REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité: Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

Problème de réalisation de modèles différentiels linéaires

Présenté par :

Hayet BELHAOUARI

Soutenu le

Les membres de jury

Djillali	Bouagada	Encadreur	Professeur	**U. MOSTAGANEM.**
				U. MOSTAGANEM.
				U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Remerciments

Louange à Allah, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être. Je remercie le bon Dieu, de m'avoir orienté vers le chemin du savoir et les portes de la science.

Ma reconnaissance va au Professeur BOUAGADA Djillali de m'avoir beaucoup appris, avec patience, générosité et surtout une disponobilité d'esprit qui m'a permi de mener à bien ma tâche.

J'adresse également mes remerciments à Mademoiselle KAISSERLI Zineb, pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de soutenance.

Je remercie infiniment Monsieur GHEZZAR Mohammed Amine d'avoir accepté d'examiner mon travail .

Un très spécial merci à mes parents, à mon époux, ma famille et ma belle famille qui m'ont soutenu par leurs conseils et par leur temps dans ma tâche.

Enfin je remercie tous mes amis et tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

INTRODUCTION

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications ; un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux, un chimiste pourra vouloir améliorer son procédé en régulant la température, etc. Nous donnerons dans la suite des exemples précis de systèmes de contrôle. Il est intéressant de noter que, malgré la diversité des situations concrètes qui peuvent être appréhendées ainsi, **la théorie du contrôle** fournit un cadre commun à tous ces univers. Il est donc remarquable que l'on parvienne à obtenir des résultats généraux, qui pourront s'appliquer dans de nombreux domaines.Une classe particulière dont l'importance pratique est remarquable est celle des systèmes décrits par des équations différentielles linéaires. Nous parlons alors de **systèmes linéaires**.Si elle n'est strictement que rarement vérifiée en pratique, cette hypothèse de linéarité peut être acceptée pour de nombreux systèmes évoluant autour d'une position d'équilibre sous l'hypothèse des faible déviations. Un processus de **linéarisation** est alors nécessaire. Dans ce travail, une nouvelle classe de systèmes linéaires fractionnaires et singuliers à temps continu est introduite. Dans ce mémoire nous allons étudier le problème suivant :

Soit donné une déscription externe du système L.T.I et à temps continu, spécialement étant donné sa fonction de transfert ou sa réponse impulsionnelle on veut déterminer une déscription interne pour le système qui génère la fonction de transfert. C'est donc un problème de réalisation de système. Différentes approches sont dans la littérature et notre intérêt portera sur la détermination de réalisations contenant le plus petit possible nombre d'énergie ou stockage d'éléments. Pour acomplir cela, les concepts de contrôlabilité et d'observabilité jouerons un rôle central dans notre étude. Dire qu'un système est contrôlable et observable c'est dire que sa réalisation est minimale.

Nous allons établir des conditions nécessaires et suffisantes garantissant l'existence de réalisations pour cette classe de systèmes. Le problème de minimalité est cependant résolu .

Ce manuscrit s'organise de la façon suivante :

- Le premier chapitre est consacré essenciellement à une présentation de quelques rappels indispensables et necéssaires à la compréhension de ce mémoire.
- Le chapitre qui suit est dédié à la représentation d'état de systèmes linéaires à temps continu, en donnant sa solution et quelques critères.
- Le chapitre suivant est consacré à donner une déscription externe d'un système L.T.I et à la recherche de sa réalisation minimale.
- Dans le quatrième chapitre, nous abbordons une nouvelle classe de systèmes linéaires fractionnaires à temps continu et nous allons établir les conditions nécéssaires et suffisantes qui garantissent l'éxistence de la réalisation pour cette classe de systèmes.
- Le cinquième chapitre est organisé de la façon suivante, d'abord nous commençons par une introduction aux systèmes singuliers aprés nous nous intérèssons à ses propriétés et à la recherche de la solution de cette classe de systèmes.
- Nous consacrons le dernier chapitre à l'étude d'une nouvelle classe de systèmes qui est celle des systèmes linéaires fractionnaires et singuliers.

Chapitre 1

Notions de base

L'objectif de ce premier chapitre est de rappeler quelques notions fondamentales qui seront le plus souvent citées dans notre étude. Les références utilisées sont : [2] [4]

1.1 Fonctions causales

Définition 1.1.1 *On dit qu'une fonction f de la variable t est une fonction causale si pour tout t strictement négatif, on a :*

$$f(t) = 0$$

1.2 Transformée de Laplace

Définition 1.2.1 *La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction F de la variable réelle ou complexe s définie par :*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Notons que F existe que si cette intégrale converge.

1.2.1 Propriétés fondamentales

Nous rappelons ici quelques propriétés élémentaires que nous serons amenés à utiliser par la suite.

Dérivation

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

Cela se généralise à :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n}\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - ... - x^{n-1}(0)$$

1.2.2 Transformée des signaux remarquables

Signal échelon

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

Signal impulsion

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

1.3 Produit de convolution

Définition 1.3.1 *Le produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, noté $x * y(t)$,est défini par :*

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Définition 1.3.2 *(La transformée de Laplace inverse)*

La transformée de Laplace inverse est définie par :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] =: f(t) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{st}F(s)ds$$

1.4 Série de Laurent

Définition 1.4.1 *la transformée en s d'une suite $h(n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ est définie par :*

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)s^{-n}$$

Lorsque cette série converge .

1.5 Théorème de Neumann

Théorème 1.5.1 *Soit A une matrice carrée, si $\|A\| \prec 1$ et $(I - A)$ est non singulière alors $(I - A)^{-1}$ existe, et $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ...$*

c'est à dire :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i$$

1.6 Inégalité du rang de Sylvester

Définition 1.6.1 *Pour deux matrices A et B de dimensions $m \times n$ et $n \times p$ réspéctivement, on a :*

$$rangA + rangB - n \leq rang(AB) \leq \min(rangA, rangB)$$

1.7 Polynôme monique

Définition 1.7.1 *Un polynôme est appelé monique si son terme de degré le plus élevé a un coefficient égal à un .*

1.8 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.8.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$, on définit l'exponentielle de la matrice A par :*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

C'est une série normalement convergente sur tout $M_n(\mathbb{k})$.

1.9 Distribution de Dirac

Définition 1.9.1 *On appele impulsion de Dirac la fonction $\delta(t)$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0 \end{cases}$$

Si l'impulsion se produit à un temps $t = a$, on écrit : $\delta(t - a)$.

Un propriété intéressante de la fonction impulsion est qu'elle permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - a) dt = f(a)$$

Chapitre 2

Le modèle d'état

Dans le cas des systèmes dynamiques à paramètres localisés en temps continus, une représentation d'état du système dynamique est donnée par une équation différentielle ordinaire vectorielle du premier ordre et d'une équation vectorielle algébrique.

2.1 Représentation d'état

Définition 2.1.1 *Tout système dynamique Σ peut être representé par ses équations d'état définies comme un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamiques et un ensemble d'équations algébriques appelées équation de sortie ou de mesure :*

$$\acute{x} = f(x(t), u(t), t) \tag{2.1.1}$$

$$y = g(x(t), u(t), t) \tag{2.1.2}$$

L'équation (2.1.1) est appelée équation dynamique

L'équation (2.1.2) est appelée équation de mesure

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^r$est le vecteur de sortie .

La fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de Lipshitz par rapport à x, continue par rapport à u et continue par morceaux par rapport à t afin que ce système ait une solution unique. Les équations d'état caractérisent complètement le comportement dynamique du système .

