

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Amina KHEDIM

le 21 Mai 2017

Méthode des différences finies pour les équations différentielles fractionnaires et applications

Encadeur : **Omar BELHAMITI (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Mme. N. ABLAOUI-LAHMAR, Docteur Présidente (Université de Mostaganem, Algérie)
Melle. H. ALI MERINA, Docteur Examinatrice (Université de Mostaganem, Algérie)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

**M
A
S
T
E
R**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	3
1 Rappels sur le calcul fractionnaire	4
1 Définitions	4
2 Calcul des équilibres d'un système dynamique	7
2 Modélisation mathématique en épidémiologie	9
1 Qu'est ce qu'une modélisation mathématique en épidémiologie?	9
2 Qu'est-ce que l'obésité?	11
3 La boulimie	14
4 Modélisation de la transmission de l'épidémie de l'obésité et de la boulimie	16
5 La stabilité du point équilibre E_0	20
3 La Méthode des différences finies sur les équations différentielles fractionnaires	22
1 Le principe de la méthode des différences finies sur les EDF	22
2 La technique de découplage et quasi-linéarisation (DQLT)	26
4 Application et Simulation	28
1 Tests numériques	28
2 Simulation numérique du modèle de transmission de l'obésité et de la boulimie	35
Conclusion	38
Résumé	41

Introduction

Actuellement, la plupart des recherches scientifiques montrent que la modélisation mathématique est très utile dans beaucoup de domaines scientifiques comme la biologie, physique, dynamique de population...etc. Elle permet de décrire un problème concret en un modèle mathématique sous forme d'équations intégrales, EDO, EDP...etc.

Dans ce travail, on s'intéresse à la transmission des épidémies de l'obésité et de la boulimie. L'obésité est définie par un excès de masse grasse, et la boulimie est un trouble complexe qui se caractérise par des crises compulsives où la prise alimentaire prend des proportions incontrôlables, elle se manifeste par vomissement provoqué, sport excessif et des autres comportements. Ces épidémies ont une relation forte entre elles, et entraînent des complications médicales mortelles. Puisque la modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les problèmes réels dont le comportement peut être régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, on propose de décrire la transmission de l'obésité et de la boulimie par un modèle mathématique fractionnaire.

Dans notre mémoire, on va résoudre les systèmes fractionnaires avec des conditions initiales par la méthode des différences finies basée sur un schéma de Grünwald-Letnikov. Pour mener à terme notre travail et à fin de rendre notre démarche compréhensible, on va organiser ce travail de la façon suivante :

On consacre le premier chapitre à donner une généralité sur l'épidémiologie et les définitions de quelques modèles épidémiques de base, ensuite on va décrire le modèle fractionnaire de transmission de l'épidémie de l'obésité et de la boulimie. Dans le deuxième chapitre, on se focalise sur la méthode des différences finies avec la technique de découplage et de la quasi-linéarisation. Concernant le dernier chapitre, on va illustrer les résultats du deuxième chapitre par deux exemples académiques et on termine avec la simulation numérique de notre problème et étudier son comportement.

À la fin de ce document, on donne une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, on présente les définitions de dérivées fractionnaires et notations utilisées pour décrire les schémas numériques. On s'intéresse à la théorie des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, Riemann-Liouville et Grünwald-Letnikov. Les définitions de ce chapitre sont tirées des références suivantes [1, 11, 12, 13, 14, 15].

1 Définitions

Définition 1.1 Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$; $n - 1 < \alpha < n$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ désignant la partie entière de α , par

$${}_{\text{RL}}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler, définie par

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty \exp^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \text{Re}\{\alpha\} > 0.$$

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi s'écrire comme suit

$${}_{\text{RL}}D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I^{(n-\alpha)} f(x)).$$

tel que $I_t^{(n-\alpha)}$ définit l'intégrale au sens de Riemann-Liouville.

Définition 1.2 Soient $n - 1 < \alpha < n$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$. La dérivée d'ordre α au sens de Caputo de f est donnée par

$$\begin{aligned} {}_a^c D^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} D^n f(t) dt \\ &= I_t^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes :

- La dérivée d'ordre α au sens de Caputo pour les fonctions constante est nulle.
- Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > n - 1$. La dérivée au sens de Caputo pour la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$ est donnée par

$${}_a^c D^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha}.$$

— On a aussi

$${}^c D^\alpha (I_t^\alpha f(x)) = f(x)$$

— Par contre, on a

$$I_t^\alpha ({}^c D^\alpha f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^k}{k!}.$$

Définition 1.3 La dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ de Grünwald-Letnikov de la fonction f définie sur $[a, b]$ est donnée par

$${}_{GL} D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh),$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ dénote la partie entière d'un nombre réel, h est le pas de la discrétisation du domaine et les coefficients $\binom{\alpha}{k}$ sont donnés par

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Pour h suffisamment petit, la dérivée fractionnaire au sens de G-L est approché par

$$\delta_x^\alpha f(x) = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} w_k^\alpha f(x - kh), \quad (1.1)$$

où $w_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$.

L'expression (1.1) s'appelle le schéma de Grünwald-Letnikov, elle sera utilisée tout au long de ce mémoire pour l'approximation des dérivées fractionnaires.

L'idée de la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov est une généralisation de la dérivée classique d'ordre n , telle que la dérivée classique d'ordre n d'une fonction f est donnée par

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \quad (1.2)$$

On peut démontrer (1.2) par récurrence tel que, on suppose que $f \in C^{n+1}([a, b])$ et pour $n = 1$,

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

On suppose que

$$D^j f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^j} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} f(x - kh)$$

est vrai jusqu'à $j = n$, et on montre que $D^{(n+1)} f(x)$ est vrai.

On a,

$$\begin{aligned} D^{(n+1)} f(x) &= D^n \left(\frac{df}{dx}(x) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f'(x - kh), \end{aligned}$$

et comme

$$f'(x - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - kh) - f(x - (k+1)h)}{h}$$

donc

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (f(x - kh) - f(x - (k+1)h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} f(x - (k+1)h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} f(x - kh) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} f(x - (k+1)h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} f(x - kh) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} f(x - kh) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} f(x - kh) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} f(x - kh) + (-1)^{n+1} f(x - (n+1)h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} f(x - kh) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) + (-1)^{n+1} f(x - (n+1)h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \left(f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} f(x - kh) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{n+1}{k(n+1-k)} \right) + (-1)^{n+1} f(x - (n+1)h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} f(x - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f(x - kh). \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Ensuite, dans la dérivée d'ordre classique (1.2), si $k > n$ alors les termes de la somme sont nulles, donc la dérivée (1.2) est équivalente à

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh). \quad (1.3)$$

L'expression dans (1.3) peut être ré-écrite de la manière suivante,

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh).$$

Comme $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier naturel, elle peut être prolongée au plan complexe \mathbb{C} (par définition de la fonction gamma Euler) privé des entiers négatifs ou nuls, alors cette généralisation consiste à définir la dérivée de Grünwald-Letnikov d'ordre α , pour $\alpha > 0$ par

$${}_{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh).$$

Proposition 1.1 *Supposons que la fonction f soit n fois différentiable dans $[a, b]$ et que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est intégrable dans $[a, b]$, alors, pour chaque $n-1 < \alpha < n$, on a*

$${}_{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) = {}_{\text{RL}}D_a^\alpha f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Donc

$${}_{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) = {}_{\text{RL}}D_a^\alpha f(x) \approx \delta_x^\alpha f(x).$$

Proposition 1.2 *Soient $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$, alors,*

$${}_{\text{RL}}D_a^\alpha f(x) = {}_a^c D^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k f}{dx^k}(a) \frac{(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}. \quad (1.4)$$

2 Calcul des équilibres d'un système dynamique

Soit le système non linéaire suivant

$$X' = f(X(t)) \quad (1.5)$$

avec X une fonction définie sur I à valeur dans \mathbb{R}^n où $I \subset \mathbb{R}$ et f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n une fonction différentiable.

Un point $X^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé point d'équilibre (ou solution stationnaire, point critique) de système (1.5) si $f(X^*) = 0$, c'est à dire si $f(X^*) = 0$ alors la fonction constante $X(t) = X^*$, $\forall t \in I$ est solution du problème (1.5).

2.1 Stabilités des équilibres (1^{ère} méthode de Lyapunov)

On détermine la stabilité asymptotique d'un point équilibre X^* en étudiant le système linéarisé autour de ce point. En calculant alors $J(X^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X^*) \right)_{ij}$ qui représente la matrice jacobienne de la fonction f prise au point X^* , qui est une matrice constante. Il est alors évident que les valeurs propres de $J(X^*)$ jouent un rôle prépondérant, si toutes les valeurs propres de $J(X^*)$ ont une partie réelle strictement négative, alors le point équilibre est asymptotiquement stable.

Preuve de proposition 1.2

Soient $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$. D'après le développement du Taylor, on a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I^{(n)} f^{(n)}(x), \quad (1.6)$$

par application de $I^{(n-\alpha)}$ sur (1.6), on obtient,

$$I^{(n-\alpha)} f(x) = I^{(n-\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I^{(n)} f^{(n)}(x) \right).$$

Par définition de l'intégrale au sens de Riemann-Liouville, et la propriété de semi-groupe, alors on peut se permettre d'écrire

$$I^{(n-\alpha)} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} (x-a)^{k+n-\alpha} + I^{(2n-\alpha)} f^{(n)}(x), \quad (1.7)$$

puis, on applique D^n sur (1.7), on obtient,

$$\begin{aligned} D^n I^{(n-\alpha)} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+n-\alpha+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + D^n I^{(2n-\alpha)} f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + I^{(n-\alpha)} D^n f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + {}_c D^\alpha f(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Chapitre 2

Modélisation mathématique en épidémiologie

Ce chapitre a pour but de présenter des modèles décrivant les maladies transmissibles et infectieuses en épidémiologie. On s'intéresse en particulier à l'obésité et ses facteurs de transmission ainsi que la boulimie.

1 Qu'est ce qu'une modélisation mathématique en épidémiologie ?

L'épidémiologie est l'étude de la propagation des maladies transmissibles et infectieuses et les facteurs qui pourraient les causer. L'apport des mathématiques se fait dans un premier temps par le biais de la modélisation des maladies transmissibles dans l'épidémiologie. Pour cela, il faut comprendre le problème réel pour tenter de proposer un modèle adapté qui décrit ce phénomène sous forme système d'équations différentielles (linéaires ou non linéaires). Ensuite, la résolution de ce problème consiste à appliquer une méthode numérique qui permet d'obtenir la solution.

