Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mostaganem - Abdelhamid ibn Badis (UMAB)

◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème :

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Introduction à la théorie d'unicité des fonctions méromorphes

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Présenté par :
SERRADJ Sid Ahmed

Soutenue devant le jury composé de :

Président	:	Dr Belaïdi Benharrat	Professeur	UMAB
Examinateur	:	Dr Andasmas Maamer	MCB	UMAB
Encadreur	:	Dr Latreuch Zinelaâbidine	MCB	UMAB

Mai 2017

Remerciement

Tout d'abord

Je remercie Allah pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour m'avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail.

Je ne peux exprimer par les mots :

Le sens de mes remerciements pour ma mère et mon père : que serais-je sans leurs permanents soutiens dans ma vie.

Je remercie ensuite

Dr Latreuch Zinelaâbidine pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire. Que mes profondes reconnaissances vont vers lui.

Mes gratitudes et mes remerciements

Pour le professeur B. Belaïdi, pour avoir accepter de présider le Jury de la soutenance. Aussi, je remercie le docteur M. Andasmas le membre de jury qui a accepté d'éxaminer le tavail.

Ainsi que pour

L'ensemble des enseignants qui m'ont encadré soutenus et encouragés durant ma formation et par qui j'ai appris à apprécier les mathématiques.

Merci à

Toute personne m'ayant aidé, soutenue, ou encouragé de prés ou de loin.

Serradj

Table des matières

Introduction

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équation différentielles complexes notammenent la croissance et l'oscillation des solution. En effet dpuis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans le même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielle.

Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir

Ce mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction à la théorie de R.Nevanlinna, dans lequel on donne des notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre on va prouver quelques résultats connus sur la théorie d'unicité des fonctions méromorphes dans le plan complexe

Le dernier chapitre contient le problème d'unicité des fonctions entières qui partagent deux valeurs finies $a, b \in \mathbb{C}$ avec leurs dérivées.

Chapitre 1

Théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va présenter les notions de base nécéssaire et donner quelques définitions et résultats dont on aura besoin tout au long de notre travail.

1.1 Formule de Poisson-Jensen et Formule de Jensen

Théorème 1.1 ([1, 2], Formule de Poisson-Jensen) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ dans le domaine $|z| < R$ $(0 < R \leq \infty)$ non identiquement nulle, et $a_\lambda(\lambda = 1, 2, ..., h)$ (respectivement $b_\mu(\mu = 1, 2, ..., k)$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors dans le disque $|z| < \rho$ on a*

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta} + z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) d\theta$$
$$- \sum_{\lambda=1}^{h} \ln\left|\frac{\rho^2 - \overline{a_\lambda} z}{\rho(z - a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k} \ln\left|\frac{\rho^2 - \overline{b_\mu} z}{\rho(z - b_\mu)}\right|.$$

0n appelé cette formule la formule de Poisson-Jensen.

Le cas où f n'admet ni zéros ni plôes généralement la formule s'appelle la formule de Poisson. Le cas où $z = 0$ s'appelle la formule de Jensen.

Théorème 1.2 ([1, 5], Formule de Jensen) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_n$) ses zéros (respectivement ses poles) , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \sum_{|b_i|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|<r} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)} \left(\prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right)^{-1}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln|g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} \left(\prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|}\right)^{-1}$$

d'où

$$\ln|g(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, on a

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\theta}}{r(re^{i\theta}-a_j)}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{a_j})}{re^{i\theta}-a_j}\right| = 1$$

et

$$\left|\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\theta}}{r(re^{i\theta}-b_j)}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{b_j})}{re^{i\theta}-b_j}\right| = 1.$$

D'où $\left|g(re^{i\theta})\right| = \left|f(re^{i\theta})\right|$. D'où, on obtient le formule de Jensen.

1.2 Fonction caractéristique de R.Nevalinna

Fonction a-points

Définition 1.1 ([2]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans* *le disque* $|z| \leq t$. *Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par* $n(t, \infty, f)$ *le nombre de pôles de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq t$. *On définit*

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r,$$

où $N(r, f)$ *est appelée la fonction a-points de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq r$.

Fonction de proximité

Définition 1.2 ([2]) *Soit* f *une fonction méromorphe non constante et* a *un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction* f *par*

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \ a \neq \infty$$

et $m(r, f)$ *est appelée fonction de proximité de la fonction* f *au point* a.

Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Définition 1.3 ([2]) *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f *par*

$$T(r, \infty, f) = T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1 *Pour la fonction* $f(z) = e^z/z$, *cette fonction admet un pôle simple* $z = 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} N(r, f) &= \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \log r \\ &= \log r \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log r d\theta \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, e^z/z\right) &= m(r, e^z/z) + N(r, e^z/z) \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r + \log r \\ &= \frac{r}{\pi} + \frac{1}{2}\log r. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 ([1]) *Soit f un fonction méromorphe, f est rationnelle si seulement si*

$$T(r,f) = O(\log r).$$

Proposition 1.2 ([1]) *Soit f une fonction méromorphe avec le developpment de Laurent*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).$$

Preuve du proposition 1.2. On Considère la fonction

$$h(z) = f(z)z^{-m},\ z \in \mathbb{C}$$

il est clair que $m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$ et $h(0) \neq 0, \infty$. /a fonctions h et f ont les même pôles et zéros dans le disque $0 < |z| \leq r$. Par la formule de Jensen on obtient

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \log|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|h(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_k|<r} \log\left(\frac{r}{|b_k|}\right) - \sum_{|a_i|<r} \log\left(\frac{r}{|a_i|}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})r^{-m}\right| d\varphi \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + -m\log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + -\left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right]\log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Définition 1.4 *([1]) Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & si\ x > 1, \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\ln x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}, \ \ x \geq 0.$$

Lemme 1.1 ([1]) *On a les propriétés suivantes*

a)

$$\log x \leq \log^+ x$$

b)

$$\log^+ x \leq \log^+ y \ \ (si\ 0 < x < y).$$

c)

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

d)

$$|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}.$$

e)

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

f)

$$\log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

Preuve du lemme 1.1. Montrons $c)$ $d)$ $e)$ et $f)$

$c)$ On a

$$\begin{aligned} \log^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max(\log \frac{1}{x}, 0) \\ &= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0) \\ &= \max(\log x, 0) + \min(\log x, 0) \\ &= \log x. \end{aligned}$$

$d)$ On a

$$\begin{aligned} \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0) \\ &= \max(\log x, 0) - \min(\log x, 0) \\ &= |\log x|. \end{aligned}$$

$e)$ Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, alors l'inégalité est évidente.

Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) &= \log(\prod_{i=1}^{n} x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log x_i . \end{aligned}$$

$f)$ On a d'après $b)$ et $e)$

$$\begin{aligned} \log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) &\leq \log^+(n \max_{1\leq i\leq n} x_i) \\ &\leq \log n + \log^+ \max_{1\leq i\leq n} x_i \\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 ([1]) *Soient f, f_1, f_2, . . . , f_n des fonctions méromorphes. Alors*

$$\begin{array}{lrcl}
a) & m\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} m(r,f_i)+\log n. \\
b) & m\left(r,\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} m(r,f_i). \\
c) & N\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} N(r,f_i). \\
d) & N\left(r,\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} N(r,f_i). \\
e) & T\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} T(r,f_i)+\log n, n\geq 1. \\
f) & T\left(r,\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} T(r,f_i), n\geq 1. \\
g) & T(r,f^n) & = & nT(r,f),\ n\epsilon\mathbb{N}^*.
\end{array}$$

Preuve. Montrons e) f) g)

e) On a si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors il est de degré égale au plus $\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ pour la fonction $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$. Alors

$$N(r,\sum_{i=1}^{n}) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i)$$

et

$$\begin{aligned}
m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \log n \\
&= \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i)+\log n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i)+N(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i)+\log n.
\end{aligned}$$

f) On a

$$\begin{aligned} m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i). \end{aligned}$$

Si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod_{i=1}^{n} f_i$ de degré égale au plus $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Donc

$$N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(m(r,f_i)+N(r,f_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i). \end{aligned}$$

g) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1$. Alors si $|f| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f^n\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0 \\ N(r,f^n) &= nN(r,f) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n)+N(r,f^n) = nN(r,f) \\ &= n(m(r,f)+N(r,f)) = nT(r,f). \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f^n(re^{i\theta})\right| d\theta = n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= nm(r,f) \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f).$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) = n(m(r, f) + N(r, f)) \\ &= nT(r, f) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 *([1]) Si f est une fonction méromorphe non-constante, et si*

$$g = \frac{af + b}{cf + d},$$

tels que a, b, c, et d sont des constantes avec $ad - bc \neq 0$, alors

$$T(r, g) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve. Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af + b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \ln 2 \\ &\leq T(r, f) + \ln^+\left|\frac{a}{d}\right| + \ln^+\left|\frac{b}{d}\right| + \ln 2 \\ &= T(r, f) + O(1) \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af + b}{cf + d} &= \frac{a(f + \frac{b}{a})}{c(f + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c}\frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc - ad}{ac}\frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{f + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af + b}{cf + d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right) \\ &\leq \ln^+\left|\frac{a}{c}\right| + \ln^+\left|\frac{bc - ad}{c^2}\right| + T(r, f + \frac{d}{c}) + \ln 2 + O(1) \\ &\leq T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

