RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficeints fonctions analytiques d'ordre [p,q] dans le disque unité

Présenté

Par

Chiguer Souheyla

Soutenue le 21/05/2017

Devant le jury :

Encadreur : BELAÏDI Benharrat	Professeur, Université de Mostaganem.
Président : HAMOUDA Saada	Professeur, Université de Mostaganem.
Examinateur :LATREUCH Zinelâabidine	Maitre de Conférences B, Université de Mostaganem

ANNÈE UNIVERSITAIRE : 2016/2017

Table des matières

Remerciements

Merci Mon Dieu pour cette accomplissement honorable et fatidique.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents qui n'ont jamais cessé de croire en moi, m'ont soutenue et tant donné.

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon Professeur Monsieur BELAÏDI Benharat pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a acordée.

Mes remerciements vont également à monsieur le président du jury, Monsieur HAMOUDA Saada, Professeur à l'université de Monstaganem et à l'examinateur Monsieur

LATREUCH Zinelâabidine, Maître de Conférences B à l'université de Monstaganem.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion $2^{\text{ème}}$ année master - mathématiques.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes amis, mes frères, et mes soeurs pour m'avoir aider et encourager dans la réalisation de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

Introduction

Dans ce mémoire, on va étudier la croissance des solutions des deux équations suivantes pour $n \geq 2$,

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + A_0(z)f = 0 \tag{1.1}$$

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + A_0(z)f = F(z) \tag{1.2}$$

où $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)(\not\equiv 0)$ et $F(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions analytiques dans le disque unité $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On s'intèresse aussi à l'étude de la relation entre les solutions des équations (1.1) et (1.2) et les fonctions de petites croissances.
En 2000, Heittokangas [5] a étudié les équations différentielles linéaires complexes dans le disque unité à coefficients fonctions analytiques. En 2004, Heittokangas, Korhonen et Rättyä ont donné des estimations de croissance pour les solutions des équations différentielles complexes linéaires (voir [6]). Beaucoup de mathématiciens ont étudiés les équations différentielles linéaires dans le disque unité ($e.g.$[2], [5]). En 2014, Hui Hu et Xiu-Min Zheng ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque unité.
Ce travail a pour but d'exposer de la manière la plus simple le travail de Hui Hu et Xiu-Min Zheng. Il est composé de deux chapitres.
Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions, notions, propositions et des exemples simples concernant la théorie de Nevanlinna.
Au deuxième chapitre, on va démontrer les résultats principaux de ce mémoire. Afin de prouver ces résultats on donne des lemmes préliminaires. Enfin, on présente quelques exemples d'applications concernant les théorèmes.

Chapitre 1

La théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions indispensable, on distingue essentiellement la théorie de R. Nevanlinna.

Définition 1.0.1 ([10]) *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, x > 1 \\ 0, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lemme 1.0.1 ([10]) *On a les propriété suivantes :*

$$1) \ln x \leq \ln^+ x$$

$$2) \ln^+ x \leq \ln^+ y (0 \leq x \leq y)$$

$$3) \ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$$

$$4) |\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$$

$$5) \ln^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j$$

$$6) \ln^+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j + \ln n$$

1.1 La fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe on désigne par $n(r, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. On désigne par $n(r, \infty, f)$ le nombre de pôles de f dans le disque $|z| \leq r$, chaque pôle étant compté selon son ordre de multiplicité.*

Définition 1.1.2 ([10]) *(Fonction a−points) Soit f une fonction méromorphe. On définit fonction a−points de f par*

$$N(r,a,f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\ln r$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$,et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\ln r.$$

Définition 1.1.3 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction de proximité de f par*

$$\begin{aligned} m(r,a,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\phi}) - a|} d\phi, \;\; f \not\equiv a \in \mathbb{C} \\ m(r,\infty,f) &= m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\phi})\right| d\phi. \end{aligned}$$

Définition 1.1.4 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors la fonction caractéristique de Nevanlinna est définie par :*

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f).$$

Example 1 *Soit $f(z) = \exp(\frac{i}{1-z})$*

On calcule la fonction caractéristique de la fonction $f(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)$. Cette fonction est analytique dans le disque unité $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Donc $N(r,f) = 0$. Donc

$$T\left(r, \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)\right) = m(r, \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Définition 1.1.5 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction de proximité d'ordre p de f par*

$$\begin{aligned} m_p(r,a,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln_p^+ \frac{1}{|f(re^{i\phi}) - a|} d\phi, \;\; f \not\equiv a \in \mathbb{C} \\ m_p(r,\infty,f) &= m_p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln_p^+ \left|f(re^{i\phi})\right| d\phi. \end{aligned}$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 ([10]) *Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe, soit*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j z^j, \ \ a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour de l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|a_m| + \varphi(r,a).$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2$.

Remarque 1.2.1 ([10]) *Le premier théorème fondamental peut-être formulé comme suit : pour tout $a \in \mathbb{C}$*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \ \ r \to +\infty.$$

1.3 L'ordre et l'hyper-ordre de croissance d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.3.1 ([8]) *L'ordre d'une fonction méromorphe $f(z)$ dans le disque unité $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est défini par*

$$\sigma(f) = \lim_{r \to 1^-} \sup \frac{\log^+ T(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna de la fonction f. L'ordre d'une fonction analytique $f(z)$ dans Δ est défini par

$$\sigma_M(f) = \lim_{r \to 1^-} \sup \frac{\log^+ \log^+ M(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Définition 1.3.2 ([8]) *L'hyper-ordre $\sigma_2(f)$ d'une fonction méromorphe $f(z)$ dans le disque unité $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est défini par*

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \to 1^-} \sup \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Proposition 1.3.1 ([10]) *Soient f et g deux fonctions méromorphes non constantes. Alors*

$$\begin{aligned} 1)\sigma(f+g) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\} \\ 2)\sigma(fg) &\leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}. \\ 3) \text{ Si } \sigma(g) &< \sigma(f), \text{ alors } \sigma(f+g) = \sigma(fg) = \sigma(f). \end{aligned}$$

Example 2 *D'après l'exemple précédent pour* $f(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)$, *on a*

$$T\left(r, \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \lim_{r\to 1^-}\sup\log\left(\frac{\log(1+r)+\log(\frac{1}{1-r})}{\log(\frac{1}{1-r})}\right)\\ &= \lim_{r\to 1^-}\sup\log\left(1+\frac{\log(1+r)}{\log(\frac{1}{1-r})}\right) = 0,\end{aligned}$$

$$\sigma_2(f) = 0.$$

Lemme 1.3.1 ([12]) *Soit* $g(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^\mu}\right)$, $\mu \geq 1$, *on a* $\sigma_M(g) = \mu$, $\sigma(g) = \mu - 1$.