1.1 Quelques modèles de base

La modélisation en épidémiologie, est apparue en 1760 par Daniel Bernoulli (1700 – 1782) qui présentait un modèle mathématique concernant l'épidémie de variole. De nombreux auteurs ont proposé différents types de modèles épidémiques. En 1906, il est apparu le modèle dynamique de W.H.Hamer, c'est un modèle épidémique simple avec lequel on considère que la population étudiée peut être décomposée en deux compartiments : les individus susceptibles (S) et les individus infectés (I) [1], voir (Figure 2.1).

Ceci peut se traduire mathématiquement par,

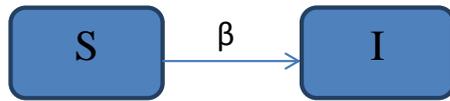
$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) \end{cases}$$

où,

— β est le taux d'infection.

— $S(t)$: les individus susceptibles d'avoir la maladie à l'instant t .

FIGURE 2.1 – Diagramme du modèle SI.



- $I(t)$: les individus contaminés par la maladie à l'instant t et peuvent contaminer d'autres personnes.

Ensuite, au début de XX^e siècle W.O.Kermack et A.G.Mc Kendrick ont publié un modèle simple de la propagation des épidémies par contact direct, composé de trois compartiments : sensibles (S), infectés (I) et récupérés (R) [1], voir figure 2.2.

FIGURE 2.2 – Diagramme du modèle SIR.



Mathématiquement, le diagramme peut se traduire par,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t) \end{array} \right.$$

où,

- α est le taux d'infection.
- β est le taux de récupération de l'infection.
- $S(t)$: les individus susceptibles d'avoir la maladie à l'instant t .
- $I(t)$: les individus contaminés par la maladie et peuvent contaminer d'autre personnes à l'instant t .
- $R(t)$: les individus immunisés contre la maladie à l'instant t .

Dans notre travail on s'intéresse à la modélisation de la dynamique de l'obésité et de la boulimie.

2 Qu'est-ce que l'obésité ?

Le terme obésité vient du grec "baros" qui veut dire "lourd et grand". Ce terme signifie aujourd'hui l'état d'un individu ayant un excès de poids par augmentation de la masse adipeuse. Elle se définit par un indice de masse corporelle égale ou supérieure à 30.

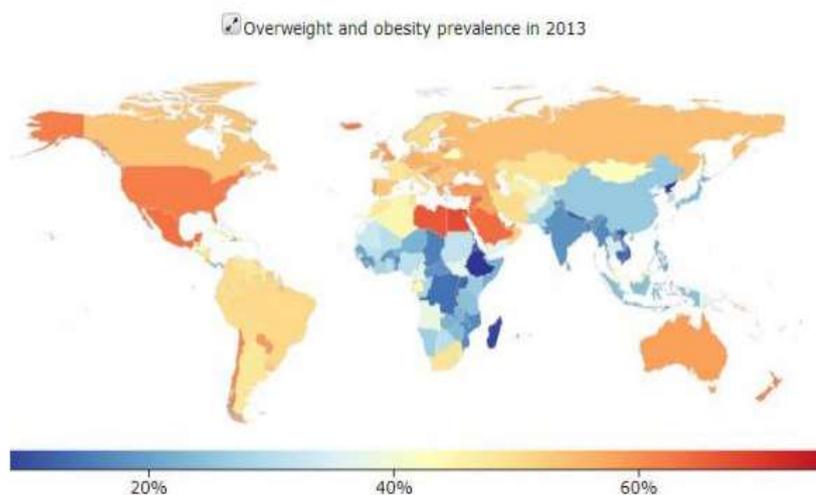
2.1 L'apparition de l'épidémie de l'obésité et quelques données de prévalences

Depuis la fin des années 70, le taux d'obésité a augmenté d'une manière exponentielle dans les pays industrialisés. L'aggravation de cette situation est due à l'augmentation des aliments ayant une densité énergétique élevée (riches en lipides ou en sucres et pauvres en fibres).

De 1975 à 2014, selon des chiffres diffusés par l'organisation mondiale de la santé (OMS), la prévalence mondiale de la maigreur ($IMC < 18.5 \text{ kg/m}^2$), normalisée selon l'âge, a diminué d'environ un tiers chez les hommes et les femmes passant de 13.8% à 8.8% et de 14.6% à 9.7%, respectivement. A l'inverse, la prévalence de l'obésité ($IMC \geq 30 \text{ kg/m}^2$) a augmenté de 3.2% en 1975 à 10.8% en 2014 chez les hommes et de 6.4% à 14.9% chez les femmes. La prévalence de l'obésité sévère ($IMC \geq 35 \text{ kg/m}^2$) progresse et atteint 2.3% chez les hommes et 5% chez les femmes. Celle de l'obésité morbide ($IMC \geq 40 \text{ kg/m}^2$) est de 0.64% chez les hommes et de 1.6% chez les femmes en 2014.

Cette étude confirme également la menace pesant sur certaines populations : à titre d'exemple, en 2014, plus de 50% des femmes et plus de 38% des hommes vivant en Polynésie et Micronésie sont obèses. Plus de 15% des femmes à Nauru et des Îles Samoa américaines présentent une obésité morbide [2]. Vu l'ampleur de la maladie l'OMC a considéré l'obésité comme une **épidémie** [9]. voir figure 2.3.

FIGURE 2.3 – La répartition des obèses dans le monde, 2013.

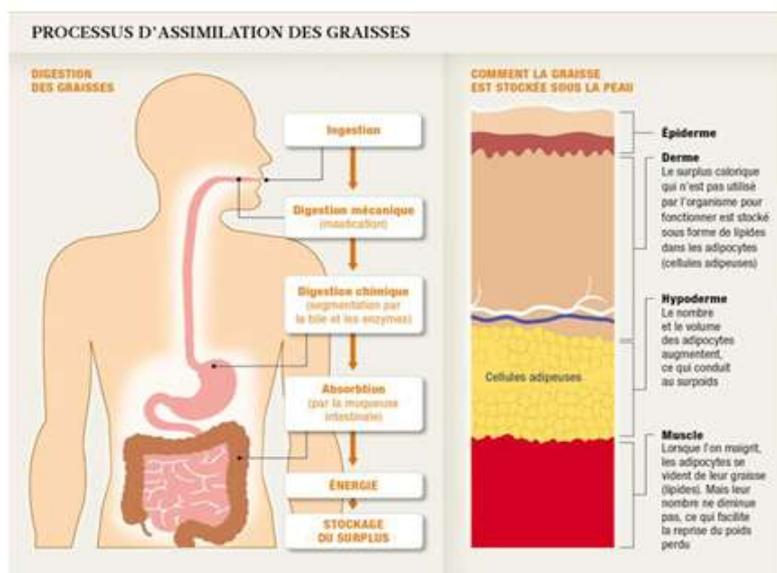


2.2 Les modes de transmission d'obésité

L'obésité est une maladie socialement contagieuse, la propagation de cette épidémie est très différente de la contagion des autres maladies transmissibles, sa transmission

dépend de la diffusion des mauvaises habitudes alimentaires et de l'inactivité physique. Pour connaître les vraies causes de l'obésité, il faut comprendre d'abord les mécanismes physiologiques à l'œuvre dans la dépositions excessive de graisse dans l'organisme (voir figure 2.4), car l'obésité causée par la forte proportion des calories consommées par rapport à celle brûler par l'organisme. Bien que ces agissements constituent des facteurs contributifs importants, les médecins admettent que l'obésité est un problème médical complexe qui relève de facteurs génétique, environnementaux, comportementaux, médicamenteux et sociaux. Bertrand Crottet (psychologue à la division d'endocrinologie, de diabétologie et d'obésité pédiatrique) a expliqué que plusieurs facteurs psychologiques peuvent favoriser l'obésité. Les personnes qui sont obèses ont un grand risque de contracter des troubles médicaux que les personnes qui ont un poids normal.

FIGURE 2.4 – Accumulation de la masse grasse.



2.3 Symptômes

L'OMS fournit des critères précis pour définir l'obésité, tel que le statut pondéral est défini à partir de l'indice de masse corporelle (IMC, en anglais body mass index, BMI) qui est le rapport du poids (en kg) sur le carré de la taille (en mètre) :

$$IMC = \frac{\text{poids}(kg)}{\text{taille}(m)^2}.$$

Il y a quatre catégories standards :

- Poids insuffisant : IMC inférieur à 18.5 ;
- Poids normal : IMC de 18.5 à moins de 25 ;
- Excès de poids ou sur-poids : IMC de 25 à moins de 30 ;
- Obésité : IMC de 30 et plus.

Trois classes d'obésité sont également définies :

- Classe I : IMC de 30.0 à 34.9, obésité élevée ;
- Classe II : IMC de 35.0 à 39.9, obésité très élevée (sévère) ;
- Classe III : IMC plus grand ou égal à 40, obésité extrêmement élevée (morbide) [7].

2.4 Complications de l'obésité

Parmi les risques que l'on associe à l'obésité, on retrouve [9] :

- Les troubles de la respiration.
- Certain type de cancers.
- Infarctus de myocarde.
- La dépression.
- Le diabète de type 2.
- Une infection de la vésicule biliaire ou du foie.
- Le reflux gastro-oesophagien (RGO).
- Une élévation de la pression artérielle.
- Un taux de cholestérol élevé.
- Une inflammation articulaire.
- L'accident vasculaire cérébral.

Les personnes qui sont obèses peuvent développer les complications précitées.

2.5 Chiffres de mortalité en fonction de l'IMC : analyse du risque

Le risque de mortalité des personnes en sur-poids (IMC entre 25 et 29.9 kg/m^2) n'était pas différent de celui des personnes de poids normal (IMC entre 18.5 et 24.9 kg/m^2). Le risque relatif de mortalité pour un IMC 25 et 30 kg/m^2 est de 0.97% pour les femmes et de 0.97% pour les hommes, et pour un $\text{IMC} \geq 30 \text{ kg/m}^2$ est de 1.28% chez les femmes et de 1.20% chez les hommes [3].

2.6 Traitements

Les traitements visent en principe, la restriction calorique pour obtenir une réduction pondérale. Parmi les moyens utilisés, il y a le régime, l'activité physique et le soutien personnalisé voir tableau 2.1.

