MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

THEME :

Analyse et Contrôle des Systèmes Bidimensionnels et/ou de Lyapunov

Présenté par

L'étudiant : **BENYETTOU Kamel**

le 22 Mai 2017

Devant le Jury :

Présidente de jury : **Mlle KAISSERLI Zineb** Maître de Conférences B UMAB

Examinateur : **Mr. GHEZZAR Mohammed Amine** Maître assistant A UMAB

Encadreur : **Mr. BOUAGADA Djillali** Professeur UMAB

Année Universitaire 2016/2017

Table des matières

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

Mon encadreur pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de recherche très intéressant.

Remerciments

Je tiens à témoigner mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribués de près ou de loin au bon déroulement de ce travail de recherche :

- Mon encadreur Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université de Mostaganem pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de master, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche.

J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance, tout particulièrement :

Mademoiselle Zineb KAISSERLI, Maître de Conférences "B" à l'Université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de soutenance.

Monsieur Mohammed Amine GHEZZAR, Maitre Assistant "A" à l'Université de Mostaganem, pour ses conseils judicieux, les discussions fructueuses et son soutien de tous les instants durant mon cursus universitaire.

Tous les Professeurs que j'ai rencontré à mes côtés durant tout mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Enfin, je ne peux omettre mes parents et ma famille dont l'afection et le soutien continus ont constitué pour moi un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

INTRODUCTION

La théorie de contrôle est une science mathèmatique qui analyse les propiétés d'un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle) dans le but de l'amener d'un ètat initial donné à un état final souhaité.

Dans la modélisation de cette théorie, on peut avoir recours à des équations, systèmes différentiels ordinaires, aux dérivées partielles, fractionnaires et des problèmes d'optimisation. Pour cette raison, la théorie mathèmatique de contrôle est à l'intersection de nombreux domaines mathématiques.

Par exemple la conduite d'une voiture est un système dynamique contrôlé : le contrôle est l'angle dû au voulant, les pressions exercèes sur le frein et sur l'accélérateur et l'état est la position de la voiture sur la route.

Parmis ces types de systèmes, on cite les systèmes linéaires d'écrit par les équations :

$$\begin{cases} EX'(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

où $X(.) \in R^n$, $U(.) \in R^n$, E, A, B, C et D sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Ce dernier système est dit singulier si $det(E) = 0$ et standard si $E = I$, nombreuses sont les résultats qui ont ètè trouvé lors de l'analyse de cette classe de systèmes en terme de contrôlabilté, stabilité, observabilité, et positivité, pour plus de détails on se réfère à [1], [7], [12], [13], [14], [15] et [16]. Une autre classe de systèmes dits de Lyapunov souvant décrits par les équations d'états

$$\begin{cases} EX'(t) = AX(t) + X(t)B + FU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

où $F \in R^n$; notons que dans le cas où $B = 0$ on retrouve le système précèdent.

Notre travail a été structuré en quatre chapitres, en plus l'introduction et la conclusion et enfin des perspectives.

Dans le premier chapitre nous avons introduit les notions mathématiques de base (Algèbre linéaire, le produit de Kronecker, la vectorisation, la transformée de Laplace ,...) pour pouvoir étudier et résoudre les systèmes de Lyapunov. Le second a été consacré à la description d'espace d'état notament la trajectoire, la réponse des systèmes et des différentes conditions nécessaires et suffisantes de la contrôlabilité en utilisant la décomposition de Weierstrass dans le cas où l'ordre de dérivation du système est 1, ensuite pour le cas fractionnaire où l'ordre de dérivation α du système est arbitraire $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in N^*$. Nous utilisons la technique de vectorisation, issue de [1] et [2], et pour le système transformée nous dérivons des caractérisation en réponses à nos questions posées.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème d'énèrgie minimale unidimensionel (1D) où nous avons traité dans un premier temps le cas d'un système fractionnaire non singulier pour ce faire nous nous sommes basé sur les références suivantes(voir [6] et [9]), une nouvelle approche caractérisant les résultats concernant l'énergie minimale d'un système fractionnaire singulier, ces derniers ont été illustrés par deux exemples d'applications suivis de simulations numérique.

Le dernier chapitre traite alors le cas bidimensionel où nous avons considéré la classe des systémes discret-continu pour généraliser nos résultats. Nous terminons enfin notre mémoire par une conclusion générale et des perspctives.

Chapitre 1

Description des modèles linéaires de Lyapunov

1.1 Notions sur le produit de kronecker

En mathématiques, le produit de Kronecker est une opération importante pour le calcul matricielle. Il est ainsi dénommé du hommage au mathématicien allemand Leopold Kronecker. Dans cette section, nous rappelons un nouveau type de produit matriciel tout en exposant quelques de ces propriétés.

Définition 1.1.1 *[12]Le produit de Kronecker de deux matrices $A \in M_{mn}$ et $B \in M_{pq}$ est la matrice $A \otimes B$ définie par :*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & .. & .. & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & .. & .. & a_{2n}B \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1}B & a_{m2}B & .. & .. & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Exemple 1.1.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad et \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 15 & 18 & 20 & 24 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 27 & 21 & 36 & 28 \\ 35 & 42 & 40 & 48 \\ 7 & 14 & 8 & 16 \\ 63 & 49 & 72 & 56 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés du produit de Kronecker[1]

Soient $A \in M_{m_1,n_1}$, $B \in M_{m_2,n_2}$ $C \in M_{c,d}$ et $D \in M_{e,f}$,

1) Le produit de Kronecker est associatif c.à.d ,

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

2) Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition,

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

3) Le produit de Kronecker n'est pas commutatif,

$$(A \otimes B) \neq (B \otimes A)$$

4) Le produit de Kronecker est distributif par rapport au produit c.à.d,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

5) L'adjoint,

$$(A \otimes B)^* = (A^* \otimes B^*)$$

6) Si A et B sont inversibles alors,

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$$

7) Si $m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$ alors,

$$\begin{aligned} \det(A \otimes B) &= (\det(A))^{m_1}.(\det(B))^{n_1} \\ &= \det(B \otimes A) \end{aligned}$$

1.2 La vectorisation

Définition 1.2.1 *[1]Soit $A \in M_{m,n}$, on associe à A le vecteur de mn lignes qu'on le note par $Vec(A)$ et qui est définit par :*

$$Vec(A) = [a_{11}\ a_{21}.....a_{m1}, a_{12}\ .....\ a_{m2}\ ,\ a_{1n} \quad a_{mn}]^T$$

par un simple exemple : $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

alors,

$$Vec(A) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.2.1 *Application aux équations matricielles :*

1) $AX = B \Leftrightarrow (I \otimes A)Vec(X) \quad = Vec(B)$

2) $AX + XB = C \;\; \Leftrightarrow \quad ((I \otimes A) + (B^T \otimes I))Vec(X) \;\; = Vec(C)$

3) $AX + YB = C \;\; \Leftrightarrow \quad (I \otimes A)Vec(X) + (B^T \otimes I)Vec(Y) \;\; = Vec(C)$

4) $AXB = C \qquad \Leftrightarrow \quad (B^T \otimes A)Vec(X) = Vec(C)$

1.3 La transformée de Laplace

Définition 1.3.1 *Une fonction de la variable t est dite causale, si elle est nulle pour $t < 0$.*

Définition 1.3.2 *Soit f une fonction du temps t causale, sa transformée de Laplace notée $F(s)$ est définie par :*

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

telle que s est un nombre complexe.

F existe que si cette intégrale à un sens i.e converge.

1.4 Des généralités sur l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des espaces vectoriels et des transformations linéaires, elle sert aussi à la formalisation générale de la théorie de systèmes d'équations linéaires. Pour cette raison nous allons énoncer quelques rèsultats classique qui vont nous être très utile par la suite.

Définition 1.4.1 *Valeurs et vecteurs propres*

Soit $A \in M_{m,n}$, $\lambda \in R^m$. *On dit que* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *sont les valeurs propres de la matrice* A *s'il existe un* $X \in R^n$ *telle que* $X \neq 0$ *vérifiant,*

$$AX = \lambda X$$

et on dit aussi que X *est le vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ.

Définition 1.4.2 *Polynôme caractéristique*

On définit le polynôme caractéristique de la matrice $A \in M_{m,n}$ *par :*

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \det(A - \lambda I_n)$

Théorème 1.4.1 *Cayley-Hamilton*

Soit $P_A(\lambda)$ *le polynôme caractéristique de la matrice* A *alors :*

A *annule* $P_A(\lambda)$.

Définition 1.4.3 *[12]A est une matrice de Metzler A=*$[a_{ij}]$ *si* $\underset{i \neq j}{a_{ij}} \geq 0$ *c.à.d les éléments hors diagonales sont non négatifs. .*

Définition 1.4.4 *[14]Soit* A *est une matrice carrée d'ordre* n.

On dit que A *est une matrice monomiale ou matrice de permutation généralisée si les entrées de* A *sont tous nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.*

Définition 1.4.5 *Matrices équivalentes*

On dit que A *et* B *sont deux matrices équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles* $P \in R^{n,n}$ *et* $Q \in R^{m,m}$ *telle que,*

$$A = PBQ$$

1.5 Aperçu sur les systèmes positifs

Les systèmes positifs sont des systèmes dans la quelles les variables (entrants+sortants) prennent des valeurs positives et dans la réalité beacoup d'exemples d'applications sont cités dans la littérature comme par exemple, les systèmes de diffusion, réaction chimique, circuit RLC et les systèmes d'énergie minimale etc... Pour plus de détails on se réfère à [6], [12], [14] et [15].

L'étude des systèmes linéaires positifs diffère dans plus de cas dans l'analyse et la synthèse des systèmes dans le but que les conditions sont parfois différentes que dans le cas classsique. La classe des systèmes positifs est aussi récente, et notons que ce sont des systèmes dont les variables d'états sont par nature positifs. Dans ce cadre, les systèmes positifs sont définis sur des cônes et non pas sur des espaces vectoriel.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + X(t)B + Fu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

(1) est appelé un système linéaire de Lyapunov à temps continu.

Définition 1.5.1 *[1]Le système (1) est dit internnement positif si et seulement si* $X(t) \in R_+^{n,n}$ *et* $Y(t) \in R_+^{p,n}$ *pour tout* $X_0 \in R_+^{n,n}$ *et tout* $u(t) \in R_+^{n,n}$ $t \geq t_0$.

Lemme 1.5.1 *[12]Le système (1) peut être transformer en un système équivalent standard à temps continu (n.n entrées et p.n sorties) :*

$$\begin{cases} \widetilde{X}'(t) = \overline{A}\widetilde{X}(t) + \overline{B}\tilde{u}(t) \\ \widetilde{Y}(t) = \overline{C}X(t) + \overline{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{2}$$

avec $\widetilde{X}(t) \in \mathbb{R}^{n^2}, \tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{nm}, \widetilde{Y}(t) \in \mathbb{R}^{pn}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{n^2.n^2}, \overline{B} \in \mathbb{R}^{n^2,nm}, \overline{C} \in \mathbb{R}^{pn,n^2}, \overline{D} \in \mathbb{R}^{pn,nm}$

Preuve : On utilise la vectorisation sur chaque équation du système (1) on aura :

$$\begin{cases} Vec(X'(t)) = Vec(AX(t) + X(t)B + Fu(t)) \\ Vec(Y(t)) = Vec(CX(t) + Du(t)) \end{cases}$$

ce qui est équivalent à,

$$\begin{cases} Vec(X'(t)) = Vec(AX(t) + X(t)B) + Vec(Fu(t)) \\ Vec(Y(t)) = Vec(CX(t)) + Vec(Du(t)) \end{cases}$$

ou encore,

$$\left\{\begin{array}{c} Vec(X'(t)) = ((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I))Vec(X(t)) + (I_n \otimes F)Vec(u(t)) \\ Vec(Y(t)) = (I_n \otimes C)Vec(X(t)) + (I_n \otimes D)Vec(u(t)) \end{array}\right.$$

donc,

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{X}'(t) = \overline{A}\widetilde{X}(t) + \overline{B}\tilde{u}(t) \\ \widetilde{Y}(t) = \overline{C}X(t) + \overline{D}\tilde{u}(t) \end{array}\right.$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{A} &= (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n), \overline{B} = (I_n \otimes F). \\ \overline{C} &= (I_n \otimes C) \qquad\qquad , \ \overline{D} = (I_n \otimes D). \\ \widetilde{X}'(t) &= Vec(X'(t)) \ , \widetilde{Y}(t) = Vec(Y(t)). \end{aligned}$$

Théorème 1.5.1 *Si λ_i $i = 1...n$ sont les valeurs propres de A et μ_j $j = 1...n$ sont les valeurs propres de B alors $\lambda_i + \mu_j$ $i, j = 1, 2, ..., n$ sont les valeurs propres de la matrice $\overline{A}$ et le vecteur propre associè est $x \otimes y$.*

Preuve :
$$\begin{aligned} \overline{A}(x \otimes y) &= ((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I))(x \otimes y) \\ &= (I \otimes A)(x \otimes y) + (B^T \otimes I_n)(x \otimes y) \\ &= x \otimes (Ay) \ + (B^T x) \otimes y \\ &= x \otimes \lambda_i y \ + \ \mu_j x \otimes y \\ &= (\lambda_i + \mu_j) x \otimes y \end{aligned}$$

donc $\lambda_i + \mu_j$ sont les valeurs propres de la matrice $\overline{A}$.