Lemme 1.3.2 ([13]) *Soit* $f(z) = \exp\left(\exp(\frac{1}{(1-z)^\mu})\right)$, $g(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)^\mu}\right)$, $\mu \geq 1$. *Alors, on a*

$$\sigma_2(f) = \sigma(g) = \mu - 1.$$

Example 3 *Soit* $f(z) = \exp\left(\frac{1}{(1-z)}\right)$, *on a* $\sigma_M(f) = 1$.

1.4 Le type de croisance d'une fonction méromorphe ou analytique dans le disque unité

Définition 1.4.1 ([8]) *Soit* f *une fonction méromorphe dans* Δ, *d'ordre* σ $(0 < \sigma < \infty)$ *et d'ordre inférieur* μ $(0 < \mu < \infty)$ *on définit le type et type inférieur de* f *par*

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \lim_{r\to 1^-}\sup(1-r)^\sigma T(r,f),\\ \underline{\tau}(f) &= \lim_{r\to 1^-}\inf(1-r)^\mu T(r,f).\end{aligned}$$

Si f *est une fonction analytique d'ordre* $\sigma_M(0 < \sigma_M < \infty)$, *et d'ordre inférieur* μ_M $(0 < \mu_M < \infty)$ *on définit le type et le type inférieur de* f *par*

$$\begin{aligned}\tau_M(f) &= \lim_{r\to 1^-}\sup(1-r)^{\sigma_M}\log^+ M(r,f),\\ \underline{\tau}_M(f) &= \lim_{r\to 1^-}\inf(1-r)^{\mu_M}\log^+ M(r,f).\end{aligned}$$

Example 4 *Soit* $f(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z}\right)$. *Alors, on a*

$$\tau_M(f) = 0.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.5.1 ([8]) *Soit f une fonction méromorphe dans Δ, on définit l'exposant de convergence des zéros de f par*

$$\lambda(f) = \lim_{r\to 1^-} \sup \frac{\log^+ N(r, \frac{1}{f})}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r$$

telle que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Définition 1.5.2 ([8]) *On définit l'exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f par*

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to 1^-} \sup \frac{\log^+ \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r$$

avec $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros distincts de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Example 5 *Soit $f(z) = \exp\left(\frac{i+iz}{1-z}\right)$. On a*

$$\lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = 0.$$

1.6 La mesure linéaire et la mesure logarithmique

Définition 1.6.1 ([11]) *Supposons que $E \subset [1, +\infty)$, on désigne par $m(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E et par $lm(E)$ la mesure logarithmique de l'ensemble E, avec*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) dt$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt,$$

où $\chi(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E.

Example 6 1) *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [e^{\frac{1}{2}}, e^2] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^2} dt = e^2 - e^{\frac{1}{2}}.$$

2) *La mesure logarithmique de l'ensemble* $E = [e^{\frac{1}{2}}, e^2] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt = \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^2} \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}.$$

1.7 La notion d'ordre [p,q] d'une fonction méromorphe ou analytique

Définition 1.7.1 ([8]) *Soient* p, q *des entiers tels que* $p \geq q \geq 1$, *et* $f(z)$ *une fonction méromorphe sur* Δ. *L'ordre* $[p, q]$ *et l'ordre inférieur* $[p, q]$ *de* $f(z)$ *sont définis respectivement par*

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_p^+ T(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\mu_{[p,q]}(f) = \underline{\lim}_{r \to 1^-} \frac{\log_p^+ T(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Pour une fonction analytique $f(z)$ *dans* Δ, *nous définissons aussi*

$$\sigma_{M_{[p,q]}}(f) = \overline{\lim_{r \to 1^-}} \frac{\log_{p+1}^+ M(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\mu_{M_{[p,q]}} = \underline{\lim}_{r \to 1^-} \frac{\log_{p+1}^+ M(r, f)}{\log_q \left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Remarque 1.7.1 ([11] *Par cette définition, nous avons que*

$$\sigma_{[1,1]}(f) = \sigma_1(f) = \sigma(f), \ \sigma_{[2,1]}(f) = \sigma_2(f)$$

et

$$\sigma_{[p+1,1]}(f) = \sigma_{p+1}(f).$$

Définition 1.7.2 ([8]) *Soient* p, q *des entiers tels que* $p \geq q \geq 1$, *et* $f(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $[p, q]$, $\sigma (0 < \sigma < \infty)$ *et d'ordre inférieur* $[p, q]$, μ $(0 < \mu < \infty)$ *dans* Δ. *Le type* $[p, q]$ *et le type inférieur* $[p, q]$ *de* $f(z)$ *sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned} \tau_{[p,q]}(f) &= \lim_{r \to 1^-} \sup \frac{\log_{p-1}^+ T(r, f)}{\left(\log_{q-1} \left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\sigma}}, \\ \underline{\tau}_{[p,q]}(f) &= \lim_{r \to 1^-} \inf \frac{\log_{p-1}^+ T(r, f)}{\left(\log_{q-1} \left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu}}. \end{aligned}$$

Pour une fonction analytique $f(z)$ dans Δ, on définit aussi

$$\begin{aligned}\tau_{M[p,q]}(f) &= \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ M(r,f)}{\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\sigma_M}} \\ \underline{\tau}_{M[p,q]}(f) &= \liminf_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ M(r,f)}{\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu_M}}\end{aligned}$$

Définition 1.7.3 ([8]) *Soient p,q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$, $a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, et $f(z)$ une fonction méromorphe sur Δ. Les exposants de convergence $[p,q]$ de la suite des a-points et des $a-$points distincts de $f(z)$ sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\lambda_{[p,q]}(f-a) &= \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \\ \overline{\lambda}_{[p,q]}(f-a) &= \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}.\end{aligned}$$

Définition 1.7.4 ([8]) *Les exposants de convergence inférieurs $[p,q]$ de la suite des $a-$points et des $a-$points distincts de $f(z)$ sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}_{[p,q]}(f-a) &= \liminf_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \\ \overline{\underline{\lambda}}_{[p,q]}(f-a) &= \liminf_{r\to 1^-} \frac{\log_p^+ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}.\end{aligned}$$

Proposition 1.7.1 ([2]) *Soient p,q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$, et $f(z)$ une fonction analytique d'ordre $[p,q]$ dans Δ. On a, les deux assertions suivantes :*

$$\begin{aligned}(i)\ \textit{Si } p &= q,\ \textit{alors } \sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f)+1. \\ (ii)\ \textit{Si } p &> q,\ \textit{alors } \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f).\end{aligned}$$