■

1.3 Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna

Avant d'énoncer le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna on a besoin d'utiliser les lemmes suivants

Lemme 1.2 *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tels que $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_n| \leq r$.Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{|\alpha j| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha j|}$$

Théorème 1.3 *([1]) **(Premier théorème fondamental)** Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent de $f - a$ $(a \in \mathbb{C})$ à l'origine,*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \epsilon \mathbb{Z}, \quad z \epsilon \mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a)$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Preuve. Montrons le théorème pour $a = 0$, d'après la proposition 1.2 et lemme 1.3 $c)$ on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| \\
&= T(r,f) - \log|c_m| \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,a) = 0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ N(r, h) &= N(r, f-a) = N(r, f). \end{aligned}$$

On a

$$\log^+ |h| = \log^+ |f - a| \leq \log^+ |f| + \log^+ |a| + \log 2. \tag{1.2}$$

$$\log^+ |f| = \log^+ |h + a| \leq \log^+ |h| + \log^+ |a| + \log 2. \tag{1.3}$$

En intégrant (1.2) et (1.3) on aura

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \log^+ |a| + \log 2$$

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f)$, on obtient

$$-(\log^+ |a| + \ln 2) \leq \varphi(r, a) \leq \log^+ |a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

D'après (1.1), on a

$$\begin{aligned} T(r, \frac{1}{f-a}) &= T(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{h}) \\ &= m(r, h) + N(r, h) - \ln |c_m| \\ &= m(r, f) + \varphi(r, a) + N(r, f) - \ln |c_m| \\ &= T(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |c_m|. \end{aligned}$$

Où $\varphi(r, a) \leq \log^+ |a| + \log 2$. ■

Exemple 1.2 *On a*

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{-ie^{2iz} + i}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

D'après propositoion 1.1 on a

$$\begin{aligned} T(r, \tan z) &= T(r, e^{2iz}) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1) \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit : Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$, $T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty$*

1.4 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

Définition 1.5 *[1]) Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3 *La fonction $g(z) = \exp(z^n)$ est d'ordre $\rho(g) = n$ et d'hyper ordre $\rho_2(g) = 0$.*

Exemple 1.4 *Soit $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$, on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(\ln r)$. De plus*

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log r + \log\left(1 + O(\frac{\log r}{r}) - \log \pi\right)}{\log r} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho_2\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln\left[\frac{r}{\pi}+O(\ln r)\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln\frac{r}{\pi}\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\left[\ln r-\ln\pi+\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln r\left[1-\frac{\ln\pi}{\ln r}+\frac{\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r}\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln r+\ln\left[1-\frac{\ln\pi}{\ln r}+\frac{\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r}\right]}{\ln r} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Remarque 1.2 *Si f est d'ordre fini, Alors l'hyper-ordre de cette fonction est nulle.*

Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.6 *([1]) La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,+\infty[$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1,+\infty[$ est définie par

$$L_m(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

Exemple 1.5 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2,6] \cup [7,8] \subset [0,\infty)$ est*

$$m(E) = \int_0^{\infty} \chi_E(t)\,dt = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

Exemple 1.6 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = \mathbb{N}$ est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle.*

Exemple 1.7 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1,5] \subset [1,\infty)$ est*

$$lm(F) = \int_1^{\infty} \chi_F(t)\,\frac{dt}{t} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.7 *([1]) Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right)\log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

1.6 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Afin de prouver le deuxième théorème fondamentale de R. Nevanlinna, on a besoin d'abord du lemme suivant.

Lemme 1.3 *([1]) Soit f une fonction méromorphe non constante sur $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des des nombres complexes finis distincts. Alors l'égalité*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1) \tag{1.4}$$

est vrai pour $0 < r < R$.

Théorème 1.4 *([1]) Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le disque $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors pour $0 < r < R$, on a*

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f), \tag{1.5}$$

où

$$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right), \tag{1.6}$$

et

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1). \tag{1.7}$$

Preuve du thèorème 1.4. Soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j}$$

D'après le lemme 1.2, on a

$$m(r, F) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1), \tag{1.8}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} m(r, F) &\leq m(r, f'F) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r, f'F) + T\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r, f'F) + T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Comme

$$\begin{aligned} T(r, f') &= m(r, f') + N(r, f') \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, f') \\ &\leq T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, f') - N(r, f), \end{aligned} \tag{1.10}$$

il resulte de $(1.7) - (1.9)$ que

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq 2T(r, f) - \left\{2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right\}$$

$$+ m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1),$$

ce cqui complète la preuve du théorème (1.4).