Théorème 1.5.2 *[1]Kaczorek*

Le système (1) est positif si et seulement si : A et B sont des matrices de Metzler et $F \in R_+^{nm}$, $C \in R_+^{pn}$, $D \in R_+^{pm}$.

Exemple 1.5.1 *Soit le système (1) avec les matrices suivantes :*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A et B sont des matrices de Metzler.

F,C et D sont des matrices a entrées non négatives.

On peut conclure donc que le système est positif.

Chapitre 2

Les systèmes linéaires de Lyapunov

2.1 Description des modèles

Généralité :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} EX'(t) = AX(t) + X(t)B + Fu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3}$$

(3) est appelé un système linéaire de Lyapunov a temps continu.

$$\begin{cases} EX(k+1) = AX(k) + X(k)B + Fu(k) \\ Y(k) = CX(k) + Du(k) \end{cases} \tag{4}$$

(4) est appelé un système linéaire de Lyapunov à temps discrêt.

dans les systèmes (3) et (4) :

A et B sont appelées les matrices d'état.

F est la matrice d'entrée.

C est la matrice de la sortie.

D la matrice de transmission.

Dans ce chapitre nous allons nous intéressé à l'étude des systèmes de type (3).

Pour analyser les systèmes de type (3), nous allons utiliser la technique de vectorisation pour adapter nos critères de contrôlabilité que nous enoncerons par la suite.

Soit :

$$\begin{cases} EX'(t) = AX(t) + X(t)B + Fu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$$

On s'intéresse à la première équation pour vectoriser,

$$Vec(EX'(t)) = Vec(AX(t) + X(t)B) + Vec(Fu(t))$$
$$\Leftrightarrow (I_n \otimes E)Vec(X') = ((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I))Vec(X(t)) + (I_n \otimes F)Vec(u(t))$$
$$\Leftrightarrow \widetilde{E}\widetilde{X}'(t) = \widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{F}\widetilde{u}(t).$$

de même on trouve :

$$\widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t).$$

où :

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n) \\ \widetilde{C} &= (I_n \otimes C) \\ \widetilde{D} &= (I_n \otimes D) \\ \widetilde{E} &= (I_n \otimes E) \end{aligned}$$

donc le système (3) est un système équivalent à un système (5) qui est :

$$\begin{cases} \widetilde{E}\widetilde{X}'(t) = \widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{F}\widetilde{u}(t). \\ \widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 2.1.1 *De la même manière on peut transformer le système (4) en un système (6) équivalent :*

$$\begin{cases} \widetilde{E}\widetilde{X}(k+1) = \widetilde{A}\widetilde{X}(k) + \widetilde{F}\widetilde{u}(k). \\ \widetilde{Y}(k) = \widetilde{C}X(k) + \widetilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases} \tag{6}$$

Définition 2.1.1 **le système (5) est dit singulier si det(E)=0.*

**le système (5) est dit standard ou explicite si det(E) ≠0.*

Définition 2.1.2 *[1]Un faisceau de matrices est une matrice dont les coéfficients sont des polynômes de degré 1.*
On dit que le faisceau correspondant aux matrices $\widetilde{E}$ et $\widetilde{A}$ est régulier si det($\widetilde{E}s-$ $\widetilde{A}$)≠0.
Dans le cas contraire, il est dit singulier autrement dit det($\widetilde{E}s-$ $\widetilde{A}$)=0.

Définition 2.1.3 *Le système (5) est dit régulier si et seulment si son faisceau est régulier pour certaines valeurs de s dans $\mathbb{C}$.*

Nous nous basons sur [4] et [8] pour rappeller le théorème de la décomposition de Weirstrass.

Théorème 2.1.1 *Théorème de Weierstrass : Cas d'un faisceau régulier*
Tout faisceau régulier $A+\lambda B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente)

$$\begin{bmatrix} J+\lambda I & & & \\ & N^{\mu_1} & & \\ & & N^{\mu_2} & \\ & & & \\ & & & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J+\lambda I$ est détèrminée par les diviseurs élémentaires finis d'une façon unique et les 's' derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis $\mu_1, ...\mu_s$ avec :

$$\begin{aligned} N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} +^{\mu_1} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & 1 & 0 & \\ & & .. & \\ 0 & .. & . & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. \\ .. & 0 & 1 & \\ & & .. & 1 \\ 0 & .. & . & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ .. & 1 & 1 & \\ & 0 & .. & 1 \\ 0 & .. & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Contrôlabilité des systèmes de Lyapunov

Dans cette partie nous allons étudié la classe de systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu en séparant les deux cas possibles, autrement dit le cas singulier et le cas non singulier successivement.

Avant de commencer, on rappelle qu'on a montré que le système (3) est équivalent au système (5) qui est :

$$\begin{cases} \widetilde{E}\widetilde{X}'(t) = \widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{F}\widetilde{u}(t). \\ \widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{5}$$

Le système (5) est dit singulier si det($\widetilde{E}$)=0 et standard si det($\widetilde{E}$)$\neq$0

2.2.1 Cas 1 : Systèmes standards

Si det($\widetilde{E}$)$\neq$0, soit dans ce cas $\widetilde{E}$ est inversible donc,

$$\begin{cases} \widetilde{X}'(t) = \widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{E}^{-1}\widetilde{F}\widetilde{u}(t). \\ \widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t) + H\widetilde{F}\widetilde{u}(t). \\ \widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{8}$$

avec :

$$\begin{aligned} G &= \widetilde{E}^{-1}\widetilde{A} = \widetilde{E}^{-1}((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n)) \\ H &= \widetilde{E}^{-1}\widetilde{F} = \widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F) \\ \widetilde{C} &= (I_n \otimes C \\ \widetilde{D} &= (I_n \otimes D) \end{aligned}$$

Trajectoire d'états et réponse de du système

Soit le système (8),

$$\begin{cases} \widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t) + H\widetilde{F}\widetilde{u}(t). \\ \widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}X(t) + \widetilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{8}$$

avec la condition initiale $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{X}_0$.

Nous allons chercher maintenant la trajectoire du ssytème $\widetilde{X}(t)$. nous donnerons ensuite la réponse du système suivie des différents caractérisations de la contrôlabilité.

1) Trajectoire et réponse d'état :

On considère le système (8) décrit par,

$$\widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t) + H\widetilde{u}(t). \tag{8.1}$$

tout d'abord on va s'intersser à l'équation homogène qui est donnée par :

$$\widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t). \tag{9}$$

Nous allons donner quelques définitions, propositions, et remarques dont nous aurons besoin pour la résolution de l'équation (8.1).

Définition 2.2.1 *[1]On appelle une matrice de transition (ou matrice de transition d'état), l'unique solution de l'équation différentielle $Y' = AY(t)$ satisfaisant la codition initiale $Y(t_0)$ qui est donnée par $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$.*

Proposition 2.2.1 *[10]la matrice de transition vérifie :*

$\Phi'(t,t_0) = A\Phi(t,t_0)$.

$\Phi(t,t) = I$

$(\Phi(t,t_0))^{-1} = \Phi(t_0,t)$

$\Phi(t_0,t_1).\Phi(t_1,t) = \Phi(t_0,t)$

Lemme 2.2.1 *Soient :*

$$\begin{aligned}\Phi_1(t,t_0) &= \exp(\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A)(t-t_0)) \\ &\quad \textit{et} \\ \Phi_2(t,t_0) &= \exp(\widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n)(t-t_0))\end{aligned}$$

Les matrices de transitions du système $X'(t) = \widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A)X(t)$ et $X'(t) = \widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n)X(t)$ respectivement , alors la matrice $\Phi(t,t_0)$ définie par,

$$\Phi(t,t_0) = \Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0)$$

est la matrice de transition du système (9) et toute solution de (9) est sous la forme :

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$$

avec $X(t_0)$ la condition initiale du système.

Preuve : Pour que Φ soit la matrice de transition du système (9) elle doit vérifier :

$$\Phi'(t) = G\Phi(t)$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\Phi'(t, t_0) &= \Phi_1'(t, t_0)\Phi_2(t, t_0) + \Phi_1(t, t_0)\Phi_2'(t, t_0) \\
&= \widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A)\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0) + \Phi_1(t, t_0)\widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n)\Phi_2(t, t_0) \\
&= \underbrace{(\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A) + \widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n))}_{G}\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0)
\end{aligned}$$

par suite,

$$\Phi'(t, t_0) = = G\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0)$$

et donc $\Phi' = G\Phi$, Φ est la matrice de transition de (9) et il est claire que $\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$ est une solution de (9).

Théorème 2.2.1 *Soit $\Phi(t, t_0)$ la matrice de transition de (8.1), alors la solution unique de (8.1) avec la donnée de la condition initiale $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{X}_0$ est :*

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)\left[\widetilde{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau\right]$$

Preuve : Pour cela nous démontrons ceci en deux étapes :

Etape 1 : La solution de l'équation homogéne qui est donnée par :

$$\widetilde{X}'(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$$

Etape 2 : La solution de l'équation non homogène :

$$\widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t) + H\widetilde{u}(t)$$

Dans ce cas, la méthode utilisée pour trouver la solution est la méthode de la variation de la constante, Soit pour : $\widetilde{X}(t_0) = Z(t)$,
$\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)Z(t)$, avec $Z(t_0) = \widetilde{X}(t_0)$ alors,

$$\widetilde{X}'(t) = \Phi'(t, t_0)Z(t) + \Phi(t, t_0)Z'(t)$$

d'où,

L'équation d'évolution $\widetilde{X}'(t) = G\widetilde{X}(t) + H\widetilde{u}(t)$ se transforme donc en,

$$\widetilde{E}^{-1}((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n))\Phi(t, t_0)Z(t) + \Phi(t, t_0)Z'(t) = G\Phi(t, t_0)Z(t) + H\widehat{u}(t)$$

et comme $G = \widetilde{E}^{-1}((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n))$ il s'ensuit,

$$\Phi(t, t_0)Z'(t) = H\widehat{u}(t)$$

d'où,

$$\Phi(t, t_0)Z'(t) = H\widehat{u}(t)$$

ou encore,

$$Z'(t) = (\Phi(t, t_0))^{-1}H\widehat{u}(t)$$

donc,

$$Z'(t) = \Phi(t_0, t)H\widehat{u}(t)$$

par suite,

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)H\widehat{u}(\tau)d\tau$$

par conséquent $\widetilde{X}(t)$ sera,

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)(Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)H\widehat{u}(\tau)d\tau)$$

et comme $Z(t_0) = \widetilde{X}(t_0)$ la trajectoire sera donnée par,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t) \;&=\; \exp((\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A) + \widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n))(t - t_0))(\widetilde{X}(t_0) + \\ &\int_{t_0}^{t} \exp((\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes A) + \widetilde{E}^{-1}(B^T \otimes I_n))(t - \tau))\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau)\end{aligned}$$

et la réponse du système est cependant,

$$\widetilde{Y}(t) = (I_n \otimes C)\widetilde{X} + D\widehat{u}(t)$$

Analyse et propriétés des systèmes linéaires de Lyapunov

Dans ce paragraphe notre soucis est de traiter et analyser la contrôlabilité des systèmes de la forme (8.1) .
Nous donnerons la définition d'un système contrôlable pour ensuite établir quelques lemmes, théorèmes et caractérisations.

Problème posé,
Etant donnèe deux états $\widetilde{X}(t_0)$ et $\widetilde{X}(t_f)$, la question est la suivantes : Peut-on trouver un moyen ou une commande qui peut transférer l'état du système de l'état initiale $\widetilde{X}(t_0)$ vers l'état finale $\widetilde{X}(t_f)$.

Définition 2.2.2 *[12]Un système est dit contrôlable si et seulment si :* $\forall \widetilde{X}_0$, $\forall \widetilde{X}_f$, $\forall T > 0$ *fini,*
$\exists \widehat{u}(t) : [t_0 : T] \to R^{mn} \;/\; \widetilde{X}(T, \widetilde{X}_0, \widehat{u}) = \widetilde{X}_f$.