Preuve. (i) *Pour $p=q=1$ l'inégalité est évident*

$$\sigma(f) < \sigma_M(f) \leq 1+\sigma(f).$$

Pour $p=q\geq 2$ par l'inégalité standard [9, *p*.26].

$$\begin{aligned}T(r,f) &\leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{1+3r}{1-r} T\left(\frac{1+r}{2},f\right).(0<r<1), \\ \log_p T(r,f) &\leq \log_p \log^+ M(r,f) \leq \log_p\left(\frac{1+3r}{1-r}T\left(\frac{1+r}{2},f\right)\right) \\ &\leq \log_{p+1}^+ M(r,f) \leq \log_p\left(\frac{1+3r}{1-r}\right) + \log_p T\left(\frac{1+r}{2},f\right) + C, \\ \frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q(\frac{1}{1-r})} &\leq \frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log_q(\frac{1}{1-r})} \\ &\leq \frac{\log_p^+ T\left(\frac{1+r}{2},f\right)}{\log_q\left(\frac{1+r}{2}\right)}.\frac{\log_q\left(\frac{1+r}{2}\right)}{\log_q(\frac{1}{1-r})} + \frac{\log_p\left(\frac{1+3r}{1-r}\right)}{\log_q(\frac{1}{1-r})} + \frac{C}{\log_q(\frac{1}{1-r})},\end{aligned}$$

d'où $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f) + 1$. *(ii) Si* $p > q \geq 1$, *d'aprés l'inégalité standard on a*

$$\log_p T(r,f) \leq \log_{p+1}^{+} M(r,f) \leq \max\left\{\log_p\left(\frac{4}{1-r}\right), \log_p T\left(\frac{1+r}{2}, f\right)\right\} \qquad (1.7)$$

d'après (1.7) *nous avons*

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f).$$

De même on démontre la Proposition 1.7.1

Proposition 1.7.2 ([8]) *Soient* p, q *des entiers tels que* $p \geq q \geq 1$, *et* $f(z)$ *une fonction analytique d'ordre inférieur* $[p,q]$ *dans* Δ. *On a les deux assertions suivantes :*

$$\begin{aligned} (i)\ \textit{Si}\ p &= q,\ \textit{alors}\ \mu_{[p,q]}(f) \leq \mu_{M,[p,q]}(f) \leq \mu_{[p,q]}(f) + 1, \\ (ii)\ \textit{Si}\ p &> q,\ \textit{alors}\ \mu_{[p,q]}(f) = \mu_{M,[p,q]}(f). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques d'ordre [p,q] dans le disque unité

Dans ce chapitre on va considérer les équations (1.1) et (1.2) pour $n \geq 2$. L'équation (1.1) a été étudiée par Hui Hu et Xiu-Min Zheng ([8]) dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 2.0.1 ([8]) *Soit $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$ des fonctions entières satisfaisant*

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, ..., n-1\} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty,$$

$$\max\{\tau_{[p,q]}(A_j) : \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0, j \neq 0\} < \tau_{[p,q]}(A_0).$$

Alors toute solution non triviale $f(z)$ de (1.1) vérifie

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Dans ce chapitre on va étudier la relation entre les solutions des équations (1.1) et (1.2) et les fonctions de petite croissance. De plus, on obtient les résultats sur l'exposant de convergence $[p, q]$ et l'exposant de convergence inférieur $[p, q]$ de la suite des zéros distincts de $f(z) - \phi(z)$.

Théorème 2.0.2 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p > q \geq 2$ et $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)(\not\equiv 0)$ des fonctions analytiques dans Δ avec $0 < \mu = \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$. Supposons que*

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, ..., n-1\} \leq \mu_{[p,q]}(A_0),$$

et que

$$\max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0\} \leq \underline{\tau}_{[p,q]}(A_0) = \tau < \infty.$$

Si $f(z)(\not\equiv 0)$ est une solution de (1.1), alors nous avons

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f - \phi) = \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \phi),$$

où $\phi(z)(\not\equiv 0)$ est une fonction analytique dans Δ avec $\sigma_{[p+1,q]}(\phi) < \mu_{[p,q]}(A_0)$.

Théorème 2.0.3 ([8]) *Soient* p, q *des entiers tels que* $p > q \geq 1$ *et* $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)(\not\equiv 0)$ *des fonctions analytiques dans* Δ *avec* $0 < \mu = \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$. *Supposons que*

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, ..., n-1\} \leq \mu_{[p,q]}(A_0),$$

et que

$$\limsup_{r \to 1^-} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m(r, A_j)}{m(r, A_0)} < 1.$$

Si $f(z)(\not\equiv 0)$ *est une solution de* (1.1), *alors nous avons*

$$\underline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \phi) = \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \phi),$$

où $\phi(z)(\not\equiv 0)$ *est une fonction analytique dans* Δ *avec* $\sigma_{[p+1,q]}(\phi) < \mu_{[p,q]}(A_0)$.

Remarque 2.0.2 ([8]) *Dans les Théorèmes 2.0.2 et 2.0.3, on considère simplement le cas* $p > q$ *pour s'assurer que les Lemmes 2.1.8 et 2.1.11 sont valides. De plus,* $q \geq 2$ *est nécessaire dans le Théorème 2.0.2 pour utiliser le Lemme 2.1.10.*

2.1 Lemmes préliminaires

Lemme 2.1.1 ([6]) *Soient* $A_j(z)$, $j = 0, ..., n-1$ *des fonctions analytiques dans* D_R $(D_R = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z|\})$, *où* $0 < R \leq \infty$ *et* $f(z)$ *une solution de* (1.1) *dans* D_R, $1 \leq p < \infty$. *Alors pour tout* $0 \leq r < R$, *on a*

$$m_p(r, f)^p \leq C \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| A_j(se^{i\theta}) \right|^{\frac{p}{n-j}} ds d\theta + 1 \right),$$

où $C = C(n) > 0$ *est une constante dépendant de* p *et sur les valeurs initiales de* $f(z)$ *au point* z_θ, *où* $A_j(z_\theta) \neq 0$ *pour un certain* $j = 0, ..., n-1$.