1.7 L'éstimation de $S(r, f)$

Nous avons besoin d'éstimer le terme $S(r, f)$, c'est a dire on a besoin d'étudier la croissance du $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$. dans cette section on va introduire un lemme qui s'apelle le lemme des dérivées logarithmiques .

Lemme 1.4 *([2]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante et pour k un entier positif dans le plan complexe. Si f est d'ordre fini, Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f))), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire ne dépasse pas 2

Définition 1.8 *([2]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe, on définit la quantité $S(r, f)$ par*

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre fini,et

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire finie si f est d'ordre infini.

Chapitre 2

Introduction à la théorie d'unicité des fonctions méromorphes

La théorie d'unicité des fonctions méromorphes étudie principalement les conditions pour les quelles il existe une et une seule fonction satisfaisante à ces conditions. Il est bien connu que tout polynôme est déterminé par ses zéros (l'ensemble dans lequel le polynôme prend ses zéros) sauf pour un facteur non nul, mais ce n'est pas vrai pour une fonction entière transcendante ou méromorphe.

Dans ce chapitre, on va citer quelques résultats connus sur la théorie d'unicité des fonctions méromorphes dans le plan complexe. En premier lieu, on donne quelques défnitions :

Définition 2.1 *([6])Soient f et g deux fonctions méromorphes d'un variable complexe, et $a \in \mathbb{C}$. On dit que*

(i) f et g partagent la valeur a CM (comptant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités.

(ii) f et g partagent la valeur a IM (ignorant la multiplicité) si $f(z)-a$ et $g(z)-a$ admettent les mêmes zéros sans tenir compte de leurs multiplicités.

Exemple 2.1 *Les fonctions e^z et e^{-z} partagent* $0, 1, -1, \infty$ *CM.*

Exemple 2.2 *Les fonctions $p(z) = (z-1)(z-2)^2$ et $q(z) = (z-1)^2(z-2)$ partagent* 0 *IM.*

Exemple 2.3 *Les fonctions* $p(z) = \frac{-4z^3}{(z-1)^3(z+1)}$ *et* $q(z) = \frac{-4z}{(z-1)(z+1)^3}$ *partagent* $0, \infty$ *et* 1 *IM.*

2.1 L'unicité des polynômes

Dans cette section, on va citer quelques résultas connus sur le théorie d'unicité des polynômes

Théorème 2.1 *([6]) Soient* f *et* g *deux polynômes non-constants. Si* f *et* g *partagent la valeur* a *CM alors* $f(z) \equiv c\, g(z)$ *où* c *est une constante.*

Preuve du théorème 2.1. Soit H la fonction rationnelle défine par

$$H(z) = \frac{f(z) - a}{g(z) - a}.$$

Comme $f - a$ et $g - a$ ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. Alors

$$H(z) = \frac{f(z) - a}{g(z) - a} = e^h.$$

où h est une fonction entière.

D'autre part, si h est non-constante, Alors H n'est pas une fonction rationnelle. Contradiction.

Corollaire 2.1 *([6]) Soient* f *et* g *deux polynômes non-constants et* a *un nombre complexe finie. Si* f *et* g *partagent* a *CM et il existe un point* z_0 *tel que*

$$f(z_0) = g(z_0) \neq a$$

Alors $f(z) \equiv g(z)$.

Pour le cas où les pôlynômes partagent des valeurs IM .Adams et Straus (voir [6]) ont prouvé ce résultat :

Théorème 2.2 *([6]) Soient* f *et* g *deux polynômes non-costants et* a, b *deux nombres complxes. Si* f *et* g *partagent deux* a *et* b *IM, alors* $f(z) \equiv g(z)$.

Preuve du théorème 2.2 Sans perdre de généralité, on suppose que

$$\deg(f) = p \geq \deg(g) = q \geq 0.$$

On suppose que $f(z) \neq g(z)$,soit le polynôme H définie par

$$H(z) = f'(z)(f(z) - g(z)) \neq 0.$$

On remarque que

$$\deg H \leq 2p - 1.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} H(z) &= f'(z)(f(z) - a - (g(z) - a)) \\ &= f'(z)(f(z) - b - (g(z) - b)) \end{aligned}$$

ce qui implique que si z_0 est un zéro de $f(z) - a$ ou un zéro de $f(z) - b$, alors z_0 est un zéro aussi de H, d'où $\deg H \geq 2p$. Contradiction.

2.2 L'unicité des fonctions rationnelles

Dans cette section,on va citer quelques résultas connus sur la théorie d'unicité des fonctions rationnelles, afin d'énnocer

Lemme 2.1 *([6]) Soient f et g deux fonctions rationnelles non constantes. Si f et g partagent $0, \infty$ CM ,alors il existe une constante $k \neq 0$ telle que :*

$$f(z) \equiv kg(z)$$

Preuve du lemme 2.1 On définit la fonction rationnelle H

$$H = \frac{f(z)}{g(z)}$$

cette fonction n'ademt pas ni zéros ni pôles. Donc la fonction $H = e^h$ où h est une fonction entière. h doit etre une constante, car sinon on trouve une contradiction avec l'hypothèse de H rationnelle.