Définition 2.2.3 *Sous-espace de cotrôlabilité :*
On définit le sous espace vectoriel , noté L_c qui contient toutes les états contrôlables, comme suit :

$$L_c = \left\{ \widetilde{X} \;/\; \widetilde{X}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau,\ \widehat{u}(t) : [t_0 : t] \to R^{mn} \right\}$$

L_c est dit sous-espace de cotrôlabilité.

Proposition 2.2.2 *Soit L_c le sous-espace de contrôlabilité alors :*

$$\begin{aligned} L_c &= Im\varphi \\ &= Vec\left\{H, GH, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, G^{n^2-1}H\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{H, GH, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, G^{n^2-1}H\right\} \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2 *l'espace L_c est G-invariant.*

c.à.d : $\forall \widetilde{X} \in L_c \Rightarrow G\ \widetilde{X} \in L_c$

Preuve : On suppose que $\widetilde{X} \in$L$_c$, il existe donc un vecteur γ tel que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} &= \left[H, GH, ..., G^{n^2-1}H\right]\gamma \\
alors\ G\widetilde{X} &= G\left[H, GH, ..., G^{n^2-1}H\right]\gamma \\
&= \left[GH, G^2H, ..., G^{n^2}H\right]\gamma
\end{aligned}$$

et par le théorème de Cayley-Hamilton nous aurons,

$$G^{n^2} = a_{n^2-1}G^{n^2-1} + a_{n^2-2}G^{n^2-2} + ... + a_2G^2 + a_1G^1 + a_0I$$

alors,

$$G\widetilde{X} = GH(\gamma_1 + a_1\gamma_n)\ + G^2H(\gamma_2 + a_2\gamma_n) + ... + G^{n^2-1}H(\gamma_n + a_{n^2-1}\gamma_n)$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned}
G\widetilde{X} &\in Vec\left\{GH, ..., G^{n^2-1}H\right\} \\
G\widetilde{X} &\in Vec\left\{H, GH, ..., G^{n^2-1}H\right\} \\
G\widetilde{X} &\in Im\varphi \\
G\widetilde{X} &\in L_c
\end{aligned}$$

Définition 2.2.4 *Le système (8.1) est dit complètement contrôlable si et seulement tous les états sont contrôlables.*

Lemme 2.2.3 *Le système (8.1) est dit complètement contrôlable si et seulement si $L_c = R^{mn}$.*

Preuve :

$\Leftarrow$) Supposons que $L_c = R^{mn}$ et montrons que (8.1) est complètement contrôlable

c.a.d : $\forall \widetilde{X}_0$, $\forall \widetilde{X}_1$ $\exists ?\widehat{u}$ / $\widetilde{X}(T, \widetilde{X}_0, \widehat{u}) = \widetilde{X}_1$.

Par hyphothèse $L_c = R^{mn}$ i.e : tout élément $\widetilde{X}$ de R^{mn} est dans L$_c$

d'où :

$$\widetilde{X}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau, \text{ avec l'éxistence de } \widehat{u}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_1(t) &= \widetilde{X}(T, \widetilde{X}_0, \widehat{u}) \\
\widetilde{X}_1(t) &= \Phi(t,t_0)\,\widetilde{X}(0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau \\
\underbrace{\widetilde{X}_1(t) - \Phi(t,t_0)\,\widetilde{X}(0)}_{\widetilde{X}\ \in R^{mn}} &= \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau \\
\widetilde{X}(t) &= \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

d'où le système est complètement contrôlable.

$\Rightarrow$) Inversement on suppose que (8.1) est complètement contrôlable et on montre que $\mathrm{L}_c = R^{mn}$.

Sachant que (8.1) est complètement contrôlable donc,

$$\begin{aligned}
\forall \widetilde{X}_0\ , \forall \widetilde{X}_1 \exists \widehat{u}\ /\ \widetilde{X}_1 &= \widetilde{X}(T, \widetilde{X}_0, \widehat{u}) \\
&= \Phi(t,t_0)\,\widetilde{X}(0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Pour un cas particulier on prend $\widetilde{X}(0) = 0$,

Soit alors,

$$\widetilde{X}_1 = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\widetilde{E}^{-1}(I_n \otimes F)\widehat{u}(\tau)d\tau$$

par conséquent,

$$\widetilde{X}_1 \in L_c = R^{mn}$$

Théorème 2.2.2 *Le système (8.1) est complètement contrôlable si et seulment si :*

$$\cap_{t=0,\tau} \ker H^* \exp(G^*) = \{0\}$$

Preuve : Pour prouver ce théorème, on se base sur le lemme précedent, on doit alors montrer que :

$$L_c = R^{mn} \Leftrightarrow \cap_{t=0,\tau} \ker H^* \exp(G^*) = \{0\}$$

$\Rightarrow$) Supposons $\exists \widetilde{X} \neq 0 \ \ / \ \widetilde{X} \in \cap_{t=0,\tau} \ker H^* \exp(G^*) = \{0\}$ c.à.d $\cap_{i=0,n-1} H^* G^{*^i} \widetilde{X} = \{0\}$.

Si on suppose que $L_c \neq R^{mn}$ et $\cap_{t=0,\tau} \ker H^* \exp(G^*) = \{0\}$ c.à.d,

Soit $z \in L_c$:

$$z = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) \widetilde{E}^{-1} (I_n \otimes F) \widehat{u}(\tau) d\tau \quad \text{avec } \exists \widehat{u}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= \prec \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) \widetilde{E}^{-1} (I_n \otimes F) \widehat{u}(\tau) d\tau, \widetilde{X} \succ \\
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= \int_{t_0}^{t} \prec \Phi(t,\tau) H \widehat{u}(\tau), \widetilde{X} \succ d\tau \\
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= \int_{t_0}^{t} \prec \widehat{u}(\tau), H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X} \succ d\tau
\end{aligned}$$

comme un cas particulier on peut prendre :

$$\widehat{u}(\tau) = H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}$$

par suite :

$$\begin{aligned}
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= \int_{t_0}^{t} \prec H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}, H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X} \succ d\tau \\
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= \int_{t_0}^{t} ||H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}||^2 d\tau \\
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= 0 \text{ car } \widetilde{X} \in \ker \Phi^*(t,\tau) \\
\prec \ z, \widetilde{X} \succ \ &= 0 \ \Rightarrow \int_{t_0}^{t} ||H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}||^2 d\tau = 0 \\
\Rightarrow \ & \int_{t_0}^{t} ||H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}||^2 d\tau = 0 \\
\Rightarrow \ & ||H^* \Phi^*(t,\tau) \widetilde{X}||^2 = 0 \\
\Rightarrow \ & ||\widetilde{X}|| = 0 \\
\Rightarrow \ & \widetilde{X} = 0
\end{aligned}$$

contradiction avec $\widetilde{X} \neq 0$.

$\Leftarrow$)Soit z$\in L_c$

$$z=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)H\widehat{u}(\tau)d\tau$$

et si on calcule $\prec z,\widetilde{X}\succ$:

$$\begin{aligned}\prec\ \ z,\widetilde{X}\succ\ &=\prec\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)H\widehat{u}(\tau)d\tau,\widetilde{X}\succ\\ \prec\ \ z,\widetilde{X}\succ\ &=\int_{t_0}^{t}\prec\Phi(t,\tau)H\widehat{u}(\tau),\widetilde{X}\succ d\tau\\ \prec\ \ z,\widetilde{X}\succ\ &=\int_{t_0}^{t}\prec\widehat{u}(\tau),H^{*}\Phi^{*}(t,\tau)\widetilde{X}\succ d\tau=0\end{aligned}$$

Ceci veut dire que $z\in\widetilde{X}^{\perp}\neq L_c$.

et comme prècèdement on prend,

$$\widehat{u}(\tau)=H^{*}\Phi^{*}(t,\tau)\widetilde{X}$$

On trouve cependant $\widetilde{X}=0$ ce qui tombe en contradiction avec (8.1) est complètement contrôlable.

2.2.2 Cas 2 : Systèmes singuliers

Soit le système (5) suivant :

$$\begin{cases}\widetilde{E}\widetilde{X}'(t)=\widetilde{A}\widetilde{X}(t)+\widetilde{F}\widetilde{u}(t).\\ \widetilde{Y}(t)=\widetilde{C}X(t)+\widetilde{D}\tilde{u}(t)\end{cases}\tag{5}$$

Dans ce type de systèmes on a $\det(\widetilde{E})=0$, c.à.d on ne peut pas inverser cette matrice pour déduire les conditions de contôlabilité .

Comme $\widetilde{E}$ n'est pas inversible on utilise d'autres techniques pour étudier ce système. Supposons que le faisceau du système est régulier pour certaines valeurs s dans $\mathbb{C}$.

Si cette condition est vérifiée alors il existe deux matrices non singulières $P\in\mathbb{R}^{n^2.n^2}$ et $Q\in\mathbb{R}^{n^2.n^2}$ telles que le système (5) peut être décomposer en deux sous systèmes :

1-Un sous système lent :

$$\begin{cases}\overline{X}_1'(t)=\overline{G}_1\overline{X}_1(t)+\overline{H}_1\widetilde{u}(t).\\ \overline{Y}_1(t)=\overline{C}_1\overline{X}_1(t)+\overline{D}_1\tilde{u}(t)\end{cases}\tag{9}$$

2-Un sous système rapide :

$$\begin{cases} N\overline{X}_2'(t) = \overline{X}_2(t) + \overline{H}_2\widetilde{u}(t). \\ \overline{Y}_2(t) = \overline{C}_2\overline{X}_2(t) + \overline{D}_2\tilde{u}(t) \end{cases} \tag{10}$$

où

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}\widetilde{X} \ , \ \widetilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \widetilde{X}_2 \in \mathbb{R}^{n2}$$

$$\overline{E} = P\widetilde{E}Q = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \ N \in \mathbb{R}^{n_2.n_2}$$

$$\overline{G} = PGQ = \begin{bmatrix} \overline{G}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix}, \ \overline{G}_1 \in \mathbb{R}^{n_1.n_1}$$

$$\overline{H} = PH = \begin{bmatrix} \overline{H}_1 \\ \overline{H}_2 \end{bmatrix}, G_1 \in \mathbb{R}^{n_2.nm}$$

$$\overline{C} = CQ = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{bmatrix}, \overline{C}_1 \in \mathbb{R}^{np.n_1}, \overline{C}_2 \in \mathbb{R}^{np.n_2}$$
$$\overline{Y} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2, \ n_1 = \deg(\det(\widetilde{E}s - \widetilde{A})) + 1, n_1 + n_2 = n^2$$

N est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence μ avec : $\mu = rg(\widetilde{E}) - \deg(\det(\widetilde{E}s - \widetilde{A})) + 1$.

Trajectoire et réponse d'état :

On considère le système singulier (5) qu'on peut décomposer en deux sous systèmes (9) est (10).

Le sous système (9) est un système classique dont on connait sa solution,

$$\overline{X}_1(t) = \Phi(t, t_0)(\overline{X}_1(0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\overline{H}_1\widehat{u}(\tau)d\tau \ )$$

et sa réponse qui est donnée par,

$$\overline{Y}_1(t) = \overline{C}_1 \left[\Phi(t, t_0)(\overline{X}_1(0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\overline{H}_1\widehat{u}(\tau)d\tau \ )\right] + \overline{D}_1\widehat{u}$$

Pour donner la trajectoire et la réponse du système rapide on vas utiliser la technique suivante :

On suppose que $\widehat{u} \in \zeta^{\mu-1}$ l'ensemble des fonctions $(\mu - 1)$ fois continument différentiable. En dérivant et en pré-multipliant par N la première équation du système (10) c.à.d :

$$\begin{aligned}
N\overline{X}_2'(t) &= \overline{X}_2(t) + \overline{H}_2\widetilde{u}(t) \\
N(N\overline{X}_2'(t))' &= N(\overline{X}_2(t) + \overline{H}_2\widetilde{u}(t))'. \\
N(N\overline{X}_2'(t))' &= N\overline{X}_2'(t) + N\overline{H}_2\widetilde{u}'(t). \\
&\ldots \\
\text{par récurence on trouve} &: \\
N^k\overline{X}_2^{(k)}(t) &= N^{k-1}\overline{X}_2^{k-1}(t) + N^{k-1}\overline{H}_2\widetilde{u}^{k-1}(t). \\
N^{\mu-1}\overline{X}_2^{(\mu-1)}(t) &= N^{\mu-2}\overline{X}_2^{\mu-2}(t) + N^{\mu-2}\overline{H}_2\widetilde{u}^{\mu-2}(t). \\
N^{\mu}\overline{X}_2^{(\mu)}(t) &= 0 = N^{^{\mu-1}}\overline{X}_2^{^{\mu-1}}(t) + N^{^{\mu-1}}\overline{H}_2\widetilde{u}^{^{\mu-1}}(t).
\end{aligned}$$

En sommant les équations précédentes on obtient,

$$\overline{X}_2(t) = -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\overline{H}_2\widehat{u}^i(\tau)d\tau$$

donc la réponse est,

$$\overline{Y}_2(t) = -\overline{C}_2\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\overline{H}_2\widehat{u}^i(\tau)d\tau$$

Finalement, la trajectoire d'état est,

$$\widetilde{X}(t) = Q\overline{X}(t)$$

et la réponse sera alors,

$$\widetilde{Y}(t) = \widetilde{C}Q\overline{X}(t) \ + \widetilde{D}u.$$

Donc la solution du sytème (5) avec la condition initiale est donnée par la formule suivante,

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t) &= Q\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}\left(\Phi(t,t_0)(\overline{X}_1(0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\overline{H}_1\widehat{u}(\tau)d\tau\ \right) \\
&\quad + Q\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}\left(-\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\overline{H}_2\widehat{u}^i(\tau)d\tau\right)
\end{aligned}$$

et la réponse est,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}(t) &= \widetilde{C}Q\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}\left(\Phi(t,t_0)(\overline{X}_1(0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\overline{H}_1\widehat{u}(\tau)d\tau\ ) \ + \overline{D}_1\widehat{u}\right) \\
&\quad + \widetilde{C}Q\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}\left(-\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\overline{H}_2\widehat{u}^i(\tau)d\tau \ + \overline{D}_2\widehat{u}\right)
\end{aligned}$$

Contôlabilité :

Pour la contrôlabilité des systèmes singuliers la définition reste la même comme dans le cas non singulier, mais nous dérivons une proposition qui vas nous aider à tester que si un système singulier est contrôlable ou pas.