Lemme 2.1.2 ([5]). *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe sur* Δ, *et* $k \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

où $S(r, f) = O\left(\log^+ T(r, f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$, *éventuellement en dehors d'un ensemble* $E_1 \subset [0, 1)$ *avec* $\int_{E_1} \frac{dr}{1-r} < \infty$. *Si* $f(z)$ *est d'ordre fini (à savoir d'ordre* 1 *itératif fini), alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right).$$

Preuve. *On démontre le lemme par récurrence. Nous avons déja l'assertion pour* $k = 1$ ([10], *p.* 241 − 246). *Supposons ensuite que nous avons*

$$m\left(r, \frac{f^{(p)}}{f}\right) = S(r, f).$$

Alors

$$m(r,f^{(p)})\leq m\left(r,\frac{f^{(p)}}{f}\right)+m(r,f)=m(r,f)+S(r,f).$$

Si f a un pôle d'ordre μ en z_0, alors $f^{(p)}$ a un pôle d'ordre $\mu+p\leq(p+1)\mu$ en z_0, donc

$$N(r,f^{(p)})\leq(p+1)N(r,f).$$

Par conséquent,

$$T(r,f^{(p)})\leq(p+1)T(r,f)+S(r,f)$$

cela implique immédiatement

$$m\left(r,\frac{f^{(p+1)}}{f^{(p)}}\right)=S(r,f^{(p)})=S(r,f)$$

et donc

$$m\left(r,\frac{f^{(p+1)}}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{f^{(p+1)}}{f^{(p)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(p)}}{f}\right)=S(r,f)+S(r,f)=S(r,f).$$

Lemme 2.1.3 ([2]). *Soient $p\geq q\geq 1$ et $k\geq 1$ des nombres entiers et $f(z)$ une fonction méromorphe sur Δ telle que $\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma<\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $r\to 1^-$*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r})\})$$

en dehors d'un ensemble $E_2\subset[0,1)$ avec $\int\limits_{E_2}\frac{dr}{1-r}<\infty$.en dehors d'un ensemble $E_2\subset[0,1)$ avec $\int\limits_{E_2}\frac{dr}{1-r}<\infty$.

Preuve. Pour $k=1$, $\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma<\infty$, $\forall r\to 1^-$, on a

$$T(r,f)\leq\exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r})\}.$$

Par le Lemme 2.1.2, on a

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\ln^+T(r,f)+\ln(\frac{1}{1-r})\right)\tag{2.4}$$

pour tout r en dehors d'un ensemble $E_2\subset[0,1)$ avec $\int\limits_{E_2}\frac{dr}{1-r}<\infty$. Donc on obtient

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r}\}\right),\ r\notin E_2.\tag{2.5}$$

Supposons

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r}\}\right), \ r \notin E_2 \tag{2.6}$$

pour un entier $k \geq 1$. On a

$$N(r, f^{(k)}) \leq (k+1)N(r,f),$$

$$\begin{aligned} T(r, f^{(k)}) &= m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(r,f) + (k+1)N(r,f) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + (k+1)T(r,f) \\ &= O\left(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r})\}\right) + (k+1)T(r,f) \\ &= O\left(\exp_{p}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r})\}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par (2.4) et (2.7), on obtient

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) = O\left(\ln^+ T(r, f^{(k)}) + \ln(\frac{1}{1-r})\right)$$

$$= O\left(\exp_{p-1}\{(\delta+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r}\}\right), r \notin E_2 \tag{2.8}$$

et alors,

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &= O\left(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q(\frac{1}{1-r}\}\right), \ r \notin E_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

Lemme 2.1.4 ([1]). *Soient $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ et $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles qu'on a $g(r) \leq h(r)$ en dehors d'un ensemble exceptionnel $E_3 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_3} \frac{dr}{1-r} < \infty$. Alors il existe une constante $d \in (0,1)$ telle que si $s(r) = 1 - d(1-r)$, alors*

$$g(r) \leq h(s(r)), \ \forall r \in [0,1).$$

Preuve. Par hypothèse, il existe un ensemble E_3 avec $\int_{E_3} \frac{dr}{1-r} = \sigma < +\infty$ tel que pour $r \in [0,1)$ et $r \notin E_3$, on a $g(r) \leq h(r)$. Alors si on pose

$$\phi(r) = (1-r)(1 - e^{-(\sigma+1)}),$$

donc pour tout $r \in [0,1)$ on vérifie facilement que l'intervalle $J_r = [r, r+\phi(r)] \subset [0,1)$, et l'intégrale

$$\int\limits_{J_r} \frac{dt}{1-t} = \int\limits_{r}^{r+\phi(r)} \frac{dt}{1-t} = -\ln(t-1)|_r^{r+\phi(r)} = -\ln\left((r-1)e^{-(\sigma+1)}\right) + \ln(r-1) = \sigma+1.$$

Donc J_r ne peut pas être contenu dans E_3, alors il existe $t \in [r, r+\phi(r)]$ tel que $g(t) \leq h(t)$. Par la monotonie de g et h on obtient

$$g(r) \leq h(r+\phi(r)).$$

Si on pose $d = e^{-(\sigma+1)}$ alors $r+\phi(r) = s(r)$.

Lemme 2.1.5 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$ et $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)(\not\equiv 0)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ des fonctions méromorphes sur Δ. Si $f(z)$ est une solution méromorphe de* (1.2) *satisfaisant*

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(F), \sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j=0,...,n-1\} < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma < \infty.$$

Alors

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \lambda_{[p,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(f).$$

Preuve. *Par* (1.2), *nous avons*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(\frac{f^{(n)}}{f} + A_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + A_0(z)\right) \tag{3.1}$$

Si $f(z)$ a un zéro en $z_0 \in \Delta$ d'ordre $\gamma(> n)$ et $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)$ sont toutes analytiques en z_0, alors $F(z)$ a un zéro d'ordre au moins $\gamma - n$. Par conséquent, nous avons

$$N(r,f) \leq n\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} N(r, A_j) \tag{3.2}$$

Par (3.1), *nous avons*

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} m(r, A_j) + \sum_{j=0}^{n} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \tag{3.3}$$

D'après le Lemme 2.1.3, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right),\ j=1,...,n \tag{3.4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r \to 1^-$ en dehors d'un ensemble $E_2 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_2} \frac{dr}{1-r} < \infty$.Par conséquent, par (3.2) – (3.3) *et le premier théorème fondamental,*

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq n\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r,F) + \sum_{j=0}^{n-1} T(r, A_j) \\ &\quad + O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

pour tout $r \to 1^-$, $r \notin E_2$. *Posons*

$$\rho = \max\{\sigma_{[p,q]}(F), \sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j = 0, ..., n-1\}.$$

Alors pour $r \to 1^-$, *nous avons*

$$\sum_{j=0}^{n-1} T(r, A_j) + T(r, F) \le (n+1)\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \tag{3.6}$$

