \theta_1 < 0 < \theta_2\} \ ,$$

soit $\{G(z)\}_{z \in \sum}$ une famille d'opérateur linéaire bornée sur X, on dit que $\{G(z)\}_{z \in \sum}$ forme un semi-groupe holomorphe, si elle vérifie :

1) $G(0) = I$.

2) $G(z_1 + z_2) = G(z_1) G(z_2)$, pour tout $z_1, z_2 \in \sum$.

3) $\lim_{\substack{z \to 0 \\ \mathbf{z} \in \sum}} G(z)\varphi = \varphi$, pour $\varphi \in X$.

4) L'application $z \in \sum \setminus \{0\} \to G(z)\varphi \in X$ est holomorphe $\forall \varphi \in X$.

Question :

Quelle est la possibilité pour un c_0-semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ d'être prolongeable en un semi-groupe holomorphe dans $\sum$?

Théorème 1.2.1 (***de Kato***)

Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné vérifiant

1) A est fermé.

2) $\overline{D(A)} = X$ (densité)

3) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ et $\exists L > 0 \ / \ \forall \lambda \in \rho(A)$ on a

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\|_X \leq \frac{L}{|\lambda|}.$$

Alors, A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe tel que :

1) $\exists M > 0 / \ \forall t > 0 \, ; \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.

2) $\forall t>0,\ G(t)\in\mathcal{L}(X,D(A))$ et $\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq\dfrac{M}{t}$.

Réponse à la question :

Le semi-groupe$\{G(t)\}_{t\geq 0}$ obtenu dans le Théorème de Kato se prolonge analytiquement en un semi-groupe holomorphe.

1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés

Définition 1.2.5 *On dira que* $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ *est un semi-groupe analytique généralisé si* Q *est un opérateur linéaire dans* X *de domaine non dense .*

(voir sinestrari [18]) .

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.3.1 *Soit* X *un espace de Banach, on désigne par* $L_*^p(\mathbb{R}_+,X)$ *avec* $p\in[1,+\infty[$, *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour presque tout* $t\in\mathbb{R}_+$ *et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty}\|f(t)\|_X^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)}<+\infty.$$

Si $p=+\infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+,X)$ par

$$f\in L_*^\infty(\mathbb{R}_+,X)\Leftrightarrow\begin{cases}f:\mathbb{R}_+\to X,\ \text{est fortement mesurable et}\\ \sup ess_{0<t<\infty}\|f(t)\|_X<\infty\end{cases}$$

Définition 1.3.2 *Soient* $(X_0,\|.\|_0)$ *et* $(X_1,\|.\|_1)$ *deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé* E *.*

Pour $p\in[1,+\infty[$, et $\theta\in]0,1[$, on dit que $x\in(X_0,X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

1) $\forall t>0,\exists u_0(t)\in X_0,\exists u_1(t)\in X_1:x=u_0(t)+u_1(t)$

2) $t^{-\theta}u_0\in L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0)$, $t^{1-\theta}u_1\in L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1)$

Proposition 1.3.1 $\left(X_0\cap X_1,\|.\|_{X_0\cap X_1}\right)$, $\left(X_0+X_1,\|.\|_{X_0+X_1}\right)$ *et* $\left((X_0,X_1)_{\theta,p},\|.\|_{\theta,p}\right)$ *des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\begin{aligned}
\|x\|_{X_0\cap X_1} &= \|x\|_{X_0}+\|x\|_{X_1} \text{ si } x\in X_0\cap X_1\\
\|x\|_{X_0+X_1} &= \inf_{\substack{x_i\in X_i,\ i=0,1\\ x=x_0+x_1}}\left(\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}\right) \text{ si } x\in X_0+X_1\\
\|x\|_{\theta,p} &= \inf_{\substack{u_i:\mathbb{R}_+\to X_i,\ i=0,1\\ \forall t>0,\ u_0(t)+u_1(t)=x}}\left(\left\|t^{-\theta}u_0\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_0)}+\left\|t^{1-\theta}u_1\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_1)}\right) \text{ si } x\in (X_0,X_1)_{\theta,p}
\end{aligned}$$

Et de plus

$$X_0\cap X_1\subset (X_0,X_1)_{\theta,p}\subset X_0+X_1,$$

avec injections continues.

Notons :

$$(X_0,X_1)_{\theta,p}=(X_1,X_0)_{1-\theta,p}\,.$$

Définition 1.3.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)\subset X$ muni de la norme,*

$$\forall x\in D(A):\ \ \|x\|_{D(A)}=\|x\|_X+\|Ax\|_X$$

on a alors,

$$D_A(\theta,p)=(D_A,X)_{1-\theta,p}\quad \text{pour } p\in[1,+\infty] \text{ et } 0<\theta<1$$

Grâce à la propriété de réitération on a :

$$D_A(m\theta,p)=D_{A^m}(\theta,p)\,,$$

où m entier ≥ 1, $p\in[1,+\infty]$, $\theta\in\,]0,1[$ (voir Da Prato-Grisvard [9]), cas particulier $m=2$ on a

$$D_A(2\theta,p)=D_{A^2}(\theta,p)\,. \tag{1.3.1}$$

1.4 Calcul Fonctionnel

1.4.1 Opérateurs sectoriels

Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, vérifiant les propriétés suivantes, il existe $\theta\in[0,\pi[$ tels que $\sigma(A)\subseteq\bar{S}_\theta$

$$\left(\text{où } S_\theta=\begin{cases}\{z\in\mathbb{C}\ \ |z\neq 0\,,\ |\arg z|<\theta\} & \text{si } 0<\theta<\pi\,,\\ (0,\infty) & \text{si }\ \ \theta=0.\end{cases}\right),$$

et pour tout $\alpha \in]\theta, \pi[$,

$$\sup_{w \in \mathbb{C} \setminus S_\alpha} \left\| w \left(wI - A \right)^{-1} \right\| < +\infty$$

(on dit que A est un opérateur sectoriel avec angle spectral θ) (voir[14] $p17$) .

On remarque que si $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(A)$ et $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \left\| (\lambda I + A)^{-1} \right\| < +\infty$ alors A est sectoriel (voir [13], lemme 6.4.1) .

Remarque 1.4.1 *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$z \in S_\alpha \Leftrightarrow 0 \leq \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{\mathrm{Re}\, z} < \tan \alpha \tag{1.4.1}$$

Définition 1.4.1 *Pour* $\varphi \in]0, \pi[$

- $H(S_\varphi)$: l'espace des fonctions holomorphes de S_φ dans $\mathbb{C}$.
- $H^\infty(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) : \sup_{z \in S_\varphi} |f(z)| < \infty \right\}$.
- $H_0^\infty(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+ \ \sup_{z \in S_\varphi} \max\{| z |^s, | z |^{-s}\} |f(z)| < \infty \right\}$.
- $H_p(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+ \ \sup_{z \in S_\varphi} \min\{| z |^s, | z |^{-s}\} |f(z)| < \infty \right\}$.

Remarque 1.4.2

$$H_0^\infty(S_\varphi) \subseteq H^\infty(S_\varphi) \subseteq H_p(S_\varphi) \subseteq H(S_\varphi).$$

Et $H^\infty(S_\varphi)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{z \in S_\varphi} |f(z)|$.

Définition 1.4.2 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}\,(A)} = X$, alors pour $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$, on définit l'opérateur linéaire bornée $f(A)$*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} f(z) (zI - A)^{-1} \, dz$$

où $\alpha \in]\theta, \varphi[$ et Γ_α : est un chemin dans le plan complexe composé par deux demi-linges $\{\rho\ e^{\pm i\alpha}, \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$, orienté avec une partie imaginaire décroissante (voir[14] $p27$).

Définition 1.4.3 *On dit que A admet $H^\infty(S_\varphi)$ calcul fonctionnel borné si pour tout $f \in H^\infty(S_\varphi)$, l'opérateur $f(A)$ est borné et il existe $c \in \mathbb{R}^+$ (indépendante de f) tel que*

$$\|f(A)\| \leq c \|f\|_\infty .$$

Proposition 1.4.1 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et* $\overline{\mathrm{Im}\,(A)} = X$.

S'il existe $c \in \mathbb{R}^{+}$ tel que pour tout $f \in H_0^{\infty}(S_{\varphi})$ on a : $\|f(A)\| \leq c\,\|f\|_{\infty}$ alors A admet $H^{\infty}(S_{\varphi})$ calcul fonctionnel borné .

Preuve. voir [8],corollaire 2.2 ou [11], théorème 4.9 □

Proposition 1.4.2 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et* $\overline{\mathrm{Im}\,(A)} = X$.

- $f, g \in H_p(S_{\varphi}) \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) \subseteq (f+g)(A) \\ f(A)\,.g(A) \subseteq (f.g)(A) \end{cases}$
- $\begin{cases} f, g \in H_p(S_{\varphi}) \\ g(A) \in \mathcal{L}(X) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) = (f+g)(A) \\ f(A)\,.g(A) = (f.g)(A) \end{cases}$

Preuve. voir[8] ou [11], théorème 4.5 et corollaire 4.6 . □

Proposition 1.4.3 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et* $\overline{\mathrm{Im}\,(A)} = X$.

Si $f \in H_p(S_{\varphi})\,, \left(\frac{1}{f}\right) \in H_p(S_{\varphi})$ et $\left(\frac{1}{f}\right)(A) \in \mathcal{L}(X)$ alors $f(A)$ est inversible à inverse borné

$$[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$$

Preuve. voir [10], proposition 3.3 □

Proposition 1.4.4 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et* $\overline{\mathrm{Im}\,(A)} = X$.

Si A admet $H^{\infty}(S_{\varphi})$ calcul fonctionnel borné alors $A^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur sectoriel, injectif, $\overline{\mathrm{Im}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} = X$ et admet $H^{\infty}\left(S_{\frac{\varphi}{2}}\right)$ calcul fonctionnel borné .

Preuve. voir [10] ,proposition 3.4 □

1.5 Puissances fractionnaires d'opérateurs

1.5.1 Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

On considère $A \in S_{\beta}$ où $\beta \in \left]0, \pi\right[$.

On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule

$$A^{\alpha} = (z^{\alpha})(A)$$

Ici z^{α} désigne la détermination principale de la fonction "puissance α " caractérisée par

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}\ ,\ r > 0\ ,\ \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Proposition 1.5.1 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > 0,$ *on a alors*

1) A^{α} est un opérateur fermé de X.

2) $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}\ A^{\beta} = A^{\beta}\ A^{\alpha}$.

3) $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha \Rightarrow D\left(A^{\beta}\right) \subset D\left(A^{\alpha}\right)$ et en particulier

$$\operatorname{Re}\alpha < 1 \Rightarrow D\left(A\right) \subset D\left(A^{\alpha}\right).$$

4) Si A est injective alors A^{α} l'est aussi et

$$\left(A^{-1}\right)^{\alpha} = \left(A^{\alpha}\right)^{-1}.$$

5) Si $0 \in \rho\left(A\right)$ alors $0 \in \rho\left(A^{\alpha}\right)$.

6) Si $A \in \mathcal{L}\left(X\right)$ alors $A^{\alpha} \in \mathcal{L}\left(X\right)$.