TABLEAU 2.1 – Traitement de l'obésité.

IMC (kg/m^2)	25-27	27-30	30-35	35-40	≥ 40
Conseils alimentaires, activité physique, soutien psychologique	+	+	+	+	+
Médicaments			+	+	+
Chirurgie bariatrique					+

3 La boulimie

La boulimie est un trouble des conduites alimentaires, caractérisé par un rapport pathologique à la nourriture, se manifestant par des ingestions excessives d'aliments, de façon répétitive et durable. Ces ingestions appelées crises de la boulimie.

3.1 Historique

La boulimie, d'après le manuel diagnostique des troubles mentaux (DSM-IV) occupe une place importante au sein des troubles des conduites alimentaires. Le terme de boulimie vient du grec désignant un état de voracité provoquant l'ingestion d'une quantité excessive de nourriture. Cette maladie est mentionnée dans les dictionnaires de médecine comme une dysfonction de l'appareil digestif. Aux XIX^e siècle, certains auteurs voient la boulimie comme une forme gastrique de désordre nerveux, G.H. Lasègue inclut cette maladie dans le cadre de l'hystérie, et en 1873 il parle d'un "faux appétit impérieux", Freud parle, en 1925, du "Vomissement comme défense hystérique contre l'alimentation", ainsi que, Fenichel en 1945, décrit ce trouble comme étant une "toxicomanie sans drogue" [4]. Puis, en 1975 H. Bruch (psychanalyste et psychiatre, spécialisée dans les troubles des conduites alimentaires) rapporte ses observations de patients boulimiques, Ils souffraient d'obésité, ces patients obsédés par leur poids et leur alimentation [5], ils entrent tout à fait dans les descriptions actuelles du syndrome boulimique. Ainsi, les comportements boulimiques ont été successivement rattachés à des dysfonctionnements digestifs, nerveux puis psychiques. Le syndrome boulimique apparaît aujourd'hui comme une grande catégorie psychopathologies.

3.2 Données épidémiologiques sur la boulimie

Les travaux épidémiologiques sur les troubles des conduites alimentaires se sont multipliés au cours des vingt dernières années, visant à déterminer leur prévalence, leurs caractéristiques ainsi que les facteurs qui leur sont associés.

La prévalence mondial de la boulimie est estimée autour de 1 – 1.5%. L'incidence de la boulimie est la plus forte dans la tranche d'âge 10-19 ans et serait environs 2.5 fois plus importante en zone urbaine qu'en zone rurale. Le taux de mortalité est estimé à 2% par tranche de 10 ans [6].

3.3 Facteurs de risques

Les évènements de vie peuvent représenter des facteurs de stress déclencheurs de conduites alimentaires pathologiques. Dans l'étude menée par Flament et Jeamment (1999), les évènements de vie les plus fréquemment cités en relation avec le début de la boulimie sont les suivants : quitte sa famille (9%), divorce ou séparation des parents (6%), conflit familial (5%), décès des parents (4%) [4]. Globalement, on divise les facteurs de risques en facteurs spécifiques de troubles alimentaire et en facteurs de risques pour l'ensemble de la psychopathologie, tel qu'on note les facteurs socioculturels, familiaux, trouble de la personnalité de type borderline, confiance en soi, vide intérieur, préoccupations concernant l'apparence de l'obésité [10].

3.4 Diagnostic

Le dépistage de la boulimie est difficile, donc, il est plus difficile d'identifier une personne boulimique parce que leur trouble alimentaire est souvent caché et son poids est généralement normale. Une interprétation psychiatrique voit la boulimie comme une réaction de défense contre l'obésité.

La boulimie entraîne des comportements compulsifs de consommation de nourriture en grande quantité sans nécessairement ressentir la faim. La crise boulimique commence par un début brutal, avec de grande anxiété, cette crise peut durer jusqu'à ce que le malade ressente de violentes douleurs abdominales, avec une fréquence moyenne d'au plus 2 fois par semaine durant au moins 3 mois. Le patient boulimique recourt à certains comportements très dangereux pour stabiliser son poids, tel que la provocation du vomissement, peu à peu le vomissement devient un des éléments habituels de la crise boulimique, la pratique excessive du sport, médicaments coupe-faim, périodes alternées de famine très sévère...etc. Ces comportements ont pour but de réduire la quantité de calories ingérées lors de la crise boulimique en raison de la peur de l'obésité.

3.5 Les complications de la boulimie

Parmi les complications de la boulimie, on trouve

1. Les affections médicales non psychiatrique
 - Certaines tumeurs cérébrales et formes d'épilepsies,
 - Complications dentaires graves car souvent irréversibles,
 - Troubles métaboliques et hydro-électrolytiques (troubles cardiaque),
 - Érosion de l'émail dentaire, caries, gingivite,
 - Fatigue, vertiges, Mort...ect.
2. Les affections médicales psychiatriques
 - Épisode dépressif,
 - Trouble de la personnalité,
 - Troubles anxieux et phobie sociale.

3.6 Boulimie et obésité

La plupart des boulimiques sont protégées de l'obésité par leurs stratégies de restriction pondérale. Certaines sont cependant obèses. En effet, les régimes restrictifs proposés aux obèses sont susceptibles de favoriser la survenue d'accès boulimiques [10].

Près de 30 à 50% des personnes souffrant d'obésité souffrent également de la boulimie [5].

3.7 Traitement de la boulimie

Le traitement de cette maladie est difficile, parmi les aides psychologiques sont les psychothérapies cognitivo-comportementales. Les résultats sont plus efficaces que des traitements médicamenteux antidépresseurs (fluoxétine).

4 Modélisation de la transmission de l'épidémie de l'obésité et de la boulimie

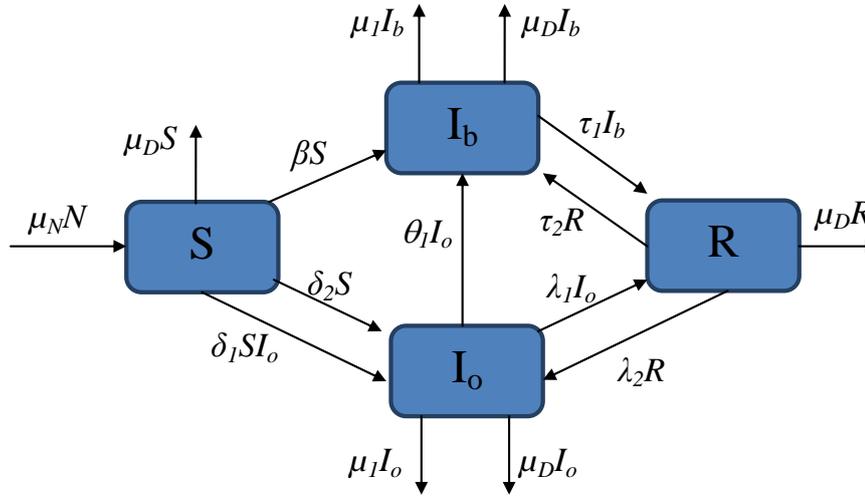
Dans le but de décrire la transmission de l'épidémie de l'obésité et de la boulimie. La population humains est divisée en quatre classes complémentaires : susceptibles (S), obèses (I_o), boulimiques (I_b) et récupérés de l'obésité et de la boulimie (R), donc la population totale $N = S + I_o + I_b + R$.

Plusieurs études ont été faites par des chercheurs qui montre que :

- l'obésité peut être développé spontanément ce qui explique le terme $\delta_2 S$ [9],
- l'obésité peut être développé par contamination, en suivant les mauvaises habitudes alimentaires des personnes obèses, ce qui explique le terme $\delta_1 S I_o$ [9].
- une étude menée par Flament et Jeamment en 1999 [4], 63% des boulimiques ont un poids normal ce qui explique le terme βS , et 15% présentent un sur-poids ce qui explique le terme $\theta_1 I_o$.

Ces hypothèses peuvent être schématisés dans le diagramme de la figure 2.5.

FIGURE 2.5 – Diagramme de transmission de l'obésité et de la boulimie entre les humains.



Où

Ce diagramme peut être traduit mathématiquement par le système d'équations différentielles suivant,

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu_N N - \mu_D S(t) - \beta S(t) - \delta_1 S(t) I_o(t) - \delta_2 S(t) \\ \frac{dI_o(t)}{dt} = \delta_1 S(t) I_o(t) + \delta_2 S(t) + \lambda_2 R(t) - \theta_1 I_o(t) - \lambda_1 I_o(t) - \mu_1 I_o(t) - \mu_D I_o(t) \\ \frac{dI_b(t)}{dt} = \beta S(t) + \theta_1 I_o(t) + \tau_2 R(t) - \tau_1 I_b(t) - \mu_1 I_b(t) - \mu_D I_b(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \tau_1 I_b(t) + \lambda_1 I_o(t) - \tau_2 R(t) - \lambda_2 R(t) - \mu_D R(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

TABLEAU 2.2 – Description des paramètres biologique.

Paramètres	Description biologique
μ_D	Taux des décès naturelles.
μ_1	Taux des décès à cause de complications.
β	Taux des individus qui devient boulimiques (non contagieuses).
δ_1	Taux d'infection à l'obésité (influence psychique).
δ_2	Le risque de l'obésité pour de raisons non contagieuses.
λ_1	Taux de récupération de l'obésité.
λ_2	Le risque de rechute à l'obésité.
θ_1	Taux des individus obèses qui devient boulimique.
τ_1	Taux de récupération de la boulimie.
τ_2	Taux de rechute à la boulimie.
μ_N	Taux de natalité sains.