Proposition 2.2.3 *[8]Le système (5) est contrôlable si et seulment si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) Le sous système lent et le sous système rapide sont, alors les deux contrôlables.

2) Si :

$$\begin{aligned} rg\left[Is - G_1, H_1\right] &= n_1. \\ rg\left[N, H_2\right] &= n_2,\ avec\ n_1\ + n_2\ = n^2 \end{aligned}$$

3)Si :

$$\begin{aligned} rg\left[\widetilde{E}s - G, H\right] &= n^2. \\ rg\left[\widetilde{E}, H\right] &= n^2. \end{aligned}$$

Preuve : Pour démontrer la proposition on s'est basé sur la référence [8].

2.3 Systèmes fractionnaires

Soient les deux systèmes suivants :

$$D^{\alpha}X = AX + XB + FU \tag{11}$$

et :

$$ED^{\alpha}X = AX + XB + FU \tag{12}$$

Un système fractionnaire de Lyapunov (11) ou (12) est un système différentiel dans l'ordre de dérivation est une fraction.

Le système (11) est un cas particulier de (12) quand : $E = I$.

Pour étudier et donner la solution et la réponse des systèmes fractionnaires de Lyapunov on doit d'abord passer à la transformation du système par vectorisation.
Soit le système (12) :

$$\begin{aligned} ED^{\alpha}X &= AX + XB + FU \\ Vec(ED^{\alpha}X) &= Vec(AX + XB + FU) \\ (I_n \otimes E)Vec(D^{\alpha}X) &= (I_n \otimes A \ + B^T \otimes I_n)Vec(X) + (I_n \otimes F)Vec(U) \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} \widetilde{E} &= I_n \otimes E) \\ D^{\alpha}\widetilde{X} &= Vec(D^{\alpha}X) \\ \widetilde{A} &= (I_n \otimes A \ + B^T \otimes I_n) \\ \widetilde{F} &= (I_n \otimes F) \\ \widetilde{U} &= Vec(U) \end{aligned}$$

donc le système (12) est équivalent à :

$$\widetilde{E}D^{\alpha}\widetilde{X} = \widetilde{A}\widetilde{X} + \widetilde{F}\widetilde{U} \tag{13}$$

Avant de commençer, on préfère rappeler quelques notions de la théorie des intégrales fractionnaires et la transformée de Laplace.

Définition 2.3.1 *[13]La fonction définit par l'intégrale suivante est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \ \ Re(x) \geq 0$$

est appelée la fonction gamma, elle vérifie la propriété : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Définition 2.3.2 *[13]La fonction de Mittag-Leffler à un-paramètre est définie par :*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Définition 2.3.3 *[13]La fonction de Mittag-Leffler à deux-paramètres est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Remarque 2.3.1 *La fonction de Mittag-Leffler génèralise la fonction exponentielle, elle est aussi très utile pour la résolution des équations aux dérivées fractionnaires.*

Définition 2.3.4 *[15]La dérivation au sens de Caputo*

Soit f une fonction de classe $C^n\,[a;b]\,, n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in N^*$.

La dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= J^{n-\alpha}D^{n}f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-1-\alpha}f^{n}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 *[16]La transformée de Laplace de la dérivée de f au sens de Caputo est :*

$$\begin{aligned} L(D^{\alpha}f(t)) &= s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0) \\ &= s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

Preuve : Soit $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in N^*$,

$$\begin{aligned} L(D^{\alpha}f(t)) &= L(\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-1-\alpha}f^{n}(\tau)d\tau) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}L(\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-1-\alpha}f^{n}(\tau)d\tau) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}L((t)^{n-1-\alpha})L(f^{n}(\tau)) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(n-\alpha\right)}{s^{n-\alpha}}\left(s^{n}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)\right) \\ &= s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0) \\ &= s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

maintenant on va définir un type de matrices qui est important pour donner la trajectoire et la réponse du système (13) .

Définition 2.3.5 *[1]On appelle une matrice fondamentale du système (13) la matrice satisfaisant les équations suivantes,*

$$\begin{aligned} \widetilde{E}\phi_{i}-\widetilde{A}\phi_{i-1} &= \delta_{0i}I \\ \phi_{i}\widetilde{E}-\phi_{i-1}\widetilde{A} &= \delta_{0i}I \end{aligned}$$

où δ_{0i} est le delta de Kronecker définie par,

$$\delta_{0i} = \begin{cases} 1 & si\ i = 0 \\ 0 & si\ i \neq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *[1]Si $\widetilde{E}$ est singulier alors :*

$$\begin{aligned} (\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A})^{-1} &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-\alpha - i\alpha} \\ et\ \phi_i &= 0\ ,\ pour\ i < \text{-}\mu \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2 *1) Si $\widetilde{E} = I_{mn}$ alors :*

$$\begin{aligned} \phi_i &= 0,\ pour\ i < 0 \\ et\ \phi_i &= \widetilde{A}^i\ ,\ pour\ i > 0 \end{aligned}$$

2) Si $\widetilde{E}$ est inversible :

$$\begin{aligned} (\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A})^{-1} &= (I - (s^{-\alpha}\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}))^{-1}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha} \\ &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i \widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha - i\alpha} \end{aligned}$$

On peut dèduire donc,

$$\begin{aligned} \phi_i &= 0,\ pour\ i \prec 0 \\ \phi_0 &= \widetilde{E}^{-1}. \\ \phi_1 &= (\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})\phi_0 = (\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})\widetilde{E}^{-1} \\ \phi_2 &= (\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})\phi_{1=}(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})^2\widetilde{E}^{-1} \\ &\dots \\ \phi_i &= (\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})\phi_{i-1=}(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A})^i\widetilde{E}^{-1}\quad ,\ i \succeq 0 \end{aligned}$$

On cherchera cepandant la solution et la réponse du système (13) :

$$\widetilde{E}D^{\alpha}\widetilde{X} = \widetilde{A}\widetilde{X} + \widetilde{F}\widetilde{U}$$

Par application de la transformée de Laplace à l'équation (13) :

$$L(\widetilde{E}D^{\alpha}\widetilde{X}) = L(\widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{F}\widetilde{U})$$

il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}L(D^{\alpha}\widetilde{X}) &= L(\widetilde{A}\widetilde{X}(t)) + L(\widetilde{F}\widetilde{U}(t)) \\
&= \widetilde{A}L(\widetilde{X}(t)) + \widetilde{F}L(\widetilde{U}(t)) \\
\widetilde{E}(s^{\alpha}\widetilde{X}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)) &= \widetilde{A}\widetilde{X}(s) + \widetilde{F}U(s)
\end{aligned}$$

et si on note que,

$$h_0(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)$$

alors,

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(s^{\alpha}\widetilde{X}(s) - h_0(s)) &= \widetilde{A}\widetilde{X}(s) + \widetilde{F}\widetilde{U}(s) \\
(\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A})\widetilde{X}(s) &= \widetilde{E}h_0(s) + \widetilde{F}\widetilde{U}(s)
\end{aligned}$$

par conséquant,

$$\widetilde{X}(s) = (\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A})^{-1}(\widetilde{E}h_0(s) + \widetilde{F}\widetilde{U}(s)) \tag{14}$$

Nous considérons les deux cas pour rèsoudre (14) :

2.3.1 Le cas où le système est non singulier

sachant que :

$$(I - \lambda\widetilde{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\lambda\widetilde{A}\right)^{i}$$

et :

$$(\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A}) = \widetilde{E}s^{\alpha}(I - (\widetilde{E}s^{\alpha})^{-1}\widetilde{A})$$

alors :

$$\begin{aligned}
(\widetilde{E}s^{\alpha} - \widetilde{A})^{-1} &= (\widetilde{E}s^{\alpha}(I - (\widetilde{E}s^{\alpha})^{-1}\widetilde{A}))^{-1} \\
&= (I - (\widetilde{E}s^{\alpha})^{-1}\widetilde{A})^{-1}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left((\widetilde{E}s^{\alpha})^{-1}\widetilde{A}\right)^{i} \widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left((\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i} \widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}
\end{aligned}$$

donc,

$$(\widetilde{E}s^{\alpha}-\widetilde{A})^{-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha} \tag{15}$$

Si on remplace (15) dans (14) :

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}(\widetilde{E}h_0(s)+\widetilde{F}\widetilde{U}(s))\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}h_0(s)+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\end{aligned}$$

et par la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(\widetilde{X}(s))=L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}h_0(s)+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\right] \tag{16}$$

on obtient,

$$\underbrace{L^{-1}(\widetilde{X}(s))}_{\widetilde{X}(t)}=L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}h_0(s)\right]+L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\right] \tag{17}$$

calculons :

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}h_0(s)\right] &= L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}L^{-1}\left[s^{-\alpha-i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}s^{-\alpha-i\alpha}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}s^{-\alpha-i\alpha+\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}s^{-i\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\widetilde{X}^{(k)}(0)\end{aligned}$$

alors :

$$L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}s^{-\alpha-i\alpha}h_0(s)\right]=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^{i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\widetilde{X}^{(k)}(0) \tag{18}$$

On rappelle que le produit de convolution f et g est noté par $(f * g)$ et est définit par :

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

ensuite :

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}U(s)\right] &= \sum_{i=0}^{+\infty}L^{-1}\left[\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}L^{-1}\left[s^{-\alpha-i\alpha}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}L\left[s^{-\alpha-i\alpha}\right] * L\left[\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}\frac{t^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} * \widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}.\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)\tau
\end{aligned}$$

finalement on trouve :

$$L^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\widetilde{E}^{-1}\widetilde{F}U(s)\right] = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{E}^{-1}.\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)d\tau \tag{19}$$

Substituttion de (18) et (19) dans (17) donne :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\widetilde{X}^{(k)}(0)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{E}^{-1}.\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)
\end{aligned} \tag{20}$$

Ceci nous permettra de conclure le théorème suivant,

Théorème 2.3.2 *La solution du système (13) est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\widetilde{X}^{(k)}(0)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{E}^{-1}.\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)
\end{aligned}$$

et sa réponse est,

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(t) &= \widetilde{C}(\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\widetilde{X}^{(k)}(0)+\\ &\quad \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{E}^{-1}.\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau))\\ &\quad +\widetilde{D}\widetilde{U}(t).\end{aligned}$$

2.3.2 Le cas où le système est singulier

Si $\widetilde{E}$ est une matrice singulière, alors on doit utiliser la proposition (2.3.1) :

$$(\widetilde{E}s^\alpha-\widetilde{A})^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}$$

Nous utilisons cette proposition dans (14),

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(s) &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{E}h_0(s)+\sum_{i=-\mu}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\\ &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{E}\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)+\sum_{i=-\mu}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\end{aligned}$$

ici on vas utiliser les proprités de ϕ_i telle que dans [1] et [2] :

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{E}\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)+\sum_{i=0}^{+\infty}\phi_i s^{-\alpha(i+1)}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\\ &\quad +\sum_{i=0}^{\mu}\phi_{-i}s^{-\alpha(-i+1)}\widetilde{E}\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}\widetilde{X}^{(k)}(0)+\sum_{i=0}^{\mu}\phi_{-i}s^{\alpha(i-1)}\widetilde{F}\widetilde{U}(s)\end{aligned}$$

puis par la transformée inverse de Laplace,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\phi_i\widetilde{E}\widetilde{X}^{(k)}(0)\\ &\quad +\sum_{i=0}^{+\infty}\phi_i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)d\tau\\ &\quad +\sum_{i=0}^{\mu}\phi_{-i}\left[\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)^{(i-1)\alpha}+\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{(i\alpha-1)}\widetilde{E}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\end{aligned}$$

donc la solution du système (13) singulier est donnée par le théorème suivant,

Théorème 2.3.3 *La solution du système (13) singulier est :*

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\phi_i\widetilde{E}\widetilde{X}^{(k)}(0)\\ &+\sum_{i=0}^{+\infty}\phi_i\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)d\tau\\ &+\sum_{i=0}^{\mu}\phi_{-i}\left[\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)^{(i-1)\alpha}+\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{i\alpha-1}\widetilde{E}\widetilde{X}^{(k)}(0)\right]\end{aligned}$$

et la réponse par,

$$\widetilde{Y}(s)=\widetilde{C}\widetilde{X}(t)+\widetilde{D}\widetilde{U}(t)$$

Contrôlabilité des systèmes fractionnaires

Pour $0<\alpha\leq 1$, On peut reformuler la solution du système (13) non singulier comme suit :

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= \Phi_0(t)\widetilde{X}_0+\int_0^t\Phi(t-\tau)\widetilde{F}\widetilde{U}(\tau)d\tau\\ avec\ \ \Phi_0(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\widetilde{X}(0)\\ \Phi(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{A}\right)^i\frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))}\widetilde{E}^{-1}\end{aligned}$$

Théorème 2.3.4 *Le système (13) est dit contrôlable si et seulment si la matrice*

$$W_c=\int_0^t\Phi(\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(\tau)d\tau \tag{21}$$

est symétrique dèfinie positive donc inversible.

