MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

THEME :

Généralisations de quelques inégalités intégrales

Etudiant : « **DOUBBI BOUNOUA MOHAMED** »

Encadrant : « DAHMANI ZOUBIR »

Année Universitaire 2016/2017

Résumé

Dans ce mémoire de Master on a généralisé certains trvaeaux de Awan et al. JIPAM 2008.D'autres trvaeaux de Kashuri et al. publié en 2016 ont été aussi généralisés dans notre mémoire.

Dédicaces

A ma mère

Pour son amour et son courage

A mon père

Pour m'avoir inculqué les valeurs auxquelles je tiens tant

A mes sœurs et à mes frères

Vous êtes dans mon cœur

A ma famille et aux gens que j'aime

Remerciments

Je tiens à remercier les personnes les plus chères à mon cœurs, à ma familles d'exceptions pour leurs soutiens moraux et leurs présences permanentes.

En premier lieu, Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à monsieur Dahmani Zoubir pour s'avoir encadré avec un grand cœur, pour sa disponibilité, pour les précieux conseils constructifs et je n'oublie pas sa patience et gentillesse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciement à tous mes amis, qui me ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie des intégrales et des opérateurs différentiels ayant un ordre non entier.

L'objet ce travail est d'étudier et généraliser quelque inégalités intégrales classiques en utilisant l'approche fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Dans ce mémoire, nous allons proposer une introduction, quatre chapitre et une conclusion.

Dans le premier chapitre on intoduit des notions de base de l'integrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Le deuxième chapitre est consacré à établir quelque inégalités integrables de type Chebychev à un poids positif et généraliser des résultat classiques publiés dans [2].

Le troisième chapitre est consacré à des résultats fractionnaires de type Steffensen et de type Chebychev avec un poids quelconque.

Enfin, notre dernier chapitre sera consacré à l'étude de quelque inégalité intégrales des fonction convexe et on généralise aussi quelques théorèmes des intégrales classique donné dans [1].

Chapitre 1

Description du calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Ce premier chapitre est destiné aux différents fonctions outils dans le calcul fractionnaire (fonction Gamma d'Euler, fonction Béta d'Euler), et on introduira l'approche de l'integrale fractionnaire, celle de Riemann-Liouville et on présentera quelques unes de leur propriétés.

1.2 Fonctions spéciales du calcul fractionnaire

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction gamma d' Euler est donné par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Quleques propriétés de la fonction Gamma :

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.2.1 *La fonction gamma d' Euler admet des poles simple pour tout point $m \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}^*$.*

Remarque 1.2.1 *La fonction $\Gamma(.)$ peut-être considérée comme une généralisation de la fonction factorielle.*

1.2.2 Fonction Béta d'Euler

Définition 1.2.2 *Soit* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *La fonction Béta d' Euler est donné par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Proposition 1.2.2 *Soit* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, *Alors, on a*

1) $B(x,y) = B(y,x)$.

2) $B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$.

1.3 Integrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Soient* f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et* α *un nombre réel positive. L'integrale fractionnaire d'ordre* α *au sens de Riemann-Liouville de* f *est donné par :*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \alpha > 0, \ x > a. \\ J_a^0 f(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Soient* $x > a$, $\alpha \geq 0$,*Alors, on a*

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \ \forall \beta > -1. \tag{1.3.1}$$

Proposition 1.3.1 *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$ *et* $\alpha, \beta \geq 0$, *Alors, on a*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= J_a^{\alpha+\beta} f(x) \qquad (1.3.2) \\ &= J_a^\beta J_a^\alpha f(x), \quad a < x \leq b. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Inégalités de Chebyshev et Steffensen avec poids positif

2.1 Introduction

On considère la fonctionnelle de Chebyshev [5]

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b g(x)\right)$$

avec f et g sont deux fonctions integrable sur $[a,b]$.

L'un des inégalités les plus utilisées est $T(f,g) \geq 0$, telle que f et g ont le même sens de variation.