De plus si A admet un inverse borné alors, pour $\operatorname{Re}\alpha > 0$,

$$\left(A^{-1}\right)^{\alpha} = A^{-\alpha} \in \mathcal{L}\left(X\right).$$

1.5.2 Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 1.5.2 *On considère* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et on suppose que* A *est injectif. Alors*

1) A^{α}est un opérateur fermé de X.

2) A^{α} est injectif et $\left(A^{\alpha}\right)^{-1} = A^{-\alpha} = \left(A^{-1}\right)^{\alpha}$.

3) $A^{\alpha+\beta} \subset A^{\alpha}\ A^{\beta}$.

1.6 La théorie des sommes d'opérateurs de Dore-Venni

On veut résoudre le problème suivant $Au + Bu = g$ où $g \in X$, et A, B deux opérateurs linéaires fermés dans X.

On suppose que X est un espace UMD (Unconditional Martingale Differences).

La théorème de Dore-Venni montre que sous certaines hypothèses sur les opérateurs A et B on peut montrer que $A + B$ est un opérateur fermé à inverse borné.

1.6.1 Espace UMD

Définition 1.6.1 *Un espace de Banach X possède la propriété UMD si et sulement si $\exists p \in]1,+\infty[$ et $c(p)$ tels que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \; d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},X)} \leq c(p) \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},X)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=\overline{1,n}}$ et pour toute suite $(\xi_k)_k$ tels que

$$\xi_k = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

Nous donnons une définition équivalente plus adaptée à notre propos et qui utilise la transformée de Hilbert.

Transformée de Hilbert

Soint $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R},X)$, on définit l'opérateur H_ε par

$$(H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Si pour un élément $f \in L^p(\mathbb{R},X)$ donné, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R},X)$ alors cette limite est notée Hf et appellée la transformation de Hilbert.

Théorème 1.6.1 *Soient X un espace de Banach et $p \in]1,+\infty[$ alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- X est UMD
- $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R},X), \forall f \in L^p(\mathbb{R},X)$.

Définition 1.6.2 *Un espace de Banach X est dit $\zeta-$convexe s'il existe une fonction $\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$, vérifiant : pour tout x, y de X*

1) ζ est symétrique et biconvexe.

2) $\zeta(0,0) > 0$

3) $\zeta(x,y) \leq \|x+y\|_X$, $\forall x, y \in X$, avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Le résultat fondamental de Burkholder(*voir* [7]) est

Théorème 1.6.2 *X est un espace UMD si et seulement si X est $\zeta-$convexe.*

Remarque 1.6.1 *L'imporrtance de ce dernier théorème est : la notion d'espace UMD ne dépend pas de p .*

Exemples :

• Tout espace de Hilbert est UMD.

• Tout espace isomorphe à un UMD est UMD.

• Tout sous-espace fermé d'un UMD est UMD.

• L'interpolé des espace UMD est UMD .

• Si $1 < p < +\infty$, et X UMD , alors $L^p\left((a,b), X\right)$ $(a < b)$ est UMD.

• Les espace $C, C^\alpha, ...,$ ne sont pas UMD.

1.6.2 Les hypothèses

On suppose que A et B vérifient

$$(DV_1) \left\{ \begin{array}{l} i)\ \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 : \forall\lambda \geq 0\ \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_A}{1+\lambda} \\ ii)\ \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 : \forall\lambda \geq 0\ \left\|(\lambda + B)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_B}{1+\lambda} \\ \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = X \end{array} \right.$$

$$(DV_2) \left\{ \begin{array}{l} iii) \forall\lambda \in \rho(-A), \forall\mu \in \rho(-B) \\ (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} = (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1} \end{array} \right.$$

$$(DV_3) \left\{ \begin{array}{l} iv)\ \forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists k > 0\ , \exists\theta_A \in [0, \pi[\ \ \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq k\ e^{|s|\theta_A} \\ v) \forall s \in \mathbb{R},\ B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists k > 0\ , \exists\theta_B \in [0, \pi[\ \ \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq k\ e^{|s|\theta_B} \\ vi)\ \ \theta_A + \theta_B < \pi. \end{array} \right.$$

On note par $Bip(\theta, X)$ (Bounded imaginary power) l'ensemble des opérateur sectoriels sur X,vérifiant (DV_1) et (DV_3).

1.6.3 Résultats

Théorème 1.6.3 *Si X est un espace UMD et les hypothèses (DV_1), (DV_2) et (DV_3) sont vérifiées, Alors l'opérateur $L = A + B$ est fermé et $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et on a*

$$L^{-1} = \frac{1}{i\pi} \int_\gamma \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ et orientée de $\infty\ e^{-i\frac{\pi}{2}}$ de $\infty\ e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Chapitre 2

Représentation de la solution

Dans ce chapitre, on représente la solution du problème posé à partir des hypothèses supposées.

2.1 Hypothèses

Considérons dans un espace de Banach complexe X le problème abstrait suivant :

$$(p_A)\begin{cases} u_-^{''}(x) + Au_-(x) = & -g_-(x) \ , \ x \in \left]-1, 0\right[, \\ u_+^{''}(x) + Au_+(x) = & -g_+(x) \ , \ x \in \left]0, \delta\right[, \\ u_-(-1) \ = f_- \ , \\ u_+^{'}(\delta) = f_+ \ , \\ u_-(0) \ = u_+(0) \ , \\ p_- \ u_-^{'}(0) \ = p_+ \ u_+^{'}(0) \ , \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$, non nécessairement dense, inclus dans X, $p_-, p_+ \in \mathbb{R}^+$, δ est un petit paramètre , $g_- \in L^p(\left]-1, 0\right[, X), g_+ \in L^p(\left]0, \delta\right[, X)$, f_-, $f_+ \in X$.

On suppose que

1) L'opérateur A vérifie

- **l'hypothèse d'ellipticité**

$$[0, +\infty[\ \subset \rho(A) \text{ et } \exists c > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + \lambda}. \tag{2.1.1}$$

- **l'hypothèse Bip** (θ_A, X) :

$$\forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists c > 1, \theta_A \in]0, \pi[\quad \left\| (-A)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\ e^{\theta_A |s|}. \tag{2.1.2}$$

•

$$\exists \varphi \in]\theta, \pi[\quad \text{tel que } -A \text{ admet un } H^{\infty}(S_{\varphi}) \text{ calcul fonctionnel borné.} \tag{2.1.3}$$

2)

$$X \text{ est un espace } UMD. \tag{2.1.4}$$

Résultats préliminaires

• D'aprés (2.1.1) A est un opérateur inversible .

•D'aprés(2.1.1) $-A$ est un opérateur sectoriel.

• L'hypothèse (2.1.1) implique que l'opérateur $\left(Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}\right)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisée noté $G(s) = e^{-s\sqrt{-A}} = e^{sQ}$, $s > 0$ sur X, voir Balakrishnan [2].

• L'hypothèse (2.1.2) est équivalente à

$$\exists c \geq 1 \ , \ \theta_A \in]0, \pi[\ , \forall s \in \mathbb{R} \ \left\| Q^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\ e^{\frac{\theta_A}{2}|s|}.$$

(On dit que Q est un opérateur $Bip\left(\frac{\theta_A}{2}, X\right)$).

• L'hypothèse (2.1.3) et la proposition(1.4.4) implique que $-Q$ admet un $H^{\infty}\left(S_{\frac{\varphi}{2}}\right)$ calcul fonctionnel borné.

• L'hypothèse (2.1.4) implique que $L^p((a,b), X)$ $(1 < p < +\infty)$ $(a < b)$, est un espace UMD

2.2 Résolution

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses* $(2.1.1), (2.1.2), (2.1.3)$ *et* $(2.1.4)$, *le problème* (p_A) *admet une solution stricte* (u_-, u_+), *représentée par :*

$$u_-(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_{-1}^{x} e^{(x-s)Q} g_-(s)\, ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)Q} g_-(s)\, ds + e^{(x+1)Q}\alpha_- + e^{-xQ}\beta_-, x \in]-1, 0[,$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha_- &= p_+ Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(1+s)Q} g_+(s)\,ds + p_+ Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta+1-s)Q} g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_{-1}^0 e^{(1+s)Q} g_-(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}(P_- - P_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(1-s)Q} g_-(s)\,ds + \frac{1}{2}(P_+ - P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(3+s)Q} g_-(s)\,ds + \\
&\frac{1}{2}(P_+ + P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2\delta+1-s)Q} g_-(s)\,ds - \frac{1}{2}(P_+ + P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2\delta+3+s)Q} g_-(s)\,ds \\
&+(P_+ - P_-)\,\Delta^{-1}e^{2Q} f_- + 2P_+ Q^{-1}\Delta^{-1}e^{(1+\delta)Q} f_+ - (P_- + P_+)\,\Delta^{-1}e^{(2\delta+2)Q} f_- + f_- \ .
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\beta_- &= -p_+ Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{sQ} g_+(s)\,ds - p_+ Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q} g_+(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}(P_+ - P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{-sQ} g_-(s)\,ds + \frac{1}{2}(P_- - P_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2+s)Q} g_-(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}(P_+ + P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2\delta-s)Q} g_-(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}(P_+ + P_-)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2\delta+2+s)Q} g_-(s)\,ds + (P_- - P_+)\,\Delta^{-1}e^{Q} f_- \\
&-2p_+ Q^{-1}\Delta^{-1}e^{\delta Q} f_+ + (p_- + p_+)\,\Delta^{-1}e^{(2\delta+1)Q} f_-.
\end{aligned}$$

$$u_+(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} g_+(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)Q} g_+(s)\,ds + e^{xQ}\alpha_+ + e^{(\delta-x)Q}\beta_+ \ ,\ x\in\,]0,\delta[\,,$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha_+ &= \frac{1}{2}(p_- - p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{sQ} g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}(p_- - p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q} g_+(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}(p_- + p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(2+s)Q} g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}(p_- + p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta+2-s)Q} g_+(s)\,ds \\
&-p_- Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{-sQ} g_-(s)\,ds + p_- Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(2+s)Q} g_-(s)\,ds + (p_- - p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}e^{\delta Q} f_+ \\
&+2p_-\Delta^{-1}e^{Q} f_- + (p_- + p_+)\,Q^{-1}\Delta^{-1}e^{(2+\delta)Q} f_+.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\beta_+ &= \frac{1}{2}(p_- - p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta+s)Q}g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}(p_- - p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(3\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}(p_- + p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta+2+s)Q}g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}(p_- + p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(3\delta+2-s)Q}g_+(s)\,ds \\ &-p_-Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(\delta-s)Q}g_-(s)\,ds + p_-Q^{-1}\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(\delta+2+s)Q}g_-(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \\ &+(p_- - p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}e^{2\delta Q}f_+ + 2p_-\Delta^{-1}e^{(\delta+1)Q}f_- + (p_- + p_+)Q^{-1}\Delta^{-1}e^{(2+2\delta)Q}f_+ - Q^{-1}f_+.\end{aligned}$$

Avec

$$\Delta = p_+\left(I - e^{2Q}\right)\left(I - e^{2\delta Q}\right) + p_-\left(I + e^{2Q}\right)\left(I + e^{2\delta Q}\right).$$

Remarque : On suppose que $\exists\Delta^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, dans le chapitre 3, lemme(3.0.3) on montre que Δ est inversible à inverse borné.