Par le lemme 2.1, on déduit le résultat suivant.

Théorème 2.3 *([6]) Soient f et g deux fonctions rationnelles non-constantes.Si f et g partagent deux valeurs a et b CM .Alors il existe une constante $k \neq 0$ telle que*

$$\frac{f-a}{f-b} = k\frac{g-a}{g-b}$$

Preuve du théorème 2.3 On définit les deux fonctions :

$$F(z) = \frac{f(z)-a}{f(z)-b},\ G(z) = \frac{g(z)-a}{g(z)-b}$$

On remarque que F et G partagent $0, \infty$ CM. D'apres le lemme 2.1, il existe une constante $k \neq 0$ telle que $F \equiv kG$.

Corollaire 2.2 *([6]) Soient f et g deux fonctions rationnelles non-constantes. Si f et g partagent deux valeurs a et b CM, et s'il existe un point z_0 tel que $g(z_0) \notin \{a, b\}$. Alors $f \equiv g$.*

Théorème 2.4 *([6]) Soient f et g deux fonctions rationnelles non-costantes. Si f et g partagent les valeurs distinctes a_1, a_2, a_3 et a_4 IM Alors $f \equiv g$.*

Preuve du théorème 2.4 Sans perdre de généralité, on suppose que $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, $a_3 = a$ et $a_4 = b$.Sinon il suffit d'étudier les deux fonctions

$$F(z) = \frac{f(z)-a_1}{f(z)-a_2},\ G(z) = \frac{g(z)-a_1}{g(z)-a_2}$$

car F et G partagent $0, \infty, \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}, \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}$ IM. On définit les deux fonctions suivantes

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},\ g(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$

où f_1, f_2, g_2, g_2 sont des polynômes tels que f_1 et f_2 (resp.g_2 et g_2) n'ont pas de facteurs communs. On remarque que les fonctions f_i et g_i $(i = 1, 2)$ partagent 0 IM, les fonctions $f_1(z) - af_2(z)$ et $g_1(z) - ag_2(z)$ partagent 0 IM, et. $f_1(z) - bf_2(z)$et $g_1(z) - bg_2(z)$ partagent 0 IM. Sans pérdre de géneralité,On suppose que

$$\deg(f_1) \geq \max\{\deg(f_2), \deg(g_1), \deg(g_2)\}, \tag{2.1}$$

et on note par H_1

$$H_1 = f_2 g_2 (f - g) = f_1 g_2 - f_2 g_1 \tag{2.2}$$

alors, les pôles, les zéros, les a-points et les b-points de f sont aussi des zéros de H_1. Posons maintenant

$$H_2 = f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2). \tag{2.3}$$

Alors $H_2(z) = 0$ si et seulement si z est un zéro, pôle, a-point et le b-point de f. On définit la fonctiàon H_3 par

$$H_3 = (f_1' f_2 - f_1 f_2') H_1 \tag{2.4}$$

évidement ,les zéros, les pôles, les a-points et les b-points de f sont des zéros de H_3 telle que la multiplicité de H_3 dans l'un de ces points est superieure ou égale à celle de H_2. Ce qui implique

$$H_3 = F H_2 \tag{2.5}$$

où F est un polynôme. On définit

$$s = \min \left\{ \deg(f_1), \deg(f_1 - a f_2), \deg(f_1 - b f_2) \right\}, \tag{2.6}$$

comme

$$\begin{aligned} f_1' f_2 - f_1 f_2' &= (f_1 - a f_2)' f_2 - (f_1 - a f_2) f_2' \\ &= (f_1 - b f_2)' f_2 - (f_1 - b f_2) f_2'. \end{aligned} \tag{2.7}$$

On obtient.

$$\deg(f_1' f_2 - f_1 f_2') \leq s + \deg(f_2) - 1 \tag{2.8}$$

D'où la formule (2.5) nous donne

$$\deg(H_3) = \deg(F) + \deg(H_2) \tag{2.9}$$

d'après $(2.1),(2.3)$ et (2.6), on a

$$\deg(H_2) \geq \deg(f_2) + 2\deg(f_1) + s. \tag{2.10}$$

(2.1) et (2.6), nous donne

$$\deg(H_1) \leq 2\deg(f_1) \tag{2.11}$$

Il résulte de $(2.4),(2.8),(2.11)$

$$\deg(H_3) \leq s + \deg(f_2) - 1 + 2\deg(f_1) \tag{2.12}$$

Substitution (2.10) et (2.12) dans (2.9), on obtient

$$\deg(F) + \deg(f_2) + 2\deg(f_1) + s \leq s + \deg(f_1) - 1 + 2\deg(f_1).$$

Donc $\deg(F) \leq -1$, d'où $F \equiv H_3 \equiv 0$. Comme

$$f' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$$

et f est non-constante, alors $f_1' f_2 - f_1 f_2' \neq 0$, ce qui implique que $H_1 \equiv 0$ et d'après (2.4).on déduit que $f \equiv g$.