Et si f est une fonction bornée par des nombre réel m et M et g est une fonction continue avec $g' \in L_\infty [a,b]$, On a [16]

$$|T(f,g)| \leq \frac{b-a}{8}(M-m)||g'||_\infty.$$

2.2 Rappels

Définition 2.2.1 *[5] Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ des fonctions integrable sur $[a,b]$.La fonctionnelle de Chebyshev à un poids est donnée par*

$$T(f,g;p) := \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pfg)(x)dx - \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pf)(x)dx \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pg)(x)dx$$

Remarque 2.2.1 *Pour $p(t) = 1$, On a $T(f, g; 1) = T(f, g)$, et la même chose pour $T(f, g; p)$, si f et g ont le même sens de variation alors on a $T(f, g; p) \geq 0$.*

Théorème 2.2.1 *[2] Si ϕ est une fonction continue sur $[a, b]$ et p une fonction positive et integrable sur $[a, b]$, avec $(\phi')^2 \in L^1[a, b]$, Alors*

$$T(\phi, \phi, p) \leq \frac{1}{P^2(b)} \int_a^b \tilde{P}(x) \left(\phi'\right)^2 (x) dx \tag{2.2.1}$$

telle que $P(x) = \int_a^x p(u)du$ et $\tilde{P}(x) = P(x) \int_a^b tp(t)dt - P(b) \int_a^x tp(t)dt$.

Définition 2.2.2 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que $f \in L^p[a, b]$, Si $\int\limits_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty$, $\forall 1 \leq p < +\infty$.*

Définition 2.2.3 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que $f \in L^\infty[a, b]$, si $\exists c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| < c$ p.p. $x \in [a, b]$.*

2.3 Quelques généralisation des inégalités de Chebyshev

Théorème 2.3.1 *[3] Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues ayant le même sens de variation. Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha (fg)(x) - \left(J_a^\alpha f(x)\right) \left(J_a^\alpha g(x)\right) \geq 0, \quad \forall x [a, b]. \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.3.1 *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continues et positive. Alors on a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf)(x) \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \\ = \; & \frac{1}{2\left[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)\right]^2} \int\limits_a^x \int\limits_a^x (x-u)^{\alpha-1} (x-v)^{\alpha-1} p(u) p(v) (f(u) - f(v))(g(u) - g(v)) du dv \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

2.4 Résultats fractionnaires

On démontre le lemme suivant,

Lemme 2.4.1 *Soient* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables,* $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction integrable et* $g' \in L^1[a,b]$,*alors* $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in]a,b]$, *on a*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha(pf)(x) \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha(pg)(x)\\ =\ & \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x g'(t) \left\{ \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} H_x(y) p(y) dy \right\} dt. \qquad (2.4.1)\end{aligned}$$

telle que

$$H_x(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[J_a^\alpha(pf)(x) - f(y) J_a^\alpha p(x) \Big]. \qquad (2.4.2)$$

Preuve :

Par une integration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^x g'(t) \left\{ \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} H_x(y).p(y) dy \right\} dt &= g(t) \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} H_x(y) p(y) dy \Big|_{t=a}^{t=x}\\ &\quad - \int_a^x g(t)(x-t)^{\alpha-1} H_x(t) p(t) dt.\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_a^x g'(t) \left\{ \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} H_x(y).p(y) dy \right\} dt &= g(x) \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} H_x(y) p(y) dy\\ &\quad - \int_a^x g(t)(x-t)^{\alpha-1} H_x(t) p(t) dt.\end{aligned}$$

On remplace $H_x(y)$ et $H_x(t)$ par (2.4.2), alors on trouve

$$\begin{aligned}&\int_a^x g'(t) \{ \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} H_x(y) p(y) dy \} dt\\ =\ & g(x) J_a^\alpha(pf)(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} p(y) dy - g(x) J_a^\alpha p(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) p(y) dy\\ & - J_a^\alpha(pf)(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) p(t) dt + J_a^\alpha p(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) p(t) dt.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_a^x g'(t)\{\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}H_x(y)p(y)dy\}dt &= g(x)\left[J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha p(x) - J_a^\alpha p(x)J_a^\alpha(pf)(x)\right]\\ &\quad + J_a^\alpha p(x)J_a^\alpha(pfg)(x) - J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x).\end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^x g'(t)\{\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}H_x(y)p(y)dy\}dt = J_a^\alpha p(x)J_a^\alpha(pfg)(x) - J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x). \tag{2.4.3}$$

Si on multiplie (2.4.3) par $\dfrac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}$, on obtient (2.4.1).

