

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID
IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité: Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

Sur le modele multi-agents du consensus: Modele
Hegselmann-Krause fractionnaire

Présenté par :

Bouguessa Souad

Soutenu le

Les membres de jury

GHEZZAR	MOHAMMED AMINE	Encadreur	MAA	UMAB
EL OSMANI	AISAA OMAR	Président	MAA	USTO
MESSIRDI	SOUFIANE	Examineur	MCB	UMAB

Table des matières

Remerciments	i
Introduction	ii
1 Préliminaires	v
2 Quelques généralités et notions élémentaires sur le consensus	x
3 La modilisation des dynamique des opinions	xiv
3.1 Resultats analytiques des differents modeles de la dynamique d'opinion	xviii
3.1.1 Le modèle classique :	xviii
3.1.2 Le modèle Friedkin-Johnsen :	xviii
3.1.3 Le modèle variant dans le temps :	xviii
3.1.4 Dynamiques des opinions avec la confiance bornée :	xix
4 Consensus avec un leader	xxii
4.1 Exemple numériques	xxv
4.2 systèmes multi-agents	xxvii
Conclusion et perspectives	xxxii
Bibliographie	xxxiii

INTRODUCTION

Ces dernières années ; il y eu un grand intérêt pour l'analyse des systèmes multi-agent ; dans lesquels les agents interagissent selon certaines règles locales. En parlant de consensus, nous devons imaginer un groupe d'individus ou d'experts qui doivent agir en équipe ou en comité. Chacun des experts a sa propre opinion, mais ils devraient être disposés à travailler ensemble et à réviser ou échanger l'opinion. Les interactions entre agents sont habituellement décrites par la topologie d'interconnexion du système.

Dans la littérature, le consensus désigne l'accord d'un groupe d'individus avec des situations décisionnelles.

Le consensus a une histoire ancienne, et à notre connaissance, les modèles sont linéaires et donc comparativement simple.

Cela signifie en particulier que l'analyse nécessaire peut être réalisée par des techniques linéaires telles que la théorie des matrices, les chaînes de Markov et la théorie des graphes.

pour un comportement de groupe, les décideurs sont plus confiants en partageant des informations entre eux ou en consultant plus d'un expert. Chacun des experts a sa propre opinion qui pourrait être modifiée par l'influence d'une certaine interaction de ses voisins.

Le premier modèle a été formulé et analysé dans [6, 7], où la généralisation des modèles linéaires et non homogènes a été étudiée. Une analyse approfondie des modèles linéaires a été introduite par Krause dans [7] et ce modèle a été étendu vers le modèle de Hegelsmann-Krause donné en [8, 9]. Au cours des dernières décennies, il ya eu un grand intérêt pour la recherche distribuée multi-agent en raison de leurs applications étendues dans la communauté de contrôle.

L'objectif est de parvenir à un accord sur les états d'information, y compris les positions, les vitesses et les attitudes, via l'interaction locale. À notre avis, il existe un autre groupe de scientifiques qui utilisent les contrôles pour définir le consensus des systèmes. Pour la plupart

des résultats, les auteurs utilisent des dynamiques continues ou à temps discret avec ordre entier, voir [10, 12].

L'étude du consensus pour les systèmes multi-agents avec une dynamique non linéaire est présentée dans [12].

Dans la nature, de nombreux phénomènes ne peuvent pas être expliqués dans le cadre de la dynamique à ordres de dérivation entiers, par exemple, le mouvement synchronisé des fluides macroléculaires et le milieu poreux.

Dans [13, 15], les auteurs montrent que, pour démontrer la relation stress-déformation, on peut utiliser la dynamique des ordres fractionnaires plutôt que la dynamique des nombres entiers. En outre, de nombreux autres phénomènes peuvent naturellement s'expliquer par le comportement coordonné d'agents à dynamique fractionnelle, voir [16], qui sont consacrés à une classe de systèmes multi-agents à ordre fractionnaire. De plus, les systèmes à ordre fractionnaire fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire.

Le sujet de notre mémoire, concerne les travaux de Dorota Mozyrska et Malgorzata Wyrwas, où elles considèrent un modèle fractionnaire particulier du consensus sans contrôle.

Dans notre travail, le côté droit du modèle ressemble aux modèles classiques de Hegselmann-Krause, voir [7, 9], c'est à dire étudier les modèles d'ordre fractionnaire linéaire avec une confiance bornée. Nous tenons à souligner que dans notre modèle; nous n'ajoutons aucun contrôle et dans notre cas il n'est pas possible d'établir une construction des contrôles afin de garantir le consensus du système comme dans [11, 16]. En fait il n'est pas facile d'obtenir des résultats analytiques rigoureux.

Pour cette raison, nous effectuons l'analyse des modèles d'ordre fractionnaire présentés dans une large mesure par des simulations informatiques en utilisant le logiciel «Matlab».

Cependant, certains résultats analytiques pour certains modèles considérés ont été démontrés.

Lorsque nous analysons les différences entre les opinions, nous incluons une étude de la stabilité par la transformée en Z du système.

Quelques résultats supplémentaires sur la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires être trouvés par exemple dans [17].

Cependant, dans notre mémoire; nous étudions le consensus basé sur les interactions entre les avis prenant en compte la mémoire entre eux. À notre avis, la mémoire est l'un des facteurs

les plus importants qui a un impact sur les éléments du comportement des groupes. Puisque la définition des opérateurs fractionnaires prend en compte la "mémoire" (l'historique), c-à-d les valeurs précédentes de la fonction, l'opérateur fractionnaire prend donc la place de l'opérateur de dérivation classique.

Dans notre travail, nous revenons aux interactions entre les opinions définies comme dans les modèles de Hegselmann-Krause mais avec la mémoire incluse et définie selon l'opérateur d'ordre fractionnaire sur le côté gauche où nous utilisons l'opérateur de différence de Grünwald-Letnikov. Puisque nos systèmes sont positifs, nous commençons par des opinions initiales positives, puis les trajectoires augmentent très rapidement.

Une nouvelle définition de la tendance entre les trajectoires, a été donc établie ; où les agents ayant les opinions les plus élevées à l'intérieur des groupes sont appelés leaders. Ce type de consensus est appelé consensus du leader. Pour le cas le plus simple de seulement deux agents, il n'est pas difficile de donner une analyse complète de la dynamique. Cependant ; pour n arbitraire, l'analyse mathématique de la dynamique fractionnelle est assez difficile. Pour cette raison, nous présentons dans le document une analyse approfondie de ce modèle, pour les valeurs de $n = 2$ et $n = 50$ agents par la simulation mathématique.

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons exposer les différents outils et notions utilisés dans notre travail, concernant le calcul fractionnaire et la transformée en Z .

Définition 1.0.1 Soit $c \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N}_c = \{c, c + 1, c + 2, \dots\}$. Définir la suite suivante par ses valeurs :

$$\begin{aligned}
 a_k^{(\alpha)} &= 1 && \text{pour } k = 0. \\
 a_k^{(\alpha)} &= \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} && \text{pour } k \in \mathbb{N}_1 \dots \dots \dots (1).
 \end{aligned}$$

Telle que, $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$, la suite $\binom{\alpha}{k}_{k \in \mathbb{N}_0}$ Peut être réécrit en utilisant le binôme généralisé $\binom{\alpha}{k}$ comme

suit : $a_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$.

Notons que le binôme généralisé $\binom{\alpha}{k}$ Peut également être calculé en utilisant la fonction gamma de la manière suivante : $a_k^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$.

Cependant, lors des calculs informatiques, il est déconseillé d'utiliser la fonction gamma pour calculer le binôme général lorsque les valeurs de la fonction Γ croissent très rapidement.

Par conséquent, la meilleure façon est la possibilité d'utiliser la formule récurrence pour les coefficients binomiaux.

Notez que $a_k^{(\alpha)}$ peut aussi être défini de manière récurrente par :

$$\begin{aligned}
 a_0^{(\alpha)} &= 1, \\
 a_{k+1}^{(\alpha)} &= \left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) a_k^{(\alpha)} \dots (2).
 \end{aligned}$$

La relation (2) résulte des recalculs simples dans la présentation avec la formule ci-dessus avec la fonction Γ .

Alors nous avons par exemple $a_1^{(\alpha)} = -\alpha$ et $a_2^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) a_1^{(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

Proposition 1.0.1 Soit $\alpha \in]0, 1[$. Ensuite, la suite $\left(\binom{\alpha}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}_1}$ Est croissante et $a_k^{(\alpha)} \leq 0$, pour $k \in \mathbb{N}_1$.

Preuve. □

Montrons que $a_k^{(\alpha)} \leq 0$

Démonstration par récurrence

Pour $k = 1$:

$$a_1^{(\alpha)} = (-1)^1 \binom{\alpha}{1} = -\binom{\alpha}{1}$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!} = \alpha \geq 0.$$

$$\text{Donc, } a_1^{(\alpha)} = -\alpha \leq 0.$$

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$; on suppose que (P_n) est vraie et on démontre (P_{n+1})

On suppose que $a_k^{(\alpha)} \leq 0$; et on démontre que $a_{k+1}^{(\alpha)} \leq 0$.

$$a_{k+1}^{(\alpha)} = (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} = -(-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} = -(-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!(k+1)}$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} = -a_k^{(\alpha)} \binom{\alpha-k}{k+1}$$

On a : $k \geq 1$; et $0 \leq \alpha \leq 1$; donc, $\alpha - k \leq 0$;

Alors, $a_{k+1}^{(\alpha)} \leq 0$; par conséquent : $a_k^{(\alpha)} \leq 0$.