Preuve : Tout d'abord on prend le contrôle $u(t)$ comme suivant :

$$U_c(t)=\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)W_c^{-1}\widetilde{X}_f \tag{22}$$

Pour un cas particulier $\widetilde{X}(0)=0$:

$$\widetilde{X}(t_f)=\int_0^t\Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{U}_c(\tau)d\tau \tag{23}$$

En remplaçant (22) dans (23) on trouve alors,

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t_f) &= \int_0^t \Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)W_c^{-1}\widetilde{X}_f d\tau \\
&= \int_0^t \Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)d\tau W_f^{-1}\widetilde{X}_f \\
&= W_c W_c^{-1}\widetilde{X}_f \\
&= \widetilde{X}_f
\end{aligned}$$

d'où (13) est contrôlable.

Inversement, On suppose que (13) est contrôlable et montrons que W_c est inversible. Pour cela on démontre que W_c est symètrique définie positive.

$$\begin{aligned}
W_c^T &= (\int_0^t \Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)d\tau)^T \\
&= \int_0^t (\Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau))^T d\tau \\
&= \int_0^t \Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)d\tau \\
&= W_c
\end{aligned}$$

donc W_c est symétrique.

W_c est définie positive ?

On suppose qu'il existe $y \neq 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
\prec \ y, W_c y \succ \ &= \ \prec \int_0^t y^T\Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\widetilde{F}^T\Phi^T(t_f-\tau)y d\tau \succ \\
\prec \ y, W_c y \succ \ &= \int_0^t ||y^T\Phi(t_f-\tau)\widetilde{F}\ ||^2 d\tau \\
\prec \ y, W_c y \succ \ &\geq 0
\end{aligned}$$

Ici nous avons démontré que W_c est semi-définie positif, il nous reste à prouver qu'il est non nul.

Par l'absurde : Si W_c n'est pas définie positive alors $\exists y \neq 0$ telle que :

$$y^T W_f y = 0$$

donc :

$$y^T\Phi(t_f-\tau)\widetilde{F} = 0$$

On choisit $\widetilde{X}(0) = (\Phi(t_0))^{-1}y$, comme (13) est contrôlable donc il existe un contrôle qui transfère $\widetilde{X}(t_f)$ vers l'origine $\widetilde{X}(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{X}(t_f) = \Phi(t, t_0)((\Phi(t_0))^{-1}y + \int_0^t \Phi(t_0, \tau)\widetilde{F}U(\tau)yd\tau\ ) \\ 0 &= y + \int_0^t \Phi(t_f - \tau)\widetilde{F}U(\tau)yd\tau \end{aligned}$$

En multipliant par y^T :

$$\begin{aligned} 0 &= y^T y + \int_0^t y^T \Phi(t_f - \tau)\widetilde{F}U(\tau)yd\tau \\ 0 &= y^T y \end{aligned}$$

ie : $y = 0$ contradiction avec $y \neq 0$, donc W_c est dèfinie positive par conséquant il est inversible.

Chapitre 3

Contrôle à énergie minimale cas 1D

Le monde industriel connait actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce progrès est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des méthodes mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur.

Notons qu'une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire singulier tous deux à temps continu a été faite, pour déduire que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes singuliers, et ou fractionnaires à déférences de conditions.

On considère les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) standards ou singuliers unidimensionnels et le problème est comme suit : Trouver un vecteur de contrôle u (t) qui conduira le vecteur d'état z (t) d'un état initial à un état final en un temps final fixe t, enminimisant un coût fonctionnel.

La technique utilisée est l'application du Gramian. On procèdera à la recherche d'un indice de performance pour chercher le contrôle minimale. L'approche sera étendue aux systèmes 2D voir dernier chapitre.

Nous nous s'interessons dans cette section au calcul de l'énergie minimale pour un système fractionnaire. Dans notre étude, nous allons regarder les deux cas possibles , autrement dit le cas où la matrice E est inversible et le cas où elle n'est pas inversible.

1-Cas de système non singulier

Soit le système suivant avec α entre 0 et 1 :

$$ED^{\alpha}X = AX + BU \tag{24}$$

La solution de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi_0(t)\widetilde{X}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \\ \textit{avec} \qquad \Phi_0(t)X_0 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(E^{-1}A\right)^i \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} X(0) = E_{\alpha}(E^{-1}At^{\alpha}) \\ \Phi(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(E^{-1}A\right)^i \frac{(t-\tau)^{\alpha(i+1)-1}}{\Gamma(\alpha(i+1))} E^{-1} \end{aligned}$$

où $E_{\alpha}(E^{-1}At^{\alpha})$ désigne la fonction de Mittag-Leffler de (At^{α}).

Définition 3.0.6 *Le système (24) est contrôlable en temps t avec $0 < t \leq t_f$ s'il existe un contrôle $U(t) \in R^n$ qui transfère ce système de l'état initiale vers l'état finale.*

FORMULATION DU PROBLEME

On considère le système fractionnaire (24) avec A et B deux matrices de dimensions n.

Si le système est contrôlable alors il existe plusieurs cont*rôles* $u(t)$ qui minimise l'indexe de perfomance noté,

$$I(u) = \int_0^{t_f} u(\tau)^T Q u(\tau) d\tau$$

telle que, la matrice Q est symétrique définie positive.

le problème d'ènérgie minimale peut s'exprimer comme suit :

Etant donné $A, B, Q \in M_n$, α,et $X_0 \in R^n$ et $t_f \in R_+^n$. Trouvons *u(t)*$\in R^n$ qui transfère X_0 vers $X_f \in R_+^n$ et qui minimise l'index de perfomance $I(u)$.

Pour résoudre ce problème, on définit la matrice suivante :

$$W(t_f, Q) = \int_0^{t_f} \Phi(t-\tau)BQB^T\Phi^T(t-\tau)d\tau \tag{25}$$

Le système (24) est supposée contrôlable dans ce cas :

$$\widehat{u}(t) = Q^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)W^{-1}X_f \quad \forall t \in [0, t_f] \tag{26}$$

avec Q une matrice définie positive.

Théorème 3.0.5 *[17]Soit $\overline{u}(t) \in R^n$ un contrôle pour le système (24) qui transfère X_0 vers X_f. Alors $\widehat{u}(t)$ définie dans (26) déplace aussi notre système de X_0 vers X_f et il minimise l'index de perfomance : $I(\widehat{u}) \leq I(\overline{u})$.*

Preuve : Dans la solution du système (24) avec un cas particulier $X_0 = 0$ et on remplace $u(t)$ par $\widehat{u}(t)$:

$$\begin{aligned} X(t_f) &= \int_0^t \Phi(t-\tau)B\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \Phi(t-\tau)BQ^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)W^{-1}X_f d\tau \\ &= \int_0^t \Phi(t-\tau)BQ^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)d\tau W^{-1}X_f \\ &= WW^{-1}X_f \\ &= X_f \end{aligned}$$

Comme $\overline{u}(t), \widehat{u}(t)$ transfère X_0 vers X_f alors :

$$\begin{aligned} X(t_f) &= \int_0^t \Phi(t-\tau)B\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \Phi(t-\tau)B\overline{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

il s'ensuit :

$$\int_0^t \Phi(t-\tau)B(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau = 0 \tag{27}$$

On transpose (27) :

$$\int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T B^T\Phi^T(t-\tau)d\tau = 0 \tag{28}$$

et on multiplie (28) par $W^{-1}X_f$:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T B^T\Phi^T(t-\tau)W^{-1}X_f d\tau &= 0 \\ \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T QQ^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)W^{-1}X_f d\tau &= 0 \\ \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\widehat{u} d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau &= \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\overline{u}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\overline{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t (\overline{u}(\tau))^T Q\overline{u}(\tau)d\tau - \int_0^t (\widehat{u}(\tau))^T Q\overline{u}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

On remarque que :

$$I(\overline{u}) = I(\widehat{u}) + \int_0^t (\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau$$

comme Q est une matrice définie positive alors :

$$I(\widehat{u}) \leq I(\overline{u})$$

Pour trouver la valeur minimale de l'indexe de perfomance on remplace $\widehat{u}(t)$ dans $I(u)$:

$$\begin{aligned}I(\widehat{u}) &= \int_0^t (\widehat{u}(\tau))^T Q\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t X_f^T W^{-1}\Phi(t-\tau)BQ^{-1}QQ^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)W^{-1}X_f d\tau \\ &= X_f^T W^{-1}\int_0^t \Phi(t-\tau)BQ^{-1}QQ^{-1}B^T\Phi^T(t-\tau)d\tau W^{-1}X_f \\ &= X_f^T W^{-1}WW^{-1}X_f \\ &= X_f^T W^{-1}X_f\end{aligned}$$

Maintenant nous résumerons cela par l'algorithme suivant,

Procédure :

Etape 01 : Sachant la matrice A$\in M_n$, calculer $\Phi(t-\tau)$.

Etape 02 : Calculer W connaissant A, B, Q et t$_f$ donné.

Etape 03 : Calculons $\widehat{u}(t)$.

Etape 04 : On calcule la valeur minimale de l'indexe de perfomance $I(\widehat{u})$.

Remarque 3.0.3 *Pour un cas particulier lorsque* $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} W(t_f, Q) &= \int_0^t e^{E^{-1}A(t_f-\tau)} B Q^{-1} B^T e^{(E^{-1}A)^T(t_f-\tau)} d\tau \\ \widehat{u}(t) &= Q^{-1} B^T e^{(E^{-1}A)^T(t_f-\tau)} W^{-1} X_f d\tau \\ I(\widehat{u}) &= X_f^T W^{-1} X_f \end{aligned}$$

2-Cas d'un système singulier (E non inversible)

On considère le système suivant :

$$ED^\alpha X = AX + BU \tag{29}$$

La technique de Weierstrass est cepandant utilisée pour dècomposer (29) en deux sous systèmes simples à étudier.

d'après la décomposition de Weierstrass il existe deux matrices inversibles P et F telle que :

$$\begin{aligned} PEF &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \\ PAF &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ PB &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \widetilde{X} &= F^{-1} X_f = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{1f} \\ \widetilde{X}_{2f} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

et de (29) et (30) On obtient :

$$D^\alpha \widetilde{X}_1 = A_1 \widetilde{X}_1 + B_1 u \tag{31}$$

et :

$$ND^\alpha \widetilde{X}_2 = \widetilde{X}_2 + B_2 u \tag{32}$$

où N est une matrice nilpotente d'indice μ.

L'énergie minimale du système (29) sera donc la somme d'énérgie minimale de (31) et (32).

Pour le système (31) s'il est contrôlable, la formulation du problème d'énérgie minimale se fait comme le cas du système (24). l'expression de $I(u)$ dans ce cas ,

$$I(u) = \int_0^{t_f} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} u(\tau)^T Q_1 u(\tau) d\tau$$

avec Q_1 une matrice symétrique définie positive.