2.2 Représentation d'état linéaire

Définition 2.2.1 *Si Σ vérifie l'hypothèse de linéarité alors sa représentation d'état est donnée par :*

$$\acute{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2.2.1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{2.2.2}$$

où :

- $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice dynamique.
- $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice de commande ou d'entrée.
- $C(t) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ est la matrice de mesure ou de sortie.
- $D(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est la matrice de transmission directe.

Si les matrices A, B, C, D sont constantes, le système est **Linéaire à Temps-Invariant (LTI).**

2.3 Solution de l'équation d'état

Dans cette partie, nous nous intéressons plus particulièrement à la solution de l'équation différentielle d'état (l'équation dynamique) :

$$\acute{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Dans le cas général où le modèle est à temps-variant, il est nécessaire de définir la matrice de transition d'état qui intervient dans la solution de l'équation d'état.

2.3.1 Matrice de Transition

Définition 2.3.1 *La solution de l'équation d'état homogène (non commandée) ,*

$$\acute{x}(t) = A(t)x(t) \quad x(t_0) = x_0$$

où $A(t)$ est continue par rapport à t est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \;\; \forall t \succeq t_0$$

où $\Phi(t, t_0)$ est **la matrice de transition**, solution de l'équation différentielle :

$$\acute{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad \forall t \succeq t_0$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I_n$$

2.3.2 Réponse libre

Définition 2.3.2 *La réponse libre d'un système est la réponse du système à ses seules conditions initiales. Dans le cas d'un système représenté par son modèle d'état, elle est donnée par l'équation :*

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0 \;\; \forall t \succeq t_0$$

2.3.3 Réponse Forcée

Définition 2.3.3 *La réponse forcée d'un système est la réponse du système au seul signal d'entrée et pour des conditions initiales nulles. Dans le cas d'un système représenté par son modèle d'état, elle est donnée par :*

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

A partir de la donnée de la matrice de transition, il est possible de déterminer la solution de l'équation dynamique d'état qui correspond à **la réponse complète** du système par application du principe de superposition.

2.3.4 Réponse complète

Théorème 2.3.1 *La solution de l'équation dynamique d'état :*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.3.1}$$

et la sortie s'écrit alors :

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \tag{2.3.2}$$

Si maintenant on considère le cas où : $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$, $D(t) = D$ autrement dit le cas des matrices à coefficients constants, le système devient :

$$x' = Ax + Bu \tag{2.3.3}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.3.4}$$

et alors la solution est donnée par :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.3.5}$$

par suite la réponse sera,

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du \tag{2.3.6}$$

2.4 Critère de Kalman

Nous exposons dans cette section quelques tests pour la contrôlabilité et l'observabilité pour se faire, nous nous basons, sur la référence suivante [1]

2.4.1 Critère de la contrôlabilité

Théorème 2.4.1 *Un système LTI d'équation dynamique d'état ,*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où :

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est contrôlable si et seulement si **la matrice de contrôlabilité**, notée **C** est de rang plein égal à n .

$$rang(C) = rang \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

La contrôlabilité d'un système de matrices caractéristiques (A, B) sera appelée contrôlabilité de la paire (A, B) .

2.4.2 Critère d'observabilité

Théorème 2.4.2 *Un système LTI d'équation dynamique et de mesure ,*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

où :

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ est observable si et seulement si **la matrice d'observabilité,** notée O est de rang plein égal à n .

$$rang(O) = rang\left(\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

L'observabilité d'un système de matrices caractéristiques (A, C) sera appelée observabilité de la paire (A, C) .

2.5 Décomposition de Kalman

Pour valider nos résultats, nous aurons besoin par la suite de quelques résultats utiles, parmi ces caractérisations nous citerons le théorème de décomposition de Kalman[1] .

Théorème 2.5.1 *Pour (A, B)non contrôlable et (A, C) non observable, il existe une matrice non singulière P tel que :*

$$\widehat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$, \ \widehat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{C} = CP = [C_{1,}0, C_3, 0]$$

où :

(i) (A_c, B_c) avec :

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$B_c = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

est **contrôlable**, où :

$A_c \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$.

(ii) (A_o, C_o) avec :

$$A_o = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix}$$

et

$$C_o = (C_1, C_3)$$

est **observable**, où :

$A_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $C_o \in \mathbb{R}^{r \times n_o}$.

La dimension des matrices A_{ij}, B_i, C_j est :

$$A_{11} : (n_r - n_{r\bar{o}}) \times (n_r - n_{r\bar{o}})$$

$$A_{22} : n_{r\bar{o}} \times n_{r\bar{o}}$$

$$A_{33} : (n - (n_r + n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}})) \times (n - (n_r + n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}))$$

$$A_{44} : (n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}) \times (n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}})$$

$$B_1 : (n_r - n_{r\bar{o}}) \times m$$

$$B_2 : n_{r\bar{o}} \times m$$

$$C_1 : p \times (n_r - n_{r\bar{o}})$$

$$C_2 : p \times (n - (n_r + n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}))$$

Le triplet (A_{11}, B_1, C_1) est tel que :

(A_{11}, B_1) est **contrôlable** et (A_{11}, C_1) est **observable .**

Chapitre 3

Réalisation d'espace d'état d'un système LTI

Dans cette partie, nous allons donner une description externe d'un système LTI, spécialement sa fonction de transfert ou sa réponse impulsionnelle. Nous allons s'intéresser aussi à la recherche de réalisations qui contiennent le moins possible d'éléments d'énergie, i.e des réalisations de moindre ordre. Pour ce faire nous nous basons sur la référence [1] .
On considère un systeme LTI de type :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$.

La réponse de ce système est donnée par :

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t h(\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.0.2}$$

avec :

$$h(\tau) = \begin{cases} Ce^{A\tau}B + D\delta(\tau) & si \tau \geq 0; \\ 0 & si \quad \tau \prec 0. \end{cases} \tag{3.0.3}$$

3.1 La réponse impulsionnelle

Définition 3.1.1 *La réponse impulsionnelle est simplement définie comme étant la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac, elle permet de caractériser les systèmes linèaires dans le domaine temporel .*

3.2 Fonction de transfert

Définition 3.2.1 *La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, elle est donnée par :*

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.2.1}$$

En effet,

On a :

$$h(\tau) = Ce^{A\tau}B + D\delta(\tau) \qquad si\ \tau \geq 0$$

$$\mathcal{L}(h(\tau) = \mathcal{L}(Ce^{A\tau}B + D\delta(\tau))$$

$$= C\mathcal{L}(e^{A\tau})B + D\mathcal{L}(\delta(\tau))$$

$$= C\int_0^{+\infty} e^{A\tau}e^{-s\tau}d\tau B + D$$

$$= C\int_0^{+\infty} e^{(A-sI)\tau}d\tau B + D$$

$$= C\int_0^{+\infty} e^{-(sI-A)\tau}d\tau B + D$$

$$= C[-(sI-A)^{-1}e^{-(sI-A)\tau}]_0^{+\infty}B + D$$

$$= C[\lim_{\alpha\to+\infty} -(sI-A)^{-1}e^{-(sI-A)\alpha} + (sI-A)^{-1}]B + D$$

$$= C(sI-A)^{-1}B + D$$

D'où le résultat .