Ainsi, par (3.5) *et* (3.6), *pour tout* $r \to 1^-$, $r \notin E_2$, *on a*

$$\begin{aligned} T(r,f) &\le n\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (n+1)\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \\ &\quad + O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \qquad (3.7) \\ &\le n\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \exp_p\left\{(\rho+2\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, par le Lemme 2.1.4 et la formule (3.7), $\forall r \to 1^-$, *on a*

$$T(r,f) \le n\overline{N}\left(s(r), \frac{1}{f}\right) + \exp_p\left\{(\rho+2\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-s(r)}\right)\right\}, \tag{3.8}$$

où $s(r) = 1 - d(1-r)$, $d \in (0,1)$. *Si* $\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma$, *alors pour tout* ε $(0 < 3\varepsilon < \sigma - \max\{\overline{\lambda}_{[p,q]}(f), \rho\})$ *et tout* $r \to 1^-$, *nous avons*

$$\begin{aligned} T(r,f) &\le n\exp_p\left\{(\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-s(r)}\right)\right\} + \exp_p\left\{(\rho+2\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-s(r)}\right)\right\} \\ &\le (n+1)\exp_p\left\{(\sigma-\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-s(r)}\right)\right\} \end{aligned}$$

ce qui conduit à la contraduction $\sigma = \sigma_{[p,q]}(f) < \sigma - \varepsilon$. *Par conséquent, on a*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) \ge \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma.$$

Comme

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) \le \lambda_{[p,q]}(f) \le \sigma_{[p,q]}(f)$$

alors, on a le résultat. □

□

Lemme 2.1.6 ([8]) *Soient* p, q *des entiers tels que* $p \ge q \ge 1$ *et* $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z) (\not\equiv 0)$ *et* $F(z) (\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes sur* Δ.*Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe de* (1.2) *satisfaisant*

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(F),\ \sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j = 0, ..., n-1\} < \mu_{[p,q]}(f) < \sigma_{[p,q]}(f) < \infty.$$

Alors on a

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p,q]}(f) = \underline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(f).$$

Preuve. On a

$$\max\{\sigma_{[p,q]}(F),\ \sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j=0,...,n-1\} < \mu_{[p,q]}(f).$$

Pour $r \to 1^-$

$$T(r,F) = o(T(r,f)),\ T(r,A_j) = oT(r,f),\ j=0,...,n-1. \tag{3.9}$$

Par (3.5) et (3.9), on a

$$(1-o(1))T(r,f) \leq n\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_{[p,q]}(f)+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \tag{3.10}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \to 1^-$, $r \notin E_2$, où $E_2 \subset [0,1)$ vérifie $\int\limits_{E_2} \frac{dr}{1-r} < \infty$. Alors, par le Lemme 2.1.4 et la formule (3.10), pour tout $r \to 1^-$, on a

$$((1-o(1))T(r,f) \leq n\overline{N}\left(s(r),\frac{1}{f}\right) + O\left(\exp_{p-1}\left\{(\sigma_{[p,q]}(f)+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-s(r)}\right)\right\}\right),$$

où $s(r) = 1-d(1-r), d \in (0,1)$. Donc on a

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p,q]}(f) \geq \mu_{[p,q]}(f)$$

et

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p,q]}(f) \leq \underline{\lambda}_{[p,q]}(f) \leq \mu_{[p,q]}(f).$$

D'où le résultat. □

Lemme 2.1.7 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$ et $f(z)$ une fonction analytique sur Δ avec $\mu_{[p,q]}(f) = \mu < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_4 \subset [0,1)$ vérifiant $\int\limits_{E_4} \frac{dr}{1-r} = \infty$ tel que*

$$\mu = \mu_{[p,q]}(f) = \underline{\lim}_{r\to 1^-, r\in E_4} \frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

et

$$T(r,f) \leq \exp_p\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\},\ r \in E_4, r \to 1^-$$

Mais, si $p > q \geq 1$, alors nous avons

$$M(r,f) \leq \exp_{p+1}\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, r \in E_4, r \to 1^-$$

Preuve. Par la définition de l'ordre inférieur $[p,q]$, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\underline{\lim}_{r_n\to 1^-} \frac{\log_p^+ T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)} = \mu_{[p,q]}(f).$$

Alors pour tout $r \in [1 - \frac{1-r_n}{d}, r_n]$, on a

$$\frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leq \frac{\log_p^+ T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)} \frac{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

Lorsque $q \geq 1$, on a

$$\frac{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} \to 1, r_n \to 1^-$$

Soit $E_4 = \bigcup\limits_{n_1}^{\infty} \left[1 - \frac{1-r_n}{d}, r_n\right]$ où n_1 est un entier positif suffisamment grand, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\varliminf_{r\to 1^-, r\in E_4} \frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \varliminf_{r_n\to 1^-} \frac{\log_p^+ T(r_n,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)} = \mu_{[p,q]}(f).$$

$$T(r,f) < \exp_p\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, r \in E_4, r \to 1^-.$$

$$\int\limits_{E_4} \frac{dr}{1-r} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{1-\frac{1-r_n}{d}}^{r_n} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log\frac{1}{d} = \infty.$$

Si $p > q \geq 1$, alors par l'inégalité

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{1+3r}{1-r} T\left(\frac{1+r}{2}, f\right),$$

$$\varliminf_{r\to 1^-, r\in E_4} \frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \varliminf_{r\to 1^-, r\in E_4} \frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

Donc,

$$M(r,f) < \exp_{p+1}\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, \ r \in E_4, r \to 1^-.$$

□

Lemme 2.1.8 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p > q \geq 1$, et $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ des fonctions analytiques sur Δ telle que* $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) |\ j \neq s\} \leq \mu_{[p,q]}(A_s) < \infty$. *Si $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ est une solution de* (1.1), *alors on a*

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \leq \mu_{[p,q}(A_s).$$

Preuve. Si $\mu_{[p,q]}(f) < \infty$, alors

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = 0 < \mu_{[p,q]}(A_s).$$

Donc, nous supposons $\mu_{[p,q]}(f) = \infty$. Par Le Lemme 2.1.1, on a

$$\begin{aligned} T(r,f) &= m(r,f) \leq C \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| A_j(se^{i\theta}) \right|^{\frac{1}{n-j}} dsd\theta + 1 \right) \\ &\leq 2\pi C \left(\sum_{j=0}^{n-1} rM(r,A_j) + 1 \right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

où $C = C(n) > 0$ est une constante dépendant des valeurs initiales de $f(z)$ au point z_θ, où $A_j(z_\theta) \neq 0$ pour un certain $j = 0, ..., n-1$. Posons $b = \max\{\sigma_{M;[p,q]}(A_j) | \ j \neq s\} = \max\{\sigma_{M;[p,q]}(A_j) | \ j \neq s\}$. Alors on a

$$M(r,A_j) \leq \exp_{P+1} \left\{ (b+\varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}, \ j \neq s \tag{3.12}$$