Théorème 2.4.1 *Soit $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction integrable et $(\phi')^2 \in L^1[a,b]$, Alors pour toute $\alpha > 0$ et $x \in [a,b]$, on a*

$$\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi)(x)\right]^2 \leq \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x \widetilde{P}_x(t)[\phi'(t)]^2dt, \tag{2.4.4}$$

tel que :

$$\widetilde{P}_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[J_a^\alpha(xp(x))\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}p(y)dy - J_a^\alpha p(x)\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}yp(y)dy\Big]. \tag{2.4.5}$$

Preuve :

Pour $f(x) = x$, dans le lemme **2.4.1,** on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[x(pg)(x)] - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[xp(x)]\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\\ &= \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x g'(t)\{\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}H_x(y)p(y)dy\}dt,\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

tel que

$$H_x(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[J_a^\alpha(xp(x)) - yJ_a^\alpha p(x)\right]. \tag{2.4.7}$$

On remplace $H_x(y)$ par $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[J_a^\alpha(xp(x)) - yJ_a^\alpha p(x)\right]$ dans (2.4.6),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[x(pg)(x)] - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[xp(x)]\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\\ &= \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x g'(t)\left\{\int_a^t (x-y)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[J_a^\alpha(xp(x)) - yJ_a^\alpha p(x)\right]p(y)dy\right\}dt.\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha[x(pg)(x)] - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha[xp(x)] \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \\
= \quad & \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x g'(t) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[J_a^\alpha (xp(x)) \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} p(y) dy \\
& \qquad - J_a^\alpha p(x) \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} y p(y) dy \Big] dt
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha[x(pg)(x)] - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha[xp(x)] \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) = \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x g'(t) \widetilde{P}_x(t) dt \quad (2.4.8)
$$

D'autre part, par (2.3.2), on trouve

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (p\phi^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (p\phi)(x) \right]^2 \\
= \quad & \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (x-s)^{\alpha-1} p(t) p(s) [\phi(t) - \phi(s)]^2 dt ds. \quad (2.4.9)
\end{aligned}
$$

Et on a

$$
\phi(t) - \phi(s) = \int_s^t \phi'(u) du.
$$

On utilise l'inegalité de Cauchy Schwarz. On peut écrire

$$
\begin{aligned}
\left[\int_s^t \phi'(u) du \right]^2 \quad & \leq \quad \int_s^t du \int_s^t (\phi'(u))^2 du. \\
& = \quad (t-s) \int_s^t (\phi'(u))^2 du \\
& = \quad (t-s) \left(\int_a^t (\phi'(u))^2 du - \int_a^s (\phi'(u))^2 du \right).
\end{aligned}
$$

Si on suppose que $\Psi(v)=\int\limits_a^v(\phi'(u))^2du$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi^2)(x)-\left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi)(x)\right]^2\\
\leq\ &\frac{1}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\int\limits_a^x\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}p(t)p(s)(t-s)(\Psi(t)-\Psi(s))dtds.\\
=\ &\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[x(p\Psi)(x)]-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[xp(x)]\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\Psi)(x). \qquad (2.4.10)
\end{aligned}$$

Et par (2.4.10) et (2.4.8), on obtient

$$\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi^2)(x)-\left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(p\phi)(x)\right]^2\leq\frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int\limits_a^x\Psi'(t)\widetilde{P}_x(t)dt.$$

On remplace $\Psi'(t)$ par $(\phi'(t))^2$, on trouve l'inégalité (2.4.4).

Corollaire 2.4.1 *Si $\phi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue et $(\phi')^2\in L^1[a,b]$, alors on a*

$$\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha\phi^2(x)-\left[\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha\phi(x)\right]^2\leq\frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)J_a^\alpha 1}\int\limits_a^x(x-t)^\alpha(t-a)[\phi'(t)]^2dt. \qquad (2.4.11)$$

pour tout $\alpha>0$ et $x\in]a,b]$.