2.3 L'unicité des fonctions méromorphes d'ordre inférieur à 1

Dans cette section ,on va citer quelques résultas connus sur le théorie d'unicité des fonctions méromorphes d'ordre < 1.

Théorème 2.5 *([6]) Soient f et g deux fonctions méromorphes non-constantes d'ordre < 1.Si f et g partagent $0, \infty$ CM. Alors il'existe une costante $k \neq 0$ telle que $f \equiv kg$.*

Preuve du Théorème 2.5 Notons par H la fonction méromorphe défine par

$$H = \frac{f}{g}.$$

Comme f et g partagent $0, \infty$ CM, il résulte que $H = e^k$, où k est un polynôme. Si k est non constante, on trouve

$$1 > \max\{\rho(f), \rho(g)\} \geq \rho\left(\frac{f}{g}\right) = \rho\left(e^k\right) = \deg k \geq 1,$$

contradiction.

Corollaire 2.3 *([6])Soient f et g deux fonctions méromorphe non-constantes d'ordre < 1.Si f et g partagent deux valeurs a, b CM et s'il y a un point z_0 tel que $f(z) = g(z) \notin \{a, b\}$. Alors $f \equiv g$.*

Corollaire 2.4 *([6]) Soient f et g deux fonctions méromorphe non-constantes d'ordre < 1. Si f et g partagent une valeur a CM, et s'il y a un z_0 point tel que $f(z_0) = g(z_0) \neq a$. Alors $f \equiv g$.*

2.4 Théorème de cinq valeurs de Nevanlinna

Naturellement on pose la question suivante : combien de valeurs déterminent une fonction méromorphe ?

Théorème 2.6 *([6, 5])* ***(Le théorème des cinq valeurs de Nevanlinna (Nevanlinna 1929))*** *Si deux fonctions méromorphes f et g partagent cinq valeurs CM, alors elles sont identiques.*

Preuve du théorème 2.6. On suppose d'abord que tous les valeurs a_j $(j = 1, ..., 5)$ sont finis. D'après le deuxième théorème fondamental

$$3T(r, f) < \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f) \tag{2.13}$$

et

$$3T(r, g) < \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_j}\right) + S(r, g). \tag{2.14}$$

Supposons aussi que $f \neq g$. Alors, d'après l'hypothèse

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &= \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) \\ &\leq T(r, f - g) + O(1) \\ &\leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'après (2.13) – (2.15)

$$3\left(T\left(r,f\right)+T\left(r,g\right)\right)\leq 2\left(T\left(r,f\right)+T\left(r,g\right)\right)+S\left(r,f\right)+S\left(r,g\right),$$

ce qui est une contradiction. donc $f\equiv g$.

On suppose maintenant que l'un des valeurs a_j $(j=1,...,5)$ est infini, sans perdre de généralité, on suppose que $a_5=\infty$.

Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $a\neq a_j$ $(j=1,...,5)$. Posons

$$F\left(z\right)=\frac{1}{f\left(z\right)-a},\ G\left(z\right)=\frac{1}{g\left(z\right)-a},$$

et

$$b_j=\frac{1}{a_j-a}\ \left(j=1,...,4\right),\ b_5=0.$$

Il est claire que F et G partagent les valeurs b_j $(j=1,...,5)$ IM, d'après le premier cas, on trouve que $F\left(z\right)\equiv G\left(z\right)$, ce qui implique que $f\equiv g$.

Exemple 2.4 *Soit* $f(z)=\exp(z)$ *et* $g(z)=\exp(-z)$. *Alors* f *et* g *partagent les quatres valeurs* $0,1,-1,\infty$ *IM .Mais* f *et* g *sont déférentes.*

Théorème 2.7 *([1])* ***(Le théorème de quatre valeurs de Nevanlinna)*** *Si deux fonction méromorphes partagent quatre valeurs CM, Alors* f *est une transformation de Möbius de* g.