Définition 3.2.2 *Pour $H(s)$ donnée, La réponse impulsionnelle est :*

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(H(s)\right)$$

Théorème 3.2.1 *$h(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est une matrice de réponse impulsionnelle réalisable par (3.0.1) si et seulement si tous ses éléments de $h(t)$ sont des sommes des fonctions élémentaires $\alpha t^k e^{\lambda t}$ et $\beta\delta(t)$ avec : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

3.3 De la représentation d'état à la fonction de transfert

On s'intérèsse dans notre étude au système de type SISO qui représente un système à une seule entrée et une seule sortie (Single Input-Single Output) et de conditions initiales nulles. En utulisant la transformée de Laplace, on trouve pour $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \tag{3.3.1}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{3.3.2}$$

A partir de (3.3.1), on obtient :

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}BU(s) \tag{3.3.3}$$

Par suite pour (3.3.3) dans (3.3.2), nous avons :

$$Y(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s) \tag{3.3.4}$$

On déduit que :

$$Y(s) = H(s)U(s) \tag{3.3.5}$$

La fonction matricielle $H(s)$ est appelée **fonction de transfert** du système, elle est définie par :

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI_n - A)^{-1}B + D \\ &= C\frac{adj(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)}B + D \\ &= \frac{C(com(sI_n - A))^T B + \det(sI_n - A)D}{\det(sI_n - A)} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Notons alors :

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)} \tag{3.3.7}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les zéros du polynôme caractéristique :

$$d(s) = \det(sI_n - A)$$

qui sont donc les valeurs propres de la matrice A .

3.3.1 Ordre et système propre

Définition 3.3.1 ***L'ordre*** *du modèle LTI est le degré le plus élevé du polynôme caractéristique. Il est donc égal au nombre d'états dans le modèle. Si le système est causal alors $n \geq m$. Pour $n = m$, le système est dit propre alors que pour $n \succ m$, il est dit strictement propre,*

tel que :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} \tag{3.3.8}$$

3.4 Réalisation

Définition 3.4.1 *Une réalisation de $H(s)$ est tout ensemble $\{A, B, C, D\}$ tel que :*

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

3.5 Paramètres de Markov

Définition 3.5.1 *Toute matrice de transfert rationnelle réelle $H(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$ peut être décomposée en série de Laurent :*

$$H(s) = H_0 + H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2} + ... \tag{3.5.1}$$

où les matrices H_i , $i = 1, 2, ...$sont **les paramètres de Markov** du système. Ils peuvent être calculés par :

$$H_0 = \lim_{s \to +\infty} H(s),$$

$$H_1 = \lim_{s \to +\infty} s(H(s) - H_0),$$

$$H_2 = \lim_{s \to +\infty} s^2 (H(s) - H_0 - H_1 s^{-1}) \ ...$$

Théorème 3.5.1 *L'ensemble* $\{A, B, C, D\}$ *est une* ***réalisation*** *de* $H(s)$ *si et seulement si :*

$$H_0 = D \tag{3.5.2}$$

et

$$H_i = CA^{i-1}B \quad , i = 1, 2, ... \tag{3.5.3}$$

Preuve

Si la représentation $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de la matrice de transfert $H(s)$ alors :

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

$$= C(s(I_n - s^{-1}A))^{-1}B + D$$

$$= Cs^{-1}(I_n - s^{-1}A)^{-1}B + D$$

$$= Cs^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} (s^{-1}A)^i B + D$$

$$= C \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1} s^{-i} B + D$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} [CA^{i-1}B] s^{-i} + D$$

D'où le résultat .

3.6 Réalisation minimale

Définition 3.6.1 *Une réalisation minimale ou réalisation irréductible de* $H(s)$ *est tout ensemble* $\{A, B, C, D\}$ *tel que son ordre* n *est minimal .*

Théorème 3.6.1 *Une réalisation* $\{A, B, C, D\}$ *d'ordre* n *de* $H(s)$ *est minimale si et seulement si* (A, B) *est contrôlable et* (C, A) *est observable .*

Preuve

$(Nécessité)$ Supposons que $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation minimale mais elle est non contrôlable et non observable. En utilisant **la décomposition de Kalman**, on peut trouver une autre décomposition (A_{11}, B_1) de dimension inférieure et qui est contrôlable et observable, cela contredit l'hypothèse que $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation minimale .

$(Suffisance)$ Supposons que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ d'ordre n est contrôlable et observable mais elle n'est pas minimale, donc il existe une autre réalisation $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ d'ordre $\overline{n} \prec n$.
D'après le théorème de Markov, on a :

$$\overline{D} = D$$

et

$$CA^{i-1}B = \overline{C}\ \overline{A^{i-1}}\ \overline{B}, i = 1, 2, ...$$

Les matrices de contrôlabilité des représentations $\{A, B, C, D\}$ et $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ sont données par :

$$C_n = \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & \ldots & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_n} = \begin{pmatrix} \overline{B} & \vdots & \overline{A}\ \overline{B} & \vdots & \overline{A^2}\ \overline{B} & \vdots & \ldots & \vdots & \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} \end{pmatrix}$$

Les matrices d'observabilité des représentations $\{A, B, C, D\}$ et $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ sont données par :

$$O_n = \begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overline{O_n} = \begin{pmatrix} \overline{C} \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A^{n-1}} \end{pmatrix}$$

On a cependant,

$$O_nC_n = \begin{pmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \cdots & CA^{2n-2}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{C}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A}\ \overline{B} & ... & \overline{C}\ \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} \\ \overline{C}\ \overline{A}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A^2}\ \overline{B} & .. & \overline{C}\ \overline{A^n}\ \overline{B} \\ ... & ... & ... & ... \\ \overline{C}\ \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A^n}\ \overline{B} & ... & \overline{C}\ \overline{A^{2n-2}}\ \overline{B} \end{pmatrix}$$

$$= \overline{O_n}\ \overline{C_n}$$

En utilisant **l'inégalité du rang de sylvester :**

$$rangO_n + rangC_n - n \leq rang(O_nC_n) \leq \min(rangO_n, rangC_n)$$

D'où :

$$rangO_n + rangC_n - n \leq rang(\overline{O_n}\ \overline{C_n}) \leq \min(rangO_n, rangC_n)$$

et puisque $\{A, B, C, D\}$ est contrôlable et observable, il s'ensuit,

$$rangO_n = rangC_n = n$$

Donc :

$$n \leq rang(\overline{O_n}\ \overline{C_n}) \leq \min(rang\overline{O_n}, rang\overline{C_n}) \leq \overline{n}$$

ie :

$$n \leq \overline{n}$$

Cependant $\overline{n}$ ne peut pas être supèrieur à n, le fait que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ est minimale, alors $n = \overline{n}$.

On conclut que si la réalisation $\{A, B, C, D\}$ est contrôlable et observable, donc elle est minimale .

Exemple 3.6.1 *On considère la fonction de transfert suivante :*

$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

et on donne ces différentes réalisations de $H(s)$:

$$(i) \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, D = 0 \right\}$$

$$(ii) \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 0 \right\}$$

$$(iii) \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 0 \right\}$$

$$(iv) \{A = -1, B = 1, C = 1, D = 0\}$$

- Pour la réalisation (i)

La matrice de contrôlabilité est :

$$C = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rangC = 2$$

La matrice d'observabilité est :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rangO = 1 \prec 2$$

On déduit que la réalisation (i) est contrôlable et non observable .

- Pour la réalisation (ii)

$$C = (B\ AB) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rangC = 1 \prec 2$$

et :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rangO = 2$$

On déduit que la réalisation (ii) est non contrôlable et observable .

- Pour la réalisation (iii)

$$C = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rangC = 1 \prec 2$$

et :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rangO = 1 \prec 2$$

On déduit que la réalisation (iii) est non contrôlable et non observable .