La solution du système (31) est donnée par :

$$\widetilde{X}_1(t) = E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_{1f}} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1 u(\tau) d\tau$$

Pour la résolution du problème on définit la matrice suivante :

$$W_{1p}(t_{1f}, Q_1) = \int_0^{t_f} E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1 Q_1^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) d\tau \tag{33}$$

et dans ce cas :

$$\widehat{u}_p(t) = Q^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) W_1^{-1}(\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0) \tag{34}$$

Théorème 3.0.6 *Si le système (31) est contrôlable par un contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfère le système de $\widetilde{X}_{10}$ vers $\widetilde{X}_{1f}$ alors (34) l'est aussi et il minimise l'indexe de perfomance telle que cette valeur minimale est donnée par :*

$$I(\widehat{u}) = (\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})^T W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})$$

Preuve : Tout d'abord on doit vérifier que $\widehat{u}(t)$ est un contrôle de (31) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X_1}(t_f) &= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_f} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1 \widehat{u}(\tau) d\tau \\
&= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_f} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} [E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1] \\
&\quad Q^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) W_1^{-1}(\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0) d\tau \\
&= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_f} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} [E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1] \\
&\quad + Q^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) d\tau W_1^{-1}(\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0) \\
&= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + W_{1p} W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0) \\
&= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + (\widetilde{X}_{1f} - E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0) \\
&= \widetilde{X}_{1f}
\end{aligned}$$

comme $\widehat{u}(t)$ et $\overline{u}(t)$ sont deux contrôles qui transfèrent (31) de $\widetilde{X}_{10}$ vers $\widetilde{X}_{1f}$ alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{X_1}(t_f) &= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)B_1\overline{u}(\tau)d\tau \\ &= E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_0 + \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)B_1\widehat{u}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

ceci veut dire :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)B_1(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau &= 0 \\ \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)d\tau &= 0\end{aligned}$$

on le multilplie par $W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})$:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})d\tau &= 0 \\ \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1Q_1^{-1}B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})d\tau &= 0\end{aligned}$$

ie :

$$\int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1\widehat{u}(t)d\tau = 0 \tag{35}$$

maintenant on calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau &= \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1\overline{u}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1\overline{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau))^T Q_1\overline{u}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\widehat{u}(\tau))^T Q_1\overline{u}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}I(\widehat{u}) &= I(\overline{u}) + \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^{\alpha-1}(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1(\overline{u}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau \\ \text{donc } I(\widehat{u}) &\leq I(\overline{u}).\end{aligned}$$

D'où la valeur minimale de $I(u)$ est donnèe par :

$$\begin{aligned}
I(\widehat{u}) &= \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^\alpha(\widehat{u}(\tau))^T Q_1\widehat{u}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^\alpha(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})^T W_{1p}^{-1}E_{\alpha,\alpha}((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)B_1Q_1^{-1}Q_1 \\
&\quad [Q_1^{-1}B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-e^{A_1(t)})]d\tau \\
&= (\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})^T W_{1p}^{-1}\int_0^{t_f}(t_{1f}-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)B_1Q_1^{-1} \\
&\quad [B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f}-\tau)^\alpha A_1)]d\tau W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-e^{A_1(t)}) \\
&= (\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})^T W_{1p}^{-1}W_{1p}W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10}) \\
&= (\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})^T W_{1p}^{-1}(\widetilde{X}_{1f}-E_\alpha(t^\alpha A_1)\widetilde{X}_{10})
\end{aligned}$$

Pour le système (32) la solution est :

$$\widetilde{X}_2 = -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B_2 u^{(i\alpha)}(t)$$

Preuve :

On suppose que $u(t)$ est de classe $C^{(\mu-1)\alpha}$différentiable comme N est une matrice nilpotente d'indice μ.

Si $N=0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{X}_2(t)+B_2u(t) \\
\widetilde{X}_2(t) &= -B_2u(t)
\end{aligned}$$

Si $N\neq 0$: on multiplie (32) par N et on dérive par D^α :

$$\begin{aligned}
N^2D^{2\alpha}\widetilde{X}_2(t) &= D^\alpha\widetilde{X}_2(t)+NB_2D^\alpha u(t) \\
&= \widetilde{X}_2(t)+B_2u(t)+NB_2D^\alpha u(t) \\
&= \widetilde{X}_2(t)+\sum_{i=0}^{1}N^iB_2u^{(i\alpha)}
\end{aligned}$$

Si $N^2=0$:

$$\widetilde{X}_2(t) = -\sum_{i=0}^{1}N^iB_2u^{(i\alpha)}$$

Si $N^2 \neq 0$: on multiplie (32) par N^2 puis on dérive par $D^{2\alpha}$:

$$\begin{aligned} N^3 D^{3\alpha}\widetilde{X}_2(t) &= ND^{\alpha}(N^2 D^{2\alpha}\widetilde{X}_2(t)) \\ &= ND^{\alpha}(\widetilde{X}_2(t) + B_2 u(t) + NB_2 D^{\alpha}u(t)) \\ &= ND^{\alpha}\widetilde{X}_2(t) + ND^{\alpha}B_2 u(t) + ND^{\alpha}NB_2 D^{\alpha}u(t) \\ &= \widetilde{X}_2(t) + B_2 u(t) + NB_2 D^{\alpha}u(t) + N^2 B_2 D^{2\alpha}u(t) \\ &= \widetilde{X}_2(t) + \sum_{i=0}^{2} N^i B_2 u^{(i\alpha)} \end{aligned}$$

par récurence on continu jusqu'à l'indice μ càd N^{μ} =0 :

$$\begin{aligned} N^{\mu} D^{\mu}\widetilde{X}_2(t) &= ND^{\alpha}(N^{\mu-1} D^{(\mu-1)\alpha}\widetilde{X}_2(t)) \\ &= .... \\ &= \widetilde{X}_2(t) + \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B_2 u^{(i\alpha)}(t) \end{aligned}$$

comme une remarque

$$u^{(i\alpha)} = \underbrace{d^{\alpha}d^{\alpha}d^{\alpha}...d^{\alpha}}_{i \text{ fois}}u(t)$$

la preuve est cependant achevée.

Pour le problème d'énergie minimale, on suppose que le système (32) est contrôlable, donc il faut chercher un contrôle qui assure la contrôlabilité du système (32) et qui minimse l'indexe de perfomace définie par :

$$I(u) = \sum_{i=0}^{\mu-1} u^{T\,(i\alpha)} Q_2 u^{(i\alpha)} \tag{36}$$

Pour résoudre ce problème on a besoin de définir la matrice suivante :

$$W_{2p} = \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B_2 Q_2^{-1} B_2^T N^{i^T} \tag{37}$$

avec Q_2 une matrice symétrique définie positive.

Dans ce cas le contrôle est,

$$\widehat{u}_p^{(i\alpha)}(t) = -Q_2^{-1} B_2^T N^{i^T} W_2^{-1}\widetilde{X}_{2f} \qquad \forall i = 0, \mu - 1 \tag{38}$$

Théorème 3.0.7 *Si le système (32) est contrôlable par un contrôle $\widetilde{u}^{i\alpha}(t) \in R^n$ qui transfère le système de $\widetilde{X}_{20}$ vers $\widetilde{X}_{2f}$ alors (38) l'est aussi et minimise l'indexe de perfomance telle que cette valeur minimale est donnée par :*

$$I(\widehat{u}) = X_{2f}^T W_{2p}^{-1} X_{2f}$$

Preuve : On vérifie que $\widehat{u}^{(i)}(t)$ tarnsfère le système de $\widetilde{X}_{20}$ vers $\widetilde{X}_{2f}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_2(t_f) &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B \widehat{u}^{(i\alpha)}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B Q_2^{-1} B_2^T N^{i^T} W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\
&= W_2 W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\
&= \widetilde{X}_{2f}
\end{aligned}$$

et comme $\widehat{u}^{(i\alpha)}(t)$ et $\widetilde{u}^{i\alpha}(t)$ sont deux contrôles pour (32) alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_2(t_f) &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B \widehat{u}^{(i\alpha)}(t) \\
&= -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B \widetilde{u}^{i\alpha}(t)
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B(\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t)) = 0$$

par transposition et si on multiplie par $W_2^{-1}\widetilde{X}_{2f}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\mu-1} (\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t))^T B^T N^{i^T} W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} &= 0 \\
\sum_{i=0}^{\mu-1} (\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t))^T Q_2 Q_2^{-1} B^T N^{i^T} W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} &= 0 \\
\sum_{i=0}^{\mu-1} (\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t))^T Q_2 \widehat{u}^{(i\alpha)}(t) &= 0
\end{aligned}$$

et d'après cette dernière équation on aura,

$$\begin{aligned}
I(\widehat{u}^{(i\alpha)}(t)) &= I(\widetilde{u}^{i\alpha}(t)) + \sum_{i=0}^{\mu-1} (\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t))^T Q_2 (\widetilde{u}^{i\alpha}(t) - \widehat{u}^{(i\alpha)}(t)) \\
I(\widehat{u}^{(i\alpha)}(t)) &\leq I(\widetilde{u}^{i\alpha}(t))
\end{aligned}$$

car Q_2 est une matrice définie positive.

Pour trouver la valeur minimale de l'indexe de perfomance en substituant (38) dans (36) :

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}^{(i)}) &= \sum_{i=0}^{\mu-1} \widehat{u}^{T\,(i\alpha)} Q_2 \widehat{u}^{(i\alpha)} \\ &= \sum_{i=0}^{\mu-1} \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1} B_2 Q_2^{-1} Q_2 Q_2^{-1} B_2^T N^{i^T} W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\ &= \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1} \sum_{i=0}^{\mu-1} B_2 Q_2^{-1} Q_2 Q_2^{-1} B_2^T N^{i^T} W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\ &= \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1} W_2 W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\ &= \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f} \end{aligned}$$

il nous reste juste à donner l'expresion d'énergie minimale totale du système (29) :

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}) &= \left[F \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1f} \\ \widetilde{X}_{2f} \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} W_{1p} & 0 \\ 0 & W_{2p} \end{bmatrix}^{-1} \left[F \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1f} \\ \widetilde{X}_{2f} \end{pmatrix} \right] \\ &= X_f^T \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}^{-1} X_f \end{aligned}$$

Exemple 1 :

On considère le système (29) avec $\alpha = 1$, $X_0 = 0$, $X_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ et $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1.7 & 2.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1.4 \\ 2.2 & 4.6 & 2.2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et suit à la dècomposotion de Weierstrass avec :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

on trouve,

$$
\begin{aligned}
PEF &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
PAF &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
PB &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

On choisira dans ce cas la matrice Q comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour le système (31), on choisit $t_f = 1$ et $\widetilde{X}_{1f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$donc,

$$
\begin{aligned}
W_{1p} &= \int_0^1 \exp(A_1(1-\tau))B_1Q_1^{-1}B_1^T \exp(A_1^T(1-\tau)) \\
W_{1p} &= \int_0^1 \begin{bmatrix} \exp(\frac{1}{5}-\frac{\tau}{5}) & 0 \\ 0 & \exp(1-\tau) \end{bmatrix} \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
& .\frac{1}{2}.\frac{1}{11}. \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \exp(\frac{1}{5}-\frac{\tau}{5}) & 0 \\ 0 & \exp(1-\tau) \end{bmatrix} \\
W_{1p} &= \begin{bmatrix} 0.2283 & 0.2826 \\ 0.2826 & 0.3553 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{1p}(t) &= Q_1^{-1}B_1^T \exp(A^T(1-\tau))W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f} \\
\widehat{u}_{1p}(t) &= -5.9131 \exp(1-t) - 10.5557 \exp(\frac{1}{5}-\frac{t}{5})
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
I(\widehat{u}) &= \widetilde{X}_{1f}^T W_{1p}^{-1} \widetilde{X}_{1f} \\
I(\widehat{u}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 283.7338 & -225.6774 \\ -225.6774 & 182.3148 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
I(\widehat{u}) &= 14.6938
\end{aligned}
$$

Pour le système (32), On remarque que $N = 0$ donc :

$$
\begin{aligned}
W_{2p} &= B_2.Q_2^{-1}B_2^T \\
W_{2p} &= \frac{6}{11}.\frac{1}{2}.\frac{6}{11} \\
W_{2p} &= \frac{18}{121}
\end{aligned}
$$

et,

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{2p}(t) &= -Q_2^{-1}B_2^T W_2^{-1}\widetilde{X}_{2f} \\
\widehat{u}_{2p}(t) &= -\frac{1}{2}.\frac{6}{11}.\frac{121}{18}.1 \\
\widehat{u}_{2p}(t) &= -\frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

donc,

$$
\begin{aligned}
I(\widehat{u}) &= \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1}\widetilde{X}_{2f} \\
I(\widehat{u}) &= 1.\frac{121}{18}.1 \\
I(\widehat{u}) &= 15.125
\end{aligned}
$$