Pour des raisons techniques, on normalise le système (2.1), en utilisant les changements de variables suivants,

$$\mathbf{S} = \frac{S}{N}; \mathbf{I}_o = \frac{I_o}{N}; \mathbf{I}_b = \frac{I_b}{N}; \mathbf{R} = \frac{R}{N}.$$

On obtient le système noramlisé suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{S}(t)}{dt} = \mu_N - \delta_1 \mathbf{NS}(t) \mathbf{I}_o(t) - (\mu_D + \beta + \delta_2) \mathbf{S}(t) \\ \frac{d\mathbf{I}_o(t)}{dt} = \delta_1 \mathbf{NS}(t) \mathbf{I}_o(t) + \delta_2 \mathbf{S}(t) + \lambda_2 \mathbf{R}(t) - (\theta_1 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_D) \mathbf{I}_o(t) \\ \frac{d\mathbf{I}_b(t)}{dt} = \beta \mathbf{S}(t) + \theta_1 \mathbf{I}_o(t) + \tau_2 \mathbf{R}(t) - (\tau_1 + \mu_1 + \mu_D) \mathbf{I}_b(t) \\ \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tau_1 \mathbf{I}_b(t) + \lambda_1 \mathbf{I}_o(t) - (\tau_2 + \lambda_2 + \mu_D) \mathbf{R}(t). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Dans notre travail, on s'intéresse au modèle fractionnaire de ces épidémies, pour construire ce modèle fractionnaire en se basant sur le modèle ordinaire, on suppose que la variation en temps des variables dépendantes est de l'ordre de α au lieu d'une variation d'ordre 1. Alors, si on remplace les dérivés du premier ordre dans le modèle (2.2) par la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens du Caputo avec $0 < \alpha < 1$, on constate que l'unité du premier membre de ces équations devient $(temps)^{-\alpha}$, mais le second membre est en $(temps)^{-1}$.

Par conséquent, en ajustant les unités des deux membres des équations en $(temps)^{-\alpha}$, le modèle fractionnaire non-linéaire s'écrit comme suit

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{S}(t) = \mu_N^\alpha - (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) - (\beta^\alpha + \mu_D^\alpha + \delta_2^\alpha) \mathbf{S}(t) \\ D^\alpha \mathbf{I}_o(t) = (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) + \delta_2^\alpha \mathbf{S}(t) + \lambda_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\theta_1^\alpha + \lambda_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_o(t) \\ D^\alpha \mathbf{I}_b(t) = \beta^\alpha \mathbf{S}(t) + \theta_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) + \tau_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\tau_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_b(t) \\ D^\alpha \mathbf{R}(t) = \tau_1^\alpha \mathbf{I}_b(t) + \lambda_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) - (\tau_2^\alpha + \lambda_2^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{R}(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Les positions d'équilibres du modèle fractionnaire

On définit le domaine de solution par

$$\Omega = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T}) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } 0 < (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T}) < 1\}.$$

On pose

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\beta^\alpha + \mu_D^\alpha + \delta_2^\alpha) \\ \sigma_2 = (\theta_1^\alpha + \lambda_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \\ \sigma_3 = (\tau_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \\ \sigma_4 = (\tau_2^\alpha + \lambda_2^\alpha + \mu_D^\alpha) \\ \sigma_5 = \left(1 - \tau_2^\alpha \frac{\tau_1^\alpha}{\sigma_3 \sigma_4}\right) \\ \sigma_6 = \left(\theta_1^\alpha + \frac{\tau_2^\alpha \lambda_1^\alpha}{\sigma_4}\right), \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= -\frac{1}{2A} \left(B + \sqrt{B^2 - 4AC} \right) \\ \Delta_- &= -\frac{1}{2A} \left(B - \sqrt{B^2 - 4AC} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{cases} A = \left((\delta_1 N)^\alpha \lambda_2^\alpha \left(\frac{\tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) - \sigma_2 (\delta_1 N)^\alpha \right) \\ B = \left(\mu_N^\alpha (\delta_1 N)^\alpha + \sigma_1 \lambda_2^\alpha \left(\frac{\tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) - \sigma_2 \sigma_1 \right) \\ C = \left(\mu_N^\alpha \delta_2^\alpha + \frac{\lambda_2^\alpha \tau_1^\alpha \beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} \right) > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Proposition 2.1 *Le modèle (2.3) admet dans Ω un point d'équilibre, si $A < 0$,*

$$E_0 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_N^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1} \\ \Delta_+ \\ \frac{\beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1)} + \frac{\sigma_6 \Delta_+}{\sigma_5 \sigma_3} \\ \frac{\tau_1^\alpha \beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1)} + \left(\frac{\sigma_6}{\sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) \Delta_+ \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1 *Pour le cas $A > 0$ et $B > 0$, on a remarqué que la quantité $\left(\frac{\lambda_2^\alpha \tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_2^\alpha \lambda_1^\alpha}{\sigma_4} - \sigma_2 \right)$ doit être positif, alors qu'elle n'a pas une signification biologique.*

Preuve. Pour trouver les points d'équilibre, il suffit de résoudre le système d'équations algébriques non linéaire suivant,

$$\begin{cases} \mu_N^\alpha - (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) - (\beta^\alpha + \mu_D^\alpha + \delta_2^\alpha) \mathbf{S}(t) = 0 \\ (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) + \delta_2^\alpha \mathbf{S}(t) + \lambda_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\theta_1^\alpha + \lambda_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_o(t) = 0 \\ \beta^\alpha \mathbf{S}(t) + \theta_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) + \tau_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\tau_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_b(t) = 0 \\ \tau_1^\alpha \mathbf{I}_b(t) + \lambda_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) - (\tau_2^\alpha + \lambda_2^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{R}(t) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

On pose

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}; \mathbf{I}_o(t) = \mathbf{Y}; \mathbf{I}_b(t) = \mathbf{Z}; \mathbf{R}(t) = \mathbf{T}.$$

Le système 2.6 devient,

$$\begin{cases} \mu_N^\alpha - (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} \mathbf{Y} - \sigma_1 \mathbf{X} = 0 \\ (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} \mathbf{Y} + \delta_2^\alpha \mathbf{X} + \lambda_2^\alpha \mathbf{T} - \sigma_2 \mathbf{Y} = 0 \\ \beta^\alpha \mathbf{X} + \theta_1^\alpha \mathbf{Y} + \tau_2^\alpha \mathbf{T} - \sigma_3 \mathbf{Z} = 0 \\ \tau_1^\alpha \mathbf{Z} + \lambda_1^\alpha \mathbf{Y} - \sigma_4 \mathbf{T} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

l'équation 1 du système donne

$$\mathbf{X} = \frac{\mu_N^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} + \sigma_1}, \quad (2.8)$$

l'équation 4 du système donne

$$\mathbf{T} = \frac{\tau_1^\alpha \mathbf{Z} + \lambda_1^\alpha \mathbf{Y}}{\sigma_4},$$

l'équation 3 du système donne

$$\mathbf{Z} = \frac{\beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} + \sigma_1)} + \frac{\sigma_6}{\sigma_5 \sigma_3} \mathbf{Y}, \quad (2.9)$$

d'où

$$\mathbf{T} = \frac{\tau_1^\alpha \beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} + \sigma_1)} + \left(\frac{\tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) \mathbf{Y}. \quad (2.10)$$

En substituant les expressions (2.8-2.9-2.10) dans l'équation 2 du système (2.7), on a

$$\begin{aligned} & \left((\delta_1 N)^\alpha \lambda_2^\alpha \left(\frac{\tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) - \sigma_2 (\delta_1 N)^\alpha \right) \mathbf{Y}^2 \\ & + \left(\mu_N^\alpha (\delta_1 N)^\alpha + \sigma_1 \lambda_2^\alpha \left(\frac{\tau_1^\alpha \sigma_6}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) - \sigma_2 \sigma_1 \right) \mathbf{Y} \\ & + \left(\mu_N^\alpha \delta_2^\alpha + \frac{\lambda_2^\alpha \tau_1^\alpha \beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3} \right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut être ré-écrite sous la forme suivante,

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{C} = 0,$$

tels que A, B et C sont définis dans (2.5). Les solutions de cette équation sont données par,

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 = -\frac{1}{2\mathbf{A}} \left(\mathbf{B} - \sqrt{\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}} \right) \\ \mathbf{Y}_2 = -\frac{1}{2\mathbf{A}} \left(\mathbf{B} + \sqrt{\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}} \right) \end{cases}$$

avec $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C} > 0$. On obtient deux cas possibles d'existence de points équilibres :

— Premier cas $A < 0$ et $\forall B$, ça implique que

$$Y_1 < 0 \text{ rejeté}$$

et

$$Y_2 > 0$$

les équations (2.8, 2.9, 2.10) pour $Y_2 > 0$ implique que

$$\begin{cases} \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{T} > \mathbf{0} \\ \mathbf{Z} > \mathbf{0} \end{cases}$$

— Deuxième cas $A > 0$ et $B > 0$, implique que

$$Y_1 < 0 \text{ rejeté}$$

et

$$Y_2 < 0 \text{ rejeté}$$

Alors, on trouve le point d'équilibre suivant

$$E_0 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_N^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1} \\ \Delta_+ \\ \frac{\beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1)} + \frac{\sigma_6 \Delta_+}{\sigma_5 \sigma_3} \\ \frac{\tau_1^\alpha \beta^\alpha \mu_N^\alpha}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma_3 ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1)} + \left(\frac{\sigma_6}{\sigma_5 \sigma_3} + \frac{\lambda_1^\alpha}{\sigma_4} \right) \Delta_+ \end{pmatrix}.$$

■

5 La stabilité du point équilibre E_0

Afin de faire une étude de stabilité de point équilibre, on va écrire le système linéarisé du système (2.3), on obtient

$$\begin{pmatrix} D^\alpha \mathbf{S}(t) \\ D^\alpha \mathbf{I}_o(t) \\ D^\alpha \mathbf{I}_b(t) \\ D^\alpha \mathbf{R}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} - \sigma_1 & -(\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} & 0 & 0 \\ (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} + \delta_2^\alpha & (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} - \sigma_2 & 0 & \lambda_2^\alpha \\ \beta^\alpha & \theta_1^\alpha & -\sigma_3 & \tau_2^\alpha \\ 0 & \lambda_1^\alpha & \tau_1^\alpha & -\sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{I}_o(t) \\ \mathbf{I}_b(t) \\ \mathbf{R}(t) \end{pmatrix},$$

avec la matrice jacobienne

$$J(E) = \begin{pmatrix} -(\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} - \sigma_1 & -(\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} & 0 & 0 \\ (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{Y} + \delta_2^\alpha & (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{X} - \sigma_2 & 0 & \lambda_2^\alpha \\ \beta^\alpha & \theta_1^\alpha & -\sigma_3 & \tau_2^\alpha \\ 0 & \lambda_1^\alpha & \tau_1^\alpha & -\sigma_4 \end{pmatrix}.$$

On calcule $J(E_0)$, on trouve

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ - \sigma_1 & \frac{-(\delta_1 N)^\alpha \mu_N^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1} & 0 & 0 \\ (\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \delta_2^\alpha & \frac{(\delta_1 N)^\alpha \mu_N^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1} - \sigma_2 & 0 & \lambda_2^\alpha \\ \beta^\alpha & \theta_1^\alpha & -\sigma_3 & \tau_2^\alpha \\ 0 & \lambda_1^\alpha & \tau_1^\alpha & -\sigma_4 \end{pmatrix}$$

— avec Δ_+ et Δ_- sont définis dans (2.4).