- Pour la réalisation (iv)

$$C = B = 1$$

$$rangC = 1$$

et :

$$O = C = 1$$

$$rangO = 1$$

On déduit que la réalisation (iv) est contrôlable et observable .

Théorème 3.6.2 *Soient* $\{A, B, C, D\}$ *et* $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ *deux réalisations de* $H(s)$, *si* $\{A, B, C, D\}$ *est une réalisation minimale alors* $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ *est aussi une réalisation minimale si et seulement si les deux réalisations sont équivalentes. ie : si et seulement si il existe une matrice non singulière* P *tel que :*

$$\overline{A} = PAP^{-1}$$

$$\overline{B} = PB$$

$$\overline{C} = CP^{-1}$$

et

$$\overline{D} = D$$

Preuve Si on suppose que $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation minimale, ie la paire (A, B) est contrôlable et la paire (C, A) est observable. Alors,

Si $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ est équivalente à $\{A, B, C, D\}$, $\exists P^{-1}$ tel que le système (3.0.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{x'(t)} = \overline{A}\overline{x(t)} + \overline{B}u(t) \\ \overline{y}(t) = \overline{C}\overline{x}(t) + \overline{D}u(t) \end{array} \right. \tag{3.6.1}$$

La matrice de contrôlabilité est :

$$\overline{C_n} = \left(\begin{array}{ccccccccc} \overline{B} & \vdots & \overline{A}\ \overline{B} & \vdots & \overline{A^2}\ \overline{B} & \vdots & \ldots & \vdots & \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} PB & \vdots & PAP^{-1}PB & \vdots & \ldots & \vdots & PA^{n-1}B \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} PB & \vdots & PAB & \vdots & \ldots & \vdots & PA^{n-1}B \end{array} \right)$$

$$= P \left(\begin{array}{ccccccc} B & \vdots & AB & \vdots & \ldots & \vdots & A^{n-1}B \end{array} \right)$$

$$= PC$$

Puisque C est de rang plein donc $\overline{C}$ est aussi de rang plein

La matrice d'observabilité est :

$$\overline{O_n} = \left(\begin{array}{c} \overline{C} \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A^{n-1}} \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} CP^{-1} \\ \cdots \\ CP^{-1}PAP^{-1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1}P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= OP^{-1}$$

Puisque O est de rang plein , alors $\overline{O}$ est de rang plein .

On déduit que $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ est une réalisation minimale .

3.7 Réalisation par bloc

Une matrice rationnelle $H(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est dite propre si $\lim_{s\to+\infty} H(s) \prec \infty$ et elle est dite strictement propre si $\lim_{s\to+\infty} H(s) = 0$.

Nous allons citer une façon simple pour écrire une réalisation d'éspace d'état d'une matrice rationnelle $H(s)$.

Nous écrivons :

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)} \tag{3.7.1}$$

où le polynôme dénominateur :

$$d(s) = s^r + d_{r-1}s^{r-1} + \ldots + d_1 s + d_0 \tag{3.7.2}$$

est le multi monique le moins commun des dénominateurs des entrées de $H(s)$, et :

$$N(s) = N_r d(s) + N_{r-1}s^{r-1} + \ldots + N_1 s + N_0 \tag{3.7.3}$$

On note que $N_r = 0$ si $H(s)$ est strictement propre .

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m \\ -d_0 I_m & -d_1 I_m & \cdots & -d_{r-1} I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{rm \times rm} \tag{3.7.4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{rm \times m} \tag{3.7.5}$$

$$C = \begin{pmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times rm} \tag{3.7.6}$$

$$D = N_r \in \mathbb{R}^{r \times m} \tag{3.7.7}$$

(ou I_m est la matrice identité de dimension $m \times m$)

Alors $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de $H(s)$.

Lemme 3.7.1 *Soit $H(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ une matrice rationnelle propre satisfaisant* (3.7.1), (3.7.2) *et* (3.7.3) *alors, la représentation $\{A, B, C, D\}$ donné par* (3.7.4), (3.7.5), (3.7.6), (3.7.7) *est une réalisation de $H(s)$.*

Preuve Soit :

$$\Gamma(s) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(s)^T & \cdots & \Gamma_{r-1}(s)^T \end{pmatrix}^T$$

est une matrice formée par les dernières m colonnes de $(SI - A)^{-1}$,

Il découle ensuite de :

$$(SI - A)\,\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}^T$$

que,

$$s\Gamma_0(s) = \Gamma_1(s), \ldots ,$$

$$s\Gamma_{r-2}(s) = \Gamma_{r-1}(s)$$

$$d_0\Gamma_0(s) + \cdots + d_{r-2}\Gamma_{r-2}(s) + (s + d_{r-1})\Gamma_{r-1}(s) = I$$

Par équivalence nous obtenons :

$$s\Gamma_0(s) = \Gamma_1(s)$$

$$s^2\Gamma_0(s) = \Gamma_2(s), \ldots,$$

$$s^{r-1}\Gamma_0(s) = \Gamma_{r-1}(s)$$

et :

$$d(s)\Gamma_0(s) = I$$

ainsi :

$$H(s) = C\,(SI - A)^{-1}\,B + D$$

car :

$$H(s) = N_r + N_{r-1}\frac{s^{r-1}}{d(s)} + \cdots + N_1\frac{s}{d(s)} + N_0\frac{1}{d(s)}$$

$$= N_r + N_{r-1}\Gamma_{r-1}(s) + \cdots + N_1\Gamma_1(s) + N_0\Gamma_0(s)$$

$$= \begin{pmatrix} N_0 & \cdots & N_{r-2} & N_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \Gamma_0(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \Gamma_{r-2}(s) \\ * & \cdots & * & \Gamma_{r-1}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} + N_r \tag{3.7.8}$$

Exemple 3.7.1 *Dans cet exemple, on obtient une réalisation minimale de :*

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} & \frac{s-2}{(s+3)^2} \end{pmatrix}$$

En appliquant le théorème de décomposition de Kalman sur ces blocs. Le moins multiple commun des dénominateurs des entrées de $H(s)$ est donné par :

$$d(s) = s^r + d_{r-1}s^{r-1} + \ldots + d_1 s + d_0$$

$$= (s-1)^2 (s+3)^2$$

$$= s^4 + 4s^3 - 2s^2 - 12s + 9$$

et on peut écrire :

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

où,

$$N(s) = \begin{pmatrix} (s+3)^2 & (s-1)(s+3) \\ -6(s-1) & (s-1)^2(s-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 + 6s + 9 & s^2 - 2s - 3 \\ -6s + 6 & s^3 - 4s^2 + 5s - 2 \end{pmatrix}$$

$$= N_4 d(s) + N_3 s^3 + N_2 s^2 + N_1 s + N_0$$

avec :

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix},$$

et

$$N_0 = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors la réalisation $\{A, B, C, D\}$ de $H(s)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ -d_O I_2 & -d_1 I_2 & -d_2 I_2 & -d_3 I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} N_0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -6 & 5 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$D = N_4$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.7.1 *$H(s)$ est une matrice de transfert réalisable d'un système $L.T.I$ si et seulement si $H(s)$ est une matrice de fonctions rationnelles tel que :*

$$\lim_{s \to +\infty} H(s) \prec \infty \tag{3.7.9}$$

ie : si et seulement si $H(s)$ est une matrice rationnelle propre .

Preuve

$(Nécessité)$ Si le système (3.0.1) est une réalisation de $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

On a,

$$H(s) = D + \sum_{i=0}^{\infty} (CA^{i-1}B)s^{-i}$$

d'où,

$$\lim_{s \to +\infty} H(s) = D$$

qui est une matrice réelle finie .