Finalement, l'énergie minimale du système (29) est :

$$
\begin{aligned}
I(\widehat{u}) &= X^T \begin{bmatrix} W_{1p}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{2p}^{-1} \end{bmatrix} X \\
I(\widehat{u}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 283.7338 & -225.6774 & 0 \\ -225.6774 & 182.3148 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{121}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
I(\widehat{u}) &= 14.6938 + 15.125 \\
I(\widehat{u}) &= 29.8188
\end{aligned}
$$

Exemple 2 :

Soient les matrices suivantes :

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

les matrices de transformation utilisée pour la décomposition de Weierstrass :

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

cette décomposition nous donne :

$$
\begin{aligned}
PEF &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
PAF &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

On prend $\alpha = 0.5$, $X_0 = 0$, $X_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$et $t \in [0, 1]$,

Pour le premier sous-sytème (31) :

on prend la matrice Q_1 comme suit :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

le Gramien de la contrôlabilité est définit par :

$$\begin{aligned} W_{1c}(t_{1f}) &= \int_0^{t_f} E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1 B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 3.0682 & 1.2008 \\ 1.2008 & 0.6366 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dans ce cas le contrôle est donné par :

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \begin{bmatrix} u_{1c}(t) \\ u_{2c}(t) \end{bmatrix} \\ &= B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) W_{1c}^{-1} \widetilde{X}_{1f} \\ &= \begin{bmatrix} -0.6225 \\ 1.4380 - 1.1037(1 - \tau)^{0.5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la matrice de solution du problème sera alors,

$$\begin{aligned} W_{1p}(t_{1f}) &= \int_0^{t_f} (t_{1f} - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) B_1 Q_1^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1.5930 & -0.7090 \\ -0.7090 & 0.6366 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et on calcule $\widehat{u}(t)$:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(t) &= \begin{bmatrix} \widehat{u}_{1p}(t) \\ \widehat{u}_{2p}(t) \end{bmatrix} \\ &= Q_1^{-1} B_1^T E_{\alpha,\alpha}^T((t_{1f} - \tau)^\alpha A_1) W_{1p}^{-1} \widetilde{X}_{1f} \\ &= \begin{bmatrix} 2.7725 - 1.1034(1 - \tau)^{0.5} \\ 2.6310(1 - \tau)^{0.5} - 0.2493 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et si on calcule $I(u)$ et $I(\widehat{u})$ on trouve :

$$\begin{aligned} I(u) &= 11.89 \\ I(\widehat{u}) &= 7.13 \end{aligned}$$

On remarque effictivement que,

$$I(\widehat{u}) \leq I(u)$$

Pour le sous-système (32), comme N=0 donc,

la matrice gramienne de contrôlabilité est,

$$\begin{aligned} W_{2c} &= B_2^T B_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

le contrôle $u(t)$:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= -B_2^T W_{2c}^{-1} \widetilde{X}_{2f} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T .1.1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et si on définit la matrice Q_2 comme suit,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

donc la matrice de solution de problème est,

$$\begin{aligned} W_{2p} &= B_2^T Q_2^{-1} B_2 \\ &= Q_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T .2. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

le contrôle $\widehat{u}(t)$:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(t) &= -Q_2^{-1} B_2^T W_{2p} \widetilde{X}_{2f} \\ &= -2. \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T .2.1 \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pour l'indexe de perfomance :

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}) &= 1.\frac{1}{2}.1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

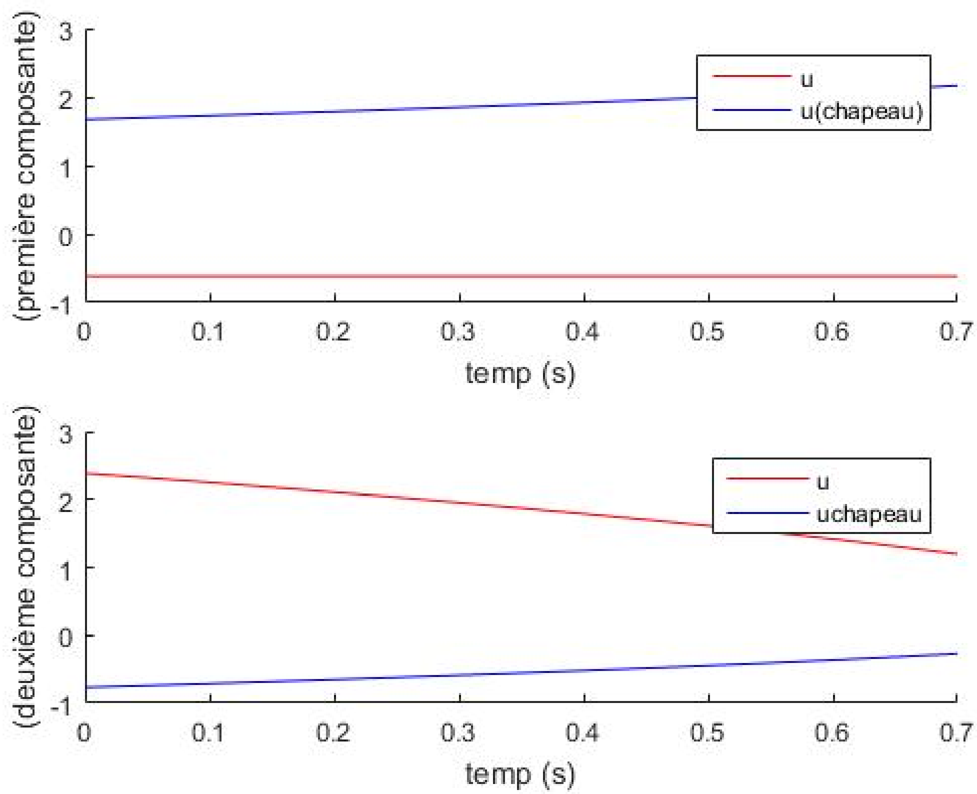
$$\begin{aligned} I(u) &= 1.1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On remarque aussi que $I(\widehat{u}) \leq I(u)$.

Finalement la valeur minimale de l'index de perfomance correspond au système (29) est :

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}) &= \widetilde{X}_f^T \begin{bmatrix} W_{1p}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{2p}^{-1} \end{bmatrix} \widetilde{X}_f \\ I(\widehat{u}) &= 7.13 + 0.5 \\ I(\widehat{u}) &= 7.63 \end{aligned}$$

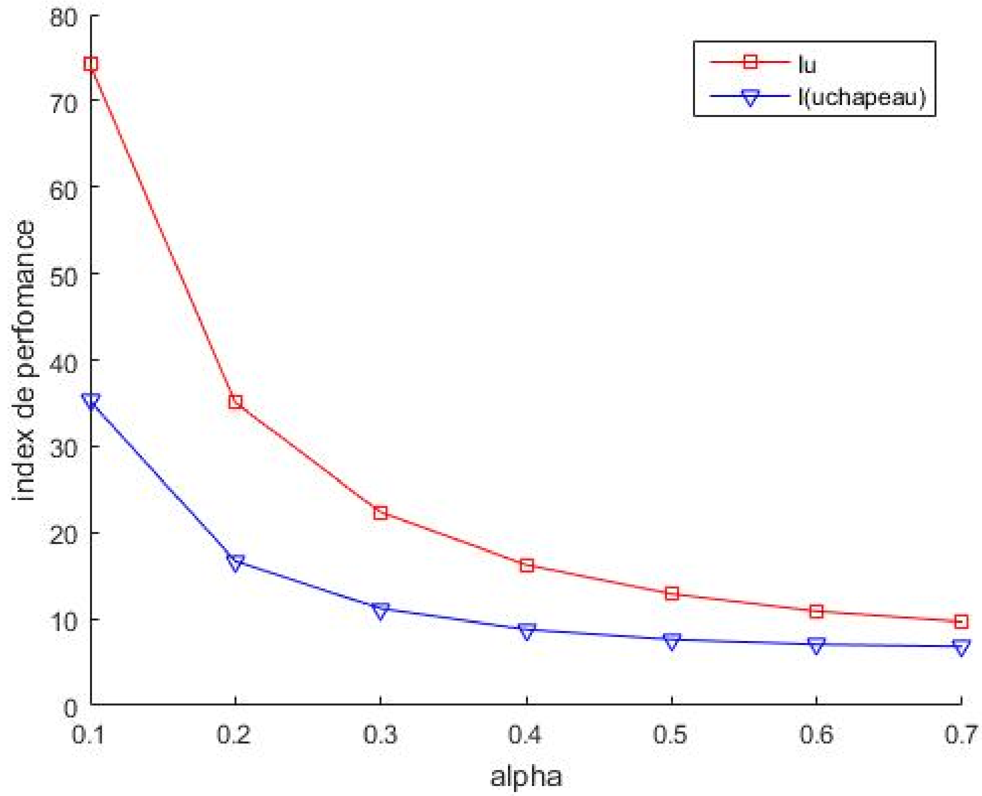
Nos résultats seront cependant simulês. Dans un premier temps, et suite à la simulation, une représentation graphique représentant le comportement de de chaque composante de u et $\widehat{u}$ du sous système (31) est donné par le graphe(1):



(graphe 1)

d'après le graphe (1) on remarque que dans la première composante $u(t) \leq \widehat{u}(t)$ mais dans la deuxième composante $\widehat{u}(t) \leq u(t)$. .

nous signalons graphiquement comment l'index de perfomance s'évalue si on fixe $t_f = 1s$ et pour différentes valeurs de α dans le graphe (2) :



(graphe 2)

le graphe (2) nous montre que vraiment $I(\widehat{u}) \leq I(u)$.

Chapitre 4

Contrôle à énergie minimale cas 2D

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une nouvelle classe de système qui est la classe de systèmes bidimensionnels discret-continu singuliers. Noter que dans les systèmes discret-continu à deux dimensions l'une des variables indépendantes est continu, la seconde est discrète. Ce sont des systèmes dont l'information se propage en deux directions et qui trouvent leurs applications en biomathématiques, en économie, en électronique, en imagerie et traitement du signal ainsi qu'en automatique.

On considère donc le système linéaire continu-discret 2D d'écrit par,

$$EX^{'}(t,i) = AX(t,i) + Bu(t,i) \tag{39}$$

avec $X^{'}(t,i) = \frac{\partial X(t,i)}{\partial t}$, $X(t,i) \in R^n, u(t,i) \in R^m$ sont les vecteurs d'états et $A \in R^{n*n}$, $B \in R^{n*m} (n \geq m)$, et $t \in R_+^m$ est une variable continu (du temps), $i \in Z_+$ est une variable discrète.

Définition 4.0.7 *[18]Le système (39)est dit contrôlable dans le segment* $\{[0,t], [t,q]\}$ *avec* $0 \leq t \leq t_f$ *et* $0 \leq i \leq q$ *s'il existe un contrôle* $u(t,i) \in R^m$ *qui transfère le système de l'état initiale* $X(0,i)$ $(i = 0,1,...,q)$ *vers l'ètat finale* $X_f = X(t_f,0) + X(t_f,1) + ... + X(t_f,q)$.

Proposition 4.0.2 *Le système (39) est dit singulier (non inversible) si* $det(E) = 0$ *et non singulier (inversible) si* $det(E) \neq 0$.

Nous nous s'intéressons dans cette partie au calcul de l'énergie minimale du système (39) au cas singulier.

Utilisons la décomposition de Weierstrass, et si on multiplie (39) par une matrice inversible P, il sensuit,

$$PEX^{'}(t,i) = PAX(t,i) + PBu(t,i)$$

on obtient,

$$\begin{aligned} PEFF^{-1}X^{'}(t,i) &= PAFF^{-1}X(t,i) + PBu(t,i) \\ PEF\widetilde{X}^{'}(t,i) &= PAF\widetilde{X}(t,i) + PBu(t,i) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} F^{-1}X(t,i) &= \widetilde{X}(t,i) \\ et\ PB &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cette décomposition nous donne,

$$\widetilde{X}_1^{'}(t,i) = A_1\widetilde{X}_1(t,i) + B_1u(t,i) \tag{40}$$

et :

$$N\widetilde{X}_2^{'}(t,i) = \widetilde{X}_2(t,i) + B_2u(t,i) \tag{41}$$

avec N une matrice nilpotente d'indice de nilpotence μ.

On vas alors calculer l'énèrgie minimale de chaque système (40) et (41) séparément.