Preuve :

Pour $p(t)=1$, on a

$$\widetilde{P}_x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[J_a^\alpha x.\int_a^t(x-y)^{\alpha-1}dy-J_a^\alpha 1.\int_a^t(x-y)^{\alpha-1}ydy\right]. \qquad (2.4.12)$$

D'autre part, en tenant ompte de

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha x &= \frac{(\alpha a+x)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}, && (2.4.13)\\
\int\limits_a^t(x-y)^{\alpha-1}dy &= \frac{1}{\alpha}\left[-(x-t)^\alpha+(x-a)^\alpha\right], && (2.4.14)\\
J_a^\alpha 1 &= \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, && (2.4.15)\\
\int_a^t(x-y)^{\alpha-1}ydy &= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[-(x-t)^\alpha(\alpha t+x)+(x-a)^\alpha(\alpha a+x)\right]. && (2.4.16)
\end{aligned}$$

On remplace (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15) et (2.4.16) dans (2.4.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_x(t) &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}\left[-(\alpha a+x)(x-a)^\alpha(x-t)^\alpha+(x-a)^\alpha(x-t)^\alpha(\alpha t+x)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}(x-a)^\alpha(x-t)^\alpha(t-a) \qquad (2.4.17)\\
&= \frac{J_a^\alpha 1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}(x-t)^\alpha(t-a). \qquad (2.4.18)
\end{aligned}$$

Si on remplace $\widetilde{P}_x(t)$ par (2.4.18) et $p(t)=1$ dans (2.4.4), alors on obtient (2.4.11).

Théorème 2.4.2 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, $(f')^2, (g')^2 \in L^1[a,b]$ et $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction integrable, alors pour toute $\alpha > 0$ et $x \in]a,b]$, on a*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x) \\
&\leq \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\left(\int_a^x \widetilde{P}_x(t)[f'(t)]^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x \widetilde{P}_x(t)[g'(t)]^2dt\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.4.19)
\end{aligned}$$

Preuve :

Par l'égalité (2.3.2), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x) \\
&= \frac{1}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}p(t)p(s)[f(t)-f(s)]\,[g(t)-g(s)]\,dtds.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x) \\
&= \frac{1}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x\int_a^x \left\{\left[(x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}p(t)p(s)\right]^{\frac{1}{2}}(f(t)-f(s))\right\}\times \\
&\quad \left\{\left[(x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}p(t)p(s)\right]^{\frac{1}{2}}(g(t)-g(s))\right\}dtds. \qquad (2.4.20)
\end{aligned}$$

On utilise l'inegalité de Cauchy Schwarz, alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\
\leq\ & \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \left(\int_a^x \int_a^x \left[(x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s)\right] (f(t)-f(s))^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}} \\
\times\ & \left(\int_a^x \int_a^x \left[(x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s)\right] (g(t)-g(s))^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\
\leq\ & \left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf)(x)\right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\times\ & \left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x)\right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

On applique l'inégalité (2.4.4) pour $\left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf)(x)\right]^2\right)$ et $\left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg^2)(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x)\right]^2\right)$, alors on trouve (2.4.19).

Corollaire 2.4.2 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1([a,b])$ et $(f')^2, (g')^2 \in L^1[a,b]$, alors $\forall \alpha > 0, \forall x \in]a,b]$, on a*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\
\leq\ & \frac{\alpha}{(\alpha+1) J_a^\alpha 1} \sqrt{J_a^{\alpha+1}\left[(x-a)\left(f'(x)\right)^2\right] . J_a^{\alpha+1}\left[(x-a)\left(g'(x)\right)^2\right]}.
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Preuve :

Si on utilise l'inégalité (2.4.21) pour $p(t) = 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\
\leq\ & \sqrt{\left(\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha f^2(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha f(x)\right]^2 \right) \left(\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha g^2(x) - \left[\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha g(x)\right]^2 \right)}.
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