Le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit,

$$\begin{aligned}
 & P_\lambda(J(E_0)) \\
 = & \lambda^4 + ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_2) \lambda^3 \\
 & + ((\sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_2) ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1) + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_3 \sigma_2 - \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha + \sigma_4 \sigma_2 - \tau_1^\alpha \tau_2^\alpha \\
 & \quad + \frac{(\delta_1 N)^\alpha \mu_N^\alpha ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \delta_2^\alpha)}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1}) \lambda^2 \\
 & + ((\sigma_3 \sigma_4 + \sigma_3 \sigma_2 - \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha + \sigma_4 \sigma_2 - \tau_1^\alpha \tau_2^\alpha) ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1) - \theta_1^\alpha \tau_1^\alpha \lambda_2^\alpha - \sigma_3 \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha \\
 & \quad + \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 - \tau_1^\alpha \sigma_2 \tau_2^\alpha + \frac{(\sigma_3 + \sigma_4) (\delta_1 N)^\alpha \mu_N^\alpha ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \delta_2^\alpha)}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1}) \lambda \\
 & + (\sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 - \tau_1^\alpha \sigma_2 \tau_2^\alpha - \theta_1^\alpha \tau_1^\alpha \lambda_2^\alpha - \sigma_3 \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha) ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1) \\
 & + (\delta_1 N)^\alpha \mu_N^\alpha \frac{(\sigma_3 \sigma_4 - \tau_1^\alpha \tau_2^\alpha) ((\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \delta_2^\alpha) + \beta^\alpha \tau_1^\alpha \lambda_2^\alpha}{(\delta_1 N)^\alpha \Delta_+ + \sigma_1}
 \end{aligned}$$

On fait remarquer qu'il est très difficile de calculer les racines (valeurs propres) de ce polynôme, c'est la raison qui nous a poussée à faire une étude de stabilité numérique du point équilibre dans le dernier chapitre.

Chapitre 3

La Méthode des différences finies sur les équations différentielles fractionnaires

La méthode des différences finies est l'une des plus anciennes méthodes qui permet de calculer numériquement les solutions des équations différentielles, cette méthode consiste à approcher la dérivée d'une fonction inconnue U (d'un problème donné) par une combinaison linéaire des valeurs de cette fonction U prises en un nombre fini de points, ces points proviennent de la discrétisation du domaine d'étude, donc on a réduit le problème aux limites en un système d'équations algébriques. L'idée de ce chapitre consiste à expliquer comment appliquer cette méthode sur les équations différentielles fractionnaires (EDF).

1 Le principe de la méthode des différences finies sur les EDF

De manière générale un problème fractionnaire continu prend la forme suivante pour $n - 1 < \alpha < n$,

$$\begin{cases} {}_c D_{t_0, t}^\alpha U(t) = f(t, U(t)), t \in]a, b] \\ U^{(j)}(a) = U_0^{(j)}, j = 0, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

On propose de décrire une approximation de la solution du problème fractionnaire (3.1) par la méthode des différences finies. Plusieurs schémas d'approximation de la dérivée fractionnaire sont possibles, mais le schéma qui semble approprié et qui nous donne une bonne approximation de la solution exacte du problème (3.1) est le schéma de Grünwald-Letnikov (1.1). Notre but est de chercher en chaque point t_i de la discrétisation du domaine $]a, b]$ une valeur approchée de la solution, notée U_i , lorsque le pas de la discrétisation h est petit (sans être nul), le schéma aux différences finies constitue une bonne approximation de la dérivée de la fonction inconnue U , dans le sens où l'erreur commise dans cette approximation tend vers 0 quand h tend vers 0, autrement dit, le nombre de points de discrétisation de domaine est assez grand.

1.1 Résolution d'une équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre α à coefficients non constants

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_c D_{t_0, t}^\alpha U(t) + a(t)U(t) = f(t) & t \in]b, c[\\ U^{(j)}(b) = \gamma_j, \quad j = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.2)$$

où

- ${}_c D_{t_0, t}^\alpha$: définie la dérivation au sens de Caputo d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$), tel que $n-1 < \alpha < n$,
- $U^{(j)}(b)$: représentent les conditions initiales,
- $a(t)$: est une fonction continue sur $[b, c]$,
- $f(t)$: le second membre qui est une fonction appartenant au même espace que la solution.

On remplace la dérivée du Caputo par la formule (1.4) (voir chapitre 1), donc le problème (3.2) devient

$$\begin{cases} {}_{RL} D_{t_0, t}^\alpha U(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(b)(t-b)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + a(t)U(t) = f(t) & t \in]b, c[\\ U^{(j)}(b) = \gamma_j \quad j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour la résolution numérique de ce problème on passe par les démarches suivantes :

- Discrétisation du domaine $[b, c]$.
- L'approximation du problème fractionnaire continue (3.3) par un problème fractionnaire discret (P_{dis}).
- Résolution du système linéaire discret qui en découle par la méthode des différences finies.

Discrétisation

Dans notre cas $I = [b, c]$, considérant alors une subdivision de $[b, c]$ en N sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur h où $h = \frac{c-b}{N}$ est le pas de la discrétisation, $i = 0, 1, \dots, N-1$ et $t_i = b + ih$ avec $t_N = c$.

Approximation du problème continue

On transforme le problème (3.3) en un problème discret

$$\begin{cases} {}_{RL} D_{t_0, t}^\alpha U(t_i) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(t_0)(t_i - t_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + a(t_i)U(t_i) = f(t_i) & t_i \in [t_i, t_{i+1}] \\ U^{(j)}(t_0) = \gamma_j \quad j = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.4)$$

En utilisant le schéma au différences finies pour estimer la dérivée fractionnaire dans l'équation différentielle du problème (3.4) par une combinaison de valeurs de la fonction U en chaque point de la discrétisation, cette estimation est basée sur le schéma de Grünwald–Letnikov (1.1) (voire chapitre 1), on obtient

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^i w_j^\alpha U(t_{i-j}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(t_0)(t_i - t_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + a(t_i)U(t_i) = f(t_i) \quad (3.5)$$

On note par U_i l'approximation de $U(t_i)$ et on varie i de 0 à N dans l'équation (3.5), on trouve pour $i = 0$,

$$U_0 = \gamma$$

pour $i = 1$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_1 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_1 - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_1 - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_1 U_1 = f_1$$

pour $i = 2$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_2 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_2 - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_2 - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_2 - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_2 U_2 = f_2$$

pour $i = 3$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_3 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_3^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_3 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_3 - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_3 - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_3 - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_3 U_3 = f_3$$

pour $i = 4$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_4 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_3 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_3^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_4^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_4 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_4 - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_4 - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_4 - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_4 U_4 = f_4$$

⋮

pour $i = N - 1$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_{N-1} + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-2} + \dots + h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_{N-1} - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_{N-1} - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_{N-1} - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_{N-1} - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_{N-1} U_{N-1} = f_{N-1}$$

pour $i = N$

$$h^{-\alpha} w_0^\alpha U_N + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-1} + \dots + h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_N^\alpha U_0 - \left(\frac{U_0(t_N - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{U_0^{(1)}(t_N - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{U_0^{(2)}(t_N - t_0)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \dots + \frac{U_0^{(n-1)}(t_N - t_0)^{(n-1)-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right) + a_N U_N = f_N$$

Les conditions initiales

$$U^{(j)}(t_0) = \gamma_j \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Si on prend par exemple $0 < \alpha < 1$, on obtient un système linéaire de $(N + 1)$ équations à N inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \gamma \\ (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_1)U_1 = f_1 - \left(h^{-\alpha} w_1^\alpha - \frac{(t_1 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \\ h^{-\alpha} w_1^\alpha U_1 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_2)U_2 = f_2 - \left(h^{-\alpha} w_2^\alpha - \frac{(t_2 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \\ h^{-\alpha} w_2^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_2 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_3)U_3 = f_3 - \left(h^{-\alpha} w_3^\alpha - \frac{(t_3 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \\ h^{-\alpha} w_3^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_3 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_4)U_4 = f_4 - \left(h^{-\alpha} w_4^\alpha - \frac{(t_4 - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \\ \vdots \\ h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha U_1 + \dots + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-2} + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_{N-1})U_{N-1} = f_{N-1} - \left(h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha - \frac{(t_{N-1} - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \\ h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha U_1 + \dots + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-1} + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + a_N)U_N = f_N - \left(h^{-\alpha} w_N^\alpha - \frac{(t_N - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) U_0 \end{array} \right.$$

Ce qui conduit à un système d'équations algébriques linéaires,

$$A_h U_h = F_h$$

où A_h une matrice triangulaire inférieur, de dimension $(N + 1) \times (N + 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_1) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & h^{-\alpha} w_1^\alpha & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_2) & 0 & \dots \\ 0 & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_3) & 0 \\ 0 & h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha & h^{-\alpha} w_{N-3}^\alpha & \vdots & \vdots \\ 0 & h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha & h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha & h^{-\alpha} w_{N-3}^\alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_{N-1}) & 0 \\ \dots & h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & h^{-\alpha} w_0^\alpha + a(t_N) \end{pmatrix}$$

et F_h un vecteur de taille $N + 1$,

$$F = \begin{pmatrix} U_0 \\ f(t_1) - (h^{-\alpha} w_1^\alpha - \frac{(t_1-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \\ f(t_2) - (h^{-\alpha} w_2^\alpha - \frac{(t_2-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \\ f(t_3) - (h^{-\alpha} w_3^\alpha - \frac{(t_3-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \\ f(t_4) - (h^{-\alpha} w_4^\alpha - \frac{(t_4-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) - (h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha - \frac{(t_{N-1}-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \\ f(t_N) - (h^{-\alpha} w_N^\alpha - \frac{(t_N-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)})U_0 \end{pmatrix},$$

avec le vecteur inconnu,

$$U_h = (U_0, U_1, \dots, U_N)^\top.$$

Si $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$), on estime les dérivées classiques qui apparaissent dans les conditions initiales et dans le calcul de la somme, par un schéma numérique progressif qu'on va le trouver par le développement de Taylor en point t_0 . Puis, on va déterminer le système linéaire et la représentation matricielle de la même manière que précédemment.