$(Suffisance)$: Pour montrer la suffisance il suffit de se baser sur l'algorithme d'existence de réalisation et pour cela on se réfère à [29].

Chapitre 4

Systèmes linéaires fractionnaires à temps continu

Ce chapitre traite une nouvelle classe de systèmes linéaires fractionnaires à temps continu. Des conditions nécessaires et suffisantes garantissant l'existence de réalisations pour cette classe de systèmes sont alors établies. Notre but est donc développer les résultats des chapitres précédents pour la classe des systèmes fractionnaires.

4.1 Représentation d'état d'un système linéaire fractionnaire à temps continu

On considère le système linéaire fractionnaire à temps continu décrit par ces équations :

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , 0 \prec \alpha \prec 1 \tag{4.1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{4.1.2}$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$.
La valeure initiale est notée par : $x_0 = x(0)$.

D^{α} définit **la dérivée fractionnaire de Caputo** d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$) pour une fonction N fois différentiable .

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(N)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-N+1}}d\tau \ , N-1 \prec \alpha \prec N \, (N \in \mathbb{N}^*) \tag{4.1.3}$$

$$f^{(N)}(\tau) = \frac{d^N f(\tau)}{d\tau^N}$$

et :

$$\Gamma(x) = \int_0^t e^{-t}t^{x-t}dt$$

est la fonction **Gamma .**

4.2 La fonction de transfert

En utilisant la transformée de Laplace et comme $(s^{\alpha}I - A)$ est supposé régulière, il suit alors,

$$X(s) = (s^{\alpha}I - A)^{-1}BU(s) \tag{4.2.1}$$

Après l'application de la transformée de Laplace et une subtitution de (4.2.1) dans (4.1.2), on obtient :

$$Y(s) = \left[C(s^{\alpha}I - A)^{-1}B + D\right]U(s) \tag{4.2.2}$$

où la matrice ,

$$H(s) = C(s^{\alpha}I - A)^{-1}B + D \tag{4.2.3}$$

est appelée **la matrice de transfert** du système (4.1.1, 4.1.2)

On déduit qu'il est toujours possible d'obtenir une matrice de transfert à partir d'une représentation d'état d'un système fractionnaire linéaire à temps continu donné.

L'objetif de ce travail est de montrer comment obtenir une représentation d'état à partir d'une matrice de transfert donnée.

Définition 4.2.1 *La réalisation d'une matrice de transfert donnée* $H(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *est toute représentation d'état* $\{A, B, C, D\}$ *tel que :*

$$H(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D$$

La dimension de la matrice A est appelé l'ordre de la réalisation du système.

4.3 L'éxistence de la réalisation du système linéaire fractionnaire à temps continu

En se basant sur la formule (4.2.1) et en notant :

$$\lambda = s^\alpha \tag{4.3.1}$$

On peut exprimer $H(s)$ par :

$$G(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D \tag{4.3.2}$$

On déduit alors que la condition pour que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ de $H(s)$ existe et que toutes les entrées dans $H(s)$ sont des fonctions rationnelles de l'ordre naturel avec variable complexe s^α satisfaisant

$$\lim_{s\to+\infty} H(s) \prec \infty.$$

En utilisant la formule (4.3.1), on peut développer $G(\lambda)$ dans une série de Laurent :

$$G(\lambda) = H_0 + \lambda^{-1}H_1 + \lambda^{-2}H_2 + \ldots \tag{4.3.3}$$

Par conséquent :

$$H(s) = H_0 + s^{-\alpha}H_1 + s^{-2\alpha}H_2 + \ldots \tag{4.3.4}$$

Définition 4.3.1 *Les termes H_i , $i = 1, 2, \ldots$ dans la formule (4.3.4) sont l'extension des paramètres de Markov d'un système linéaire fractionnaire. Ils sont déterminés par les formules suivantes :*

$$H_0 = \lim_{s \to +\infty} H(s),$$

$$H_1 = \lim_{s \to +\infty} s^{\alpha}(H(s) - H_0),$$

$$H_2 = \lim_{s \to +\infty} s^{2\alpha}(H(s) - H_0 - H_1 s^{-\alpha}) \ ...$$

Théorème 4.3.1 *L'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est une **réalisation** de $H(s)$ si et seulement si :*

$$H_0 = D$$

et

$$H_i = CA^{i-1}B \quad , i = 1, 2, ...$$

Preuve

Si la représentation $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de la matrice de transfert $H(s)$ alors :

$$H(s) = C(s^{\alpha} I_n - A)^{-1} B + D$$

$$= C(s^{\alpha}(I_n - s^{-\alpha} A))^{-1} B + D$$

$$= C s^{-\alpha}(I_n - s^{-\alpha} A)^{-1} B + D$$

$$= C s^{-\alpha} \sum_{i=0}^{+\infty} (s^{-\alpha} A)^i B + D$$

$$= C \sum_{i=1}^{+\infty} A^{i-1} s^{-\alpha i} B + D$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} [CA^{i-1}B] s^{-\alpha i} + D$$

D'où le résultat .

4.4 Réalisation minimale du système linéaire fractionnaire à temps continu

Si $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de $H(s)$, il existe une autre représentation $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ qui est aussi une réalisation de $H(s)$ tel que :

$$\overline{A} = PAP^{-1}$$

$$\overline{B} = PB$$

$$\overline{C} = CP^{-1}$$

$$\overline{D} = D$$

avec P une matrice inversible .

Un autre moyen de générer d'autres réalisations de $H(s)$ est,

Si la représentation $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de $H(s)$ ensuite le système suivant :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , (0 \prec \alpha \prec 1) \ \ , x(0) = 0 \tag{4.4.1}$$

$$D^\alpha z(t) = \overline{A} z(t) + \overline{B} u(t) \quad , (0 \prec \alpha \prec 1) \tag{4.4.2}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{4.4.3}$$

est aussi une représentation de $H(s)$. Ceci est le fait que la deuxième équation d'état (4.4.2) n'évalue pas l'équation d'état de sortie, par conséquente si la dimension de A est n et la dimension de $\overline{A}$ est $\overline{n}$, donc l'ordre de cette nouvelle réalisation est $n + \overline{n}$. On déduit qu'on peut toujours élargir l'ordre d'une réalisation, mais il existe un ordre de réalisation minimale d'une fonction de transfert donnée .

Définition 4.4.1 *Le système* (4.1.1) − (4.1.2) *est appelé la réalisation minimale de la fonction de transfert :*

$$H(s) = C(s^{\alpha} I_n - A)^{-1} B + D$$

Si la dimension de l'espace d'état est minimale parmi toutes les réalisations possibles de $H(s)$.

Théorème 4.4.1 *Une réalisation* $\{A, B, C, D\}$ *d'ordre* n *de* $H(s)$ *est minimale si et seulement si* (A, B) *est contrôlable et* (C, A) *est observable .*

Preuve

(*Nécessité*) nous prouvons cela par l'absurde, autrement dit,
Supposons que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ est minimale mais n'est pas contrôlable , en utilisant la décomposition de Kalman pour un système linéaire fractionnaire d'ordre α dans le sens de Caputo , il existe une matrice non singulière P de même dimension n comme A tel que :

$$\overline{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overline{B} = PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\overline{D} = D$$

où :

$A_{11} \in \mathbb{R}^{q\times q}, B_1 \in \mathbb{R}^{q\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{r\times q}$ et la paire (A_{11}, B_1) est contrôlable .