Montrons que la suite $\left(a_k^{(\alpha)}\right)_{k \in \mathbb{N}_1}$ est croissante :

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k+1} - (-1)^k \binom{\alpha}{k}$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = -(-1)^k \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} - \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \right]$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = -(-1)^k \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!(k+1)} - \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \right]$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = -(-1)^k \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \right) \left(\frac{\alpha-k}{k+1} + 1 \right)$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = -a_k^{(\alpha)} \left(\frac{\alpha - k}{k+1} + 1 \right)$$

$$a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} = -a_k^{(\alpha)} \left(\frac{\alpha + 1}{k+1} \right).$$

On a $-a_k^{(\alpha)} \geq 0$; car $a_k^{(\alpha)} \leq 0$; et $\frac{\alpha + 1}{k+1} \geq 0$.

Donc, $a_{k+1}^{(\alpha)} - a_k^{(\alpha)} \geq 0 \Rightarrow a_k^{(\alpha)}$ est croissant.

Maintenant, posons les propriétés de la suite $(a_k^{(-\alpha)})_{k \in \mathbb{N}_1}$, avec $\alpha \in [0, 1[$.

Proposition 1.0.2 *Soit $\alpha \in]0, 1[$. Alors la suite $(a_k^{(-\alpha)})_{k \in \mathbb{N}_1}$ décroissante et $a_k^{(-\alpha)} \geq 0$, pour $k \in \mathbb{N}_1$.*

Preuve. □

Tout d'abord, remarquons que $a_0^{(-\alpha)} = 1$ et $a_k^{(-\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+k-1)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}_1$. De même, comme dans la preuve de la proposition (1.0.1), on peut montrer que pour $\alpha \in [0, 1[$ nous avons

$$0 \leq 1 - \frac{1}{k+1} \leq 1 - \frac{-\alpha+1}{k+1} \text{ pour } k \geq 1.$$

Puis de (2) nous obtenons $a_{k+1}^{(-\alpha)} \geq 0$ si seulement si $a_k^{(-\alpha)} \geq 0$. En outre, comme $a_1^{(-\alpha)} = \alpha \geq 0$

De l'induction mathématique, $a_k^{(-\alpha)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_1$. Observez que

$$a_{k+1}^{(-\alpha)} - a_k^{(-\alpha)} = \left(1 - \frac{-\alpha+1}{k+1}\right) a_k^{(-\alpha)} - a_k^{(-\alpha)} = -\frac{-\alpha+1}{k+1} a_k^{(-\alpha)}.$$

Donc si pour tout $k \in \mathbb{N}_1$ tient que $a_k^{(-\alpha)} \geq 0$, Alors la différence $a_{k+1}^{(-\alpha)} - a_k^{(-\alpha)}$ est négative pour tout $k \geq 1$ et par conséquent, $a_{k+1}^{(-\alpha)} \leq a_k^{(-\alpha)}$.

En utilisant la Proposition (), on peut facilement déduire que la suite $a_k^{(-\alpha)}$ est convergente.

Corollaire 1.0.1 *Si $\alpha \in [0, 1[$, puis $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(-\alpha)} = 0$.*

Preuve. Pour $\alpha = 0$ on a $a_0^{(0)} = 1$ et pour $k \geq 1$. Prenons maintenant $\alpha \in]0, 1[$. Puis en utilisant la propriété de la fonction gamma nous obtenons $a_k^{(-\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \binom{k + \alpha - 1}{k} = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{1+O(k^{-1})}{k^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}$.

Par conséquent depuis $\alpha \in]0, 1[$, on a $\Gamma(\alpha)$ et $0 \leq 1-\alpha \leq 1$ et par conséquent, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(-\alpha)} =$

0.

□

Rappelons que la transformée Z d'une suite $(y(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ est une fonction complexe donnée par

$$Y(z) := Z[y](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(k)}{z^k},$$

Où $z \in \mathbb{C}$ désigne un nombre complexe pour lequel cette série converge absolument.

La transformée Z peut être étendue à des suite à valeurs vectorielles de manière composante.

Notons que depuis

$$a_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha - k - 1}{k},$$

Puis pour $|z| \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$Z \left[a_k^{(\alpha)} \right] (z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^{-k} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\alpha \dots (3).$$

En utilisant la séquence (1), on peut définir l'opérateur de différence suivant.

Définition 1.0.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'opérateur de différence de type Grünwald-Letnikov Δ^α d'ordre α pour une fonction $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ Est défini par $(\Delta^\alpha x)(k) = \sum_{s=0}^k a_s^{(\alpha)} x(k-s) \dots (4)$.

Où $a_s^{(\alpha)}$ est la suite donnée par (1).

Notons que pour $\alpha = 0$ on obtient $(\Delta^{(0)}x)(k) = x(k)$. Et plus tard dans les systèmes considérés nous recevons

$(\Delta^{(0)}x)(k) = x(k+1)$ du côté gauche des systèmes qui s'accorde avec les systèmes classiques de type discret, les systèmes de la forme $x(k+1) = f(x(k))$.

Il est également important de noter que pour $\alpha = 1$ nous avons $(\Delta^1 x)(k) := x(k) - x(k-1)$ qui est en accord avec l'opérateur nabla classique.

Proposition 1.0.3 Pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1]$ Définissons $y(k) := (\Delta^\alpha x)(k)$. Alors

$$Z[y](z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\alpha X(z) \dots (5).$$

Où $X(z) = Z[x](z)$.

Preuve.

□

$$\text{On a } (\Delta^\alpha x)(k) = \sum_{s=0}^k a_s^{(\alpha)} x(k-s) = a_s^{(\alpha)} * x(k)$$

Donc, $Z[y](z) = Z[\Delta^\alpha x](z) = Z\left[a_s^{(\alpha)} * x\right](z) = Z\left[a_s^{(\alpha)}\right] \cdot X(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\alpha \cdot X(z)$.

On considère généralement les systèmes d'ordre fractionnel suivants d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ avec l'opérateur différentiel de type Grünwald-Letnikov :

$$(\Delta^\alpha x)(k+1) = f(x(k)); k \in \mathbb{N}_0 \dots (6).$$

Avec condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ où $x = (x_1, \dots, x_n)^T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Les solutions au système (6) existent selon des conditions initiales données. De plus, le côté gauche du système (6) pourrait être réécrit récursivement. En particulier, en (6), le côté gauche peut être écrit comme suit :

$$(\Delta^\alpha x)(k+1) = x(k+1) + \sum_{s=1}^{k+1} a_s^{(\alpha)} x(k+1-s).$$

Ensuite, le système (6) prend la forme récursive

$$x(k+1) = - \sum_{s=1}^{k+1} a_s^{(\alpha)} x(k+1-s) + f(x(k)) \text{ pour } k \in \mathbb{N}_1 \dots (7).$$

Ou de manière équivalente,

$$x(k) = f(x(k-1)) - \sum_{s=0}^{k-1} a_{k-s}^{(\alpha)} x(s), \text{ pour } k \in \mathbb{N}_1 \dots (8).$$

Avec condition initiale donnée $x(0)$. La formule (8) est mise en œuvre dans nos expériences numériques dans le programme Matlab avec la suite $\left(a_k^{(\alpha)}\right)_{k \in \mathbb{N}_1}$ calculée à partir de la définition de récurrence .

De la Proposition (1.0.1) pour $\alpha \in]0, 1[$ on voit que

$$x(k) = f(x(k-1)) - \sum_{s=0}^{k-1} |a_{k-s}^{(\alpha)}| x(s), \text{ pour } k \in \mathbb{N}_1 \dots (9).$$

Et si $f(\cdot)$ est une fonction positive et que les conditions initiales sont positives, les solutions sont positives.

Quelques généralités et notions élémentaires sur le consensus

Dans cette partie, nous allons définir quelques définitions et propriétés qui régissent les résultats du consensus.

De même que dans [7], considérons un groupe d'experts qui ont fait une évaluation d'une certaine ampleur.

Soit $x_i : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, +\infty[\infty := \mathbb{R}_{\geq 0}, i = 1, \dots, n$. Indiquer par $x_i(t)$ l'évaluation faite par un expert $i \in \mathbb{N} := \{1, \dots, n\}$ à l'instant $t \in \mathbb{N}_0$ de l'amplitude non négative considérée.

Supposons que l'expert i prend à un profil x d'opinions seulement les experts j en compte pour lesquels $|x_i - x_j| \leq \varepsilon$, où $\varepsilon \geq 0$ est un certain niveau de confiance des agents i et j . Définissons $I_i(\varepsilon) = \{j/1 \leq j \leq n, |x_i - x_j| \leq \varepsilon\}$.

Notons que l'ensemble $I_i(\varepsilon)$ est fini et le nombre de ses éléments sera noté $|I_i(\varepsilon)|$.

Soit $\varepsilon \geq 0$ et $\alpha \in [0, 1[$. Nous considérons ici (voir [Mozyrska]) l'ordre fractionnaire des modèles de type Hegselmann-Krause de la forme suivante :

$$(\Delta^\alpha x_i)(k+1) = \frac{\sum_{j \in I_i(\varepsilon)} x_j(k)}{|I_i(\varepsilon)|}, i \in \mathbb{N} \dots (10).$$

Avec la condition initiale $x(0) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$ qui est le vecteur aléatoire. De l'équation (9) on peut écrire directement le schéma récursif pour des solutions pour chaque agent séparé $i \in \mathbb{N}$:

$$x_i(k) = \frac{\sum_{j \in I_i(\varepsilon)} x_j(k-1)}{|I_i(\varepsilon)|} + \sum_{S=0}^{k-1} |a_{k-s}^{(\alpha)}| x_i(s) \text{ pour } k \in \mathbb{N}_1 \dots (11).$$

Remarque 2.0.1 *Il est facile de voir que pour $\alpha = 0$ on obtient le modèle classique d'Hegselmann-Krause, c'est-à-dire.*

$$x_i(k+1) = \frac{\sum_{j \in I_i(\varepsilon)} x_j(k)}{|I_i(\varepsilon)|}, i \in \mathbb{N} \dots (12).$$

Qui est considéré par exemple dans (9).

La définition suivante d'un profil ε a d'abord été énoncée dans [7] et plus tard considérée par exemple dans [8].