2 La technique de découplage et quasi-linéarisation (DQLT)

Ce qu'on a présenté dans la section précédente est la méthode pour résoudre une seule équation, dans cette section on présente une technique, qu'on va associer à cette méthode pour résoudre un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaire et couplé.

Pour illustrer cette technique, on considère le système d'équations différentielles fractionnaires non linéaire et couplé sur un domaine Ω ,

$$\begin{cases} D^\alpha U_1(t) = f_1(t, U_1, U_2, \dots, U_p) \\ D^\alpha U_2(t) = f_2(t, U_1, U_2, \dots, U_p) \\ \vdots \\ \vdots \\ D^\alpha U_p(t) = f_p(t, U_1, U_2, \dots, U_p). \end{cases} \quad (3.6)$$

La technique de découplage et quasi-linéarisation (DQLT) est une technique itérative qui permet de transformer le système (3.6) à un système découplé et linéaire dans chaque itération, en écrivant ce système sous une forme variationnelle par le schéma suivant,

$$\begin{cases} D^\alpha U_1^{(k+1)}(t) = f_1(t, U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_p^{(k)}) \\ D^\alpha U_2^{(k+1)}(t) = f_2(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k)}, \dots, U_p^{(k)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ D^\alpha U_p^{(k+1)}(t) = f_p(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k+1)}, \dots, U_p^{(k)}) \end{cases}$$

où $U_i^{(k+1)}, U_i^{(k)}$ sont les approximations de la solution par la méthode présentée dans la section précédente à l'itération en cours et à l'itération précédente, respectivement.

L'algorithme de DQLT

| $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, \dots, U_p^{(0)}$ les profils initiaux (données)

| **Tant que** Erreur_{DQLT} > à une tolérance **Faire**

| $U_1^{(k+1)} = \text{solver}(t, U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, U_3^{(k)}, \dots, U_p^{(k)})$

| $U_2^{(k+1)} = \text{solver}(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k)}, U_3^{(k)}, \dots, U_p^{(k)})$

| $U_3^{(k+1)} = \text{solver}(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k+1)}, U_3^{(k)}, \dots, U_p^{(k)})$

| $U_4^{(k+1)} = \text{solver}(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k+1)}, U_3^{(k+1)}, U_4^{(k)}, \dots, U_p^{(k)})$

| \vdots

| $U_p^{(k+1)} = \text{solver}(t, U_1^{(k+1)}, U_2^{(k+1)}, U_3^{(k+1)}, \dots, U_{p-1}^{(k+1)}, U_p^{(k)})$

| Erreur_{DQLT} = $\max\left(\left\|U_1^{(k+1)} - U_1^{(k)}\right\|_2, \left\|U_2^{(k+1)} - U_2^{(k)}\right\|_2, \dots, \left\|U_p^{(k+1)} - U_p^{(k)}\right\|_2\right)$

| **Fin de Tant que.**

— **solver** : La procédure de résolution de l'équation par la méthode des différences finies.

— $\|\cdot\|_2$: est la norme euclidienne.

Chapitre 4

Application et Simulation

Dans ce chapitre, on va illustrer les capacités de notre méthode (différences finies) combinée avec la technique de découplage et de la quasi-linéarisation sur des exemples, en commençant par des exemples académiques (on connaît leurs solutions analytiques). On termine avec des résultats numériques sur la dynamique des épidémies de l'obésité et de la boulimie. La résolution numérique sera faite sur le logiciel "Matlab".

1 Tests numériques

1.1 Exemple 1

On considère le problème fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha U(t) + U(t) = 0, & t \in]0, 1] \\ U(0) = 1 & \text{pour } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

on transforme le problème au sens de Riemann-Liouville,

$$\begin{aligned} {}_{\text{RL}}D_{t_0, t}^\alpha U(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + U(t) &= 0, & t \in]0, 1] \\ U(0) &= 1 & \text{pour } 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

La solution exacte de (4.1) est donnée par la fonction de Mittag-Leffler d'ordre α :

$$U_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

Considérant une subdivision de $[0, 1]$ en N sous intervalles tel que $h = \frac{1}{N}$ est le pas de la discrétisation, $i = 0, \dots, N-1$ et $t_i = ih$ avec $t_N = 1$.

En utilisant le schéma de Grünwald-Letnikov (1.1), le problème (4.1) devient pour $0 < \alpha < 1$ et $i = 0, \dots, N$,

$$\begin{cases} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^i w_j^\alpha U(t_{i-j}) - \frac{t_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} U_0 + U(t_i) = 0 \\ U(t_0) = 1. \end{cases}$$

Donc, on a le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 1 \\ (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_1 = -\left(h^{-\alpha} w_1^\alpha - \frac{t_1^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ h^{-\alpha} w_1^\alpha U_1 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_2 = -\left(h^{-\alpha} w_2^\alpha - \frac{t_2^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ h^{-\alpha} w_2^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_2 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_3 = -\left(h^{-\alpha} w_3^\alpha - \frac{t_3^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ h^{-\alpha} w_3^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_3 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_4 = -\left(h^{-\alpha} w_4^\alpha - \frac{t_4^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ h^{-\alpha} w_4^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_3^\alpha U_2 + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_3 + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_4 + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_5 = -\left(h^{-\alpha} w_5^\alpha - \frac{t_5^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_{N-3}^\alpha U_2 + \dots + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_{N-3} + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-2} + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_{N-1} \\ = -\left(h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha - \frac{t_{N-1}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha U_1 + h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha U_2 + \dots + h^{-\alpha} w_2^\alpha U_{N-2} + h^{-\alpha} w_1^\alpha U_{N-1} + (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1)U_N \\ = -\left(h^{-\alpha} w_N^\alpha - \frac{t_N^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \end{array} \right.$$

la représentation matricielle de ce système linéaire est

$$AU = F,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{-\alpha} w_1^\alpha & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) & 0 & 0 \\ \vdots & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) & 0 \\ \vdots & h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) \\ \vdots & h^{-\alpha} w_4^\alpha & h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & \ddots \\ \vdots & \vdots & h^{-\alpha} w_4^\alpha & h^{-\alpha} w_3^\alpha & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha & \ddots & \ddots & h^{-\alpha} w_4^\alpha \\ 0 & h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha & h^{-\alpha} w_{N-2}^\alpha & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) & 0 \\ h^{-\alpha} w_4^\alpha & h^{-\alpha} w_3^\alpha & h^{-\alpha} w_2^\alpha & h^{-\alpha} w_1^\alpha & (h^{-\alpha} w_0^\alpha + 1) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(h^{-\alpha} w_1^\alpha - \frac{t_1^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ -\left(h^{-\alpha} w_2^\alpha - \frac{t_2^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ -\left(h^{-\alpha} w_3^\alpha - \frac{t_3^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ -\left(h^{-\alpha} w_4^\alpha - \frac{t_4^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ -\left(h^{-\alpha} w_5^\alpha - \frac{t_5^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ -\left(h^{-\alpha} w_{N-1}^\alpha - \frac{t_{N-1}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ -\left(h^{-\alpha} w_N^\alpha - \frac{t_N^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \end{pmatrix}$$

$$U = (U_0, U_1, U_2, \dots, U_N)^T$$

Pour différentes valeurs de N et α , on obtient les résultats dans le tableau 4.1.

TABLEAU 4.1 – L'erreur globale.

N	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
50	$E_1=0.0739$	$E_1=0.0583$	$E_1=0.0394$	$E_1=0.0218$	$E_1=0.0078$
100	$E_1=0.0710$	$E_1=0.0556$	$E_1=0.0372$	$E_1=0.0206$	$E_1=0.0069$
125	$E_1=0.0703$	$E_1=0.0550$	$E_1=0.0368$	$E_1=0.0203$	$E_1=0.0067$
170	$E_1=0.0694$	$E_1=0.0542$	$E_1=0.0363$	$E_1=0.0201$	$E_1=0.0066$

tel qu'on note E_1 le maximum de l'erreur ponctuelle pour différentes valeurs de N,

$$E_1 = \max |U_i - U_e(t_i)|$$

où U_i est la solution numérique obtenue en chaque point de discrétisation par la méthode des différences finies, et U_e la solution exacte de problème.

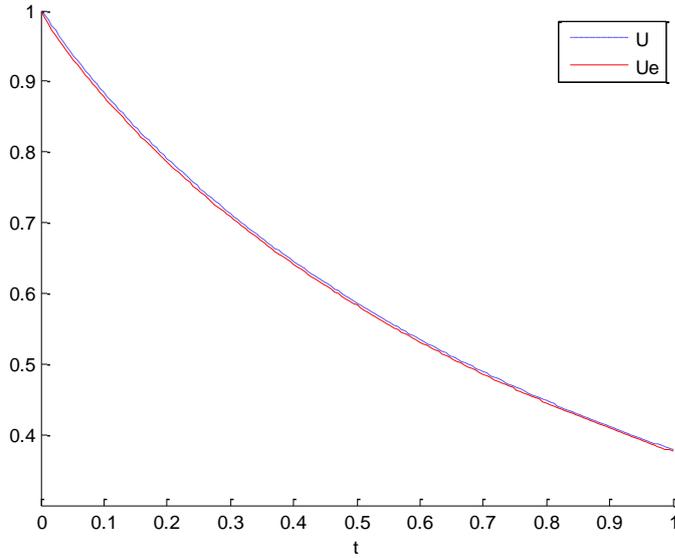
Commentaire : On remarque que pour chaque $\alpha \in [0.5, 0.9]$, quand on augmente N (nombre de points de discrétisation) l'erreur diminue c'est à dire on s'approche plus en plus à la solution exacte. On peut voir cette approximation dans la figure 4.1.

1.2 Exemple 2

Pour $0 < \alpha < 1$, $t \in]0, 1]$, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha U(t) = U^2(t) + V(t) + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha} - t^{2\beta} - \sqrt{t}^\gamma \\ D^\alpha V(t) = V^2(t) + U(t) + \frac{\Gamma(\frac{\gamma}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2} + 1 - \alpha)} t^{\frac{\gamma}{2} - \alpha} - t^\gamma - t^\beta, \end{cases} \quad (4.2)$$

FIGURE 4.1 – Les graphes de la solution exacte et approchée.



avec les conditions initiales

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

On connait la solution exacte

$$\begin{cases} U_e(t) = t^\beta \\ V_e(t) = \sqrt{t}^\gamma. \end{cases}$$

On fait remarquer, qu'on ne peut pas résoudre chaque équation indépendamment de l'autre dans le problème (4.2), pour cette raison on utilise la technique de DQLT pour linéariser et découpler ce système en deux équations différentielles fractionnaires d'ordre α indépendantes et linéaires.