$\forall \varepsilon > 0$, et $r \to 1^-$. Par le Lemme 2.1.7, il existe un ensemble $E_4 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_4} \frac{dr}{1-r} = \infty$ tel que

$$M(r,A_s) \leq \exp_{P+1} \left\{ (\mu_{[p,q]}(A_s) + \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}, \ r \in E_4, \ r \to 1^-. \tag{3.13}$$

Par $(3.11) - (3.13)$, pour $r \in E_4$, $r \to 1^-$, on a

$$T(r,f) \leq O \left(\exp_{p+1} \left\{ (\mu_{[p,q]}(A_s) + 2\varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\} \right) \tag{3.14}$$

Par la formule (3.14) et la Proposition 1.6, on a

$$\mu_{M,[p+1,q]}(f) \leq \mu_{[p,q]}(A_s) = \mu_{M,[p,q]}(A_s).$$

$\square$

Lemme 2.1.9 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$, et $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ des fonctions analytiques sur Δ. Supposons que $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) | \ j = 1, ..., n-1\} \leq \mu_{[p,q]}(A_0) = \mu$ $(0 < \mu < \infty)$ et $\max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \ \sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), \ j \neq 0\} < \underline{\tau}_{[p,q]}(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$. Si $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ est une solution de (1.1), alors nous avons*

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \geq \mu_{[p,q]}(A_0).$$

Preuve. Supposons que $f(z)$ est une solution non nulle de (1.1), on obtient

$$-A_0(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} + A_{n-1}(z) \frac{f^{(n-1)}(z)}{f(z)} + ... + A_1(z) \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{3.15}$$

Par (3.15), nous avons

$$T(r,A_0) = m(r,A_0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} m(r,A_j) + \sum_{j=1}^{n} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right).$$

Donc, par Lemme 2.1.2, on a

$$T(r,A_0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} m(r,A_j) + O\left(\log^+ T(r,f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right), \tag{3.16}$$

pour $r \notin E_1$, où $E_1 \subset [0,1)$ satisfait $\int\limits_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$. Posons

$$b = \max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) < \mu_{[p,q]}(A_0) = \mu,\ j = 1, ..., n-1\}.$$

Si $\sigma_{[p,q]}(A_j) < \mu_{[p,q]}(A_0) = \mu$, alors pour tout $\varepsilon (0 < 2\varepsilon < \min\{\mu - b, \tau - \tau_1\})$ et tout $r \to 1^-$, on a

$$\begin{aligned} m(r,A_j) &= T(r,A_j) \leq \exp_p\left\{(b+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \\ &< \exp_p\left\{(\mu-\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Soit

$$\tau_1 = \max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), j \neq 0\}.$$

Alors $\tau_1 < \tau$. Si

$$\sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0) = \mu,\ \tau_{[p,q]}(A_j) \leq \tau_1 < \tau,$$

alors pour $r \to 1^-$ et pour ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{\mu - b, \tau - \tau_1\})$, nous avons

$$m(r,A_j) = T(r,A_j) \leq \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu}\right\}. \tag{3.18}$$

Par la définition de type inférieur $[p,q]$, pour $r \to 1^-$, nous avons

$$T(r,A_0) > \exp_{p-1}\left\{(\tau-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu}\right\}. \tag{3.19}$$

En remplaçant (3.17) – (3.19) dans (3.16), nous aurons

$$\exp_{p-1}\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu}\right\} \leq O(\log^+ T(r,f)),\ r \notin E_1,\ r \to 1^-. \tag{3.20}$$

Donc par le Lemme 2.1.4 et la formule (3.20), pour tout $r \to 1^-$, on a

$$\exp_{p-1}\left\{(\tau-2\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\mu}\right\} \leq O(\log^+ T(s(r),f)),$$

où $s(r) = 1 - d(1-r)$, $d \in (0,1)$. Par conséquent, nous avons

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \geq \mu_{[p,q]}(A_0).$$

□

Lemme 2.1.10 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p \geq q \geq 2$ et $f(z)$ une fonction analytique sur Δ avec $0 < \sigma_{[p,q]}(f) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_5 \subset [0,1)$ avec $\int\limits_{E_5} \frac{dr}{1-r} = \infty$ tel que*

$$\tau = \tau_{[p,q]}(f) = \lim_{r\to 1^-,\ r\in E_5} \frac{\log^+_{p-1} T(r,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}}.$$

Preuve. Par la définition de type $[p,q]$, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tende vers 1^- satisfaisant $1 - d(1 - r_n) < r_{n+1}$ $(0 < d < 1)$ telle que

$$\tau_{[p,q]}(f) = \lim_{r_n\to 1^-} \frac{\log^+_{p-1} T(r_n,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r_n}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}}.$$

Alors $\forall r \in [r_n,\ 1 - d(1 - r_n)]$, on a

$$\frac{\log^+_{p-1} T(r_n,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r_n}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}} \left(\frac{\log_{q-1}(\frac{1}{1-r_n})}{\log_{q-1}(\frac{1}{1-r})}\right)^{\sigma_{[p,q]}(f)} \leq \frac{\log^+_{p-1} T(r,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}}.$$

Lorsque $q \geq 2$, nous avons

$$\frac{\log_{q-1}(\frac{1}{1-r_n})}{\log_{q-1}(\frac{1}{1-r})} \to 1,\ r_n \to 1^-.$$

Soit $E = \cup_{n=n_1}^{\infty}[r_n, 1 - d(1 - r_n)]$, où n_1 est un entier positif suffisamment grand, alors on a

$$\lim_{r\to 1^-,\ r\in E_5} \frac{\log^+_{p-1} T(r,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}} = \lim_{r_n\to 1^-} \frac{\log^+_{p-1} T(r_n,f)}{(\log_{q-1}(\frac{1}{1-r_n}))^{\sigma_{[p,q]}(f)}} = \tau_{[p,q]}(f)$$

et

$$\int\limits_{E5} \frac{dr}{1-r} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{r_n}^{1-d(1-r_n)} \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log d = \infty.$$

□

Lemme 2.1.11 ([8]) *Soient p, q des entiers tels que $p \geq q \geq 1$. Si $A_{n-1}(z), ..., A_1(z), A_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions analytiques d'ordre $[p,q]$ sur Δ, alors toute solution $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ de (1.1) vérifie*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\{\sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j = 0, ..., n-1\}.$$