On utilise le corollaire **2.4.1** pour $\left(\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha f^2(x)-\left[\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha f(x)\right]^2\right)$ et $\left(\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha g^2(x)-\left[\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha g(x)\right]^2\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha(fg)(x)-\frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2}J_a^\alpha f(x)J_a^\alpha g(x) \\ \leq\ & \sqrt{\frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)(J_a^\alpha 1)}\int_a^x (x-t)^\alpha (t-a)\left[f'(t)\right]^2 dt} \\ \times\ & \sqrt{\frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)(J_a^\alpha 1)}\int_a^x (x-t)^\alpha (t-a)\left[g'(t)\right]^2 dt}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha(fg)(x)-\frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2}J_a^\alpha f(x)J_a^\alpha g(x) \\ \leq\ & \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)(J_a^\alpha 1)}\int_a^x (x-t)^\alpha (t-a)\left[f'(t)\right]^2 dt} \\ \times\ & \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)(J_a^\alpha 1)}\int_a^x (x-t)^\alpha (t-a)\left[g'(t)\right]^2 dt}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J_a^\alpha 1}J_a^\alpha(fg)(x)-\frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2}J_a^\alpha f(x)J_a^\alpha g(x) \\ \leq\ & \frac{\alpha}{(\alpha+1)J_a^\alpha 1}\sqrt{J_a^{\alpha+1}\left[(x-a)\left(f'(x)\right)^2\right].J_a^{\alpha+1}\left[(x-a)\left(g'(x)\right)^2\right]}. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.3 *Soient $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante, $p:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une fonction integrable, f une fonction continue sur $[a,b]$ et $f'\in L^\infty[a,b]$, alors pour toute $\alpha>0$*

et $x \in]a,b]$, *on a*

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$
$$\leq \frac{\| f'\|_\infty}{\left(J_a^\alpha p(x)\right)^2}\int_a^x g'(t)\widetilde{P}_x(t)dt. \tag{2.4.24}$$

Preuve :

Par l'égalité (2.3.2), on a

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$
$$= \frac{1}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\left|\int_a^x\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}(x-v)^{\alpha-1}p(u)p(v)[f(u)-f(v)][g(u)-g(v)]dudv\right| \tag{2.4.25}$$

D'où

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}(x-v)^{\alpha-1}p(u)p(v)\left|f(u)-f(v)\right|\left|g(u)-g(v)\right|dudv. \tag{2.4.26}$$

D'autre part,

$$\left|f(u)-f(v)\right| = \left|\int_v^u f'(s)\,ds\right| \leq \|f'\|_\infty \left|u-v\right|,$$

Donc

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}J_a^\alpha(pf)(x)J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$
$$\leq \frac{\|f'\|_\infty}{2[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}(x-v)^{\alpha-1}p(u)p(v)\left|u-v\right|\left|g(u)-g(v)\right|dudv. \tag{2.4.27}$$

Puisque g est une fonction croissante, alors

$$\forall u,v \in [a,b], (u-v)(g(u)-g(v)) \geq 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x)\right| \\
\leq\ & \frac{\|f'\|_\infty}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x \int_a^x (x-u)^{\alpha-1}(x-v)^{\alpha-1} p(u)p(v)(u-v)(g(u)-g(v))dudv
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x)\right| \\
\leq\ & \|f'\|_\infty \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha [x(pg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha [xp(x)] J_a^\alpha (pg)(x)\right].
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (2.4.4) pour $\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha [x(pg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha [xp(x)] J_a^\alpha (pg)(x)$, on trouve (2.4.24).

Corollaire 2.4.3 *Soient $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, f une fonction continue sur $[a,b]$ et $f' \in L_\infty[a,b]$, alors pour toute $\alpha > 0$ et $x \in]a,b]$, on a*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\
\leq\ & \frac{\alpha \|f'\|_\infty}{(\alpha+1)\, J_a^\alpha 1} J^{\alpha+1} \left[(x-a)\, g'(x)\right].
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Preuve :