Preuve. Pour résoudre le problème (p_A), on applique la méthode de la réduction d'ordre de Krein à l'équation abstraite :

$$u''(x) + Au(x) = -g(x), \quad x \in \left]a, b\right[. \tag{2.2.1}$$

On pose alors pour tout $x \in \left]a, b\right[$:

$$\begin{cases} v(x) = -Q^{-1}u'(x), \\ y(x) = \frac{1}{2}(u(x) - v(x)), \\ z(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)). \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}(u'(x) - v'(x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(u'(x) + Q^{-1}u''(x)\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.2.1) et le fait que $Q = -\sqrt{-A}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}\left(u'(x) + Q^{-1}(-Au(x) - g(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u'(x) + Qu(x) - Q^{-1}g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) + Qu(x) - Q^{-1}g(x)\right) \\ &= Qy(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}g(x), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}g(x), \ x \in]a,b[, \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(u(a) - v(a)\right) = \frac{1}{2}\left(u(a) + Q^{-1}u'(a)\right).$$

De même on a :

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}g(x), \\ z(b) = \beta, \end{cases}$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{2}\left(u(b) - \frac{1}{2}Q^{-1}u'(b)\right).$$

Donc, pour tout $x \in]a,b[$ on a :

$$\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_a^x e^{(x-s)Q}g(s)\,ds + e^{(x-a)Q}\alpha. \\ \\ z(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^b e^{(s-x)Q}g(s)\,ds + e^{(b-x)Q}\beta. \end{cases}$$

Et comme

$$u(x) = y(x) + z(x).$$

Alors

$$u(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_a^x e^{(x-s)Q}g(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^b e^{(s-x)Q}g(s)\,ds + e^{(x-a)Q}\alpha + e^{(b-x)Q}\beta, \ x \in]a,b[.$$

Alors, la représentation de la solution du problème (p_A) est de la forme :

$$u_+(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}g_+(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)Q}g_+(s)\,ds + e^{xQ}\alpha_+ + e^{(\delta-x)Q}\beta_+, \ x \in]0,\delta[.$$

Et

$$u_-(x) = -\frac{1}{2}Q^{-1}\int_{-1}^x e^{(x-s)Q}g_-(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)Q}g_-(s)\,ds + e^{(x+1)Q}\alpha_- + e^{-xQ}\beta_-, \ x \in]-1,0[.$$

Il reste à calculer $\alpha_+, \beta_+, \alpha_-$, et β_- pour trouver la représentation finale de la solution, on résoud le système suivant obtenu à partir des conditions de transmission et des limites :

$$(S)\begin{cases} \alpha_- + e^{Q}\beta_- = I_1, & (1) \\ Qe^{\delta Q}\alpha_+ - Q\beta_+ = I_2, & (2) \\ e^{Q}\alpha_- + \beta_- - \alpha_+ - e^{\delta Q}\beta_+ = I_3, & (3) \\ p_-Qe^{Q}\alpha_- - p_-Q\beta_- - p_+Q\alpha_+ + p_+Qe^{\delta Q}\beta_+ = I_4. & (4) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} I_1 = f_- + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_{-1}^{0} e^{(1+s)Q} g_-(s)\,ds \ , \\ \\ I_2 = f_+ + \frac{1}{2}\int_0^{\delta} e^{(\delta-s)Q} g_+(s)\,ds, \\ \\ I_3 = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_{-1}^{0} e^{-sQ} g_-(s)\,ds - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^{\delta} e^{sQ} g_+(s)\,ds, \\ \\ I_4 = \frac{1}{2}p_+\int_0^{\delta} e^{sQ} g_+(s)\,ds + \frac{1}{2}p_-\int_{-1}^{0} e^{-sQ} g_-(s)\,ds \ . \end{cases}$$

De (1) et (2) on trouve :

$$(S_1)\begin{cases} \alpha_- = I_1 - e^{Q}\beta_- \ , & (5) \\ \beta_+ = e^{\delta Q}\alpha_+ - Q^{-1}I_2. & (6) \end{cases}$$

On remplace α_- et β_+ dans (3) et (4), on obtient :

$$(S_2)\begin{cases} \left(I - e^{2Q}\right)\beta_- - \left(I + e^{2\delta Q}\right)\alpha_+ = I_5, \\ p_-\left(I + e^{2Q}\right)\beta_- + p_+\left(I - e^{2\delta Q}\right)\alpha_+ = I_6. \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} I_5 = I_3 - e^{\delta Q}Q^{-1}I_2 - e^{Q}I_1, \\ I_6 = -Q^{-1}I_4 - p_+e^{\delta Q}Q^{-1}I_2 + p_-e^{Q}I_1. \end{cases}$$

On résoud le système (S_2), on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(I - e^{2Q}\right) & -\left(I + e^{2\delta Q}\right) \\ p_-\left(I + e^{2Q}\right) & p_+\left(I - e^{2\delta Q}\right) \end{vmatrix},$$

alors

$$\Delta = \ p_+\left(I - e^{2Q}\right)\ \left(I - e^{2\delta Q}\right) + p_-\left(I + e^{2Q}\right)\ \left(I + e^{2\delta Q}\right).$$

Remarque : On suppose que $\exists\Delta^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, dans le chapitre 3, lemme(3.0.3) on montre que Δ est inversible à inverse borné.

Alors, on trouve β_- et α_+ :

$$\beta_- \ = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} I_5 & -\left(I + e^{2\delta Q}\right) \\ I_6 & p_+\left(I - e^{2\delta Q}\right) \end{vmatrix},$$

alors :

$$\beta_- = \Delta^{-1}\left[p_+I_5\left(I - e^{2\delta Q}\right) + I_6\ \left(I + e^{2\delta Q}\right)\right].$$

Et

$$\alpha_+ = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} \left(I - e^{2Q}\right) & I_5 \\ p_-\left(I + e^{2Q}\right) & I_6 \end{vmatrix},$$

alors :

$$\alpha_+ = \Delta^{-1}\left[\left(I - e^{2Q}\right)\ I_6\ - p_-\left(I + e^{2Q}\right)\ I_5\ \right].$$

On remplace β_- et α_+ dans (S_1), on trouve :

$$\begin{cases} \alpha_- = I_1 - e^{Q}\Delta^{-1}\left[p_+ I_5\left(I - e^{2\delta Q}\right) + I_6\left(I + e^{2\delta Q}\right)\right], \\ \beta_+ = e^{\delta Q}\Delta^{-1}\left[\left(I - e^{2Q}\right)I_6 - p_-\left(I + e^{2Q}\right)I_5\right] - Q^{-1}I_2. \end{cases}$$

□

Chapitre 3

Résultats d'inversibilité

Proposition 3.0.1 *Soient* $w, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *, on a :*

$$|w+z| \geq (|w|+|z|)\left|\cos\left(\frac{\arg w - \arg z}{2}\right)\right|.$$

Preuve.

$$\text{On pose } \left\{\begin{array}{l} \alpha = \arg w, \\ \beta = \arg z. \end{array}\right. \qquad \text{alors } \left\{\begin{array}{l} w = |w|\, e^{i\alpha}, \\ z = |z|\, e^{i\beta}. \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
|w+z|^2 &= \left||w|\, e^{i\alpha} + |z|\, e^{i\beta}\right|^2 \\
&= \left||w|\cos\alpha + i\,|w|\sin\alpha + |z|\cos\beta + i\,|z|\sin\beta\right|^2 \\
&= \left|(|w|\cos\alpha + |z|\cos\beta) + i\,(|w|\sin\alpha + |z|\sin\beta)\right|^2 \\
&= (|w|\cos\alpha + |z|\cos\beta)^2 + (|w|\sin\alpha + |z|\sin\beta)^2 \\
&= |w|^2\cos^2\alpha + |z|^2\cos^2\beta + 2\,|w|\,|z|\cos\alpha\cos\beta + |w|^2\sin^2\alpha + |z|^2\sin^2\beta + 2\,|w|\,|z|\sin\alpha\sin\beta \\
&= |w|^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + |z|^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + 2\,|w|\,|z|\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
&= |w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad , \quad \text{car } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,
\end{aligned}$$

puisqu'on a :

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha-\beta) \\
&= \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \qquad \text{car } \left\{\begin{array}{l} \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \\ \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}, \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Alors :

$$|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) \ ,$$

et comme :

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1,$$

alors :

$$\begin{aligned}
|w+z|^2 &= \left(|w|^2+|z|^2\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)+2\,|w|\,|z|\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\\
&= \left(|w|^2+|z|^2+2\,|w|\,|z|\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\left(|w|^2+|z|^2-2\,|w|\,|z|\right)\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \left(|w|+|z|\right)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\left(|w|-|z|\right)^2\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&\geq \left(|w|+|z|\right)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

D'ou :

$$|w+z|\geq\left(|w|+|z|\right)\left|\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|.$$

Alors

$$|w+z|\geq\left(|w|+|z|\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$\square$

Proposition 3.0.2 *Soient $\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $z\in S_\alpha$:*

1) $\left|\arg\left(1-e^{-z}\right)-\arg\left(1+e^{-z}\right)\right|<\alpha.$

2) $\left|1+e^{-z}\right|\geq 1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\alpha}\right).$

3) $\dfrac{|z|\cos\alpha}{1+|z|\cos\alpha}\leq\left|1-e^{-z}\right|\leq\dfrac{2\,|z|}{1+|z|\cos\alpha}.$

Preuve. Soient $\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $z\in S_\alpha$

on pose $z=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z.$

1)

$$\begin{aligned}
1-e^{-z} &= 1-e^{-\operatorname{Re}z-i\operatorname{Im}z}\\
&= 1-e^{-\operatorname{Re}z}e^{-i\operatorname{Im}z}\\
&= 1-e^{-\operatorname{Re}z}\left(\cos\left(\operatorname{Im}z\right)-i\sin\left(\operatorname{Im}z\right)\right)\\
&= 1-e^{-\operatorname{Re}z}\cos\left(\operatorname{Im}z\right)+ie^{-\operatorname{Re}z}\sin\left(\operatorname{Im}z\right).
\end{aligned}$$

Remarque : • si $z=x+iy,\ \ x>0$ alors $\arg z=\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$

- si $z \in S_\alpha$ alors $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} < 1.$

Donc :

$$\arg\left(1-e^{-z}\right) = \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right), \text{ car } 1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z) > 0.$$

En utilisant la même méthode on obtient :

$$\begin{aligned}\arg\left(1+e^{-z}\right) &= \arg\left(1+e^{-\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}\right)\\ &= \arg\left(1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z) - ie^{-\operatorname{Re} z}(\sin \operatorname{Im} z)\right)\\ &= \arctan\left(\frac{-e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right)\\ &= -\arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right), \text{ car la fonction } \arctan \text{est impaire.}\end{aligned}$$

Donc

$$\arg\left(1-e^{-z}\right)-\arg\left(1+e^{-z}\right) = \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right)+\arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right).$$

Remarque On a l'égalité suivante

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right), \quad \text{si } ab < 1.$$

Puique :

$$\begin{aligned}\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}.\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)} &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z}\sin^2(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2(\operatorname{Im} z)}\\ &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z}\left(1-\cos^2(\operatorname{Im} z)\right)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2(\operatorname{Im} z)} < 1\end{aligned}$$

car

$$e^{-2\operatorname{Re} z} < 1 \Rightarrow e^{-2\operatorname{Re} z} - e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2(\operatorname{Im} z) < 1 - e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2(\operatorname{Im} z)$$

alors

$$\begin{aligned}\arg\left(1-e^{-z}\right)-\arg\left(1+e^{-z}\right) &= \arctan\left(\frac{2e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}\right), \text{ car } \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2},\end{aligned}$$

et comme $z \in S_\alpha$, $\operatorname{Re} z > 0, \sin\theta \leq \theta$ et $\sinh\theta \geq \theta$ pour $\theta \geq 0$ on a :

$$\left|\frac{\sin \operatorname{Im} z}{\sinh \operatorname{Re} z}\right| \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|} = \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} < \tan\alpha, \text{ d'après } (1.4.1).$$

Alors :

$$\left|\arg\left(1-e^{-z}\right)-\arg\left(1+e^{-z}\right)\right|<\alpha.$$

2)

$$\begin{aligned}
\left|1+e^{-z}\right|^2 &= \left|1+e^{-\operatorname{Re} z-i\operatorname{Im} z}\right|^2\\
&= \left|1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)-ie^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)\right|^2\\
&= \left(1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)\right)^2+e^{-2\operatorname{Re} z}\sin^2\left(\operatorname{Im} z\right)\\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z}\sin^2\left(\operatorname{Im} z\right)\\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z}\left(\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right)+\sin^2\left(\operatorname{Im} z\right)\right)\\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z}
\end{aligned}$$

1ère **cas :** si $\operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2\tan\alpha}$ alors $|\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi}{2}$ d'après $(1.4.1)$, donc $\cos\left(\operatorname{Im} z\right) \geq 0$, donc $\left|1+e^{-z}\right|^2 \geq 1$.