Définition 2.0.3 *Un profil d'opinion $x = (x_1, \dots, x_n)$ est appelé un profil ε s'il existe un ordre $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}$ des composantes de x tel que deux composantes adjacentes aient une résistance inférieur à ε , c'est-à-dire,*

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \leq \varepsilon \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n - 1.$$

Pour un profil d'opinion $x = (x_1, \dots, x_n)$, nous disons qu'il existe une division (ou fissure) entre les agents i et j si $|x_{i_{k+1}} - x_{i_k}| \geq \varepsilon$.

Une propriété particulière du modèle de Krause est qu'un consensus sera atteint en temps fini, s'il y a consensus. Dans le cas classique qui s'accord avec notre modèle pour $\alpha = 0$, il y a la série de bonnes propriétés, prouvée dans [7] :

(1) La dynamique ne change pas l'ordre des opinions, c'est-à-dire

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \ x_i(k) \leq x_j(k) \Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N} \ x_i(k+1) \leq x_j(k+1).$$

(2) Si une scission entre deux agents se produit à un certain moment, il restera une scission pour toujours.

(3) Si pour un premier profil un consensus est approché, alors le profil d'opinion doit être un ε -profil pour tous les temps.

(4) Pour $n = 2, 3, 4$ un consensus est approché si et seulement si le profil initial est un ε -profil.

La propriété (4) n'est plus vraie, même dans le cas classique, voir [8], pour $n = 5$. Autrement dit, pour cinq agents, il peut arriver qu'ils ne parviennent pas à un consensus, même si les opinions initiales sont proches dans le sens d'un ε -profil.

Premièrement, nous avons vérifié si les propriétés des cas classiques restent vraies si nous incluons la mémoire dans les opinions des agents. Nous présentons également que les valeurs des opinions augmentent avec le temps, car la mémoire est de plus en plus chargée.

A partir de (11), on peut facilement diriger les informations suivantes sur la positivité des trajectoires $x_i(\cdot) = x_i(k) \quad k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.0.4 *Soit $x_i(0) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors $x_i(k) \geq 0$, pour $i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$.*

De plus, la propriété (1) est conservée, donc la dynamique ne change pas l'ordre des opinions.

Proposition 2.0.5 *Soit $x_i(0) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors si pour certains $i, j \in \mathbb{N}$ Nous avons la relation $x_i(0) \leq x_j(0)$ Puis pour $k \in \mathbb{N}_1 : x_i(k) \leq x_j(k)$.*

Preuve. □

Nous utilisons l'induction (comme cela a été fait dans (9)), mais nous devons nous souvenir de la mémoire du système, donc nous prenons l'hypothèse non seulement pour une étape précédente, mais pour toutes les étapes dans l'histoire des opinions.

Soit $A_r(k) := \{x_p(k) : p \in \mathbb{N} \wedge |x_p(k) - x_r(k)| \leq \varepsilon\}$, $r \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$ et $M_{A_r(k)}$ être la moyenne arithmétique de l'ensemble $A_r(k)$, c-à-d $M_{A_r(k)} = |A_r(k)|^{-1} \sum_{x_p(k) \in A_r(k)} x_p(k) \dots (13)$.

En utilisant les propriétés de la moyenne arithmétique on peut montrer que si $x_i(0) \leq x_j(0)$ alors $M_{A_i(0)} \leq M_{A_j(0)}$ voir par exemple [7, Lemme2]. Soit $i \leq j$, alors $x_i(1) = M_{A_i(0)} + \alpha x_i(0) \leq M_{A_j(0)} + \alpha x_j(0) = x_j(1)$. Supposons maintenant que $x_i(r) \leq x_j(r)$ pour $r = 0, \dots, k_0$. Alors on a $x_i(k_0 + 1) = M_{A_i(k_0)} + O_i(k_0) \leq M_{A_j(k_0)} + O_j(k_0) = x_j(k_0 + 1)$. Où $O_i(k_0) := \sum_{s=0}^{k_0} |a_{k_0+1-s}^{(\alpha)}| x_i(s)$, et $O_j(k_0) := \sum_{s=0}^{k_0} |a_{k_0+1-s}^{(\alpha)}| x_j(s)$.

Donc $x_i(k_0 + 1) \leq x_j(k_0 + 1)$.

D'où l'utilisation du principe d'induction, nous obtenons $x_i(s) \leq x_j(s)$ pour tous les $s \in \mathbb{N}_0$. Notre objectif est de trouver de tels paramètres qui peuvent établir un «consensus» dans les systèmes ou peu de valeurs de «consensus». Nous sommes intéressés par le consensus de groupes d'agents avec des leaders, où les dirigeants sont des agents spéciaux dont les motions sont indépendantes de tous les autres agents et donc les dirigeants sont suivis par les autres.

Définition 2.0.4 *Soit $\Lambda = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \mathbb{N}$ et $s \leq n$. On s'attend à ce que le consensus avec les dirigeants de Λ du système (10) soit atteint si, pour chaque agent $i \in \mathbb{N}$ il existe $j \in \Lambda$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i(k) - x_j(k)| = 0 \dots (14)$.*

Pour toute condition initiale $x(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))$. Si $\Lambda = \{i_0\}$ et $i_0 \in \mathbb{N}$, alors nous

disons que le système (10) atteint un consensus.

Sans perte de généralité, on peut relabeler le composant de $x(0)$ et supposer que $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$. Ensuite, par la Proposition (2.0.5), nous obtenons $x_1(k) \leq x_2(k) \leq \dots \leq x_n(k)$ pour $k \in \mathbb{N}_0$ et par conséquent, $\max_{i \in \mathbb{N}} x_i(k) = x_n(k)$. Supposons qu'au moins un agent possède une valeur de départ non nul, puis $x_n(k) \geq 0$.

De la proposition (2.0.4), on déduit que si $x_n(0)$ est le maximum pour la condition initiale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ le système conserver le même agent de valeurs maximales le long de k . Observez que la condition (14) est équivalente à l'existence de $c_i \in [0, 1]$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_i(k)}{x_n(k)} = c_i \dots$ (15). Bien sûr, si $i = n$, alors nous avons $c_n = 1$.

En outre, si le système (10) atteint un consensus, alors il n'y en a qu'un $c_i = 1$. Étant donné que les modèles fractionnaires de «consensus» ont des trajectoires de plus en plus rapides, les présentations de consensus sont meilleures pour les graphiques de $\frac{x_i}{x_n}$. La suite $y := \left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1 \right)$ s'appelle la normalisation de $x = (x_1, \dots, x_n)$ et les valeurs $y(k)$ sont appelées valeurs normalisées x .

L'idée d'inclure la mémoire par la mise en œuvre d'un opérateur fractionnaire au lieu de la classique vient du fait que la mémoire est l'un des facteurs les plus importants qui influe sur les éléments du comportement des groupes.

La modélisation de la dynamique des opinions

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques modèles mathématiques du consensus, et introduire le nouveau modèle linéaire fractionnaire de Hegselmann-Krause.

On considère un groupe d'agents (ou des experts ou des individus de quelque nature) parmi lesquels se déroule un certain processus de formation de l'opinion. En général, un agent ne se contente pas de partager ou de strictement ignorer l'opinion de tout autre agent, mais prendra en compte l'opinion des autres certaine mesure en formant sa propre opinion. Cela peut être modélisé par des poids différents que n'importe quel agent met sur l'opinion de tous les autres agents. Ce processus de formation de l'opinion réelle en prenant une moyenne sur les opinions peut être répété à nouveau et conduit donc à un processus dynamique en temps discret. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que ce processus de moyenne d'opinions à plusieurs reprises rapproche les opinions d'agents différents jusqu'à ce qu'ils s'écoulent dans un consensus entre tous les agents.

Le point crucial ici est que les poids mis sur les révisions d'autres peuvent changer pour les raisons expliquées ci-dessous. Seulement pour le cas classique des poids constants et assez de confiance parmi les agents le phénomène du consensus est typique.

Soit n le nombre d'agents dans le groupe considéré. Pour modéliser le processus répété de formation de l'opinion, nous pensons au temps ou aux périodes, qui est un temps aussi discret $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. On supposera que l'opinion d'un agent peut être exprimée par un

nombre réel comme par exemple, dans le cas d'un expert qui doit évaluer une certaine amplitude. Cette hypothèse est faite pour la simplicité, parce que déjà dans ce cas la dynamique d'opinion considérée peut être très compliquée. Ce cas est parfois appelé «dynamique d'opinion continue», contrairement au cas, encore plus restreint, de la «dynamique de l'opinion binaire». Plus tard, nous considérons aussi les opinions de «dimension supérieure» (voir le modèle de variante de temps).

Pour l'agent fixé, disons i , où $1 \leq i \leq n$. Nous désignons l'opinion des agents au temps t par $x_i(t)$. Ainsi $x_i(t)$ est un nombre réel et le vecteur $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, dans l'espace n -dimensionnel représente le profil d'opinion à l'instant t .