Pour $p(t) = 1$, on a $\widetilde{P}_x(t) = \dfrac{J_a^\alpha 1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}(x-t)^\alpha (t-a)$, donc on remplace $\widetilde{P}_x(t)$ et $p(t)$ dans l'inégalité (2.4.24), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\
\leq\ & \frac{\|f'\|_\infty}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha) J_a^\alpha 1} \int_a^x (x-t)^\alpha (t-a) g'(t) dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\
\leq\ & \frac{\alpha \|f'\|_\infty}{(\alpha+1)(J_a^\alpha 1)\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha (t-a) g'(t) dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha 1} J_a^\alpha (fg)(x) - \frac{1}{[J_a^\alpha 1]^2} J_a^\alpha f(x) J_a^\alpha g(x) \\ \leq \;& \frac{\alpha \left\| f' \right\|_\infty}{(\alpha+1)\, J_a^\alpha 1} J^{\alpha+1}\left[(x-a)\, g'(x)\right]. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.4 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérrivables sur $[a,b]$ avec $g'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $\left(\frac{f'}{g'}\right) \in L^\infty[a,b]$ et $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ soit integrable, alors $\forall \alpha > 0, \forall x \in]a,b]$, on a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf)(x) \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \\ \leq \;& \left\| \frac{f'}{g'} \right\| \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg^2)(x)] - \left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Preuve :

Soient $s, t \in [a,b]$, avec $s \neq t$, et par le théorème des acroissement finis généralisé $\exists c \in [t,s]$ telle que $\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$,donc $\forall s, t \in [a,b], t \neq s$ et $g'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, on a $\left|\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}\right| \leq \left\|\frac{f'}{g'}\right\|_\infty$,

et par l'égalité (2.3.2), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ = \;& \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s)[f(t)-f(s)]\left[g(t)-g(s)\right] dtds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ = \;& \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s) \left(\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}\right) \left[g(t)-g(s)\right]^2 dtds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ \leq \;& \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s) \left|\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}\right| \left[g(t)-g(s)\right]^2 dtds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\
\leq \quad & \frac{1}{2[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \left\| \frac{f'}{g'} \right\|_\infty \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} p(t)p(s) \left[g(t)-g(s)\right]^2 dtds.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x)] - \frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2} J_a^\alpha (pf)(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\
\leq \quad & \left\| \frac{f'}{g'} \right\|_\infty \left[\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg^2)(x)] - \left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Inégalités de Chebyshev et Steffensen avec Poids Quelconque

3.1 Introduction et motivation

On considère la fonctionnelle de Chebyshev à un poids quelconque

$$T(f,g;p) := \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pfg)(x)dx - \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pf)(x)dx \frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b (pg)(x)dx$$

avec $f, g, p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonction integrables.

Dans [2], les auteurs montrer que si f est une fonction croissante et g vérifie l'inégalité suivante

$$\frac{1}{P(x)}\int_a^x p(t)g(t)dt \leq \frac{1}{P(b)}\int_a^b p(t)g(t)dt, \quad \text{telle que } P(x) = \int_a^x p(t)dt, \tag{3.1.1}$$

alors $T(f,g;p) \geq 0$.

Pour $p(t) = 1$, $T(f,g) \geq 0$,si f est une fonction croissante et g vérifie l'inégalité suivante

$$\frac{1}{(x-a)}\int_a^x g(t)dt \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt.$$

3.2 Résultats classique sur la fonctionnelle de Chebyshev à poids quelconque

Lemme 3.2.1 *[2] Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction de classe C^1 et $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction integrable, Alors on a*

$$T(f,g;p) = \frac{1}{[P(b)]^2}\left(\int_a^b \overline{P}(x)\int_a^x P(t)g'(t)dtf'(x)dx + \int_a^b P(x)\int_x^b \overline{P}(t)g'(t)dtf'(x)dx\right) \tag{3.2.1}$$

telle que $P(x) = \int_a^x p(t)dt$ et $\overline{P}(x) = P(b) - P(x)$.

Théorème 3.2.1 *[2] Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et croissante, $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$une fonctionintegrable et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f' \in L^\infty[a,b]$ et $g' \in L^1[a,b]$.Si (3.1.1) est vérifie, alors on a*

$$|T(f,g;p)| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{[P(b)]^2}\int_a^b \widetilde{P}(t)g'(t)dt.$$

telle que $P(x) = \int_a^x p(u)du$ et $\tilde{P}(t) = P(t)\int_a^b up(u)du - P(b)\int_a^t up(u)du$.