Preuve. Soit $b = \max\{\sigma_{[p,q]}(A_j)|\ j = 0, ..., n-1\} = \max\{\sigma_{M,[p,q]}(A_j)|\ j = 0, ..., n-1\}$. Donc on a

$$M(r, A_j) \leq \exp_{P+1}\left\{(b+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, \tag{3.21}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ donné et $r \to 1^-$. Par (3.11) et (3.21), pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \to 1^-$, nous avons

$$T(r,f) = m(r,f) \leq O\left(\exp_{p+1}\left\{(b+2\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right). \tag{3.22}$$

Par conséquent,

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \max\{\sigma_{[p,q]}(A_j)|j = 0, ..., n-1\}.$$

□

2.2 Preuve du Théorème 2.0.2

Par le Lemme 2.1.11, on a
$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0).$$
Soit
$$b = \max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) < \sigma_{[p,q]}(A_0)\}.$$
Si
$$\sigma_{[p,q]}(A_j) < \mu_{[p,q]}(A_0) \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) \text{ ou } \sigma_{[p,q]}(A_j) \leq \mu_{[p,q]}(A_0) < \sigma_{[p,q]}(A_0),$$
alors pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma_{[p,q]}(A_j) - b)$ et $r \to 1^-$, on a
$$\begin{aligned} m(r, A_j) &= T(r, A_j) \leq \exp_p\left\{(b+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \\ &< \exp_p\left\{(\sigma_{[p,q]}(A_0)-\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$
Soit
$$\tau_1 = \max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \ \sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0), \ j \neq 0\}.$$
Si $\sigma_{[p,q]}(A_j) = \mu_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors nous avons $\tau_1 < \tau < \tau_{[p,q]}(A_0)$. Par conséquent,
$$m(r, A_j) = T(r, A_j) \leq \exp_{p-1}\left\{(\tau_1+\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0)}\right\} \tag{4.2}$$
pour tout $r \to 1^-$, et quelque soit ε donné $(0 < 2\varepsilon < \tau_{[p,q]}(A_0) - \tau_1)$. Par la définition du type $[p, q]$ et le Lemme 2.1.10 pour tout $r \to 1^-$, $r \in E_5$, où $E_5 \subset [0, 1)$ satisfaisant $\int_{E_5} \frac{dr}{1-r} = \infty$, on a
$$T(r, A_0) > \exp_{p-1}\left\{(\tau_{[p,q]}(A_0)-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0)}\right\} \tag{4.3}$$
Donc par (3.16) et (4.1) − (4.3), pour tout $r \to 1^-$, $r \in E_5 \backslash E_1$ et $\varepsilon(0 < 2\varepsilon < \tau_{[p,q]}(A_0) - \tau_1)$, où $E_1 \subset [0, 1)$ satisfaisant $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$, on a
$$\exp_{p-1}\left\{(\tau_{[p,q]}(A_0)-\varepsilon)\left(\log_{q-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\sigma_{[p,q]}(A_0)}\right\} \leq O\left(\log^+ T(r,f)\right). \tag{4.4}$$
Par (4.4), on a
$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0).$$
Ainsi, nous avons
$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$
Par les Lemmes 2.1.8 et 2.1.9, on sait que toute solution $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ de (1.1) satisfait $\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0)$. Il faut donc prouver que
$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\phi) = \mu_{[p+1,q]}(f) \text{ et } \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\phi) = \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Soit $g = f - \phi$, comme $\sigma_{[p+1,q]}(\phi) < \mu_{[p,q]}(A_0)$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{[p+1,q]}(g) &= \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p+1,q]}(A_0),\ \mu_{[p+1,q]}(g) = \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0),\\ \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) &= \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\phi) \text{ et } \underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(g) = \underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\phi).\end{aligned}$$

En substituant $f = g + \phi$, $f' = g' + \phi'$, ..., $f^{(n)} = g^{(n)} + \phi^{(n)}$ dans (1.1), on obtient

$$g^{(n)} + A_{n-1}(z)g^{(n-1)} + ... + A_0(z)g = -[\phi^{(n)} + A_{n-1}(z)\phi^{(n-1)} + ... + A_0(z)\phi]. \tag{4.5}$$

Si $F(z) = \phi^{(n)} + A_{n-1}(z)\phi^{(n-1)} + ... + A_0(z)\phi \equiv 0$, alors par le Lemme 2.1.9, on a

$$\mu_{[p+1,q]}(\phi) \geq \mu_{[p,q]}(A_0),$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, $F(z) \not\equiv 0$. De plus

$$\sigma_{[p+1,q]}(F) \leq \sigma_{[p+1,q]}(\phi) < \mu_{[p,q]}(A_0) = \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p+1,q]}(g) \leq \sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

Par le Lemme 2.1.5 et la formule (4.5), on aura

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) = \lambda_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p,q]}(A_0),$$

i. e.,

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\phi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\phi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Par le Lemme 2.1.6 et la formule (4.5), on a

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(g) = \mu_{[p+1,q]}(g),$$

i.e.,

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\phi) = \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f-\phi) &= \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0)\\ &\leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\phi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\phi).\end{aligned}$$

La preuve est complète.

Example 7 *Considérons l'équation*

$$f'' + \exp\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)f' + \exp\left(\exp\left(\frac{4}{(1-z)^2}\right)\right)f = 0. \tag{4.6}$$

On prend $p = 3, q = 2$. *On a*

$$A_0(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{4}{(1-z)^2}\right)\right),\ M(r, A_0) = \exp\left(\exp\left(\frac{4}{(1-r)^2}\right)\right).$$

$$A_1(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{1}{(1-z)}\right)\right),\ M(r, A_1) = \exp\left(\exp\left(\frac{1}{(1-r)}\right)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\mu_{[3,2]}(A_0) &= \mu_{M[3,2]}(A_0) = \lim_{r\to 1^-}\inf \frac{\ln\ln\ln\ln M(r,A_0)}{\ln\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)}\\ &= \lim_{r\to 1^-}\inf \frac{\ln\ln\left(\frac{4}{1-r}\times\frac{1}{1-r}\right)}{\ln\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \lim_{r\to 1^-}\inf \frac{\ln\left(\ln 4 + 2\ln\frac{1}{1-r}\right)}{\ln\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)}\\ &= \lim_{r\to 1^-}\inf \frac{\ln\left(\ln\frac{1}{1-r}\left(2+\frac{\ln 4}{\ln\frac{1}{1-r}}\right)\right)}{\ln\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 1 = \sigma_{[3,2]}(A_0),\end{aligned}$$

$$\sigma_{[3,2]}(A_1) = \mu_{[3,2]}(A_1) = 1,$$

$$\tau_{M[3,2]}(A_1) = \tau_{[3,2]}(A_1) = \lim_{r\to 1^-}\sup \frac{\ln\ln\ln M(r,A_1)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 1,$$

$$\begin{aligned}\underline{\tau}_{[3,2]}(A_0) &= \tau = \lim_{r\to 1^-}\inf \frac{\ln\ln\ln M(r,A_0)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)}\\ &= \lim_{r\to 1^-}\inf \left(\frac{\ln 4 + 2\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right) = 2.\end{aligned}$$