Fixant un agent i , le poids donné à tout autre agent, disons j , on note a_{ij} . Pour simplifier les choses, nous introduisons a_{ii} tel que $a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t)$. C-à-d que l'agent i ajuste son opinion dans la période $t + 1$ en prenant une moyenne pondérée avec poids a_{ij} pour l'opinion de l'agent j à l'instant t . Bien entendu, les pondérations peuvent être nulles. Par exemple, si l'agent i néglige toutes les autres opinions, cela signifie que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, si i suit l'opinion de j alors, $a_{ij} = 1$ et $a_{ik} = 0$ pour $k \neq j$. Il est important de noter que les poids peuvent changer avec le temps au avec l'opinion, c-à-d $a_{ij} = a_{ij}(t, x(t))$ peut être en fonction de t et de tout le profil $x(t)$. En recueillant les poids dans une matrice, $A(t, x(t)) = (a_{ij}(t, x(t)))$ on obtient une matrice stochastique, c-à-d une matrice non négative avec tous les lignes totalisant 1. Ainsi, à l'aide d'une notation matricielle, la forme générale de notre modèle (GM) peut être compacte comme

$$x(t+1) = A(t, x(t))x(t) \dots (GM).$$

Le problème principal auquel nous sommes confrontés dans le présent article est le suivant : Compte tenu d'un profil initial (profil de départ) $x(0)$ et de la dynamique spécifiée par les poids ce qui peut être dit sur le comportement final du profil d'opinion, à propos de $x(t)$ pour t s'approche de l'infini. En particulier, quand le groupe d'agents s'approche d'un consensus c , c-à-d qu'il contient $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = c$ pour tous les agents $i = 1 \dots n$. Dans cette généralité, cependant, on ne peut espérer obtenir une réponse, ni par l'analyse mathématique ni par des simulations informatiques. Par conséquent, nous traiterons différentes spécialisations intéressantes du modèle général (GM) ci-dessus. Tout d'abord, nous commençons par le modèle

classique du poids fixes, c-à-d :

$$x(t+1) = Ax(t) \dots\dots (GM), t \in T.$$

Où A est une matrice stochastique fixe et $x(t)$ le vecteur colonne d'opinion à l'instant t . Ce modèle a été proposé et utilisé pour évaluer la mise en commun des opinions par un dialogue entre experts.

Il existe une variation intéressante de ce modèle développé par (Friedkin et Johnsen 1990,1999). Ce modèle aborde la formation d'opinion sous influence sociale et suppose que l'agent i adhère à son opinion initiale à un certain degré g_i et par une susceptibilité de $1 - g_i$ l'agent est socialement influencé par les autres agents selon un modèle classique. Par cette variation, le modèle classique devient

$$x_i(t+1) = g_i x_i(0) + (1 - g_i) (a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t)).$$

Où, la notation matricielle,

$$x(t+1) = Gx(0) + (I - G)Ax(t) \dots\dots (FJ).$$

Pour $t \in T$.

Ici G est la matrice diagonale avec le g_i dans la diagonale, tel que $0 \leq g_i \leq 1$, et I est la matrice d'identité.

Bien évidemment (GM) est un cas particulier de (FJ) , à savoir pour $g_i = 0, 1 \leq i \leq n$. Ce modèle a été utilisé pour estimer à partir des expériences la sensibilité des agents à l'influence interpersonnelle (French 1956).

Un modèle semblable à (GM) mais en temps continu, c-à-d système d'équations différentielles au lieu d'équations de différence, a été exploré et appliqué assez tôt par (Abelson 1964). Bien qu'il existe des similitudes dans la recherche de consensus entre les agents, nous nous en tiendrons au temps discret.

Les modèles (GM) et (FJ) , ainsi que le modèle d'Abelson, sont tous deux linéaires qui les rend systématiquement tractables par des méthodes analytiques.

Le type suivant de modèle est encore linéaire mais variable dans le temps, c-à-d :

$$x(t+1) = A(t)x(t) \dots\dots (TV).$$

Pour $t \in T$.

Où, les entrées de la matrice $A(t)$, c-à-d les poids, dépendent uniquement du temps. Le modèle de variante de temps (TV) décrit par exemple, " le durcissement des positions", où les agents mettent en jeu de plus en plus de poids sur leur propre opinion et moins de poids sur l'opinion des autres.

Dans la section suivante, on montrera que les résultats analytiques sont encore disponibles, même pour les opinions de «dimension supérieure», mais les résultats sont moins prononcés que dans le modèle classique invariant dans le temps.

Le type le plus difficile de modèle se produit si les poids dépendent des opinions elles-mêmes parce que le modèle tourne d'un linéaire à non linéaire. Ainsi, le modèle est de type (GM) où $A(x(t))$ ne dépend pas explicitement du temps. Il est encore complètement désespéré d'analyser le modèle dans ce généralité. Il existe cependant un certain type de non linéarité qui saisit un aspect important de la réalité et qui semble à la fois traitable. Mais, par rapport aux autres modèles, les analyses ne sont pas si faciles à obtenir. Le modèle que nous allons exposer dépend de la confiance entre les agents dans le sens suivant. Un agent i ne prend en compte que les agents j dont les opinions diffèrent de ses propres pas plus d'un certain niveau de confiance ε_i .

Fixer un agent i et un profil d'opinion $x = (x_1, \dots, x_n)$ cet ensemble d'agents est donné par $I(i, x) = \{1 \leq j \leq n \mid |x_i - x_j| \leq \varepsilon_i\}$. Où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel.

Pour rendre la chose pas trop compliquée nous supposons que l'agent i met un poids égal sur tout $j \in I(i, x)$. Nous laissons les poids donnés par $a_{ij} = 0$ pour $j \notin I(i, x)$ et $a_{ij} = |I(i, x)|^{-1}$ pour $j \in I(i, x)$, ($|\cdot|$ pour un ensemble fini désigne le nombre d'éléments). Ainsi, le modèle à confiance limitée est donné par :

$$x_i(t+1) = |I(i, x)|^{-1} \sum_{j \in I(i, x(t))} x_j(t) \dots\dots (BC).$$

Pour $t \in T$.

3.1 Resultats analytiques des differents modeles de la dynamique d'opinion

Ce modèle a été développé par (Krause 1997,2000), voir également (Beckmann 1997) et (Dittmer 2000,2001). Pour un autre modèle de tentative de modélisation d'un manque de confiance, voir (Deffuant et al.2000),(Weisbuch et al.2001). Là, dans une comparaison par paires entre agents, «les ajustements d'opinion ne se produisent que lorsque la différence d'opinion est inférieure à un seuil donné»(Deffuant et al.2000),p.2).

3.1 Resultats analytiques des differents modeles de la dynamique d'opinion

Nous présentons ci-après plusieurs résultats majeurs pour les différents modèles.

Certains sont bien connus, d'autres sont moins connus et certains sont de nouveaux résultats.

3.1.1 Le modèle classique :

Le modèle classique (CM) a été donné par :

$$x(t+1) = Ax(t);$$

pour $t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$. Où A est une matrice stochastique. Evidemment, $x(t) = A^t x(0)$ pour tout $t \in T$, et l'analyse consiste à analyser les puissances d'une matrice donnée.

3.1.2 Le modèle Friedkin-Johnsen :

Ce modèle (FJ) a été donné par :

$$x(t+1) = Gx(0) + (I - G)Ax(t)$$

pour $t \in T$.

Si $G = 0$ alors (FJ) se spécialise au modèle classique et il suffit de discuter $G \neq 0$.

3.1.3 Le modèle variant dans le temps :

Le modèle avec la variance de temps (TV) a été donné par :

$$x(t+1) = A(t)x(t);$$

pour $t \in T$. Où les poids collectés dans la matrice A dépendent du temps t . Comme on peut s'y attendre du modèle classique, la variance du temps n'empêchera pas un consensus tant que les pondérations resteront suffisamment positives. Si, cependant, les pondérations tendent à zéro très rapidement, le consensus disparaît. Ce phénomène intéressant que nous illustrons par un exemple simple qui fonctionne déjà pour un groupe de deux agents. Supposons que l'agent 1 ne se soucie jamais de l'opinion de l'agent 2. Dans un premier scénario, laisser un agent 2 placer à l'instant t , pour $t \geq 2$, le poids t^{-1} à l'agent 1 et le poids restant $1 - t^{-1}$ à lui-même. Ainsi, l'opinion de l'agent 2 se durcit en mettant de moins en moins de poids à l'agent 1. Il n'est pas difficile de vérifier que $x_2(t) = (1 - t^{-1})x_1(2) + t^{-1}x_2(2)$, et à cause de $x_1(t) = x_1(0)$ pour tout t , que $x_2(t)$ tend vers $x_1(0)$.

Par conséquent, les deux agents se rapprochent toujours d'un consensus malgré le durcissement des positions.

Dans un deuxième scénario, laisser l'agent 2 durcir sa position plus rapidement, en mettant à l'instant t , pour $t \geq 2$, le poids t^{-2} à l'agent 1 et $1 - t^{-2}$ à lui-même. Un petit calcul montre que $x_2(t)$ tend vers $1/2(x_1(2) + x_2(2))$, et bien sûr, $x_1(t) = x_1(0)$ pour tout t . Ainsi, pour de nombreux profils initiaux, un consensus ne sera pas abordé. Ce petit exemple montre que l'approche d'un consensus dépend de la vitesse avec laquelle les poids changent (cf. Cohen, 1986). Ce constat vague est rendu plus précis par le résultat suivant.

3.1.4 Dynamiques des opinions avec la confiance bornée :

Le modèle (BC) a été donné par :

$$x_i(t+1) = |I(i, x(t))|^{-1} \sum_{j \in I(i, x(t))} x_j(t).$$

pour $t \in T$. Où $I = \{1 \leq j \leq n, |x_i - x_j| \leq \varepsilon_i\}$. Et $\varepsilon_i \geq 0$ est le rayon du voisinage donné qui détermine le niveau de confiance de l'agent i . Bien que certaines propriétés restent vérifier pour différents niveau de confiance, nous allons supposer que $\varepsilon_i = \varepsilon = cte$ pour tous les agents i . Plus tard, nous allons considérer non seulement les intervalles de confiance symétriques, c-à-d, $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ les intervalles de confiance antisymétriques, c-à-d, $[-\varepsilon_l, +\varepsilon_r]$ où $\varepsilon_l = \varepsilon_{left}$, $\varepsilon_r = \varepsilon_{right}$ sont positifs et $\varepsilon_l \neq \varepsilon_r$.