2ème **cas :** si $\operatorname{Re} z \geq \frac{\pi}{2\tan\alpha}$, alors

$$\begin{aligned}
\left|1+e^{-z}\right|^2 &= 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z}\\
&\geq 1-2e^{-\operatorname{Re} z}+e^{-2\operatorname{Re} z}\\
&= \left(1-e^{-\operatorname{Re} z}\right)^2\\
&\geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\alpha}\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\cos\left(\operatorname{Im} z\right) &\geq -1 \Rightarrow 2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right) \geq -2e^{-\operatorname{Re} z}\\
&\Rightarrow 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right) \geq 1-2e^{-\operatorname{Re} z}\\
&\Rightarrow 1+2e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)+e^{-2\operatorname{Re} z} \geq 1-2e^{-\operatorname{Re} z}+e^{-2\operatorname{Re} z},
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &\geq \frac{\pi}{\tan\alpha} \Rightarrow -\operatorname{Re} z \leq \frac{-\pi}{\tan\alpha} \\
&\Rightarrow \exp\left(-\operatorname{Re} z\right) \leq \exp\left(\frac{-\pi}{\tan\alpha}\right) \\
&\Rightarrow -\exp\left(-\operatorname{Re} z\right) \geq -\exp\left(\frac{-\pi}{\tan\alpha}\right) \\
&\Rightarrow 1-\exp\left(-\operatorname{Re} z\right) \geq 1-\exp\left(\frac{-\pi}{\tan\alpha}\right) \\
&\Rightarrow \left(1-\exp\left(-\operatorname{Re} z\right)\right)^2 \geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{\tan\alpha}\right)\right)^2.
\end{aligned}
$$

Donc : pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et $z \in S_\alpha$ on a

$$
\left|1+e^{-z}\right| \geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\alpha}\right)\right).
$$

3) On a, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $e^x \geq 1+x$, alors

soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
e^x &\geq 1+x \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \\
&\Rightarrow 1-e^{-x} \geq 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.
\end{aligned}
$$

Donc : pour $z \in S_\alpha$ on a $\operatorname{Re} z > 0$ et $|e^{-z}| < 1$

$$
\begin{aligned}
\left|1-e^{-z}\right| &\geq \left|1-\left|e^{-z}\right|\right| \\
&= \left|1-e^{-\operatorname{Re} z}\right| \\
&= 1-e^{-\operatorname{Re} z} \\
&\geq \frac{\operatorname{Re} z}{1+\operatorname{Re} z}.
\end{aligned}
$$

mais

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2+(\operatorname{Re} z)^2} \\
&\leq \sqrt{\tan^2\alpha\,(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Re} z)^2}\ ,\ \text{d'après (1.4.1)} \\
&= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2\left(1+\tan^2\alpha\right)} \\
&= \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\cos^2\alpha}}, \quad \text{car } 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{Re} z}{\cos\alpha}, \quad \text{car } \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ alors } \cos\alpha > 0
\end{aligned}
$$

D'ou

$$\left|1-e^{-z}\right| \geq \frac{|z|\cos\alpha}{1+|z|\cos\alpha} \tag{3.0.1}$$

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$e^{-x} \geq \max\{1-x,0\} \geq \frac{1-x}{1+x},$$

car :

$$\begin{cases} e^{-x} \geq 0 \\ e^{-x} \geq 1-x \end{cases} \text{ alors } e^{-x} \geq \max\{1-x,0\}$$

et comme :

$$\max\{1-x,0\} = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\frac{1-x}{1+x} \leq \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\max\{1-x,0\} \geq \frac{1-x}{1+x}$$

donc :

$$e^{-x} \geq \frac{1-x}{1+x}$$

alors

$$1-e^{-x} \leq 1-\frac{1-x}{1+x} = \frac{2x}{1+x}. \tag{3.0.2}$$

Pour $z \in S_\alpha$,

$$\left|1-e^{-z}\right| = \left|\int_{\Gamma_z} e^{-w}dw\right|,$$

avec : Γ_z *est un segment dans le plan complexe qui relie 0 à* z donc

$$\begin{aligned} \left|1-e^{-z}\right| &= \left|\int_{\Gamma_z} e^{-w}dw\right| \\ &\leq \int_0^1 e^{-t\operatorname{Re} z}|z|\,dt \quad \text{on pose } w=tz \\ &= \left(1-e^{-\operatorname{Re} z}\right)\frac{|z|}{\operatorname{Re} z} \\ &\leq \frac{2|z|}{1+|z|\cos\alpha}, \quad \text{d'après } (3.0.2), \end{aligned}$$

alors

$$\left|1-e^{-z}\right| \leq \frac{2|z|}{1+|z|\cos\alpha}. \tag{3.0.3}$$

De(3.0.1) et (3.0.3), on obtient :

$$\frac{|z|\cos\alpha}{1+|z|\cos\alpha} \leq \left|1-e^{-z}\right| \leq \frac{2\,|z|}{1+|z|\cos\alpha}.$$

□

On rappelle que $Q = -\sqrt{-A}$.

Lemme 3.0.2 *Sous les hypothèses* (2.1.1)*et* (2.1.3) *du chapitre 2,*

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur $\left(I + e^{tQ}\right)$ est inversible et d'inverse borné.

Preuve. On pose que $Q = -B$, et on démontre que $\left(I + e^{-tB}\right)$ est inversible et d'inverse borné .

Alors, d'après la proposition (3.0.2), pour $z \in S_\theta$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\left|1+e^{-tz}\right| \geq 1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\theta}\right) > 0.$$

Soit la fonction $f_t : S_\theta \to \mathbb{C}$, $\theta < \frac{\pi}{2}$ tels que $f_t(z) = 1 + e^{-tz}, \forall t \in \mathbb{R}^+$, donc la fonction f_t est holomorphe et bornée , alors

$$f_t \in H^\infty(S_\theta) \subset H_P(S_\theta). \tag{3.0.4}$$

Comme $f_t(z) \neq 0$, alors $\forall z \in S_\theta$ $\left(\frac{1}{f_t}\right)$ est une fonction holomorphe bornée, alors

$$\left(\frac{1}{f_t}\right) \in H^\infty(S_\theta) \subset H_P(S_\theta). \tag{3.0.5}$$

Et par la proposition (1.4.2) et l'hypothèse (2.1.1) on a

$$f_t(B) = I + e^{-tB}$$

D'aprés la proposition (1.4.4) et l'hypothèse (2.1.3), B admet un $H^\infty\left(S_{\frac{\theta}{2}}\right)$ calcul fonctionnel borné alors

$$\left(\frac{1}{f_t}\right)(B) \text{ est borné.} \tag{3.0.6}$$

De $(3.0.4), (3.0.5), (3.0.6)$, et d'aprés la proposition (1.4.3) l'opérateur $f_t(B) = I + e^{-tB}$ inversible et d'inverse borné

$$[f_t(B)]^{-1} = \left(\frac{1}{f_t}\right)(B).$$

Donc, l'opérateur $f_t(-Q) = I + e^{tQ}$ est inversible et d'inverse borné

$$[f_t(-Q)]^{-1} = \left(\frac{1}{f_t}\right)(-Q).$$

$\square$

Lemme 3.0.3 *Sous les hypothèses* (2.1.1) *et* (2.1.3) *du chapitre 2 :*

l'opérateur

$$\Delta = p_+ \left(I - e^{2Q}\right)\left(I - e^{2\delta Q}\right) + p_- \left(I + e^{2Q}\right)\left(I + e^{2\delta Q}\right)$$

est inversible et d'inverse borné, et $\exists c > 0$ (indépendante de δ, p_+et p_-)tels que

$$\left\|\Delta^{-1}\right\| \leq c\frac{1}{p_-}.$$

Preuve. On rappelle que les opérateurs $\left(I - e^{2\delta Q}\right), \left(I - e^{2Q}\right), \left(I + e^{2\delta Q}\right)$ et $\left(I + e^{2Q}\right)$ sont bornés et inversibles, on pose que $B = -Q$ et on démontre que

$$\Delta' = p_+ \left(I - e^{-2\delta B}\right)\left(I - e^{-2B}\right) + p_- \left(I + e^{-2\delta B}\right)\left(I + e^{-2B}\right)$$

est inversible et d'inverse borné .