Remarque 2.1 *La transformation de Möbius d' une fonction définie comme la composée d un nombre fini d'inversions par rapport à des plans ou sphère. En particulier ,Si on identifie* $\mathbb{R}^2$ *à* $\mathbb{C}$*,Alors on peut prouver que les transformations de Möbius conservant l'orientation sont de la forme :*

$$M:z\longrightarrow\frac{az+b}{cz+d}$$

avec a,b,c *et* d *quatres nombres complxes tel que* $ad-bc\neq 0$

Chapitre 3

Valeurs partagées par une fonction entière et sa dérivée

3.1 Introduction et résultat

Le problème d'unicité des fonctions entières qui partagent une valeur non nulle finie a avec leurs dérivées est récemment étudié. Dans cette section on étudie le problème des deux valeurs partagées par une fonction entière et sa dérivée.

En 1977, L.A. Rubel et C-C. Yang ont démontré le résultat suivant.

Théorème 3.1 *([4, 6]) Soit f est une fonction entière non-constante .Si f et f' partagent deux valeurs finies distincts a et b CM. Alors $f' \equiv f$.*

Exemple 3.1 *la fonction $f(z) = e^z$ et sa dérivée $f'(z) = e^z$ partagent deux valeurs* 0 *et* 1 *CM*

3.2 Lemmes préliminaires

Pour démontrer le Théorème 3.1 on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.1 *([4, 6]) Soient $a_0(z), a_1(z), ..., a_n(z)$ des fonctions méromorphes et $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ des fonctions entières, telles que*

$$T(r, a_j) = o(\sum_{v=1}^{n} m(r, e^{g_v})), \quad (j = 1, ..., n)$$

en dehors d'un ensemble de mesure logarithmique finie. Si

$$\sum_{v=1}^{n} a_v(z)e^{g_v(z)} = a_0(z).$$

Alors

$$\sum_{v=1}^{n} C_v a_v(z)e^{g_v(z)} = 0$$

où les constantes C_v $(v = 1...., n)$ *non toutes nulles*

Lemme 3.2 *([6]) Soient* f_j $(j = 1, 2, 3)$ *des fonctions méromorphes telles que* f_1 *n'est pas constante. Si* $f_1 + f_2 + f_3 \equiv 1$, *et*

$$\sum_{j=1}^{3} N(r, \frac{1}{f_j}) + 2\sum_{j=2}^{3} \bar{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r)$$

où $\lambda < 1$ *et* $T(r) = \max_{1\leq j\leq 3} T(r, f_j)$. *Alors* $f_2 \equiv 1$ *ou* $f_3 \equiv 1$.

Lemme 3.3 *'[6]) Soit h une fonction entière non-constante et* $f(z) = e^{h(z)}$*.Alors*

(*i*) $T(r, h) = o(T(r, f))$ $(r \to \infty)$.

(*ii*) $T(r, h') = S(r, f)$.

3.3 Preuve du théorème 3.1

Pour montrer ce théorème on distingue les deux cas suivants :

Cas 1. Si $ab = 0$,Sans pèrdre de généralitié,on suppose que $a = 0$ et $b \neq 0$. Donc 0 doit être une valeurs exptionnelle de Picard, d'où

$$f(z) = e^{\alpha(z)} \text{ et } f'(z) = e^{\beta(z)}, \tag{3.1}$$

où α et β sont des fonctions entière.D'après (3.1) on a

$$e^{\beta} = \alpha' e^{\alpha} \tag{3.2}$$

D'autre part, on a

$$\frac{f - b}{f' - b} = e^{\delta}, \tag{3.3}$$

où δ est une fonction entière. D'après (3.3) et (3.1), on a

$$\frac{1}{b}e^{\alpha}+e^{\delta}-\frac{1}{b}e^{\beta+\delta}=1 \tag{3.4}$$

En utilisant le Lemme 2.1, on obtient

$$e^{\delta}\equiv 1 \text{ ou } -\frac{1}{b}e^{\beta+\delta}\equiv 1.$$

Si $e^{\delta}\equiv 1$, alors d'après (3.3) on en déduit que $f'\equiv f$.

Si $-\frac{1}{b}e^{\beta+\delta}\equiv 1$, alors $e^{\beta}=-be^{-\delta}$ et l'équation (3.4) devient

$$e^{\beta}=b^2e^{-\alpha}.$$

Par ceci et (3.2) , on trouve la contradiction

$$e^{2\alpha}=\frac{b^2}{\alpha'}.$$

Cas 2. Si $ab\neq 0$, on a

$$\begin{cases}\frac{f'-a}{f-a}=e^{\beta}\\ \frac{f'-b}{f-b}=e^{\beta}\end{cases}, \tag{3.5}$$

où α et β sont des fonctions entiéres. Supposons que $f'\neq f$. D'après le système (3.5)

$$f=\frac{be^{\beta}-ae^{\alpha}+a-b}{e^{\beta}-e^{\alpha}}$$

et

$$f'=\frac{be^{\alpha}-ae^{\beta}+(a-b)e^{\alpha+\beta}}{e^{\beta}-e^{\alpha}}. \tag{3.6}$$