L'ensemble I dans le cas asymétrique est donné par :

$$I(i, x) = \{1 \leq j \leq n, -\varepsilon_l \leq x_j - x_i \leq \varepsilon_r\}.$$

Dans le cas antisymétrique $\varepsilon_l \neq \varepsilon_r$, on peut avoir une division unilatérale entre deux agents i et j , à savoir $\varepsilon_l \leq x_j - x_i \leq \varepsilon_r$ si $\varepsilon_l \leq \varepsilon_r$ et $\varepsilon_r \leq x_j - x_i \leq \varepsilon_l$ si $\varepsilon_r \leq \varepsilon_l$. Dans un fractionnement unilatéral, un agent (i si $\varepsilon_l \leq \varepsilon_r$ et j si $\varepsilon_r \leq \varepsilon_l$) prend en compte l'autre agent (j et i respectivement), mais pas l'inverse. Les niveaux de confiance $\varepsilon_l, \varepsilon_r$ servent de paramètres du modèle et l'ensemble des valeurs possibles de $(\varepsilon_l, \varepsilon_r)$ est appelé l'espace des paramètres. Une caractéristique particulière de ce modèle, par rapport aux autres modèles discutés, est qu'un consensus sera atteint en temps fini, s'il y a consensus.

Pour un profil d'opinion $x = (x_1, \dots, x_n)$, nous disons qu'il y a ici une division entre les agents i et j si $|x_i - x_j| \geq \varepsilon$.

Un profil d'opinion $x = (x_1, \dots, x_n)$ que nous appelons ε -profil s'il existe un ordre $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}$ des opinions telles que deux opinions adjacentes sont confidentielles, c-à-d :

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \leq \varepsilon$$

pour tout $1 \leq k \leq n - 1$.

Tout d'abord, nous recueillons certaines propriétés fondamentales de ce modèle pour le cas $\varepsilon_l = \varepsilon_r$.

Propriétés :

1. La dynamique ne change pas l'ordre des opinions, c-à-d $x_i(t) \leq x_j(t)$ pour tout $i \leq j$ implique $x_i(t+1) \leq x_j(t+1)$, pour tout $i \leq j$.
2. Si une scission entre deux agents se produit à un certain moment, il restera une scission pour toujours.
3. Si pour un premier profil un consensus est approché, le profil d'opinion doit être un ε -profil pour tous les temps.
4. Pour $n = 2, 3, 4$ un consensus est approché si et seulement si le profil initial est un ε -profil. La propriété (4) n'est plus vraie pour $n = 5$. C-à-d, pour cinq agents, il peut arriver qu'ils n'approchent pas d'un consensus bien que leurs opinions initiales soient proches dans le sens d'un ε -profil. Si, cependant, le profil initial est un ε -profil équidistant, c-à-d que la distance

3.1 Resultats analytiques des differents modeles de la dynamique d'opinion xxi

entre les opinions adjacentes est exactement ε , alors pour un nombre de cinq agents, un consensus sera approché. Un examen minutieux montre que pour un certain nombre de six agents, même dans le cas d'un ε -profil équidistant, un consensus ne peut pas être atteint. Ces remarques indiquent que le nombre d'agents impliqués peut varier dynamiquement.

Pour le cas le plus simple de deux agents, il n'est pas difficile de donner une analyse complète de la dynamique.

Pour un n arbitraire, cependant, l'analyse mathématique de la dynamique s'avère être assez difficile et jusqu'à présent il n'y a que quelques résultats généraux disponibles. Pour cette raison nous présenterons une analyse approfondie de ce modèle pour les valeurs plus élevées de n par simulation informatique.

Parmi les quelques résultats généraux nous présentons deux fondamentaux.

Resultat 1 : Sur le consensus pour une confiance limitée

Le consensus sera abordé pour un profil d'opinion initial donné, pourvu d'une suite équidistante des points de temps, la propriété suivante tient : pour deux agents quelconques i et j il existe un troisième k tel qu'une chaîne de confiance mène de i à k ainsi que de j à k . Dans ce cas, le consensus est atteint en temps fini.

Resultat 2 : Sur la fragmentation de l'opinion pour la confiance limitée

Pour tout profil initial donné, il existe un $t^* \in T$ fini et une division de tous les agents en maximal sous-groupe tels que, dans chacun des sous-groupes, il existe un consensus pour tout $t \geq t^*$. (Bien sûr, ces consensus partielles seront différentes les unes des autres en général.).

Consensus avec un leader

De même, comme dans [9] on peut énoncer la condition nécessaire pour parvenir à un consensus par le modèle de type Hrgselmann-Krause à ordre fractionnaire.

Théorème 4.0.1 *Si le modèle de type Hrgselmann-Krause à ordre fractionné donné par (10) atteint un consensus, alors le profil d'opinion $x(k)$ est un profil ε pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.*

Preuve. □

Étant donné que pour les systèmes d'ordre fractionné, la mémoire du système apparaît, la preuve sera présentée ici.

Nous tenons à souligner qu'il est fait par analogie avec la preuve du théorème (4.0.1) donnée dans [7].

Donnez-nous la preuve par contradiction et supposons que le modèle de type Hrgselmann-Krause à ordre fractionnaire donné par (10) atteint un consensus et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $x(k_0)$ ne soit pas un ε -profil.

En relabellant les composantes de $x(0)$, nous pouvons supposer que $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$. Et par conséquent, par la proposition (2.0.5) $x_1(k) \leq x_2(k) \leq \dots \leq x_n(k)$, pour $k \in \mathbb{N}_0$. Observez que, par hypothèse, nous obtenons $x_{r+1}(k_0) - x_r(k_0) \geq \varepsilon$ pour certains $r \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Maintenant, supposons que $x_{r+1}(s) - x_r(s) \geq \varepsilon$ pour $s = k_0, \dots, l$.

Soit $M_{A_r(k)}$ être le moyen arithmétique de l'ensemble $A_r(k)$ Défini par (13).

En utilisant à nouveau les propriétés de l'arithmétique, on peut montrer que si $x_{r+1}(l) - x_r(l) \geq \varepsilon$, alors $M_{A_r(l)} \leq \max \{x_p(l) : p \in \mathbb{N} \wedge x_p(l) \leq x_{r+1}(l)\}$ et $\min \{x_p(l) : p \in \mathbb{N} \wedge x_r(l) \leq x_p(l)\} \leq$

$M_{A_{r+1}(l)}$, voir par exemple lemme 2 de [7]. Observez cela $\max \{x_p(k_0) : p \in \mathbb{N} \wedge x_p(k_0) \leq x_{r+1}(l)\} = x_r(l)$ et $\min \{x_p(k_0) : p \in \mathbb{N} \wedge x_r(l) \leq x_p(l)\} = x_{r+1}(l)$. On a

$$M_{A_r(l)} \leq x_r(l) \text{ et } x_{r+1}(l) \leq M_{A_{r+1}(l)}. \text{ Alors : } x_{r+1}(l+1) - x_r(l+1) = M_{A_{r+1}(l)} - M_{A_r(l)} + \sum_{s=0}^l |a_{l+1-s}^{(\alpha)}| (x_{r+1}(p) - x_r(p)) \geq M_{A_{r+1}(l)} - M_{A_r(l)} \geq x_{r+1}(l) - x_r(l) \geq \varepsilon.$$

Par conséquent, selon le principe d'induction, nous obtenons $x_{r+1}(k) - x_r(k) \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$. Cela montre qu'un consensus ne peut être atteint et cela contredit l'hypothèse.

Du théorème (4.0.1) on peut formuler la propriété suivante qui est utilisée plus tard dans les épreuves.

Corollaire 4.0.1 *On a $x_{r+1}(l) - x_r(l) \geq \varepsilon \Rightarrow x_{r+1}(l) \geq x_r(l) + \varepsilon$, et $M_{A_r(l)} \leq \max \{x_p(l) : p \in \mathbb{N} \wedge x_p(l) \leq \frac{\sum_{x_p \in A_r(l)} x_p(l)}{|A_r(l)|}\}$*

$A_r(l) = \{x_p(l) \mid p \in \mathbb{N} \setminus \{r\} \mid |x_p(l) - x_r(l)| \leq \varepsilon\}$ donc, $x_r - \varepsilon \leq x_p \leq x_r + \varepsilon \leq x_{r+1}$,

$$\text{Alors, } M_{A_r(l)} = \frac{\sum_{x_p \in A_r(l)} x_p(l)}{|A_r(l)|} \leq \frac{\sum_{x_p \in A_r(l)} \max x_p(l)}{|A_r(l)|} = \max x_p \left(\frac{|A_r(l)|}{|A_r(l)|} \right) \leq x_{r+1}.$$

S'il existe $k \in \mathbb{N}_0$ de telle sorte que le profil d'opinion $x(k)$ ne soit pas ε -profil, alors le modèle de type Hegselmann-Krause à ordre fractionnaire donné par (10) n'atteint pas un consensus. Maintenant et plus tard, nous indiquerons et prouverons les conditions suffisantes qui garentissent un consensus pour le système (10).

Proposition 4.0.1 *Soit $x(0)$ être un ε -profil et $e(k) := x_n(k) - x_1(k)$, où $x_1(k) \leq x_2(k) \leq \dots \leq x_n(k)$ pour $k \in \mathbb{N}_0$. Si dans le modèle de type Hegselmann-Krause à ordre fractionné donné par (10), il existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $e(k_0) \leq \varepsilon$, alors le système (10) atteint un consensus.*

Preuve. □

En relabellant les composantes de $x(0)$, nous pouvons supposer que $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$ et par conséquent, par la proposition (2.0.5) $x_1(k) \leq x_2(k) \leq \dots \leq x_n(k)$ pour $k \in \mathbb{N}_0$.

Observez que pour $k \geq k_0$, nous avons

$$(\Delta^\alpha e)(k+1) = 0 \dots (16).$$

Ensuite, prenant la Z -transformation des deux côtés de (16), nous obtenons

$Z^{k_0} [z (1 - \frac{1}{z})^\alpha E(z) - ze(k_0)] - \sum_{s=0}^{k_0-1} z^{k_0-s} e(s) = 0$. où $E(z) = Z[e(k)](z)$. Par conséquent

$E(z) = (1 - \frac{1}{z})^\alpha e(k_0) + \sum_{s=0}^{k_0-1} (1 - \frac{1}{z})^\alpha z^{-s-1} e(s)$. Par conséquent

$e(k) = a_k^{(-\alpha)} e(k_0) + \sum_{s=0}^{k_0-1} a_{k-s-1}^{(-\alpha)} e(s)$ pour $k \geq k_0$. Depuis $\alpha \in [0, 1[$, Par Corrolaire 3 on obtient $\lim_{l \rightarrow \infty} e(l) = 0$.