Soit la fonction $g : S_\theta \to \mathbb{C}$, $\theta < \frac{\pi}{2}$ tels que

$$g(z) = p_+ \left(1 - e^{-2\delta z}\right)\left(1 - e^{-2z}\right) + p_- \left(1 + e^{-2\delta z}\right)\left(1 + e^{-2z}\right),$$

comme la fonction g est holomorphe et bornée dans S_θ, donc

$$g \in H^\infty(S_\theta) \subset H_P(S_\theta). \tag{3.0.7}$$

Soit $z \in S_\theta$, par la proposition (3.0.1) on a :

$$\begin{aligned} |g(z)| \quad \geq \quad & \left(p_+ \left|1 - e^{-2\delta z}\right|\left|1 - e^{-2z}\right| + p_- \left|1 + e^{-2\delta z}\right|\left|1 + e^{-2z}\right|\right) \\ & \times \left|\cos\left(\frac{\arg\left(1 - e^{-2\delta z}\right) + \arg\left(1 - e^{-2z}\right) - \arg\left(1 + e^{-2\delta z}\right) - \arg\left(1 + e^{-2z}\right)}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

puisque $2\delta z, 2z \in S_\theta$ par la proposition (3.0.2) , on obtient

$$\left|\arg\left(1 - e^{-2\delta z}\right) + \arg\left(1 - e^{-2z}\right) - \arg\left(1 + e^{-2\delta z}\right) - \arg\left(1 + e^{-2z}\right)\right| \leq$$
$$\left|\arg\left(1 - e^{-2\delta z}\right) - \arg\left(1 + e^{-2\delta z}\right)\right|$$

$$+\left|\arg\left(1-e^{-2z}\right)-\arg\left(1+e^{-2z}\right)\right|$$
$$< 2\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned}|g(z)| &\geq \left(p_+\left|1-e^{-2\delta z}\right|\left|1-e^{-2z}\right|+p_-\left|1+e^{-2\delta z}\right|\left|1+e^{-2z}\right|\right)\cos\theta \\ &\geq p_-\left|1+e^{-2\delta z}\right|\left|1+e^{-2z}\right|\cos\theta,\end{aligned}$$

par la proposition (3.0.2) on obtient :

$$|g(z)| \geq p_-\left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\theta}\right)\right)^2\cos\theta > 0.$$

donc $g(z) \neq 0\ \forall z \in S_\theta$, alors la fonction $\left(\frac{1}{g}\right)$ est holomorphe et borné, donc

$$\left(\frac{1}{g}\right) \in H^\infty(S_\theta) \subset H_P(S_\theta) \tag{3.0.8}$$

donc

$$\left\|\frac{1}{g}\right\|_\infty \leq \frac{c_1}{p_-}.$$

Alors par la proposition (1.4.2) et l'hypothèse(2.1.1) , on obtient

$$\Delta' = g(B).$$

D'après la proposition (1.4.4) et l'hypothèse (2.1.3) B admet un $H^\infty\left(S_{\frac{\theta}{2}}\right)$ calcul fonctionnel borné, alors

$$\left(\frac{1}{g}\right)(B) \text{ est bornée.} \tag{3.0.9}$$

Alors, de $(3.0.7), (3.0.8), (3.0.9)$ et d'après la proposition(1.4.3) l'opérateur $g(B)$ est inversible et d'inverse borné

$$[g(B)]^{-1} = \left(\frac{1}{g}\right)(B).$$

Donc l'opérateur $g(-Q)$ est inversible et d'inverse borné

$$[g(-Q)]^{-1} = \left(\frac{1}{g}\right)(-Q).$$

D'après la proposition (1.4.1)

$$\exists c > 0 : \left\|\left(\frac{1}{g}\right)(-Q)\right\| \leq \frac{c}{p_-}.$$

$\square$

Chapitre 4

Régularité de la solution

Dans ce chapitre, on utilise des lemmes techniques pour étudier la régularité de la solution du problème posé. On rappelle que $Q = -\sqrt{-A}$.

4.1 Lemmes techniques

Lemme 4.1.1 *Soit* $f \in L^p(]0,1[\,,X)\,, 1 < p < +\infty$, *sous les hypothèses*$(2.1.1)\,,(2.1.2)$ *et* $(2.1.4)$ *du chapitre 2 on a :*

1. $x \to F(x,f) = Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \in L^p(]0,1[\,,X)\,.$

2. $x \to K(x,f) = Q\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \in L^p(]0,1[\,,X)\,.$

3. $x \to T(x,f) = Q\int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\,ds \in L^p(]0,1[\,,X)\,.$

Preuve. **1.** Pour la première assertion, on applique le théorème de Dore-Venni [12] à l'étude du problème :

$$\begin{cases} u'(x) - Qu(x) = f(x)\,,\; x \in]0,1[\,, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

alors, comme X est UMD et Q est un opérateur linéaire fermé dans X satisfaisant les hypothèses du théorème de Dore-Venni alors pour tout $f \in L^p(]0,1[\,,X)$, ce problème admet une unique solution stricte u telle que

$$u \in W^{1,p}(]0,1[\,,X) \cap L^p(]0,1[\,,D(Q))\,.$$

Avec

$$u(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds,$$

et donc

$$x \to Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(]0,1[\,, X).$$

2. La deuxième assertion s'obtient immédiatement de la première car, en posant $1 - x = y$ et $1 - s = t$, on obtient :

$$\begin{aligned} K(x,f) &= Q \int_x^1 e^{(s-1+1-x)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_x^1 e^{((1-x)-(1-s))Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^y e^{(y-t)Q} f(1-t)\, dt \\ &= F(y, f(1-t)) \in L^p(]0,1[\,, X) \ \text{.D'aprés 1.} \end{aligned}$$

3. Pour la troisème assertion, on écrit pour tout élément $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} T(x,f) &= Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x+s)Q} f(s)\, ds + Q \int_x^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x-s+2s)Q} f(s)\, ds + Q \int_x^1 e^{(s-x+2x)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x-s)Q} e^{2sQ} f(s)\, ds + e^{2xQ} Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= F\left(x, e^{2sQ} f\right) + e^{2xQ} K(x,f) \in L^p(]0,1[\,, X) \ \text{.D'apés 1 et 2.} \end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.2 *Soit $p \in]1,+\infty[$ et supposons l'hypothèse* (2.1.1) *du chapitre* 2*, alors*

1. $Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[\,, X) \Leftrightarrow \varphi \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p},p}$.

2. $Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[\,, X) \Leftrightarrow \varphi \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Preuve. **1.** On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique alors :

$$\varphi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp},p} \Leftrightarrow C^m e^{\cdot C}\varphi \in L^p(]0,1[\,, X) \tag{4.1.1}$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|C^m e^{xC}\varphi\right\|_X^p dx &= \int_0^1 \left\|x^{m\left(1-\left(1-\frac{1}{mp}\right)\right)} C^m e^{xC}\varphi\right\|_X^p \frac{dx}{x} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left\|x^{m\left(1-\left(1-\frac{1}{mp}\right)\right)} C^m e^{xC}\varphi\right\|_X^p \frac{dx}{x} \\
&= \left\|x^{m-\theta m} C^m e^{xC}\varphi\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)}^p \text{ avec } \theta = 1-\frac{1}{mp} \\
&\leq k\left\|\varphi\right\|_{(X,D(C^m))_{\theta,p}} \quad (\text{ voir Triebel [19]}) \\
&= k\left\|\varphi\right\|_{(D(C^m),X)_{\frac{1}{mp},p}}.
\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p},p}$

$$\begin{aligned}
\varphi &\in (D_A, X)_{\frac{1}{2p},p} \Leftrightarrow \varphi \in (D_{Q^2}, X)_{\frac{1}{2p},p} \\
&\Leftrightarrow Q^2 e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[,X) \text{ d'après } (4.1.1) \\
&\Leftrightarrow -Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[,X) \\
&\Leftrightarrow Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[,X).
\end{aligned}$$

2. En utilisant la propriété de réitération(1.3.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi &\in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} \Leftrightarrow \varphi \in (X, D_A)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \\
&\Leftrightarrow \varphi \in (X, D_{Q^2})_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \\
&\Leftrightarrow \varphi \in (X, D_Q)_{1-\frac{1}{p},p} \\
&\Leftrightarrow \varphi \in (D_Q, X)_{\frac{1}{p},p} \\
&\Leftrightarrow Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(]0,1[,X) \text{ d'après } (4.1.1).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.1 *Soit* $f \in L^p(]0,1[,X)$ $(1 < p < +\infty)$, *sous les hypothèses*$(2.1.1), (2.1.2)$ *et* $(2.1.4)$ *du chapitre 2 on a :*

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

Preuve. D'après lemme (4.1.1), $3^{ème}$ assertion on a :

$$Qe^{\cdot Q}\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in L^p(]0,1[,X),$$

donc en appliquant le lemme (4.1.2) , $2^{ème}$ assertion on a :

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}\,.$$

$\square$

Remarque 4.1.1 *Il existe un opérateur $W \in \mathcal{L}(X)$ tels que :*

$$\Delta^{-1} = I - W \quad avec \quad W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right).$$

Alors :

$$\forall \xi \in X\ ,\ \Delta^{-1}\zeta \simeq \zeta. \qquad (\simeq\text{: même régularité})$$

4.2 Régularité de la solution

Pour étudier la régularité de la solution (u_-, u_+) qui satisfait :

$$\begin{cases} u_-''(x) + Au_-(x) = -g_-(x)\,,\ x \in\,]-1, 0[\,, \\ u_+''(x) + Au_+(x) = -g_+(x)\,,\ x \in\,]0, \delta[\,, \end{cases}$$

et pour $g_- \in L^p(]-1,0[\,, X)\,, g_+ \in L^p(]0,\delta[\,, X)$, il suffit d'analyser les termes Au_-, Au_+, où

$$Au_+(x) = I_+(x) + R_+(x) + S_+(x)\ \ ,\ x \in\,]0, \delta[\,,$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_+(x) \;=\;& \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q} g_+(s)\, ds + \frac{1}{2}Q\int_x^\delta e^{(s-x)Q} g_+(s)\, ds + \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+s)Q} g_+(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta-s)Q} g_+(s)\, ds - \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2+s)Q} g_+(s)\, ds \\
&- \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta+2-s)Q} g_+(s)\, ds + p_- Q\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(x-s)Q} g_-(s)\, ds \\
&- p_- Q\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{(x+2+s)Q} g_-(s)\, ds + \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{-(x-2\delta-s)Q} g_+(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{-(x-4\delta+s)Q} g_+(s)\, ds - \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{-(x-2\delta-2-s)Q} g_+(s)\, ds \\
&- \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{-(x-4\delta-2+s)Q} g_+(s)\, ds + \frac{1}{2}Q\int_0^\delta e^{-(x-2\delta+s)Q} g_+(s)\, ds \\
&- p_- Q\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{-(x-2\delta-2-s)Q} g_-(s)\, ds + p_- Q\Delta^{-1}\int_{-1}^0 e^{-(x-2\delta+s)Q} g_-(s)\, ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{+}(x) &= (p_{+}-p_{-})\,Q\Delta^{-1}e^{(x+\delta)Q}f_{+}+2p_{-}A\Delta^{-1}e^{(x+1)Q}f_{-}-(p_{+}+p_{-})\,Q\Delta^{-1}e^{(x+2+\delta)Q}f_{+} \\ &\quad +(p_{+}-p_{-})\,Q\Delta^{-1}e^{-(x-3\delta)Q}f_{+}+2p_{-}A\Delta^{-1}e^{-(x-2\delta-1)Q}f_{-}-(p_{+}+p_{-})\,Q\Delta^{-1}e^{-(x-3\delta-2)Q}f_{+}. \end{aligned}$$