En écrivant le système (4.2) sous forme variationnelle avec des profils initiaux par le schéma simple suivant

$$\begin{cases} D^\alpha U^{(k+1)}(t) - U^{(k)}(t)U^{(k+1)}(t) = V^{(k)}(t) + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha} - t^{2\beta} - \sqrt{t}^\gamma \\ D^\alpha V^{(k+1)}(t) - V^{(k)}(t)V^{(k+1)}(t) = U^{(k+1)}(t) + \frac{\Gamma(\frac{\gamma}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2} + 1 - \alpha)} t^{\frac{\gamma}{2} - \alpha} - t^\gamma - t^\beta, \end{cases} \quad (4.3)$$

les conditions initiales

$$\begin{cases} U^{(k+1)}(0) = 0 \\ V^{(k+1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Les profils initiaux

$$\begin{cases} U^{(0)}(t) = 1 \\ V^{(0)}(t) = 1. \end{cases}$$

Ensuite, dans chaque itération k , on applique la méthode des différences finies sur chaque équation du problème (4.3) indépendamment.

On définit l'erreur globale en chaque point (l'erreur de la méthode, l'erreur de découplage et l'erreur de la machine) par

$$E_1 = (|U_1 - U_e(t_1)|, |U_2 - U_e(t_2)|, \dots, |U_N - U_e(t_N)|),$$

$$E_2 = (|V_1 - V_e(t_1)|, |V_2 - V_e(t_2)|, \dots, |V_N - V_e(t_N)|),$$

où U_i, V_i sont les solutions approximatives en chaque point de discrétisation obtenues par la méthode des différences finies combinée avec DQLT, et U_e, V_e les solutions exactes de ce problème.

Et on définit l'erreur de DQLT

$$E_{DQLT} = \max\left(\|U^{(k+1)} - U^{(k)}\|_2, \|V^{(k+1)} - V^{(k)}\|_2\right)$$

On trouve les résultats numériques dans les tableaux 4.2-4.3

TABLEAU 4.2 – L'erreur globale de U.

N	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
100	$E_U=0.3823$	$E_U=0.0843$	$E_U=0.0320$	$E_U=0.0095$	$E_U=0.0064$
120	$E_U=0.2952$	$E_U=0.0698$	$E_U=0.0267$	$E_U=0.0075$	$E_U=0.0064$
130	$E_U=0.2656$	$E_U=0.0643$	$E_U=0.0246$	$E_U=0.0068$	$E_U=0.0064$
170	$E_U=0.1905$	$E_U=0.0492$	$E_U=0.0189$	$E_U=0.0048$	$E_U=0.0061$

tel que E_U représente le maximum de l'erreur globale E_1 .

TABLEAU 4.3 – L'erreur globale de V.

N	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
100	$E_V=0.4079$	$E_V=0.0858$	$E_V=0.0261$	$E_V=0.0035$	$E_V=0.0271$
120	$E_V=0.3147$	$E_V=0.0712$	$E_V=0.0218$	$E_V=0.0031$	$E_V=0.0241$
130	$E_V=0.2830$	$E_V=0.0656$	$E_V=0.0202$	$E_V=0.0030$	$E_V=0.0228$
170	$E_V=0.2029$	$E_V=0.0503$	$E_V=0.0156$	$E_V=0.0027$	$E_V=0.0191$

tel que E_V représente le maximum de l'erreur globale E_2 .

Commentaire : On remarque pour chaque α , l'augmentation de N améliore la précision de la solution, car l'erreur diminue jusqu'à atteindre 0.0061 et 0.0191 pour U et V respectivement pour $\alpha = 0.9$. Les figures 4.2 et 4.3 montrent que pour chaque α la solution approchée est en adéquation avec la solution exacte.

Pour la figure 4.4, on remarque que l'erreur induite par la technique de découplage et de la quasi-linéarisation diminue lorsque le nombre des itérations augmente, ce qui explique la convergence de la solution.

FIGURE 4.2 – les graphes de la solution exacte et approchée de U.

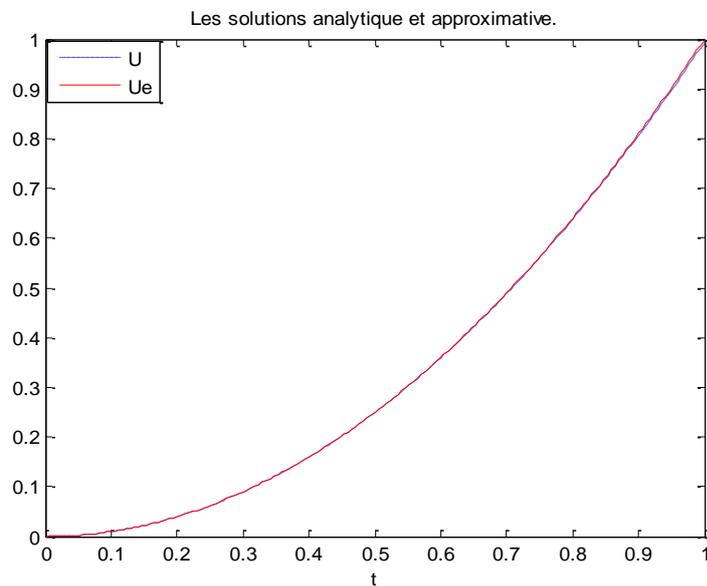


FIGURE 4.3 – les graphes de la solution exacte et approchée de V.

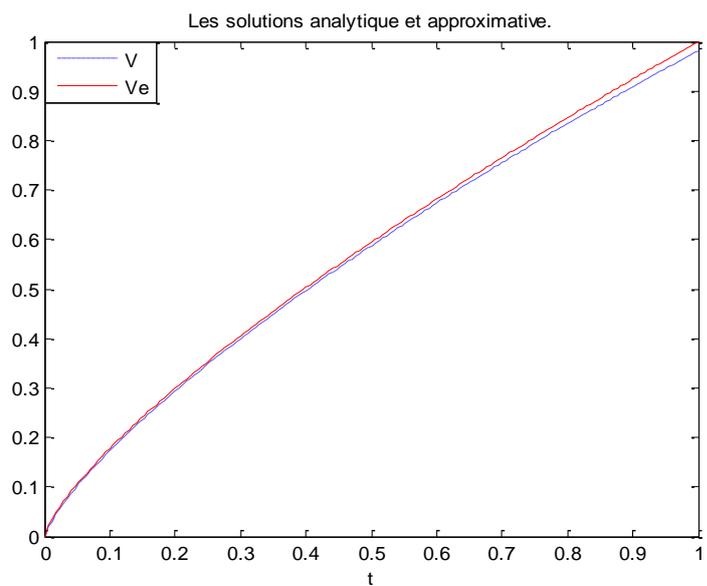
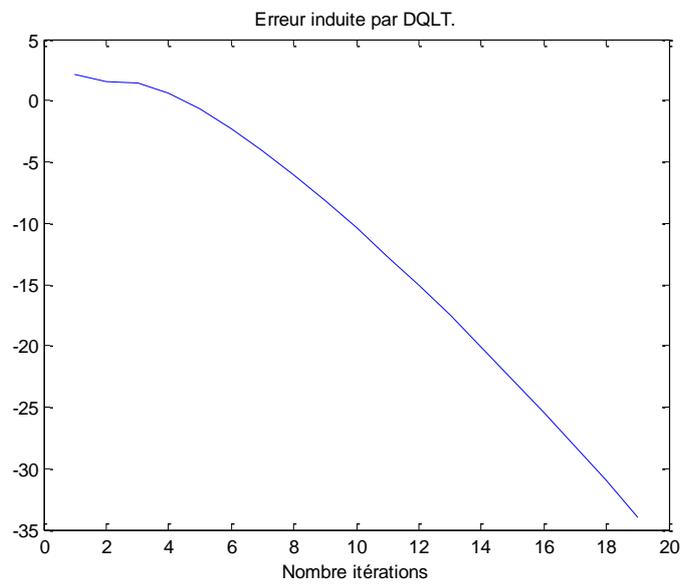


FIGURE 4.4 – L'erreur de découplage pour l'exemple 2.



2 Simulation numérique du modèle de transmission de l'obésité et de la boulimie

Dans cette section, on présente la simulation numérique du modèle de la dynamique de l'obésité et de la boulimie dans une population donnée, décrit dans le chapitre 2. Dans la suite, on fixe une période de 39 ans pour étudier l'évolution de l'obésité et la boulimie.

Le modèle s'écrit pour $\alpha > 0$, comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{S}(t) = \mu_N^\alpha - (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) - (\beta^\alpha + \mu_D^\alpha + \delta_2^\alpha) \mathbf{S}(t). \\ D^\alpha \mathbf{I}_o(t) = (\delta_1 N)^\alpha \mathbf{S}(t) \mathbf{I}_o(t) + \delta_2^\alpha \mathbf{S}(t) + \lambda_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\theta_1^\alpha + \lambda_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_o(t). \\ D^\alpha \mathbf{I}_b(t) = \beta^\alpha \mathbf{S}(t) + \theta_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) + \tau_2^\alpha \mathbf{R}(t) - (\tau_1^\alpha + \mu_1^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{I}_b(t). \\ D^\alpha \mathbf{R}(t) = \tau_1^\alpha \mathbf{I}_b(t) + \lambda_1^\alpha \mathbf{I}_o(t) - (\tau_2^\alpha + \lambda_2^\alpha + \mu_D^\alpha) \mathbf{R}(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{S}(t_0) = 1 \\ \mathbf{I}_o(t_0) = 0 \\ \mathbf{I}_b(t_0) = 0 \\ \mathbf{R}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

où

- $\mathbf{S}(t_0)$ représente la probabilité des individus susceptibles à l'obésité ou de la boulimie à l'instant t_0
- $\mathbf{I}_o(t_0)$ représente la probabilité des individus obèses à l'instant t_0 ,
- $\mathbf{I}_b(t_0)$ représente la probabilité des individus boulimiques à l'instant t_0 ,

avec les données biologiques qui sont présentés dans le tableau 4.4 [8].