Corollaire 4.0.2 *Soit $0 \leq x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$. Si $e(0) := x_n(0) - x_1(0) \leq \varepsilon$, Alors le modèle de type Hegselmann-Krause à ordre fractionnaire donné par (10) atteint un consensus.*

Remarquer cela si le profil d'opinion $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ est un ε -profil, puis pour

$x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$, nous avons

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{x_n(0) - x_1(0)} = \frac{\varepsilon}{e(0)} \dots (17).$$

Corollaire 4.0.3 *Si $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$ et $x_n(0) - x_1(0) \geq (n-1)\varepsilon$, puis $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ n'est pas un ε -profil et par conséquent, par théorème (4.0.1), le modèle de type Hegselmann-Krause à ordre fractionnaire donné par (10) n'obtient pas le consensus.*

Systèmes avec deux agents

Remarquez que pour $n = 1$ le consensus du système (10) est atteint par le définition (2.0.3). Formons la condition pour atteindre le consensus dans le modèle considéré (10) dans le cas particulier de $n = 2$ agents.

Soit $\varepsilon \geq 0$ et $n = 2$. Le système (10) atteint le consensus si et seulement si $|x_1(0) - x_2(0)| \leq \varepsilon$, c-à-d $(x_1(0), x_2(0))$ est un ε -profil. La nécessité découle du théorème (4.0.1). Par conséquent, nous devons prouver la suffisance. Si $x_1(0) \geq x_2(0)$ et $x_1(0) - x_2(0) \leq \varepsilon$ alors, $x_1(1) - x_2(1) = \alpha(x_1(0) - x_2(0)) \leq \varepsilon$.

Soit $e(k) := x_1(k) - x_2(k)$. Alors pour $e(0) \leq \varepsilon$ la dynamique de $e(k)$ peut être écrit comme $(\Delta^\alpha e)(k+1) = 0$. Alors ensuite, par le corollaire (1.01), nous obtenons $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$ et le système atteint un consensus avec un seul leader.

4.1 Exemple numériques

Exemple 4.1.1 Nous présentons des situations pour $n = 2$ agents. On présente des trajectoires directes et leur normalisation pour l'ordre différent $\alpha \in]0, 1[$.

(a) D'abord, nous analysons le chemin du consensus pour les systèmes avec l'ordre $\alpha = 0.1$ et avec la différence $|x_1(0) - x_2(0)| \leq \varepsilon$, voir Figure 1.

(b) Pour les commandes supérieures, il n'y a pas de différence de prestige dans le comportement des solutions pour les deux agents. Figure 2 nous faisons cela pour $\alpha = 0.99$.

En fait, sur le graphique avec des trajectoires directes, nous ne voyons aucune différence au sein d'eux. En fait, nous observons qu'il y a un consensus par limite et il est souligné la Figure 2.

(c) Maintenant, nous choisissons de nouveau $\alpha = 0.1$ et la différence $|x_1(0) - x_2(0)| \geq \varepsilon$. Ensuite, dans le cas de la Figure 3 on voit que les trajectoires ne convergent pas vers un leader

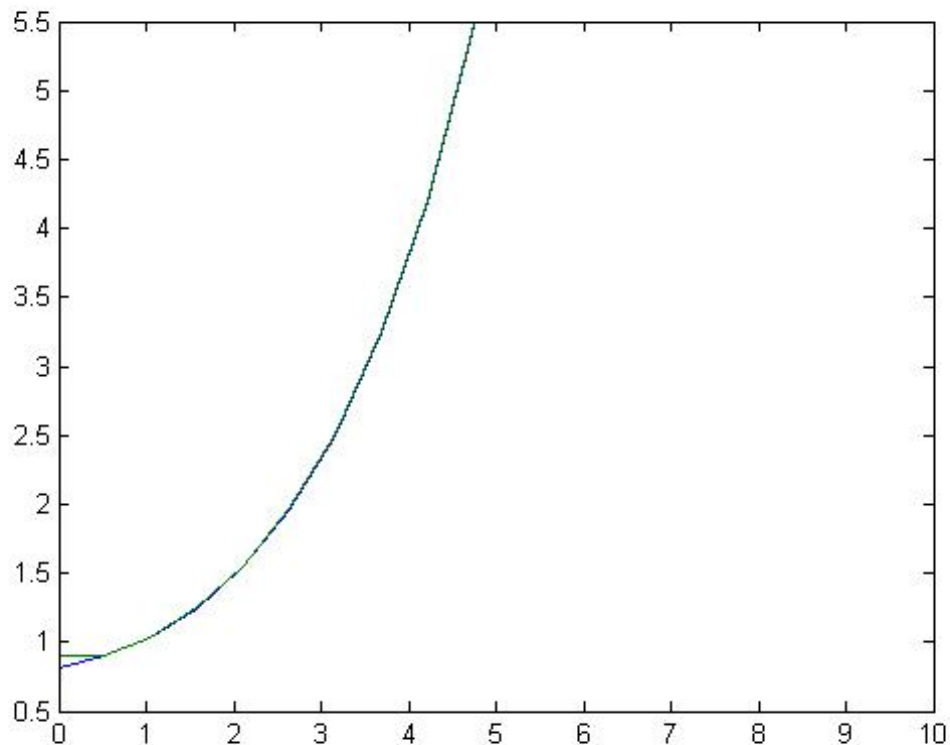


Figure. 1. La solution du problème de valeur initiale pour le système (10) avec la condition initiale $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ – vecteur avec des valeurs de $[0, 1]$ et différence $|x_1(0) - x_2(0)| \leq \varepsilon$, $\alpha = 0.1, T = 10$ pas, $n = 2$ agents.

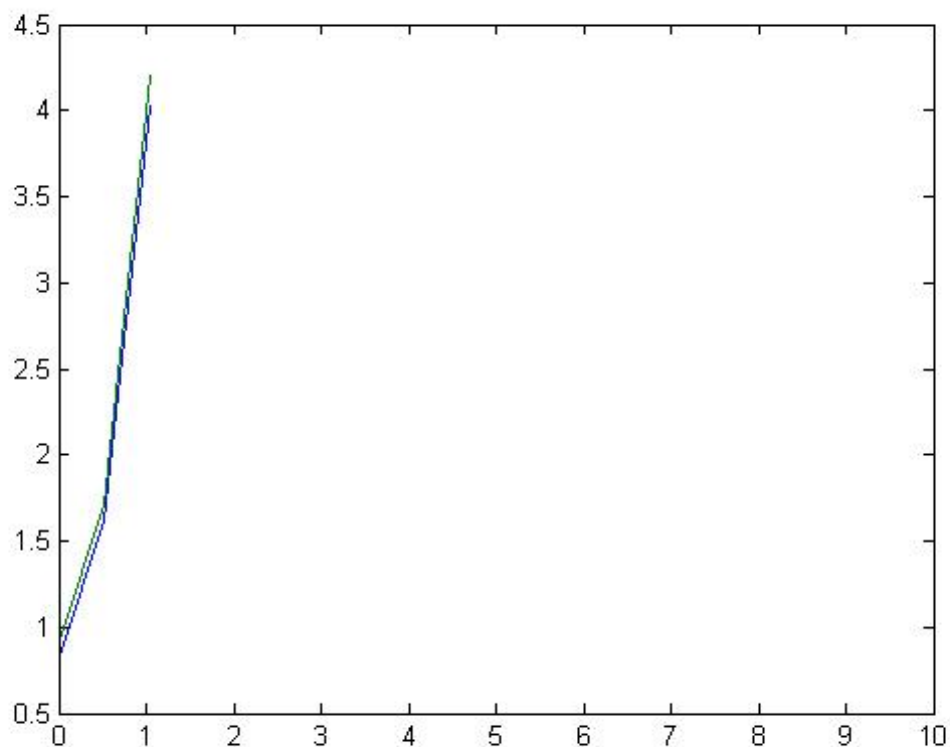


Figure. 2. La solution de la valeur initiale progresse pour le système (10) avec la condition initial $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ – vecteur avec valeurs de $[0, 1]$, et différence $|x_1(0) - x_2(0)| \leq \varepsilon$, $\alpha = 0.99; T = 10$ pas, $n = 2$ agents.