On a vu précédemment que :

$$H(s) = C(s^{\alpha}I_n - A)^{-1}B + D$$

$$H(s) = \overline{C}(s^{\alpha}I_n - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D}$$

Cependant on sait que :

$$(s^{\alpha}I_n - \overline{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{+\infty} A^{i-1}s^{-\alpha i}$$

$$(s^{\alpha}I_n - \overline{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A^{i-1}}{s^{\alpha i}}$$

et comme :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^2} = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^2 & \widehat{A_2} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\widehat{A_2} = A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22}$$

de la même manière :

$$\overline{A^3} = \begin{pmatrix} A_{11}^3 & \widehat{A_3} \\ 0 & A_{22}^3 \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots$$

On déduit que :

$$\overline{A^i} = \begin{pmatrix} A_{11}^i & \widehat{A_i} \\ 0 & A_{22}^i \end{pmatrix}, i = 0, 1, 2, ...$$

On obtient cependant :

$$H(s) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_{11}^{i-1}}{s^{\alpha i}} & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\widehat{A^{i-1}}}{s^{\alpha i}} \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_{22}^{i-1}}{s^{\alpha i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} + D$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_{11}^{i-1}}{s^{\alpha i}} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} + D$$

$$= C_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_{11}^{i-1}}{s^{\alpha i}} B_1 + D$$

$$= C_1 \left(s^\alpha I_q - A_{11}\right)^{-1} B_1 + D$$

La représentation $\{A_{11}, B_1, C_1, D\}$ est une représentation de $H(s)$ de dimension q inférieure à n. C'est une contradiction qui complète la preuve. Même démonstration si la réalisation est non observable.

$(Suffisance)$ Supposons que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ d'ordre n est contrôlable et observable mais elle n'est pas minimale, donc il existe une autre réalisation $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ d'ordre $\overline{n} \prec n$.

D'après le théorème (3.0.6), on a :

$$\overline{D} = D$$

et

$$CA^{i-1}B = \overline{C}\ \overline{A^{i-1}}\ \overline{B}, i = 1, 2, ...$$

Les matrices de contrôlabilité des représentations $\{A, B, C, D\}$ et $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ sont données par :

$$C_n = \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & \ldots & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_n} = \begin{pmatrix} \overline{B} & \vdots & \overline{A}\ \overline{B} & \vdots & \overline{A^2}\ \overline{B} & \vdots & \ldots & \vdots & \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} \end{pmatrix}$$

Les matrices d'observabilité des représentations $\{A, B, C, D\}$ et $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\}$ sont décrits par :

$$O_n = \begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overline{O_n} = \begin{pmatrix} \overline{C} \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \overline{C}\ \overline{A^{n-1}} \end{pmatrix}$$

On a :

$$O_nC_n = \begin{pmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \cdots & CA^{2n-2}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{C}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A}\ \overline{B} & ... & \overline{C}\ \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} \\ \overline{C}\ \overline{A}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A^2}\ \overline{B} & .. & \overline{C}\ \overline{A^n}\ \overline{B} \\ ... & ... & ... & ... \\ \overline{C}\ \overline{A^{n-1}}\ \overline{B} & \overline{C}\ \overline{A^n}\ \overline{B} & ... & \overline{C}\ \overline{A^{2n-2}}\ \overline{B} \end{pmatrix}$$

$$= \overline{O_n}\ \overline{C_n}$$

En utilisant **l'inégalité du rang de sylvester :**

$$rangO_n + rangC_n - n \le rang(O_nC_n) \le \min(rangO_n, rangC_n)$$

et puisque $\{A, B, C, D\}$ est contrôlable et observable, il s'ensuit,

$$rangO_n = rangC_n = n$$

Donc :

$$n \leq rang(\overline{O_n}\ \overline{C_n}) \leq \min(rang\overline{O_n}, rang\overline{C_n}) \leq \overline{n}$$

ie :

$$n \leq \overline{n}$$

Cependant $\overline{n}$ ne peut pas être supèrieur à n, le fait que la réalisation $\{A, B, C, D\}$ est minimale, alors $n = \overline{n}$.

On conclut que si la réalisation $\{A, B, C, D\}$ est contrôlable et observable, donc elle est minimale.

Chapitre 5

Systèmes linéaires singuliers à temps continu

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, nous commençons par une introduction aux systèmes singuliers. Après nous nous intéressons à ses propriétés structurelles et à la recherche de la solution des systèmes linéaires singuliers en temps continu .

Considérons le système linéaire continu suivant :

$$Ex\acute{}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5.0.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{5.0.2}$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie . $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Définition 5.0.2 *Le système* (5.0.1) *est dit* ***singulier*** *si* $\det E = 0$.

Dans le cas contraire , c'est à dire si $\det E \neq 0$, il est dit **standard** .

Si $E = I_n$ le système est aussi appelé **standard** (ou explicite) .

Le système (5.0.1) est dit régulier si et seulement si :

$$\det(Es - A) \neq 0$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

La fonction de transfert

Si on applique la transformée de Laplace, on trouve :

$$\mathcal{L}[E\acute{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]$$

$$E\mathcal{L}[\acute{x}(t)] = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)]$$

où $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, il s'ensuit alors ,

$$EsX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$sEX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$sEX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$X(s)(sE - A) = BU(s)$$

Admettons que notre faisceau est régulier et que $x_0 = 0$ donc,

$$X(s) = (sE - A)^{-1}BU(s) \tag{5.0.3}$$

et même par rapport à $y(t)$, et si on applique la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Cx(t)] + \mathcal{L}[Du(t)]$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = C\mathcal{L}[x(t)] + D\mathcal{L}[u(t)]$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{5.0.4}$$

Une subtitution de la solution (5.0.3) dans (5.0.4) donne :

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= [C(sE - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$= H(s)U(s)$$

tel que,

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D \tag{5.0.5}$$

La fonction matricielle $H(s)$ est appelée **fonction de transfert** du système .

On peut écrire $H(s)$ par :

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$$

$$= C\frac{adj(sE - A)}{\det(sE - A)}B + D$$

si on pose $\det(sE - A) = G(s)$ alors :

$$H(s) = C\frac{adj(sE - A)}{G(s)}B + D$$

$$= \frac{Cadj(sE - A)B + DG(s)}{G(s)}$$

En notant :

$$H(s) = \frac{N(s)}{G(s)} \tag{5.0.6}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les zéros du polynôme caractéristique :

$$G(s) = \det(sE - A)$$

qui sont les valeurs propres de (E, A) .

Définition 5.0.3 *Pour un système singulier, on supposera que* $det(Es - A) \neq 0$ *pour uncertain* $s \in \mathbb{C}$*. Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent (voir* [5])

$$(sE - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)} \tag{5.0.7}$$

où μ est appelé **indice de nilpotence** de (E, A), il est décrit par :

$$\mu = rgE - deg[det(Es - A)] + 1$$

Φ_i est appelée **la matrice fondamentale** de (5.0.1) , elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Phi_i = 0$, pour $i \prec -\mu$

2. $\Phi_0 A \Phi_i = \begin{cases} \Phi_{i+1} \text{ pour } i \geq 0 \\ 0 \text{ pour } i \prec 0 \end{cases}$

3. $-\Phi_{-1} E \Phi_i = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \geq 0 \\ \Phi_{i-1} \text{ pour } i \prec 0 \end{cases}$

4. $\Phi_0 E \Phi_i = \begin{cases} \Phi_i \text{ pour } i \geq 0 \\ 0 \text{ pour } i \prec 0 \end{cases}$

5. $-\Phi_{-1} A \Phi_i = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \geq 0 \\ \Phi_i \text{ pour } i \prec 0 \end{cases}$