$$S_{+}(x)=Qe^{-(x-\delta)Q}f_{+}.$$

et

$$Au_{-}(x)=I_{-}(x)+R_{-}(x)+S_{-}(x)\ \ ,\ x\in\left]-1,0\right[,$$

avec

$$\begin{aligned} I_{-}(x) &= \frac{1}{2}Q\int_{-1}^{x}e^{(x-s)Q}g_{-}(s)\,ds+\frac{1}{2}Q\int_{x}^{0}e^{(s-x)Q}g_{-}(s)\,ds-p_{+}Q\Delta^{-1}\int_{0}^{\delta}e^{(x+2+s)Q}g_{+}(s)\,ds \\ &\quad -p_{+}Q\Delta^{-1}\int_{0}^{\delta}e^{(x+2+2\delta-s)Q}g_{+}(s)\,ds+\frac{1}{2}(p_{+}-p_{-})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{(x+2-s)Q}g_{-}(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(p_{-}-p_{+})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{(x+4+s)Q}g_{-}(s)\,ds-\frac{1}{2}(p_{-}+p_{+})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{(x+2+2\delta-s)Q}g_{-}(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(p_{-}+p_{+})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{(x+4+2\delta+s)Q}g_{-}(s)\,ds-\frac{1}{2}Q\int_{-1}^{0}e^{(x+2+s)Q}g_{-}(s)\,ds \\ &\quad +p_{+}Q\Delta^{-1}\int_{0}^{\delta}e^{-(x-s)Q}g_{+}(s)\,ds+p_{+}Q\Delta^{-1}\int_{0}^{\delta}e^{-(x-2\delta+s)Q}g_{+}(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(p_{-}-p_{+})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x+s)Q}g_{-}(s)\,ds+\frac{1}{2}(p_{+}-p_{-})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2-s)Q}g_{-}(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2\delta+s)Q}g_{-}(s)\,ds-\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2\delta-2-s)Q}g_{-}(s)\,ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{-}(x) &= (p_{+}-p_{-})\,A\Delta^{-1}e^{(x+3)Q}f_{-}-2p_{+}Q\Delta^{-1}e^{(x+2+\delta)Q}f_{+}-(p_{+}+p_{-})\,A\Delta^{-1}e^{(x+3+2\delta)Q}f_{-} \\ &\quad +(p_{-}-p_{+})\,A\Delta^{-1}e^{-(x-1)Q}f_{-}+2p_{+}Q\Delta^{-1}e^{-(x-\delta)Q}f_{+}+(p_{+}+p_{-})\,A\Delta^{-1}e^{-(x-2\delta-1)Q}f_{-}. \end{aligned}$$

$$S_{-}(x)=Ae^{(x+1)Q}f_{-}.$$

4.2.1 Régularité de la solution u_{+}

On considère le terme $I_{+}(x)\,,\ x\in\left]0,\delta\right[.$

D'après lemme (4.1.1) on a :

$$\begin{cases} \bullet\ x \to \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p((0,\delta),X), \\ \bullet\ x \to \frac{1}{2}Q\int_x^\delta e^{(s-x)Q}g_+(s)\,ds \in L^p((0,\delta)X), \\ \bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ - p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p((0,\delta)X). \end{cases}$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ - p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p((0,\delta),X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds = \frac{1}{2}(p_+ - p_-)Q\Delta^{-1}e^{\left(x+\frac{\delta}{2}\right)Q}\int_0^\delta e^{\left(\frac{3\delta}{2}-s\right)Q}g_+(s)\,ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^\delta e^{\left(\frac{3\delta}{2}-s\right)Q}g_+(s)\,ds \in X$, alors par la régularité du terme $e^{\left(x+\frac{\delta}{2}\right)Q}$ $\left(\forall k \in \mathbb{N} \quad e^{\cdot Q}\zeta \in D\left(Q^k\right)\ ,\ Q^k e^{\cdot Q}\zeta \in L^P(]0,\delta[\,,X)\right)$, on a

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)Q\Delta^{-1}e^{\left(x+\frac{\delta}{2}\right)Q}\zeta \in L^p(]0,\delta[\,,X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2+s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p((0,\delta),X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2+s)Q}g_+(s)\,ds = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\int_0^\delta e^{sQ}g_+(s)\,ds,$$

et comme $\varphi = \int_0^\delta e^{sQ}g_+(s)\,ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ (d'après le corollaire (4.1.1)), alors

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\varphi \in L^p(]0,\delta[\,,X)\ \text{(d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta+2-s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p(]0,\delta[\,,X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}\int_0^\delta e^{(x+2\delta+2-s)Q}g_+(s)\,ds = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \in X$, alors par la régularité de $e^{(x+2)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\zeta \in L^p(]0,\delta[\,,X).$$

$$\bullet\ x \to p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x-s)Q} g_-(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x-s)Q} g_-(s)\, ds = p_- Q\Delta^{-1} e^{xQ} \int_{-1}^{0} e^{-sQ} g_-(s)\, ds,$$

et comme $\varphi = \int_{-1}^{0} e^{-sQ} g_-(s)\, ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ (d'après le corollaire (4.1.1)) , alors

$$p_- Q\Delta^{-1} e^{xQ} \varphi \in L^p(]0,\delta[\,, X) \text{ (d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+2+s)Q} g_-(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+2+s)Q} g_-(s)\, ds = p_- Q\Delta^{-1} e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)Q} \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{3}{2}+s\right)Q} g_-(s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{3}{2}+s\right)Q} g_-(s)\, ds \in X$, alors par la régularité de $e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)Q}$ on a

$$p_- Q\Delta^{-1} e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)Q} \zeta \in L^p(]0,\delta[\,, X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} \int_{0}^{\delta} e^{-(x-2\delta-s)Q} g_+(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} \int_{0}^{\delta} e^{-(x-2\delta-s)Q} g_+(s)\, ds = \frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} e^{(2\delta-x)Q} \int_{0}^{\delta} e^{sQ} g_+(s)\, ds,$$

et comme $\varphi = \int_{0}^{\delta} e^{sQ} g_+(s)\, ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ (d'après le corollaire (4.1.1)) , alors

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} e^{(2\delta-x)Q} \varphi \in L^p(]0,\delta[\,, X) \text{ (d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} \int_{0}^{\delta} e^{-(x-4\delta+s)Q} g_+(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} \int_{0}^{\delta} e^{-(x-4\delta+s)Q} g_+(s)\, ds = \frac{1}{2}(p_+ - p_-) Q\Delta^{-1} e^{(2\delta-x)Q} \int_{0}^{\delta} e^{(2\delta-s)Q} g_+(s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^\delta e^{(2\delta - s)Q} g_+(s)\, ds \in X$, alors par la régularité de $e^{(2\delta - x)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)\, Q\Delta^{-1} e^{(2\delta - x)Q}\zeta \in L^p(]0, \delta[, X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} \int_0^\delta e^{-(x - 2\delta - 2 - s)Q} g_+(s)\, ds \in L^p(]0, \delta[, X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} \int_0^\delta e^{-(x - 2\delta - 2 - s)Q} g_+(s)\, ds = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} e^{-(x - 2\delta - 2)Q} \int_0^\delta e^{sQ} g_+(s)\, ds,$$

et comme $\varphi = \int_0^\delta e^{sQ} g_+(s)\, ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ (d'après le corollaire (4.1.1)), alors

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} e^{-(x - 2\delta - 2)Q}\varphi \in L^p(]0, \delta[, X) \text{ (d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet x \to \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} \int_0^\delta e^{-(x - 4\delta - 2 + s)Q} g_+(s)\, ds \in L^p(]0, \delta[, X)$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} \int_0^\delta e^{-(x - 4\delta - 2 + s)Q} g_+(s)\, ds = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} e^{(2\delta + 2 - x)Q} \int_0^\delta e^{(2\delta - s)Q} g_+(s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^\delta e^{(2\delta - s)Q} g_+(s)\, ds \in X$, alors par la régularité du terme $e^{(2\delta + 2 - x)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}(p_+ + p_-)\, Q\Delta^{-1} e^{(2\delta + 2 - x)Q}\zeta \in L^p(]0, \delta[, X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2} Q \int_0^\delta e^{-(x - 2\delta + s)Q} g_+(s)\, ds \in L^p(]0, \delta[, X),$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q \int_0^\delta e^{-(x - 2\delta + s)Q} g_+(s)\, ds &= \frac{1}{2} Q e^{(\delta - x)Q} \int_0^\delta e^{(\delta - s)Q} g_+(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2} Q e^{(\delta - x)Q} \int_0^\delta e^{tQ} g_+(\delta - t)\, dt \ \text{ (on pose } t = \delta - s), \end{aligned}$$

comme $\varphi = \int_0^\delta e^{tQ} g_+(\delta - t)\, dt \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ (d'après le corollaire (4.1.1)) alors

$$\frac{1}{2} Q e^{(\delta - x)Q}\varphi \in L^p(]0, \delta[, X) \quad \text{(d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2\delta-2-s)Q} g_-(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2\delta-2-s)Q} g_-(s)\, ds = p_- Q\Delta^{-1} e^{(2\delta-x)Q} \int_{-1}^{0} e^{(2+s)Q} g_-(s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{(2+s)Q} g_-(s)\, ds \in X$, alors par la régularité du terme $e^{(2\delta-x)Q}$on a

$$p_- Q\Delta^{-1} e^{(2\delta-x)Q} \zeta \in L^p(]0,\delta[\,, X).$$

$$\bullet\ x \to p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2\delta+s)Q} g_-(s)\, ds \in L^p(]0,\delta[\,, X),$$

car

$$p_- Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2\delta+s)Q} g_-(s)\, ds = p_- Q\Delta^{-1} e^{\left(\frac{3}{2}\delta-x\right)Q} \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{\delta}{2}-s\right)Q} g_-(s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{\delta}{2}-s\right)Q} g_-(s)\, ds \in X$, alors par la régularité du terme $e^{\left(\frac{3}{2}\delta-x\right)Q}$on a

$$p_- Q\Delta^{-1} e^{\left(\frac{3}{2}\delta-x\right)Q} \zeta \in L^p(]0,\delta[\,, X).$$

Considèrons le terme $S_+(x)$, $x \in]0,\delta[$

$$S_+(x) = Qe^{-(x-\delta)Q} f_+,$$

alors

$$x \to S_+(x) \in L^P(]0,\delta[\,, X) \Leftrightarrow f_+ \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

Il nous reste le terme $R_+(.)$ qui est dans $L^P(]0,\delta[\,, X)$ gâce à la régularité des termes

$$e^{\cdot Q} \left(\forall k \in \mathbb{N} \quad e^{\cdot Q}\zeta \in D\left(Q^k\right)\ ,\ Q^k e^{\cdot Q}\zeta \in L^P(]0,\delta[\,, X)\right).$$

D'après ces étapes, on peut dire que $Au_+(.) \in L^P(]0,\delta[\,, X)$, et donc on a bien la régularité de la solution u_+.

4.2.2 Régularité de solution u_-

On commence avec le terme $I_-(x)$, $x \in \left]-1,0\right[$.