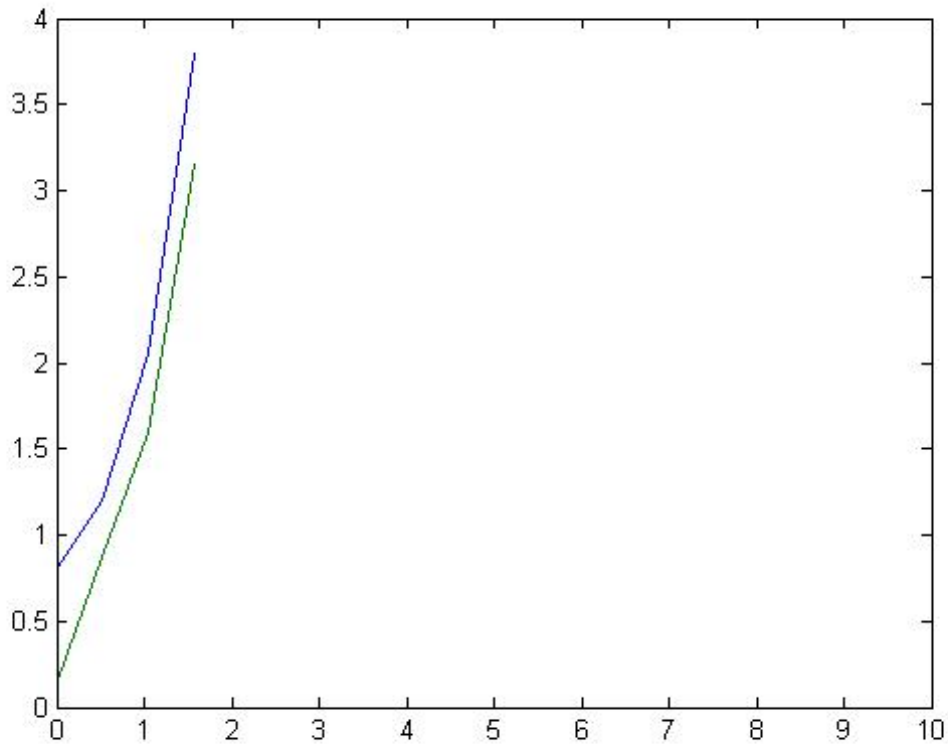


Figure. 3. La solution de la valeur initiale progresse pour le système (10) avec la condition initiale $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ – vecteur avec des valeurs de $[0, 1]$, et différence $|x_1(0) - x_2(0)| \geq \varepsilon$, $\alpha = 0.1, T = 10$ pas, $n = 2$ agents.

4.2 systèmes multi-agents

Pour $n \geq 5$ la condition sur $x(0)$ être un ε -profil est seulement nécessaire mais pas suffisant pour atteindre un consensus de leader pour tout $\alpha \geq 0$ par le système donné par (10). Fixons $\varepsilon = 1$. Ensuite, nous pouvons calculer cela

$$x_1(1) = 1.495 + \alpha$$

$$x_2(1) = 1.99 + 1.99\alpha$$

$$x_3(1) = \frac{3.97n-6.94}{n-1} + 2.98\alpha$$

$$x_i(1) = \frac{3.97n-8.94}{n-2} + 3.97\alpha, i \geq 4.$$

Alors $x_3(1) - x_2(1) = \frac{1.98n-4.85}{n-1} + 0.99\alpha \geq 1$ pour tout $\alpha \geq 0$ pour ce qui est de $n \geq 5$ la valeur $\frac{1.98n-4.85}{n-1} \geq 1$. Cela signifie que $x_1(1)$ n'est plus un ε -profil. Et par théorème(4.0.1), le consensus n'est pas atteint.

Exemple 4.2.1 *Considérons les systèmes de la forme (10) avec $n = 50$ agents. Notez que les valeurs de départ $x_i(0) \in [0, 1]$. Tout d'abord, prenons $\alpha = 0.1$, voir les Figure.5 et 6. Sur la Figure.5 il y a quatre leaders pour $\varepsilon = 0.1$ (voir figure5(a)) et trois leaders pour $\varepsilon = 0.2$ (voir figure5(b)). Notez que pour $\alpha = 0.1$ et $\varepsilon = 0.3$, nous avons deux leaders, voir Figure.6(a) tandis que pour $\varepsilon = 0.315$, le consensus est atteint, voir la Figure.6 (b). Observez que, à la Figure.6 Nous devons prendre d'autres mesures pour voir le comportement limité avec deux leaders. De plus, pour $\varepsilon \geq 0.315$ nous avons un leader. Pour les systèmes d'ordre supérieur, il n'y a pas beaucoup de changements, mais pour soutenir des systèmes avec peu de leaders, nous devons avoir un peu plus grand ε . Par exemple, pour $\alpha = 0.5$, nous présentons des graphiques pour $\varepsilon = 0.6$ et $\varepsilon = 0.61$ (figure7) et nous pouvons avoir peu de leaders, voir la Figure.7 (a) ou un seul chef, voir Figure.7 (b) où cela dépend des avis de départ.*

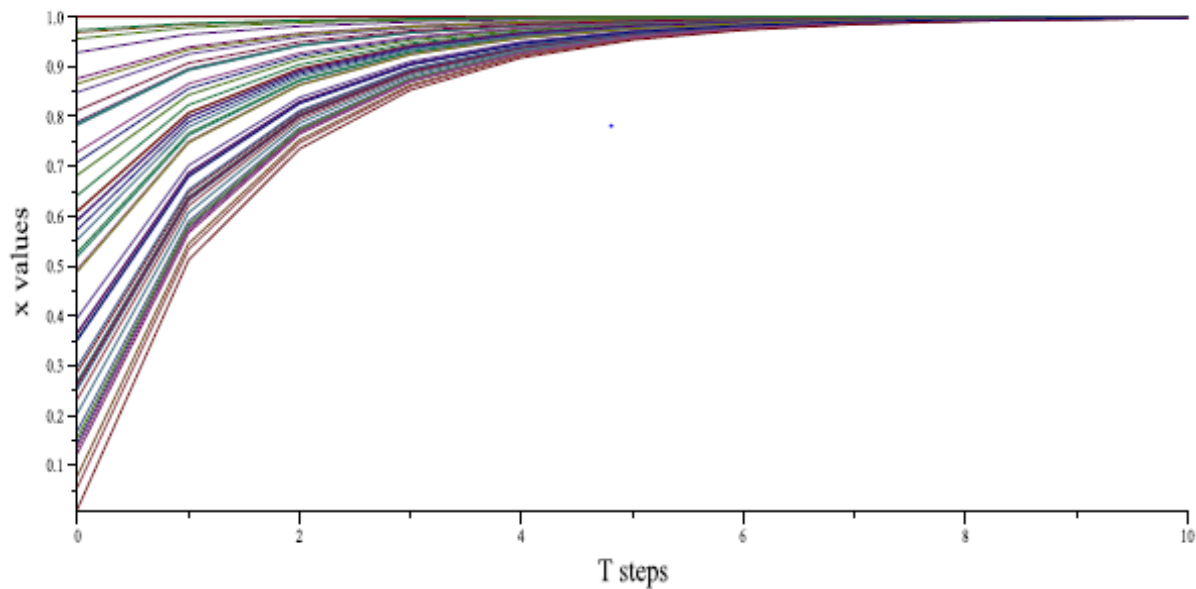
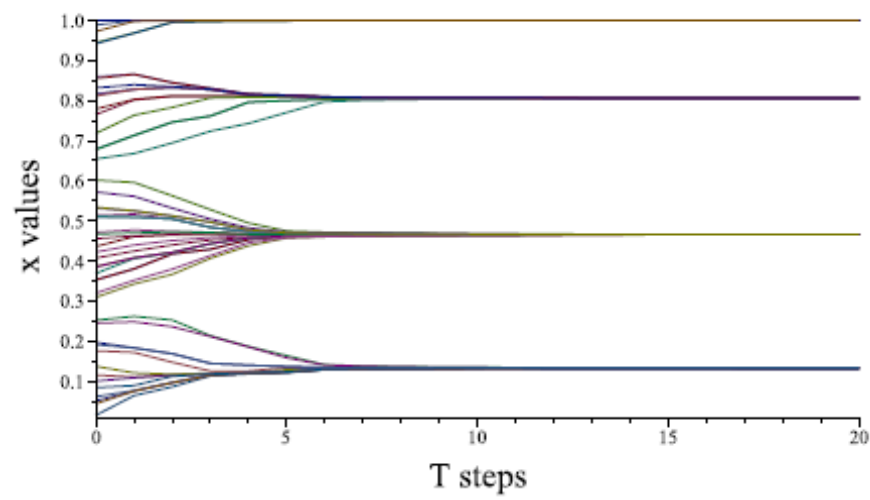
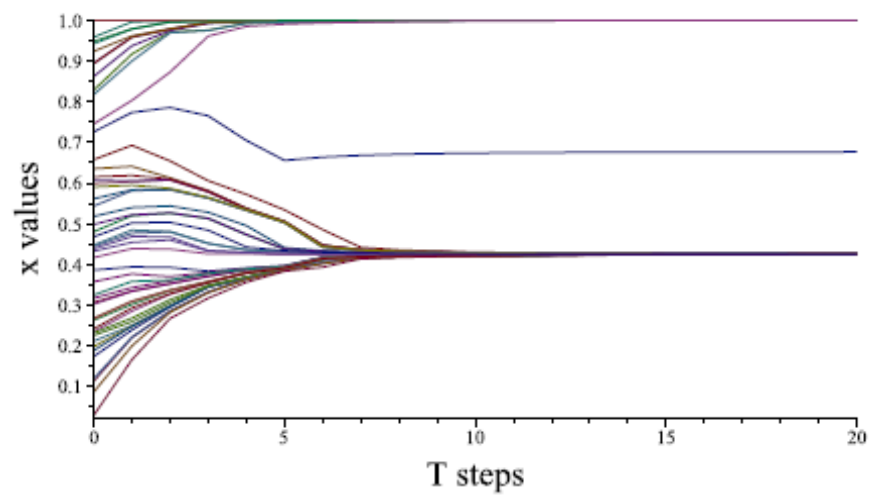


Figure.4 . La résolution normale de la valeur initiale est un problème pour le système (10) avec la condition initiale $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_{50}(0))$ -un vecteur aléatoire de $[0, 1]$ étant $\varepsilon = 1$ -profil, $\alpha = 0.5$, $T = 20$ pas, $n = 50$ agents.