On a $A_0(z), A_1(z)$ sont des fonctions analytiques dans Δ avec

$$0 < \mu = \mu_{[3,2]}(A_0) = 1 \le \sigma_{[3,2]}(A_0) = 1 < \infty$$

et

$$\sigma_{[3,2]}(A_1) = 1 \le \mu_{[3,2]}(A_0) = 1$$

$$\max\{\tau_{[3,2]}(A_1) | \mu_{[3,2]}(A_0) = \sigma_{[3,2]}(A_1)\} = 1 < \underline{\tau}_{[3,2]}(A_0) = 2$$

Si $f(z)(\not\equiv 0)$ est une solution de l'équation (4.6) et $\phi(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$ avec

$$\sigma_{[4,2]}(\phi) = 0 < \mu_{[3,2]}(A_0) = 1,$$

alors d'aprés le Théorème 2.0.2 on a

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[4,2]}(f-\phi) = \mu_{[4,2]}(f) = \mu_{[3,2]}(A_0) \le \sigma_{[3,2]}(A_0) = \sigma_{[4,2]}(f) = \overline{\lambda}_{[4,2]}(f-\phi).$$

2.3 Preuve du Théorème 2.0.3

Par le Lemme 2.1.11, on obtient

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \le \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Par

$$\lim_{r\to 1^-}\sup \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{m(r,A_j)}{m(r,A_0)}\right) < 1, \tag{4.7}$$

pour $r \to 1^-$, on a

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1} m(r, A_j)}{m(r, A_0)} < \lambda + \varepsilon = \sigma$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} m(r, A_j) < \sigma m(r, A_0) = \sigma T(r, A_0) \tag{4.8}$$

où $\sigma \in (0, 1)$. Par (3.16) et (4.8), pour $r \to 1^-$, $r \notin E_1$, où $E_1 \subset [0, 1)$ vérifiant $\int_{E_1} \frac{dt}{1-t} < \infty$, nous avons

$$T(r, A_0) \leq O\left(\log^+ T(r, f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \tag{4.9}$$

Par le Lemme 2.1.4 et la formule (4.9), on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Ainsi,

$$\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Par le Lemme 2.1.4 et la formule (4.9), on a

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \geq \mu_{[p,q]}(A_0).$$

Par le Lemme 2.1.8, on a

$$\mu_{[p+1,q]}(f) \leq \mu_{[p,q]}(A_0).$$

Ainsi

$$\mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0).$$

En utilisant une preuve semblable à celle du Théorème 2.0.2 on obtient

$$\begin{aligned} \underline{\overline{\lambda}}_{[p+1,q]}(f - \phi) &= \mu_{[p+1,q]}(f) = \mu_{[p,q]}(A_0) \\ &\leq \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \phi) = \lambda_{[p+1,q]}(f - \phi). \end{aligned}$$

La preuve du théorème est achevée.

Example 8 *Considérons l'équation*

$$f'' + \exp\left(\frac{i}{1-z}\right) f' + \exp\left(\frac{i+iz}{1-z}\right) f = 0. \tag{4.10}$$

On a

$$A_0(z) = \exp\left(\frac{i+iz}{1-z}\right), \; m(r, A_0) = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

$$A_1(z) = \exp\left(\frac{i}{1-z}\right), \; m(r, A_1) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$\begin{aligned}\mu_{[1,2]}(A_0) &= \lim_{r\to 1^-}\sup \frac{\ln\left(\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right)}{\ln\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 1,\\ \sigma_{[1,2]}(A_0) &= 1,\ \sigma_{[1,2]}(A_1) = 1\end{aligned}$$

donc

$$0 < \mu = \mu_{[1,2]}(A_0) \leq \sigma_{[1,2]}(A_0) < \infty,$$

$$\frac{m(r, A_1)}{m(r, A_0)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Si $f(z)(\not\equiv 0)$ *est une solution de l'équation* (4.10), *alors d'après le Théorème 2.0.3, on a*

$$\underline{\overline{\lambda}}_{[2,2]}(f-\phi) = \mu_{[2,2]}(f) = \mu_{[1,2]}(A_0) \leq \sigma_{[1,2]}(A_0) = \sigma_{[2,2]}(f) = \overline{\lambda}_{[2,2]}(f-\phi).$$

où $\phi(z) = \exp\left(\frac{iz}{1-z}\right)$ *est une fonction analytique dans* Δ *avec* $\sigma_{[2,2]}(\phi) = 0 < \mu_{[1,2]}(A_0)$.

2.4 Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions analytiques. Les questions suivantes se posent : Peut-on généraliser les résultats lorsque les coefficients sont des fonctions méromorphes ? Et sous quelles conditions cette généralisation serait possible ?.

Bibliographie

[1] S. Bank, *A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*. Compositio Math. 25 (1972), 61–70.

[2] B. Belaïdi, *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc*. Electron. J. Differential Equations 2011, No. 156, 11 pp.

[3] B. Belaïdi, *Growth and oscillation theory of* $[p, q]$*-order analytic solutions of linear equations in the unit disc*, J. Math. Anal. 3 (2012), no. 1, 1–11.

[4] W.K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[5] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 122 (2000), 54 pp

[6] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, Growth estimates for solutions of linear complex differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29 (2004), no. 1, 233–246.

[7] H. Hu, *Growth and value distribution of the solutions of homogeneous linear differential equations in the complex plane and the unit disc*, the Master Degree Thesis, Jiangxi Normal University, 2013, 1-44.

[8] H. Hu, X. M. Zheng, *Growth of solutions of linear differential equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc*. Electron. J. Differential Equations 2014, No. 204, 12 pp.

[9] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[10] I. Laine, Complex differential equations. Handbook of differential equations : ordinary differential equations. Vol. IV, 269–363, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[11] J. Liu, J. Tu and L. Z. Shi, *Linear differential equations with entire coefficients of* $[p, q]$*-order in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 55–67.

[12] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory.* Reprinting of the 1959 original. Che*nd the unit disc*, the Master Degree Thesis, Jiangxi Normal University, 2013, 1-44.

[13] H. Y. Xu, J. Tu and Z. X. Xuan, *The oscillation on solutions of some classes of linear differential equations with meromorphic coefficients of finite* $[p, q]$*-order*, Sci. World J., Volume 2013 (2013), Article ID 243873, 8 pages.