- Pour le système (40)

La solution est donnèe par :

$$\widetilde{X}_1(t,i) = \exp(A_1 t)\widetilde{X}_1(0,i) + \int_0^t \exp(A_1(t-\tau))B_1u(\tau,i)d\tau \tag{42}$$

Si dans (42) on substitue t par t_f et pour un cas particulier $\widetilde{X}_1(0,i) = 0 \; i = 0, 1, ..., q$:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_{1f} &= \widetilde{X}_{1f}(t_f, 0) + \widetilde{X}_{1f}(t_f, 1) + ... + \widetilde{X}_{1f}(t_f, q) \\ &= \int_0^t \exp(A_1(t_f - \tau))B_1 u(\tau, 0)d\tau + \int_0^t \exp(A_1(t_f - \tau))B_1 u(\tau, 1)d\tau \\ &\quad +......... + \int_0^t \exp(A_1(t_f - \tau))B_1 u(\tau, q)d\tau \\ &= \int_0^t \exp(A_1(t_f - \tau))\underbrace{[B_1 \; B_1....B_1]}_{q \text{ fois}} \begin{bmatrix} u(\tau, 0) \\ u(\tau, 1) \\ .. \\ .. \\ u(\tau, q) \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \exp(A_1(t_f - \tau))\overline{B}_1 \overline{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{43}$$

avec,

$$\overline{B}_1 = [B_1 \; B_1....B_1] \in R^{n_1, \overline{m}}$$

et

$$\overline{u}(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau, 0) \\ u(\tau, 1) \\ .. \\ .. \\ u(\tau, q) \end{bmatrix} \in R^{\overline{m}}, \; \overline{m} = n_1(q+1)$$

Théorème 4.0.8 *le système (40) est dit contrôlable dans le segment de* $\{[t, 0], [t, q]\}$ *avec* $0 \leq \; t \leq t_f$ *et* $0 \leq i \leq q$ *si et seulement si la matrice* K *suivante est inversible où,*

$$K = \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f - \tau))\overline{B}_1 \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau)) \tag{44}$$

Preuve. *La preuve est dèjà faite dans le cas 1D mais dans ce cas on choisira le contrôle ,*

$$\overline{u}(t) = \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau))K^{-1}\widetilde{X}_{1f}$$

□

Formulation du problème d'énergie minimale

On considère le système (40) avec $A_1 \in R^{n_1,n_1}$, $B_1 \in R^{n_1,m}$ $(n_1 \leq n)$.

Si (40) est contrôlable dans le segment $\{[t,0],[t,q]\}$ avec $0 \leq t \leq t_f$ et $0 \leq i \leq q$ alors il existe plusieurs contrôles qui transfère le système de l'état initiale vers l'état finale. Parmis ces contrôles $\widehat{u}(t) \in R^{\overline{m}}$ qui minimise l'index de perfomance

$$I(u) = \int_0^{t_f} u^T(\tau) Q_1 u(\tau) d\tau \tag{45}$$

avec Q une matrice définie positive de dimension $\overline{m}$.

Le problème d'énergie minimale peut s'exprimer comme suit :

Etant donné les matrices A, B, Q , le nombre q et $\widetilde{X}_{1f}^n$. Trouvons $u(t) \in R^{\overline{m}}$ qui vèrifie l'hypothèse de contrôlabilté et qui minimise l'indexe de perfomance $I(u)$.

Pour résoudre ce problème, on définit la matrice suivante :

$$W_1(t_f, Q) = \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f - \tau)) \overline{B}_1 Q_1^{-1} \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau)) d\tau \tag{46}$$

Le système (40) est supposé contrôlable dans ce cas :

$$\widehat{u}(t) = Q_1^{-1} \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau)) W_1^{-1} \widetilde{X}_{1f} \quad \forall t \in [0, t_f] \tag{47}$$

avec Q_1 une matrice définie positive.

Théorème 4.0.9 *Soit $\widetilde{u}(t) \in R^n$ un contrôle pour le système (40) qui transfère $\widetilde{X}_{10}$ vers $\widetilde{X}_{1f}$. Alors $\widehat{u}(t)$ définie dans (47) déplace aussi notre système de $\widetilde{X}_{10}$ vers $\widetilde{X}_{1f}$ et il minimise l'indexe de perfomance avec $I(\widehat{u}) \leq I(\widetilde{\overline{u}})$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_1(t_f) &= \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f - \tau)) \overline{B}_1 \overline{u}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f - \tau)) \overline{B}_1 Q_1^{-1} \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau)) W_1^{-1} \widetilde{X}_{1f} \, d\tau \\
&= \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f - \tau)) \overline{B}_1 Q_1^{-1} \overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f - \tau)) \, d\tau W_1^{-1} \widetilde{X}_{1f} \\
&= W_1 W_1^{-1} \widetilde{X}_{1f} \\
&= \widetilde{X}_{1f}
\end{aligned}$$

Comme $\overline{u}(t), \widehat{u}(t)$ transfère X_0 vers X_f alors :

$$\begin{aligned} X(t_f) &= \int_0^t \exp(A_1(t_f-\tau))\overline{B}_1\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \exp(A_1(t_f-\tau))\overline{B}_1\widetilde{\overline{u}}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

il s'ensuit alors :

$$\int_0^t \exp(A_1(t_f-\tau))\overline{B}_1(\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau = 0 \qquad (48)$$

On transpose (48) :

$$\int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T \exp(A_1^T(t_f-\tau))\overline{B}_1 d\tau = 0 \qquad (49)$$

et on multiplie (49) par $W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f}$:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T\overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f-\tau))W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f}d\tau &= 0 \\ \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1Q_1^{-1}\overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f-\tau))W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f}d\tau &= 0 \\ \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1\widehat{u}(\tau)d\tau &= 0 \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q_1(\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau &= \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\widetilde{\overline{u}}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q\widetilde{\overline{u}}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau))^T Q\overline{u}(\tau)d\tau - \int_0^t (\widehat{u}(\tau))^T Q\widetilde{\overline{u}}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

On remarque que :

$$I(\widetilde{\overline{u}}) = I(\widehat{u}) + \int_0^t (\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))^T Q(\widetilde{\overline{u}}(\tau)-\widehat{u}(\tau))d\tau$$

comme Q_1 est une matrice définie positive alors :

$$I(\widehat{u}) \leq I(\widetilde{\overline{u}})$$

Donc,

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}) &= \int_0^t (\widehat{u}(\tau)^T Q\widehat{u}(\tau)d\tau \\ &= \widetilde{X}_{1f}^T W_1^{-1} \int_0^t \exp(A_1(t_f-\tau))\overline{B}_1 Q_1^{-1}\overline{B}_1^T \exp(A_1^T(t_f-\tau))d\tau W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f} \\ &= \widetilde{X}_{1f}^T W_1^{-1}\widetilde{X}_{1f} \end{aligned}$$

$\square$

- Pour le système (41)

La solution de (41) est donnée par :

$$\widetilde{X}_{1f} = -\sum_{j=0}^{\mu-1} N^j B_2\, u(t,i),\ \ avec\ i = 0,1,.....,q$$

Pour ce système on se base sur l'ètude du système (32) avec $\alpha = 1$ et les changements suivants :

On change la matrice B_2 avec la nouvelle matrice $\overline{B}_2 \in R^{n_2 * \overline{m}_2}$ qui est définie par,

$$\overline{B}_2 = \underbrace{[B_2\ \ B_2\ .....B_2\,]}_{q \text{ fois}}$$

et le contrôle $u(t,i)$ (avec $i = 0,1,.....,q$) à la place de $u(t)$ et on note,

$$\overline{u}(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau,0) \\ u(\tau,1) \\ .... \\ u(\tau,q) \end{bmatrix}$$

Maintenant pour rèsoudre le problème d'ènergie minimale du système (41) on définit la matrice suivante :

$$W_2 = \sum_{j=0}^{\mu-1} N^j \overline{B}_2\, Q_2^{-1} \overline{B}_2^T\, N^{j^T}$$

l'index de perfomance de (41) est sera donné par,

$$I(u) = \sum_{j=0}^{\mu-1} u^{(j)^T} Q_2 u^{(j)}$$

le contrôle qui vas minimser $I(u)$:

$$\widehat{u}^{(j)} = -Q_2^{-1}\overline{B}_2^T N^{j^T} W_2^{-1}\widetilde{X}_{2f}\quad \forall j = 0,1,...,\mu-1$$

la valeur minimale de $I(u)$ est alors :

$$I(\widehat{u}) = \widetilde{X}_{2f}^T W_2^{-1} \widetilde{X}_{2f}$$

Finalement l'index de perfomance du système (39) va être sous la forme,

$$I(\widehat{u}) = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{1f} & \widetilde{X}_{2f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & W_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{1f} & \widetilde{X}_{2f} \end{bmatrix}$$

Conclusion et perspective

Ce mémoire de fin d'études a eu pour deux objectifs, le premier c'est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov, le deuxième est la résolution d'un problème d'énergie minimale aux cas 1D et 2D. Nous avons traité les deux objectifs dans le cas d'un système singulier et non singulier.

Dans ce travail, nous avons donc introduit la notion de Contrôlabilité et de Grammien de contrôlabilité pour tester si oui ou non un système est contrôlable tout en garantissant un minimum de dissipation d'énergie.

Les conditions que nous avons développées sont des extensions des résultats issu de [2], [6], [9], [15], [17], [18] et [19], aux modèles d'état généralisé. Au moyen de ce Grammien et dans ce même contexte, nous avons caractérisé les résultats pour des cas de systèmes bidimensionnels (2D) discret-continu singuliers, unidimensionnel singuliers et ou fractionnaires.

Le principal objectif dans ce mémoire est de faire une analyse du calcul d'un contrôle à énergie minimale pour la classe des système linéaires et singuliers.

Des simulations numérique sous logiciel MATLAB ont été réalisées.

En perspectives, les résultats peuvent être généralisé aux cas des systèmes 1D et 2D de type Lyapunov. Notamment,

- L'extension des résultats obtenus dans le cas où l'espace de travail est de dimension infinie.
- Généralisation des résultats pour l'énergie minimale pour des modèles plus générales et multidimensionnels.
- L'étude des systèmes non linéaires.

Bibliographie

[1] D.Xu, X.Yang, Controllability of Fractional Descriptor Linear System, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, Volume 11, Number 4 (2016), pp. 373–382.

[2] D.Bouagada, Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, 19 décembre 2007.

[3] D.Bouagada, Paul Van Dooren, State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems, Fractional Calculus and Applied Analysis,Volume 15, Number 3 (2012).

[4] F. R. Gantmacher, The Theory OF Matrices Volume 1, 1959, 1960, 1977 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.

[5] F. R. Gantmacher, The Theory OF Matrices Volume 2, 1959, 1987, 1989 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.

[6] K.J. Latawiec, M.Łukaniszyn, R.Stanisławski, Advances in Modelling and Control of Non-integer Order Systems, 6th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, 2014 Opole, Poland.

[7] L.Farina, S.Rinaldi, Positive Linear Systems Theory and Applications, 2000 by John Wiley & Sons.

[8] L.Dai, Singular Control Systems (Lecture notes in control and information sciences ; 118) Springer-Verlag Bedin, Heidelberg 1989.

[9] M.Saliha- D.Bouagada, New Approch to compute Solution of singular continuous-time fractional linear systems, Université Mohamed Boudiaf-Oran et Université de Mostaganem http ://www.algtop.net/ 2013_Poster_Marir.

[10] M. S. N. Murty, B. V. Appa Rao, and G. Suresh Kumar, Controllability, Observability, And Realizability of Matrix Lyapunov Systems, Bull. Korean Math. Soc. 43 (2006), No. 1, pp. 149-159.

[11] Q.Huang, Q.Wu and all , Complete Controllability of Linear Fractional Differential Systems with Singularity, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015 (2015), Article ID 158653, 5 pages.

[12] T.Kaczorek, Przemyslaw Przyborowski, Positive Continuous-Time Linear Lyapunov Systems, The International Conference on "Computer as a Tool" Warsaw, September 9-12.

[13] T.Kaczorek, Selected Problems of Fractional Systems Theory, 2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[14] T.Kaczorek, Positive 1 D and 2D Systems (Communications and control engineering) 2002 Springer-Verlag London.

[15] T.Kaczorek, Krzysztof Rogowski, Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Springer International Publishing Switzerland 2015.

[16] T.Kaczorek, Kamil Borawski, Fractional Fescriptor Continuous–time Linear Systems Described by the Caputo–Fabrizio Derivative, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2016, Vol. 26, No. 3, 533–541.

[17] T.Kaczorek, Minimum energy control of fractional descriptor positive discrete-time linear systems with bounded inputs, The International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa. August 24-29, 2014.

[18] T.Kaczorek, Minimum energy control of positive 2D continuous-discrete linear systems with bounded inputs, Archives of Control Sciences, Volume 25(LXI), 2015 No. 3, pages 319–331.

[19] T.Kaczorek, Kamil Borawski, Minimum energy control of descriptor discrete-time linear systems by the use of Weierstrass-Kronecker decomposition, Archives of Control Sciences, Volume 26(LXII) 2016, No. 2, pages 177–187.

[20] T.Kaczorek, Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2011, Vol. 21, No. 2, 379–384.

[21] Y.Feng, M.Yagoubi, Robust Control of Linear Descriptor Systems, Studies in Systems, Decision and Control 102 Springer Singapore (2017).