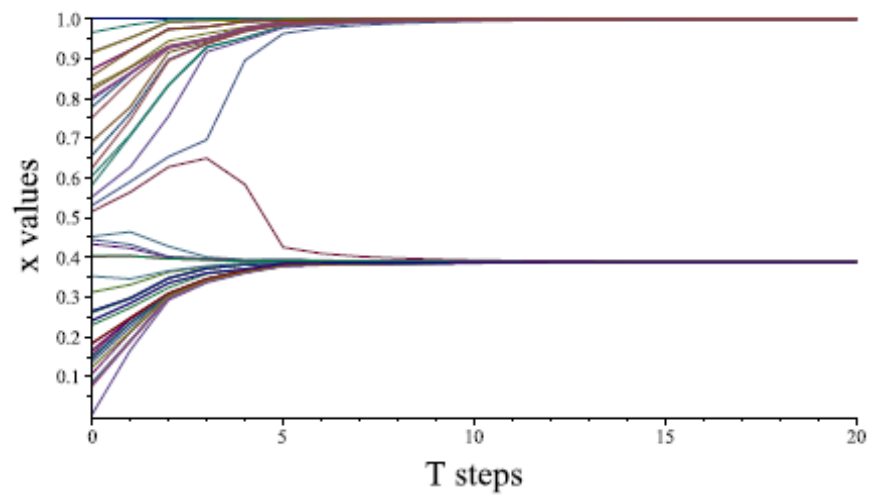


$$(a) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.1$$

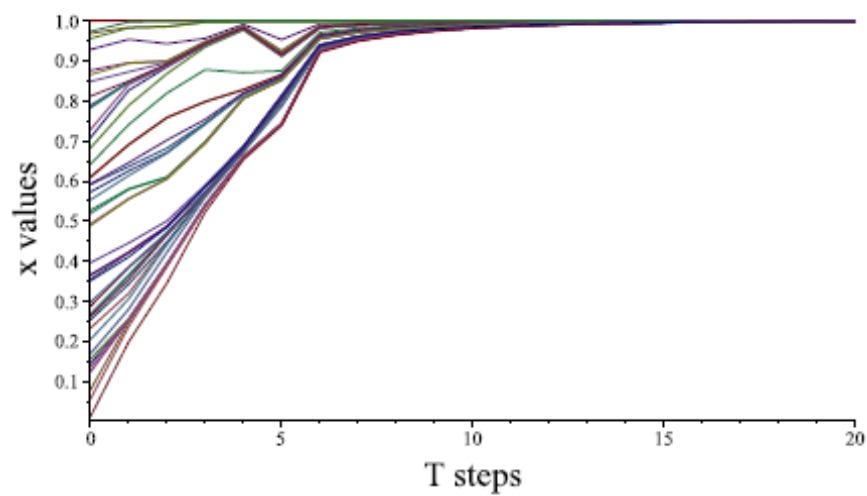


$$(b) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.2$$

Figure.5 . La solution de la valeur initiale provoque le système (10) avec la condition initiale $x(0)$ –vecteur d’ordre de $[0, 1]$, $\alpha = 0.1$, $T = 20$ pas, $n = 50$ agents.agents.

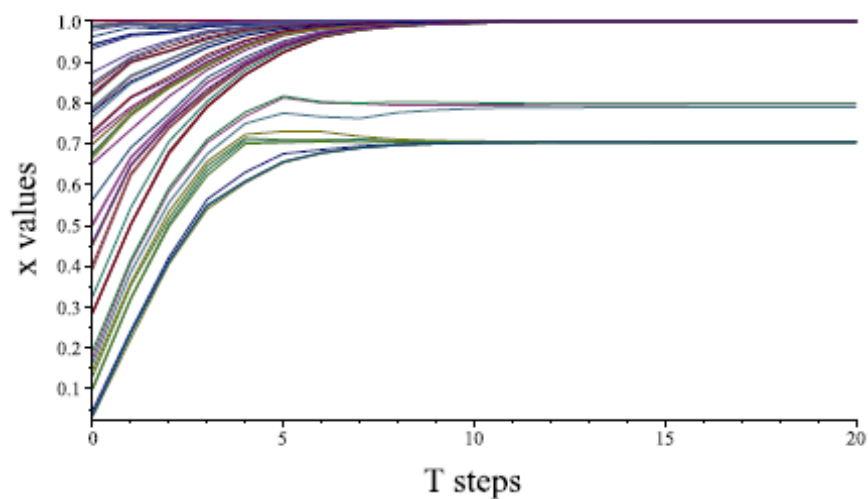


$$(a) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.3$$

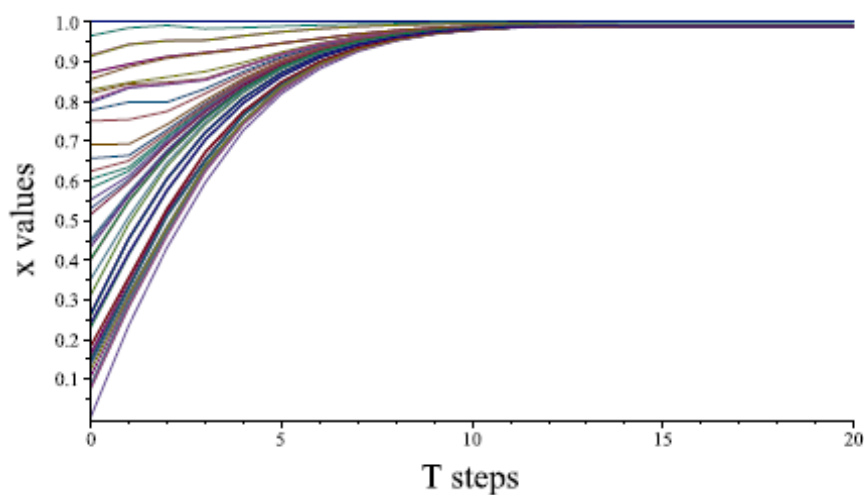


$$(b) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.316$$

Figure. 6. La résolution normale de la valeur initiale provoque le système (10) avec la condition initiale $x(0)$ –vecteur d'ordre de $[0, 1]$ $\alpha = 0.1$, $T = 20$ pas, $n = 50$ agents.



$$(a) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.6$$



$$(b) \quad y = \frac{x(k)}{x_n(k)}, \quad \epsilon = 0.61$$

Figure.7. La résolution normale de la valeur initiale provoque le système (10) avec la condition initiale $x(0)$ – vecteur d’ordre de $[0, 1]^\alpha = 0.5$, $T = 20$ pas, $n = 50$ agents.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le travail, nous étudions le problème de consensus suivant le leader des systèmes à temps discret multi-agents à ordre fractionnaire avec l'opérateur de différence de type Grünwald-Litnikov. Nous formulons les conditions suffisantes et nécessaires pour atteindre le consensus par les systèmes considérés. Dans le système, les interactions entre les opinions sont définies comme dans les modèles classiques de Hegselmann-Krause, mais la mémoire est incluse en prenant l'opérateur de temps discret à ordre fractionnaire sur le côté gauche du système linéaire.

Dans le système, les interactions entre les opinions sont définies comme dans les modèles classiques de Hegselmann-Krause, mais la mémoire est incluse en prenant l'opérateur de temps discret à ordre fractionnaire sur le côté gauche.

Les différents modèles pour la dynamique des opinions de l'ordre fractionnaire du temps discret sont étudiés par des méthodes analytiques ainsi que par des simulations informatiques.

Bibliographie

- [1] R.L.Winkler, The consensus of subjective probability distributions, *Manag.Sci.* 15(2)(1968),B61-B75.
- [2] M.H. DeGroot, Reaching a consensus, *J.Am.Stat.Assoc.* 69(345)(1974)118-121.
- [3] J.R.P.French, A formal theory of social power, *Psychol.Rev.* 63(1956)181–194.
- [4] N.E.Friedkin, E.C.Johnsen, Social influence networks and opinion change, in : *Advances in Group Processes*, vol. 16, 1999, pp.1–29.
- [5] T.Fujimoto, A simple model of consensus formation, *Okayama Econ.Rev.* 31(1999)95-100.
- [6] U.Krause, Soziale dynamiken mit vielen interakteuren.eine problemskizze, in : U.Krause, M.Stöckler (Eds.), *Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren*, Universität Bremen, Bremen, 1997, pp.37-51.
- [7] U.Krause, A discret enonlinear and non-autonomous model of consensus formation, in : *Proceedings of Communications in Difference Equations*, 2000, pp. 227–236.
- [8] R. Hegselmann, U.Krause, Opinion dynamics and bounden confidence models analysis, and simulations, *J.Artif. Soc. Soc. Simul.* 5(3)(2002)227–236.
- [9] V.D. Blondel, J.M.Hendrickx, F.N.Tsitsiklis, On Krause’s multi-agent consensus model with state -dependent connectivity, *IEEE Trans.Autom.Control* 5(11)(2009)2586–2597.
- [10] G.Wen, J.Huang, C.Wang, Z.Chen, Z.Peng, Group consensus control for heterogeneous multiagent systems with fixe and switching topologies, *Int.J.Control* 89(2)(2016)259–269, <http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2015.1072876>.

-
- [11] G.Wen,Y.Yu,Z.Peng,H.Wang,Dynamical group consensus of heterogenous multi-agent systems with input time delays, *Neurocomputing*175(2016)278–286, <http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2015.10.060>.
- [12] G.Wen,Z.Peng,A.Rahmani,Y.Yu,Distributed leader-following consensus for second-order multi-agent systems with nonlinear inherent dynamics,*Int.J.Syst. Sci.*45(9)(2014)1892–1901, <http://dx.doi.org/10.1080/00207721.2012.757386>.
- [13] R.L. Bagley,P.J.Torvik,Fractional calculus—a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAAJ.*21(5)(1983)741–748.
- [14] R.L. Bagley,P.J.Torvik,A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *J.Rheol.*27(3)(1983)201–210.
- [15] R.L. Bagley,P.J.Torvik,On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *J.Rheol.*30(1)(1986)133–155.
- [16] L.Hongjie,Observer-type consensus protocol for a class of fractional-order uncertain multiagent systems, *Abstr. Appl. Anal.* 2012(2012)18, <http://dx.doi.org/10.1155/2012/672346>.
- [17] J.Bai,G.Wen,A.Rahmani,X.Chu,Y.Yu,Consensus with a reference state for fractional-order multi-agent systems, *Int. J. Syst.Sci.*47(1)(2015)222–234,<http://dx.doi.org/10.1080/00207721.2015.1056273>.