D'après lemme $(5.1.1)$, on a :

$$\begin{cases} \bullet\ x \longrightarrow \frac{1}{2}Q\int_{-1}^{x} e^{(x-s)Q}g_-(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X), \\ \bullet\ x \longrightarrow \frac{1}{2}Q\int_{x}^{0} e^{(s-x)Q}g_-(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X), \\ \bullet\ x \longrightarrow \frac{1}{2}(p_- - p_+)\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0} e^{-(x+s)Q}g_-(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X). \end{cases}$$

$$\bullet\ x \longrightarrow p_+Q\Delta^{-1}\int_0^{\delta} e^{(x+2+s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X)$$

car

$$p_+Q\Delta^{-1}\int_0^{\delta} e^{(x+2+s)Q}g_+(s)\,ds = p_+Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\int_0^{\delta} e^{sQ}g_+(s)\,ds,$$

et comme $\varphi = \int_0^{\delta} e^{sQ}g_+(s)\,ds \in (D_A,X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ $\big($d'après le corollaire$\,(4.1.1)\big)$ alors

$$p_+Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\varphi \in L^p(\left]-1,0\right[,X) \quad (\text{d'après le lemme}\,(4.1.2)).$$

$$\bullet\ x \longrightarrow p_+Q\Delta^{-1}\int_0^{\delta} e^{(x+2+2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X),$$

car

$$p_+Q\Delta^{-1}\int_0^{\delta} e^{(x+2+2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds = p_+Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\int_0^{\delta} e^{(2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^{\delta} e^{(2\delta-s)Q}g_+(s)\,ds \in X$, alors par la régularité du terme $e^{(x+2)Q}$ on a

$$p_+Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\zeta \in L^p(\left]-1,0\right[,X).$$

$$\bullet\ x \longrightarrow \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0} e^{(x+2-s)Q}g_-(s)\,ds \in L^p(\left]-1,0\right[,X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)\,Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0} e^{(x+2-s)Q}g_-(s)\,ds = \frac{1}{2}(p_+ - p_-)\,Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\int_{-1}^{0} e^{-sQ}g_-(s)\,ds,$$

et comme $\varphi = \int_{-1}^{0} e^{-sQ}g_-(s)\,ds \in (D_A,X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ $\big($d'après le corollaire$\,(4.1.1)\big)$ alors

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)\,Q\Delta^{-1}e^{(x+2)Q}\varphi \in L^p(\left]-1,0\right[,X)\ (\text{d'après le lemme}\,(4.1.2)).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}\left(p_- - p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+4+s)Q} g_-\left(s\right) ds \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right),$$

car

$$\frac{1}{2}\left(p_- - p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+4+s)Q} g_-\left(s\right) ds = \frac{1}{2}\left(p_- - p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \int_{-1}^{0} e^{(2+s)Q} g_-\left(s\right) ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{(2+s)Q} g_-\left(s\right) ds \in X$ alors par la régularité du terme $e^{(x+2)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}\left(p_- - p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \zeta \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+2+2\delta-s)Q} g_-\left(s\right) ds \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right),$$

car

$$\frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+2+2\delta-s)Q} g_-\left(s\right) = \frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \int_{-1}^{0} e^{(2\delta-s)Q} g_-\left(s\right),$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{(2\delta-s)Q} g_-\left(s\right) \in X,$ alors par la régularité du terme $e^{(x+2)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \zeta \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+4+2\delta+s)Q} g_-\left(s\right) ds \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right),$$

car

$$\frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{(x+4+2\delta+s)Q} g_-\left(s\right) ds = \frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \int_{-1}^{0} e^{(2+2\delta+s)Q} g_-\left(s\right) ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{(2+2\delta+s)Q} g_-\left(s\right) ds \in X$, alors d'après la régularité du terme $e^{(x+2)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}\left(p_- + p_+\right) Q\Delta^{-1} e^{(x+2)Q} \zeta \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2} Q \int_{-1}^{0} e^{(x+2+s)Q} g_-\left(s\right) ds \in L^p\left(\left]-1,0\right[,X\right),$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q \int_{-1}^{0} e^{(x+2+s)Q} g_-\left(s\right) ds &= \frac{1}{2} Q e^{(x+1)Q} \int_{-1}^{0} e^{(1+s)Q} g_-\left(s\right) ds \\ &= \frac{1}{2} Q e^{(x+1)Q} \int_{-1}^{0} e^{-tQ} g_-\left(-1-t\right) ds, \end{aligned}$$

et comme $\varphi = \int_{-1}^{0} e^{-tQ} g_- (-1-t)\, ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ $\big($d'après le corollaire (4.1.1)$\big)$ alors

$$\frac{1}{2} Q e^{(x+1)Q} \varphi \in L^p (]-1,0[\,, X) \text{ (d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to p_+ Q \Delta^{-1} \int_0^{\delta} e^{-(x-s)Q} g_+ (s)\, ds \in L^p (]-1,0[\,, X),$$

car

$$p_+ Q \Delta^{-1} \int_0^{\delta} e^{-(x-s)Q} g_+ (s)\, ds = p_+ Q \Delta^{-1} e^{-xQ} \int_0^{\delta} e^{sQ} g_+ (s)\, ds,$$

et comme $\varphi = \int_0^{\delta} e^{sQ} g_+ (s)\, ds \in (D_A, X)_{\frac{1}{2P}+\frac{1}{2}}$ $\big($d'après le corollaire (4.1.1)$\big)$ alors

$$p_+ Q \Delta^{-1} e^{-xQ} \varphi \in L^p ((-1,0)\,, X) \text{ (d'après le lemme (4.1.2))}.$$

$$\bullet\ x \to p_+ Q \Delta^{-1} \int_0^{\delta} e^{-(x-2\delta+s)Q} g_+ (s)\, ds \in L^p ((-1,0)\,, X),$$

car

$$p_+ Q \Delta^{-1} \int_0^{\delta} e^{-(x-2\delta+s)Q} g_+ (s)\, ds = p_+ Q \Delta^{-1} e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q} \int_0^{\delta} e^{\left(\frac{3}{2}\delta-s\right)Q} g_+ (s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_0^{\delta} e^{\left(\frac{3}{2}\delta-s\right)Q} g_+ (s)\, ds \in X$ alors d'après la régularité du terme $e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q}$ on a

$$p_+ Q \Delta^{-1} e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q} \zeta \in L^p ((-1,0)\,, X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2} (p_+ - p_-) Q \Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2-s)Q} g_- (s)\, ds \in L^p (]-1,0[\,, X),$$

car

$$\frac{1}{2} (p_+ - p_-) Q \Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2-s)Q} g_- (s)\, ds = \frac{1}{2} (p_+ - p_-) Q \Delta^{-1} e^{\left(-x+\frac{1}{2}\right)Q} \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{3}{2}+s\right)Q} g_- (s)\, ds,$$

et comme $\zeta = \int_{-1}^{0} e^{\left(\frac{3}{2}+s\right)Q} g_- (s)\, ds \in X$ alors d'après la régularité du terme $e^{\left(-x+\frac{1}{2}\right)Q}$ on a

$$\frac{1}{2} (p_+ - p_-) Q \Delta^{-1} e^{\left(-x+\frac{1}{2}\right)Q} \zeta \in L^p (]-1,0[\,, X).$$

$$\bullet\ x \to \frac{1}{2} (p_+ + p_-) Q \Delta^{-1} \int_{-1}^{0} e^{-(x-2\delta+s)Q} g_- (s)\, ds \in L^p (]-1,0[\,, X),$$

car

$$\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2\delta+s)Q}g_{-}(s)\,ds=\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q}\int_{-1}^{0}e^{\left(\frac{3\delta}{2}-s\right)Q}g_{-}(s)\,ds,$$

alors d'après la régularité du terme $e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}e^{\left(-x+\frac{\delta}{2}\right)Q}\zeta\in L^{p}(]-1,0[\,,X)\,.$$

- $x\rightarrow\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2\delta-2-s)Q}g_{-}(s)\,ds\in L^{p}(]-1,0[\,,X)\,,$

car

$$\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}\int_{-1}^{0}e^{-(x-2\delta-2-s)Q}g_{-}(s)\,ds=\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}e^{(-x+2\delta)Q}\int_{-1}^{0}e^{(2+s)Q}g_{-}(s)\,ds,$$

et comme $\zeta=\int_{-1}^{0}e^{(2+s)Q}g_{-}(s)\,ds\in X$, alors d'après la régularité du terme $e^{(-x+2\delta)Q}$ on a

$$\frac{1}{2}(p_{+}+p_{-})Q\Delta^{-1}e^{(-x+2\delta)Q}\zeta\in L^{p}(]-1,0[\,,X)\,.$$

Considérons le terme

$$S_{-}(x)=Ae^{(x+1)Q}f_{-},$$

alors

$$x\rightarrow S_{-}(x)\in L^{p}(]0,\delta[\,,X)\Leftrightarrow f_{-}\in(D_{A},X)_{\frac{1}{2p},p}\,.$$

Il nous reste le terme $R_{-}(.)$ qui est dans $L^{P}(]-1,0[\,,X)$ gâce à la régularité des termes

$$e^{\cdot Q}\left(\forall k\in\mathbb{N}\quad e^{\cdot Q}\zeta\in D\left(Q^{k}\right)\ ,\ Q^{k}e^{\cdot Q}\zeta\in L^{P}(]0,\delta[\,,X)\right).$$

D'après ces étapes, on peut dire que $Au_{-}(.)\in L^{P}(]-1,0[\,,X)$, et donc on a bien la régularité de la solution u_{-}.

4.3 Résultats

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses* $(2.1.1)$, $(2.1.2)$, $(2.1.3)$ *et* $(2.1.4)$, *et* $g_{-}\in L^{p}(]-1,0[\,,X)$ *;* $g_{+}\in L^{p}(]0,\delta[\,,X)$, *le problème* (p_{A}) *admet une unique solution stricte* (u_{-},u_{+}) *telle que* $u_{-}\in W^{2,p}(]-1,0[\,,X)\cap L^{p}(]-1,0[\,,D_{A})$ *et* $u_{+}\in W^{2,p}(]0,\delta[\,,X)\cap L^{p}(]0,\delta[\,,D_{A})$ *si et seulement si* $f_{-}\in(D_{A},X)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $f_{+}\in(D_{A},X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Chapitre 5

Exemple d'application

Dans ce chapitre on applique les résultats trouvés sur un exemple de problème d'E.D.P concret. On utilise aussi le résultat suivant :

Théorème 5.0.2 (***L'inégalité généralisée de Minkowski***)

Dans des conditions appropriées sur la fonction h, et pour $1 \leq p < +\infty$, l'inégalité suivante existe

$$\left[\int_a^b \left|\int_c^d h(x,y)\,dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_c^d \left[\int_a^b |h(x,y)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} dy\right]. \tag{5.0.1}$$

Preuve. (voir $[Zy]$ Zygmund, A., Trigonometric Series, Volume I , Cambridge University Press, 1968, $pp.18-19$).

1ère **cas :** si $p = 1$, on utilise le théorème de Fubini.