Avec les données mathématique

$$\begin{cases} n = 170 \\ \text{Tolérance} = 10^{-13} \\ \alpha = 0.7 \end{cases}$$

Par l'application de notre méthode (différences finies + DQLT) pour le problème (4.4-4.5), on obtient les résultats dans la figure 4.5.

Le problème (4.4-4.5) admet une solution stationnaire dans \mathbb{R}_+^4

$$E_0 = (0.2740, 0.0701, 0.0264, 0.0232).$$

La matrice jacobienne au point E_0 est

$$MJ(E_0) = \begin{pmatrix} -0.6007 & -0.5477 & 0 & 0 \\ 0.1492 & -0.0409 & 0 & 0.0398 \\ 0.0210 & 0.0859 & -0.4695 & 0.0647 \\ 0 & 0.0642 & 0.0310 & -0.5350 \end{pmatrix},$$

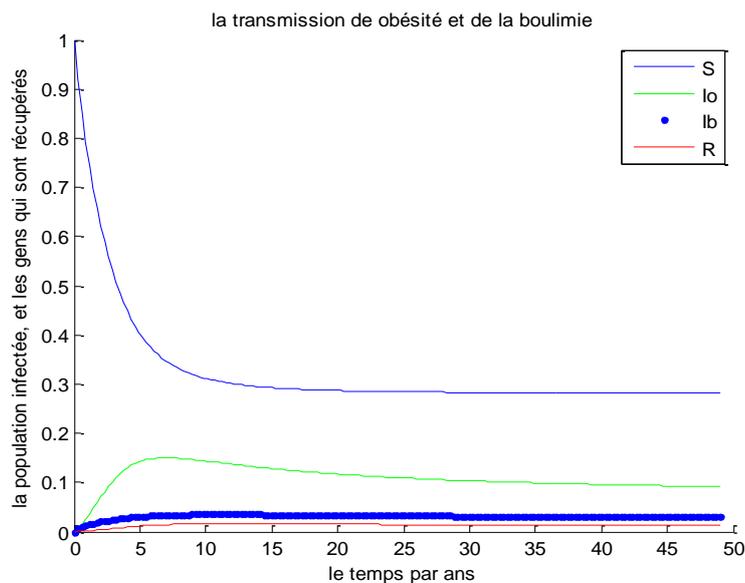
tel que les valeurs propres de $MJ(E_0)$ sont

$$\begin{cases} val1 = -0.5546 \\ val2 = -0.2982 \\ val3 = -0.3540 \\ val4 = -0.4393. \end{cases}$$

TABLEAU 4.4 – les données biologiques.

Paramètre	Estimation
N (population totale)	100000
μ_N (Taux de natalité sains)	0.07595
β (taux des individus qui devient boulimiques)	0.004
μ_D (Taux de mortalité naturelle)	0.3
δ_1 (taux d'infection à l'obésité)	$2.69 \cdot 10^{-5}$
δ_2 (le risque de l'obésité pour de raisons non contagieuses)	0.0012
θ_1 (taux des individus obèses qui devient boulimique)	0.03
λ_1 (taux de récupération de l'obésité)	0.0198
λ_2 (le risque de rechute à l'obésité)	0.01
μ_1 (Taux de mortalité dû aux complications des maladies)	0.001
τ_1 (taux de récupération de la boulimie)	0.007
τ_2 (taux de rechute à la boulimie)	0.02

FIGURE 4.5 – Les graphes des différents états des maladies.

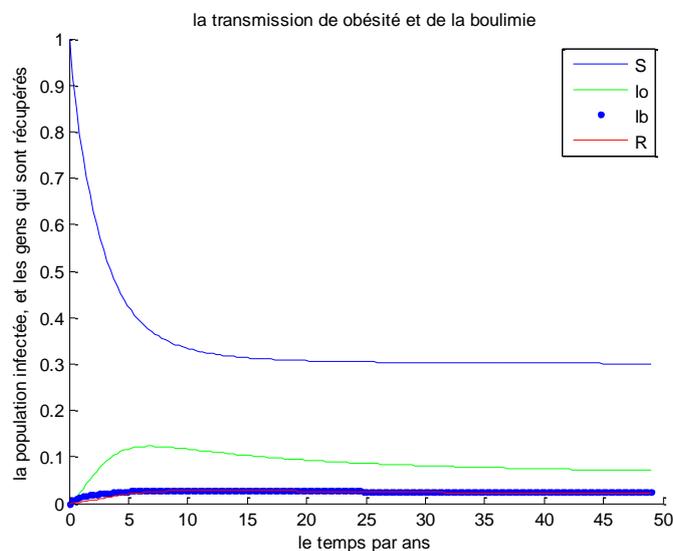


On a trouvé que les valeurs propres de la matrice jacobienne autour de point E_0 sont toutes négatives, ce qui montre que cette solution stationnaire est stable.

Interprétation de la figure 4.5 : au début, on remarque que la population des susceptibles diminue rapidement et atteint son minimum au bout de 25 *ans*, puis elle va se stabiliser dans cet état $S^* = 0.2740$, ce qui explique que la population des obèses va augmenter en même temps jusqu'à atteindre son maximum à $T = 8 \text{ ans}$, ensuite elle diminue sensiblement jusqu'à atteindre son minimum après $T = 40 \text{ ans}$, et elle se stabilise à l'état d'équilibre $I_o^* = 0.0701$. On constate aussi que la proportion des boulimiques augmente jusqu'à atteindre le maximum à $T = 12 \text{ ans}$, puis elle diminue jusqu'à atteindre un minimum après $T = 30 \text{ ans}$, ensuite elle se stabilise à partir de ce moment à $I_b^* = 0.0264$. La proportion des résistants augmente sensiblement jusqu'à atteindre un maximum au bout de $T = 8 \text{ ans}$, puis elle diminue légèrement pour se stabiliser à $R^* = 0.0232$ à partir de $T = 20 \text{ ans}$.

Pour $\tau_1 = 0.05$ et $\lambda_1 = 0.05$, on obtient les résultats dans les figures 4.6.

FIGURE 4.6 – Les graphes des différents états des maladies.



On constate que pour différentes données biologique, la solution du problème (4.4-4.5) converge vers le même point équilibre.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a abordé un modèle pour étudier la transmission de maladies socialement contagieuses, on a donné une importance particulière à la formulation de modèle fractionnaire décrivant la dynamique de l'obésité et de la boulimie avec le temps. Pour la simulation numérique, on a utilisé la méthode des différences finies, les testes de cette méthode sur des exemples basés sur les dérivées fractionnaires ont montré que cette méthode donne des résultats très intéressant. De même que pour la simulation numérique du modèle fractionnaire de transmission de l'obésité et de la boulimie, les résultats obtenus sont adéquats avec la théorie biologique. Parmi les perspectives de cette étude, on peut envisager le modèle spatio-temporelle. On peut aussi améliorer l'approximation des dérivées fractionnaires pour donner de bonnes estimations de ce type de problème.

Bibliographie

- [1] Dj. MOULAY : Modélisation et analyse mathématique de systèmes dynamiques épidémiologie. Application au cas de Chikungunya. Mathématiques [math]. Université du Havre, 2011. Français. tel-00633827. [4](#), [9](#), [10](#)
- [2] M. DOLZ : Prévalence du diabète et de l'obésité dans le monde. Société francophone du diabète Avril 2016. [11](#)
- [3] A. Buzyn, I. Adenot : Surpoids et obésité de l'adulte : prise en charge médicale de premier recours. La Haute Autorité de Santé, septembre 2011. [13](#)
- [4] G. R. Kazour : La Boulimie : Conceptions psychopathologiques et approches thérapeutiques, Annales de philosophie et des sciences humaines. —N°22 (2006), pp. 257-285. [14](#), [16](#)
- [5] H. BRUCH : Les yeux et le ventre. Paris, Payot, 1978. [14](#), [15](#)
- [6] A. Amad, V. Camus : Psychiatrie de l'adulte. Psychiatrie de l'enfant et de l'adolescent. Addictologie, Collège national des universitaires en psychiatrie, 2014. [14](#)
- [7] J. Villeneuve : Évolution de l'obésité au Québec et au Canada. La société Objectif Prévention, Vol.30, N°5. 2007 [12](#)
- [8] D. J. Dutton and L. McLaren : The usefulness of “corrected” body mass index vs. Self-reported body mass index : comparing the population distributions, sensitivity, specificity, and predictive utility of three correction equation using canadian population-based data, BMC public Health (2014), 14-430 [35](#)
- [9] K. Ejima, K. Aihara and H. Nishiura : Modeling the obesity epidemic : social contagion and its implications for control, Theor. Biol. Med. Model. 10 (2013), 1-13. [11](#), [13](#), [16](#)
- [10] N. Sartorius : The ICD-10 Classification of Mental and Behavioural Disorders. World Health Organization, 1992. [14](#), [15](#)
- [11] C. Li and F. Zeng : The finite Difference Methods for Fractional Ordinary Differential Equations, Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(2) :149-179, DOI : 10.1080/01630563.2012.706673. 2013. [4](#)
- [12] H. Sankaranarayanan : Grünwald-type approximations and boundary conditions for one-sided fractional derivative operators. Thesis. University of Otago, Dunedin, New Zealand. October 2014. [4](#)
- [13] E. Sousa : How to approximate the fractional derivative. Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010. [4](#)
- [14] H. M. Nasir : Member, IACSIT, B.L.K.Gunawardana, and H.M.N.P. Abeyrathna, A Second Order Finite Difference Approximation for the Fractional Diffusion Equation. International Journal of Applied Physics and Mathematics, Vol.3, July 2013. [4](#)

- [15] Y. Li, Y. Chen : Lyapunov Stability of Fractional-order Nonlinear Systems : A Distributed-order Approach 2014.

4

Résumé

L'obésité et la boulimie posent aujourd'hui un véritable problème de santé publique. Elles sont causées par des comportements alimentaires pathologiques, de plus, elles entraînent plus de morbidité des maladies chroniques. Dans ce travail, on va élaboré un modèle épidémique composé d'un ensemble d'équations différentielles fractionnaires qui décrivent la transmission de ces épidémies et la relation entre eux. Ensuite, en utilisant pour la simulation numérique la méthode des différences finies basée sur le schéma de Grünwald-Letnikov adaptée à la technique de découplage et quasi-linéarisation dans le but de voir la dynamique de ce phénomène dans le temps.