6. $\Phi_i = (\Phi_0 A)^i \Phi_0$, pour $i \geq 0$

7. $-\Phi_{i-1} E \Phi_i = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \geq 0 \\ \Phi_{i-1} \text{ pour } i \prec 0 \end{cases}$

Exemple 5.0.1 *Considérons les matrices* E *et* A *suivantes,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Es-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix} = \Phi_{-2}s+\Phi_{-1}+\Phi_0 s^{-1}+...$$

où :

$$\Phi_{-2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi_i=(\Phi_0 A)^i\Phi_0$, pour $i\geq 0$,

$$\Phi_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 Réalisation

Une réalisation de $H(s)$ est tout ensemble noté $\{E,A,B,C,D\}$ tel que :

$$H(s)=C(sE-A)^{-1}B+D$$

5.2 Paramétres de Markov

Toute matrice de transfert rationnelle réelle $H(s)\in\mathbb{C}^{r\times m}$ peut être décomposée en série de Laurent :

$$H(s)=H_0+H_1s^{-1}+H_2s^{-2}+...$$

où les matrices H_i, $i=1,2,...$sont **les paramètres de Markov** du système. Ils peuvent être calculés par :

$$H_0=\lim_{s\to+\infty}H(s),$$

$$H_1 = \lim_{s \to +\infty} s(H(s) - H_0),$$

$$H_2 = \lim_{s \to +\infty} s^2(H(s) - H_0 - H_1 s^{-1}) \;...$$

Théorème 5.2.1 *L'ensemble $\{E, A, B, C, D\}$ est une **réalisation** de $H(s)$ si et seulement si :*

$$H_0 = D$$

et

$$H_i = C\Phi_i B \quad , i = -\mu, ..., 0, 1, 2, ...$$

Preuve

Si la représentation $\{E, A, B, C, D\}$ est une réalisation de la matrice de transfert $H(s)$ alors :

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$$

$$= C\sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)} B + D$$

$$= C[\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}]B + C[\sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} s^{i-1}]B + D$$

$$= C[\sum_{i=0}^{\infty} (\Phi_0 A)^i s^{-(i+1)}]\Phi_0 B + \sum_{i=1}^{\mu} C\Phi_{-i} B s^{i-1} + D \tag{5.2.1}$$

5.3 Réalisation minimale

Définition 5.3.1 *Une réalisation minimale ou réalisation irréductible de $H(s)$ est tout ensemble $\{E, A, B, C, D\}$ tel que son ordre n est minimal .*

5.4 Trajectoire d'états de systèmes singuliers en temps continu

La solution $x(t)$ du système (5.0.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et le contrôle $u(t)$ est donnée par :

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t}\Phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\Phi_0 A(t-\tau)}\Phi_0 B u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \Phi_{-j}(Bu^{(j-1)}(t) + Ex_0\delta^{(j-1)}(t)) \quad (5.4.1)$$

où $u^{(j)} = \frac{d^i u}{dt^j}$, $j = 1, ..., \mu - 1$.

Preuve

Par application de la transformée de Laplace à l'équation (5.0.1) on obtient,

$$EsX(s) - Ex_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$EsX(s) - AX(s) = Ex_0 + BU(s)$$

$$(Es - A)X(s) = Ex_0 + BU(s)$$

Le système (5.0.1) étant régulier, donc$(Es - A)^{-1}$ existe pour un certain nombre $s \in \mathbb{C}$, par suite :

$$X(s) = (Es - A)^{-1}(Ex_0 + BU(s))$$

De la relation (5.0.7) il s'ensuit :

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}(Ex_0 + BU(s))$$

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}BU(s)$$

$$X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)} E x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)} BU(s) + \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} s^{(i-1)} E x_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} s^{(i-1)} BU(s)$$

Enfin, nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution pour obtenir la solution du système, sachant que :

$$\mathcal{L}(e^{\Phi_0 A t} \Phi_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}$$

On aura alors ,

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 E x_0 + B\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(e^{\Phi_0 A t} \Phi_0)\mathcal{L}[u(t)]] + E x_0 \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} u^{(i-1)}(t)$$

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 E x_0 + [(e^{\Phi_0 A t} \Phi_0) * B[u(t)]] + E x_0 \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} \delta^{(i-1)}(t) + B \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} u^{(i-1)}(t)$$

Par conséquent :

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\Phi_0 A(t-\tau)} \Phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{-i} (B u^{(i-1)}(t) + E x_0 \delta^{(i-1)}(t))$$

Exemple 5.4.1 *Si on considère le système* (5.0.1) *avec :*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 2$$

alors ,

$$\det(sE - A) = -s$$

et :

$$(sE-A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -s \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix}$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$, par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\Phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par suite ,

$$\Phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{\Phi_0 A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'après la propriété 2, on obtient,

$$\Phi_i = \Phi_0 A \Phi_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } i \geq 0$$

La solution du système est par suite donnée par,

$$x(t) = e^{\Phi_0 At}\Phi_0 E x_0 + \Phi_{-1}Bu(t) + \Phi_{-1}Ex_0\delta(t) + \Phi_{-2}Bu^{(1)}(t) + \Phi_{-2}Ex_0\delta^{(1)}(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -u(t) - x_{2,0}\delta(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ x_{3,0} \end{pmatrix}$$

5.5 La réponse de systèmes singuliers en temps continu

La sortie du système singulier (5.0.1) est donnée par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{\Phi_0 At}\Phi_0 Ex_0 + \int_0^t Ce^{\Phi_0 A(t-\tau)}\Phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} C\Phi_{-i}(Bu^{(i-1)}(t) + Ex_0\delta^{(i-1)}(t)) + Du(t) \tag{5.5.1}$$

En substituant $x(0) = 0$ et $u(t) = \delta(t)$ dans (5.5.1), on obtient la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système (5.0.1) :

$$h(t) = \begin{cases} Ce^{\Phi_0 At}\Phi_0 B \quad \text{pour} \quad t \succ 0 \\ Ce^{\Phi_0 At}\Phi_0 B + \sum_{i=1}^{\mu} C\Phi_{-i}(B\delta^{(i-1)}(t)) + D\delta(t) \quad \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Chapitre 6

Systèmes linéaires fractionnaires et singuliers à temps continu

Dans cette partie, l'accent est mis sur une nouvelle classe de systèmes qui est celle des systèmes **fractionnaires et singuliers.** Notre objectif dans cette séction est d'addapter quelques résultats sur ce type de systèmes .

On considère le système linéaire fractionnaire et singulier à temps continu décrit par les équations :

$$ED^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ,0 \prec \alpha \prec 1 \tag{6.0.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{6.0.2}$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie .$E \in \mathbb{R}^{n\times n}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$.
La condition initiale est notée par : $x_0 = x(0)$.
D^{α} définit **la dérivée fractionnaire de Caputo** d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$) pour une fonction n fois différentiable .

6.1 La fonction de transfert

En utilisant la transformée de Laplace et comme $(s^{\alpha}E - A)$ est régulière , il suit alors ,

$$X(s) = (s^{\alpha}E - A)^{-1}BU(s) \tag{6.1.1}$$

et

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{6.1.2}$$

Une application de la transformée de Laplace et une subtitution de (6.1.1) dans (6.1.2), donne :

$$Y(s) = \left[C(s^{\alpha}E - A)^{-1}B + D\right]U(s) \tag{6.1.3}$$

où la matrice,

$$H(s) = C(s^{\alpha}E - A)^{-1}B + D \tag{6.1.4}$$

est appelée **la matrice de transfert** du système (6.0.1, 6.0.2)

Définition 6.1.1 *La réalisation d'une matrice de transfert donnée $H(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est toute représentation d'état $\{E, A, B, C, D\}$ tel que :*

$$H(s) = C(s^{\alpha}E - A)^{-1}B + D$$

La dimension des matrices E et A est appelée l'ordre de la réalisation du système .