2ème **cas :** si $p > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|\int_c^d h(x,y)\,dy\right|^p dx &= \int_a^b \left|\int_c^d h(x,y)\,dy\right|^{p-1} \left|\int_c^d h(x,y)\,dy\right| dx \\
&\leq \int_a^b \left|\int_c^d h(x,t)\,dt\right|^{p-1} \left[\int_c^d |h(x,y)|\,dy\right] dx \\
&= \int_a^b \left[\int_c^d \left|\int_c^d h(x,t)\,dt\right|^{p-1} |h(x,y)|\,dy\right] dx
\end{aligned}$$

$$(\text{ d'après théorème de Fubini}) = \int_c^d \left[\int_a^b \left|\int_c^d h(x,t)\,dt\right|^{p-1} |h(x,y)|\,dx\right] dy. \tag{5.0.2}$$

Soit $q = \frac{p}{p-1}$, alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on utilise l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_a^b \left| \int_c^d h(x,t)\,dt \right|^{p-1} |h(x,y)|\,dx \leq \left[\int_a^b \left| \int_c^d h(x,t)\,dt \right|^{q(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^b |h(x,y)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_a^b \left| \int_c^d h(x,t)\,dt \right|^{p} dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^b |h(x,y)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{5.0.3}$$

On remplace(5.0.3) dans (5.0.2) , on trouve

$$\int_a^b \left| \int_c^d h(x,y)\,dy \right|^{p} dx \leq \int_c^d \left[\left[\int_a^b \left| \int_c^d h(x,t)\,dt \right|^{p} dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^b |h(x,y)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}} \right] dy$$

$$= \left[\int_a^b \left| \int_c^d h(x,t)\,dt \right|^{p} dx \right]^{\frac{1}{q}} \int_c^d \left[\int_a^b |h(x,y)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}} dy, \tag{5.0.4}$$

on diviser (5.0.4) par le nombre $\left[\int_a^b \left|\int_c^d h(x,t)\,dt\right|^p dx\right]^{\frac{1}{q}}$ et comme $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on obtient (5.0.1) . □

Exemple :

On prend $X = L^p_{per}(0, 2\pi)\,(1 < p < +\infty)$ (l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ de puissance p^e localement sommable et périodique de période 2π, muni de la norme $\|f\|_X = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$), on considère le problème d'E.D.P suivant

$$(P)\begin{cases}
\Delta u_-(x,y) = \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u_-}{\partial y^2}(x,y) = -g_-(x,y), & (x,y) \in \left]-1,0\right[\times \left]-\pi,\pi\right[, \\
\Delta u_+(x,y) = \frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y^2}(x,y) = -g_+(x,y), & (x,y) \in \left]0,\delta\right[\times \left]-\pi,\pi\right[, \\
u_-(-1,y) = f_-(y) \quad , \ y \in \left]-\pi,\pi\right[, \\
\frac{\partial u_+}{\partial x}(\delta,y) = f_+(y) \quad , \ y \in \left]-\pi,\pi\right[, \\
u_-(x,\pi) = u_-(x,-\pi) \quad , \ x \in \left]-1,0\right[, \\
u_+(x,\pi) = u_+(x,-\pi) \quad , \ x \in \left]0,\delta\right[, \\
\frac{\partial u_-}{\partial x}(x,\pi) = \frac{\partial u_-}{\partial x}(x,-\pi), \ x \in \left]-1,0\right[, \\
\frac{\partial u_+}{\partial x}(x,\pi) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(x,-\pi), \ x \in \left]0,\delta\right[, \\
u_-(0,y) = u_+(0,y) \quad , \ y \in \left]-\pi,\pi\right[, \\
p_-\frac{\partial u_-}{\partial x}(0,y) = p_+\frac{\partial u_+}{\partial x}(0,y), \ y \in \left]-\pi,\pi\right[.
\end{cases}$$

où $g_- \in L^p(]-1,0[\,,X)$, $g_+ \in L^p(]0,\delta[\,,X)$, $p_-, p_+ \in \mathbb{R}^+$ et δ est un petit paramètre positif.

L'écriture abstraite de ce problème :

en utilisant la notation usuelle

$$\begin{cases} u_\pm(x)(y) = u_\pm(x,y), \\ g_\pm(x)(y) = g_\pm(x,y). \end{cases}$$

(P) s'écrit

$$(p_A)\begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) = & -g_-(x) \ , x \in]-1,0[\,, \\ u''_+(x) + Au_+(x) = & -g_+(x) \ , x \in]0,\delta[\,, \\ u_-(-1) \ = f_- \ , \\ u'_+(\delta) = f_+ \ , \\ u_-(0) \ = u_+(0) \ , \\ p_- \ u'_-(0) \ = p_+ \ u'_+(0) \ , \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}_{per}(0,2\pi) = \left\{\varphi \in X : \varphi'' \in X\right\} \\ \\ A\varphi = \varphi'' \ ,\forall\varphi \in D(A). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que A est fermé , si $\lambda \notin \{n^2 : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ alors $\lambda \in \rho(-A)$ avec

$$\begin{aligned} \left((\lambda I + A)^{-1} g\right)(x) &= \int_{x-2\pi}^{x} \frac{\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(x-t-\pi)\right)}{2\lambda^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)} g(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)}{2\lambda^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)} g(x-t)\,dt, \end{aligned}$$

on note que le noyau intégral ne dépend pas du choix de la détermination de $\lambda^{\frac{1}{2}}$.

Donc, en utilisant l'inégalité de Minkowski (5.0.1) on a

$$
\begin{aligned}
\left\|(\lambda I+A)^{-1}g\right\|_X &\leq \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}\left|g(x-t)\right|dt\right]^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}\right]^p\left|g(x-t)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}dt\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}\left(\int_0^{2\pi}\left|g(x-t)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dt\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}dt\left\|g\right\|_X,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\left\|(\lambda I+A)^{-1}\right\| \leq \int_0^{2\pi}\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}dt.
$$

On a

$$
\left|\cos z\right| \leq \frac{\left|e^{iz}\right|+\left|e^{-iz}\right|}{2}=\cosh\left(\operatorname{Im} z\right), \qquad \left|\sin z\right| \geq \left|\frac{\left|e^{iz}\right|-\left|e^{-iz}\right|}{2}\right|=\left|\sinh\left(\operatorname{Im} z\right)\right|,
$$

donc, si $\lambda \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\left|\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)\right|}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}dt &\leq \int_0^{2\pi}\frac{\cosh\left(\left(\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2}}\right)(t-\pi)\right)}{2\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sinh\left(\pi\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right|}dt\\
&= \frac{1}{\left|\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2}}\right|\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Donc $-A$ est un opérateur sectoriel avec angle spectral 0, mais l'opérateur A est non inversible, car 0 est une valeur propre isolée dont les fonctions propres sont les fonctions constantes .

On a

$$
\operatorname{Re}s\left(\frac{\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(t-\pi)\right)}{2\lambda^{\frac{1}{2}}\sin\left(\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\right)},\lambda=0\right)=\frac{1}{2\pi},
$$

donc la projection spectrale correspondante à la valeur propre 0 est l'opérateur tel que

$$
(Pu)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\,dt.
$$

L'espace X peut être divisé en somme directe de l'image et le noyau de P, c'est la somme directe de l'espace $X_0 = KerP$ de zéro fonction moyenne et l'espace X_1 des fonctions constantes.

Donc, la solution (u_-, u_+) de problème (P_A) peut être écrite sous la forme $(v_- + w_-, v_+ + w_+)$, avec (v_-, v_+) est une solution dans X_0 du problème suivant :

$$\begin{cases} v_-^{''}(x) + A_0 v_-(x) = -(I-P)\, g_-(x), \ x \in]-1,0[, \\ v_+^{''}(x) + A_0 v_+(x) = -(I-P)\, g_+(x), \ x \in]0,\delta[, \\ v_-(-1) = (I-P)\, f_-, \\ v_-^{'}(\delta) = (I-P)\, f_+, \\ v_-(0) = v_+(0), \\ p_- v_-^{'}(0) = p_+ v_+^{'}(0), \end{cases} \tag{5.0.5}$$

où A_0 est la partie de A dans X_0, et (w_-, w_+) est une solution dans X_1 (de dimension 1) de problème suivant

$$\begin{cases} w_-^{''}(x) = -Pg_-(x), \ x \in]-1,0[, \\ w_+^{''}(x) = -Pg_+(x), \ x \in]0,\delta[, \\ w_-(-1) = Pf_-, \\ w_-^{'}(\delta) = Pf_+, \\ w_-(0) = w_+(0), \\ p_- w_-^{'}(0) = p_+ w_+^{'}(0). \end{cases} \tag{5.0.6}$$

à partir des propriétés standard de la projection spectrale on a $D(A_0) = D(A) \cap X_0$, A_0 est inversible , $\rho(A_0) = \rho(A) \cup \{0\}$ et pour $\lambda \in \rho(A)$ on a

$$\left\|(\lambda I - A_0)^{-1}\right\| \leq \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|$$

donc A_0 satisfait (2.1.1)

$-A_0$ admet un H^∞ calcul fonctional borné voir [10], alors A_0 satisfait (2.1.3).

Donc A_0 satisfait les hypothèses de Théorème (4.3.1), alors pour tout $g_- \in L^p(]-1,0[, X)$, $g_+ \in L^p(]0,\delta[, X)$, $f_- \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p},p}$ et $f_+ \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ le problème (5.0.5) admet une unique solution stricte (v_-, v_+) telle que $v_- \in W^{2,p}(]-1,0[, X_0) \cap L^p(]-1,0[, D_{A_0})$ et $v_+ \in W^{2,p}(]0,\delta[, X_0) \cap L^p(]0,\delta[, D_{A_0})$.

Le problème (5.0.6) admet une unique solution $(w_-, w_+) \in W^{2,p}(]-1,0[, X_1) \times W^{2,p}(]0,\delta[, X_1)$.

Donc, le problème (P_A) admet une unique solution stricte (u_-, u_+) telle que $u_- \in W^{2,p}(]-1,0[, X) \cap L^p(]-1,0[, D_A)$ et $u_+ \in W^{2,p}(]0,\delta[, X) \cap L^p(]0,\delta[, D_A)$ pour tout $g_- \in L^p(]-1,0[, X)$, $g_+ \in L^p(]0,\delta[, X)$, $f_- \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p},p}$ et $f_+ \in (D_A, X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Bibliographie

[1] H. Ammari, J.C.Nédélec, Sur les conditions d'impédance généralisées pour les couches minces, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. $322(1996)995-1000$.

[2] Balakrishnan, A.V. : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pac. J. Math. $10, 419-437(1960)$.

[3] N. Bartoli, A. Bendali, Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer, IMA J. Appl. Math. 67 (2002) 479-508.

[4] O. Belhamiti, R Labbas, K.Lemrabet, A. Medeghri, Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces, App. Math. Comput.$202(2008)608-619$.

[5] O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet, A. Medeghri, Transmission problems in a thin layer set in the framework of the Hölder spaces : resolution and impedance concept, J. Math. Anal. Appl. $358(2009)\ 457-484$.

[6] A. Bendali, K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, SIMA J. Appl. Math. $56(1996)1664-1693$.

[7] Burkholder. D.L : A geometricale characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Proba.,$9(1981), 977-1011$.

[8] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi, Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus, J. Austral. Math. Soc.,ser. A $60(1996)51-89$.

[9] G. Da Prato, P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaire et équation différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl., $54(1975), 305-387$.

[10] Giovanni Dore,Angelo Favini, Rabah Labbas et Keddour Lemrabet : An abstract transmission probleme in a thin layer, I : sharp estimates, Journal of Functional Analysis $261(2011)1865-1922$

[11] G. Dore, A. Venni, H^{∞} functional calculus for sectorial and bisectorial operators, Studia Math. $166(2005)221-241$.

[12] Giovanni Dore and Alberto Venni. : On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators, $Math.Z.196, 189-201(1987)$.

[13] H.O. Fattorini, The Cauchy Problem, Encyclopedia Math. App., vol. 18, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1983.

[14] M. Haase, The Functional Calculus for Sectorial Operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. $169, 2006$.

[15] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot, Study of the limit transmission problems in a thin layer by the sum theory of linear operators, Rev. Mat. Complut. $18(2005)143-176$.

[16] K. Lemrabet, Régularité de la solution d'un problème de transmission, J. Math. Pures Appl. $(9)56(1977)1-38$.

[17] K. Lemrabet, Étude de divers problèmes de transmission d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thèse d'état, USTHB, Alger, 1987.

[18] Eugenio Sinestrari. : On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions., Journal of mathematical analysis and applications $107, 16-66(1985)$

[19] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differntial Operators, North-Holland Math. Library, vol. $18, 1978$.