Donc

$$\begin{gathered}ae^{2\beta}+be^{2\alpha}+(a-b)e^{2\alpha+\beta}-(a-b)e^{\alpha+2\beta}\\ -((b-a)(\beta'-\alpha')-(a+b))e^{\alpha+\beta}+(a-b)\beta'e^{\beta}-(a-b)\alpha'e^{\alpha}=0\end{gathered} \tag{3.7}$$

Il est clair que

$$T(r,f) < 2(T(r,e^{\alpha}) + T(r,e^{\beta})) + O(1) \tag{3.8}$$

Supposons que $e^{\alpha} \equiv c$ $(c \neq 0,1)$, où est une constante, alors D'aprés (3.8) e^{β} n'est pas une constante et (3.7) devient

$$Ae^{2B} + Be^{B} + bc^{2} = 0 \tag{3.9}$$

où

$$A = a - (a - b')c,$$

$$B = (a-b)c^{2} + (b-a)c\beta' - (a+b)c + (a-b)\beta'$$

D'après lemme 3.3 on obtient

$$T(r,\beta) = S(r,e^{\beta}).$$

D'où (3.9) est imposible et e^{α} n'est pas constante.

En utilisant la même méthode, on trouve que $e^{\beta}, e^{\beta-\alpha}, e^{\beta-2\alpha}, e^{2\beta-\alpha}$ sont toutes non-constantes.

En divisie la formule (3.7) par e^{β}, on obtient

$$ae^{\beta}+be^{2\alpha-\beta}+(a-b)e^{2\alpha}-(a-b)e^{\alpha+\beta}+((b-a)(\beta'-\alpha')-(a+b))e^{\alpha}-(a-b)\alpha'e^{\alpha-\beta} = -(a-b)\beta'. \tag{3.10}$$

D'après le Lemme 3.1, ils existent des constantes C_j $(j = 1, ..., 6)$ telles que

$$C_1e^{\beta} + C_2e^{2\alpha-\beta} + C_3e^{2\alpha} - C_4e^{\alpha+\beta} + C_5((b-a)(\beta'-\alpha') - (a+b))e^{\alpha} - C_6\alpha'e^{\alpha-\beta} = 0 \tag{3.11}$$

En divisie la formule (3.11) par e^{α}, on obtient

$$C_1e^{\beta-\alpha} + C_2e^{\alpha-\beta} + C_3e^{\alpha} - C_4e^{\beta} + C_6\alpha'e^{-\beta} = -C_5((b-a)(\beta'-\alpha') - (a+b)) \tag{3.12}$$

D'après le Lemme 3.1, ils existent des constantes d_j $(j = 1, ..., 5)$ telles que

$$d_1e^{\beta-\alpha} + d_2e^{\alpha-\beta} + d_3e^{\alpha} + d_4e^{\beta} + d_5\alpha'e^{-\beta} = 0 \tag{3.13}$$

En multipliant maintenant (3.13) par e^{β}, on obtient

$$d_1 e^{2\beta-\alpha} + d_2 e^{\alpha} + d_3 e^{\alpha+\beta} + d_4 e^{2\beta} = -d_5 \alpha' \tag{3.14}$$

D'aprés le lemme 3.1, ils existent des constantes t_j $(j = 1, ..., 4)$ telles que

$$t_1 e^{2\beta-\alpha} + t_2 e^{\alpha} + t_3 e^{\alpha+\beta} + t_4 e^{2\beta} = 0 \tag{3.15}$$

Sans pèrdre de généralité, on suppose que $t_4 \neq 0$ et (3.15) devient

$$-\frac{t_1}{t_4} e^{-\alpha} - \frac{t_2}{t_4} e^{\alpha-2\beta} - \frac{t_3}{t_4} e^{\alpha-\beta} = 1 \tag{3.16}$$

ce qui une contradiction avec le lemme 3.1 car $e^{-\alpha}, e^{\alpha-2\beta}, e^{\alpha-\beta}$ ne sont pas des constantes et $f' = f$.

Bibliographie

[1] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[2] **E. Borel** ,*Sur les zéros des fonctions entière*,Acta Mathematica.December 1897,20 :1964.

[3] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[4] **L.A. Rubel and C. C. Yang**, *Values shared by an entire function and its derivatives*, Lecture Notes in Math. 599(1977), Berlin, Springer - Verlag, 101-103.

[5] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, *The distribution of values of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.

[6] **C. C. Yang and H. X. Yi**, *Uniqueness theory of meromorphic functions, Mathematics and its Applications*, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.