6.2 L'éxistence de la réalisation du système linéaire fractionnaire et singulier à temps continu

En se basant sur la formule (6.1.1) et en prenant,

$$\lambda = s^{\alpha} \tag{6.2.1}$$

On peut exprimer $H(s)$ par :

$$H(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D \tag{6.2.2}$$

On déduit alors que la condition pour que la réalisation $\{E, A, B, C, D\}$ de $H(s)$ existe et que toutes les entrées dans $H(s)$ sont des fonctions rationnelles de l'ordre naturel avec variables complexes s^α satisfaisant $\lim_{s\to+\infty} H(s) \prec \infty$.
En utilisant la formule (6.2.2), on peut développer $H(\lambda)$ dans une série de Laurent,

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda^{-1}H_1 + \lambda^{-2}H_2 + \dots \tag{6.2.3}$$

Par conséquent :

$$H(s) = H_0 + s^{-\alpha}H_1 + s^{-2\alpha}H_2 + \dots \tag{6.2.4}$$

Définition 6.2.1 *Les termes H_i, $i = 1, 2, \dots$ dans la formule (6.2.4) sont l'extension des paramètres de Markov d'un système linéaire fractionnaire. Ils sont déterminés par les formules suivantes :*

$$H_0 = \lim_{s\to+\infty} H(s),$$

$$H_1 = \lim_{s\to+\infty} s^\alpha(H(s) - H_0),$$

$$H_2 = \lim_{s\to+\infty} s^{2\alpha}(H(s) - H_0 - H_1 s^{-\alpha}) \ ...$$

Théorème 6.2.1 *L'ensemble $\{E, A, B, C, D\}$ est une* ***réalisation*** *de $H(s)$ si et seulement si,*

$$H_0 = D$$

et

$$H_i = C\Phi_i B \quad , i = -\mu, ..., 0, 1, 2, ...$$

Preuve

Si la représentation $\{E, A, B, C, D\}$ est une réalisation de la matrice de transfert $H(s)$ alors :

$$H(s) = C(s^{\alpha}E - A)^{-1}B + D$$

$$= C\sum_{i=-\mu}^{\infty}\Phi_i s^{-\alpha(i+1)}B + D$$

$$= C[\sum_{i=0}^{\infty}\Phi_i s^{-\alpha(i+1)}]B + C[\sum_{i=1}^{\mu}\Phi_{-i}s^{\alpha(i-1)}]B + D$$

$$= C[\sum_{i=0}^{\infty}(\Phi_0 A)^i s^{-\alpha(i+1)}]\Phi_0 B + \sum_{i=1}^{\mu}C\Phi_{-i}Bs^{\alpha(i-1)} + D \tag{6.2.5}$$

Conclusion et perspectives

Le principal objectif de ce mémoire est de chercher la réalisation minimale de systèmes linéaires de type fractionnaires ou non, et /ou singuliers. Quleques caractérisations et critères ont été établis pour garantir l'éxistence d'une telle réalisation. Lors de cette étude, le problème de la sorvabilité pour les différentes classes de systèmes étudiés a été considéré. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité et l'observabilité ont été établis en utilisant la décomposition de Kalman. Cela nous a de même assuré et délivré le certificat de garantie pour une meilleure réalisation. Nous citerons quelques lignes en perspectives tel que l'étude de la recherche de réalisation minimale pour les systèmes multi-entrée multi-sortie (MIMO). La classe des modèles discrets sera aussi intéréssante pour l'adaptation de nos résultats.

Bibliographie

[1] Antsaklis and Anthony N. Michel."A Linear Systems Primer ", Birkhãuser - Boston, Basel, Berlin 2007.

[2] Bouagada Djillali. Cours "Théorie de Contrôle" année : 2014-2015 et 2016-2017.

[3] Bouagada Djillali. Cours "Système et Représentation d'état" année : 2015-2016.

[4] Christophe DOIGNON. Traitement du Signal. Université Louis Pasteur de Strasbourg.

[5] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes linéaires,Version 6 - 2010.

[6] Djillali Bouagada. Thèse de Doctorat d'état. "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs" 2007.

[7] Djillali Bouagada and Saliha Marir. Problem of Realization of Fractional Linear continuous time Systems. Papier de conférence 2013.

[8] Dr. Ryozo Nagamune. MECH550P : Foundations in Control Engineering. Kalman decomposition. University of British Columbia.

[9] Emmanuel Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France.

[10] Emmanuel Trélat et Thomas Haberkorn.Cours d'Automatique. Master de Mathématiques, Université d'Orléans.

[11] Etienne Pardoux.Processus de Markov et applications.Algorithmes, Réseaux, Génome et Finance 2006

[12] François chaplais. Théorie Algebrique des Systèmes Lineaires Staionnaires Multivariables. Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris.

[13] Gérard Blanchet, Denis Matignon. Eléments sur les représentations d'état Version provisoire - V6.

[14] Guy Gauthier. Les équations d'état. École de technologie supérieure. Département de génie de la production automatisée.

[15] Igor Podlubny. Fractional Differential Equations.Tachnical University of Kosice, Slovak Republic. Mathematics in science and engineering, Volume 198.1999.

[16] Linear Control Systems. XIII. State-Space Realization of Linear Systems. Department of Electrical Engineering Pennsylvania State University Fall 2010.

[17] Liyi Dai. Singular Control Systems. Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA.

[18] Mohammed Dahleh, Munther A. Dahleh et George Verghese. Lectures on Dynamic Systems and Control. Department of Electrical Engineering and Computer Science Massachuasetts Institute of Technology.

[19] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. Differential Equations, Dynamical Systems , and linear algebra. University of California.

[20] Nicolas Petit, Pierre Rouchon. Automatique Dynamique et contrôle des systèmes. CAS - Centre Automatique et Systèmes. Unité Mathématiques et Systèmes.

[21] Olivier BACHELIER. Cours d'Automatique "Représentations d'état linéaires des systèmes monovariables" 2012.

[22] Pierre Hanna.Traitement du Signal Numérique. Cours Online.

[23] Représentation et analyse des systèmes linéaires, PC 3, Théorie de la réalisation, Formes canoniques compagnes. Cours online.

[24] Richard M.Phelan. Automatic Control Systems. Cornell University, Ithaca and London 1977.

[25] Sylvie Icart. Systèmes linéaires multivariables, Master SiCom 2006–2007.

[26] Tadeusz Kaczorek. Positive minimal realizations for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control. Faculty of Electrical Engineering, Bialystok Technical University 45D Wiejska Str., 15-351 Białystok.

[27] Tadeusz Kaczorek. A new approach to the realization problem for fractional discrete-time linear systems. Faculty of Electrical Engineering, Białystok University of Technology, 45D Wiejska St., 15-351 Bialystok, Poland.

[28] Tadeusz Kaczorek. Standard and singular 1D and 2D positive linear systems. Institute of Control and Industrial Electronics,Warsaw Tachnical university, Faculty of Electrical Engineering. 00-662 Warszawa, Koszykowa 75, Poland.

[29] Tadeusz Kaczorek. Selected Problems of Fractional Systems Theory. Bialystok University of Technology, Faculty of Electrical Engineering 2011.

[30] Wade Bolton . Control Systems

[31] Yves Granjon. Automatique "Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état" 2e édition.