3.3 Résultats fractionnaires

Théorème 3.3.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante et $p, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telle que*

$$J_a^\alpha p(x)\int_a^t (x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du \leq J_a^\alpha(pg)(x)\int_a^t (x-u)^{\alpha-1}p(u)du,\ a < t \leq x \leq b. \tag{3.3.1}$$

Alors, pour $\alpha \geq 0$ et $a < x \leq b$ on a

$$\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) \geq \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x). \tag{3.3.2}$$

Preuve :

Par une intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &= \frac{J_a^\alpha p(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} p(t) f(t) g(t) dt. \\ &= \frac{J_a^\alpha p(x)}{\Gamma(\alpha)} \Big[f(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) g(u) du \Big|_{t=a}^{t=x} \\ &\qquad - \int_a^x f'(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) g(u) du dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &= \frac{J_a^\alpha p(x)}{\Gamma(\alpha)} \Big[f(x) \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} p(u) g(u) du \\ &\qquad - \int_a^x f'(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) g(u) du dt \Big]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &= f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f'(t) J_a^\alpha p(x) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) g(u) du dt. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (3.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &\geq f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f'(t) J_a^\alpha (pg)(x) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) du dt. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) \geq f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) - \frac{J_a^\alpha (pg)(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f'(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) du dt \quad (3.3.3)$$

Et par une autre integration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) du dt &= f(t) \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) du \Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} p(t) dt \\ &= f(x) \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} p(u) du - \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} p(t) dt. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Si on utilise l'égalité (3.3.4) dans l'inégalité (3.3.3), alors on trouve

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &\geq f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) \\ &\quad - \frac{J_a^\alpha (pg)(x)}{\Gamma(\alpha)} \left(f(x) \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} p(u) du - \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} p(t) dt \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &\geq f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) - \frac{f(x) J_a^\alpha (pg)(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} p(u) du \\ &\quad + \frac{J_a^\alpha (pg)(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} p(t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pfg)(x) &\geq f(x) J_a^\alpha p(x) J_a^\alpha (pg)(x) - f(x) J_a^\alpha (pg)(x) J_a^\alpha p(x) \\ &\quad + J_a^\alpha (pg)(x) J_a^\alpha (pf)(x) \\ &= J_a^\alpha (pg)(x) J_a^\alpha (pf)(x). \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Finalement, on multiplie (3.3.5) par $\frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}$, on trouve (3.3.2).

Lemme 3.3.1 *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1([a, b])$ et $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a :*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pf)(x) \frac{1}{J_a^\alpha p(x)} J_a^\alpha (pg)(x) \qquad (3.3.6) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(\alpha) J_a^\alpha p(x)]^2} \left[\int_a^x \overline{M}_x(t) \int_a^t M_x(u) g'(u) du f'(t) dt + \int_a^x M_x(t) \int_t^x \overline{M}_x(u) g'(u) du f'(t) dt \right], \end{aligned}$$

telle que

$$M_x(t) = \int_a^t (x-u)^{\alpha-1} p(u) du \tag{3.3.7}$$

et

$$\overline{M}_x(t) = M_x(x) - M_x(t). \tag{3.3.8}$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \overline{M}_x(t) \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t) \int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
= & \int_a^x (M_x(x) - M_x(t)) \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
& + \int_a^x M_x(t) \int_t^x (M_x(x) - M_x(u))g'(u)duf'(t)dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \overline{M}_x(t) \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t) \int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
= & M_x(x) \int_a^x \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt - \int_a^x M_x(t) \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
& + M_x(x) \int_a^x M_x(t) \int_t^x g'(u)duf'(t)dt - \int_a^x M_x(t) \int_t^x M_x(u)g'(u)duf'(t)dt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \overline{M}_x(t) \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t) \int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
= & M_x(x) \left[\int_a^x \int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t) \int_t^x g'(u)duf'(t)dt \right] \\
& - \int_a^x M_x(t) \int_a^x M_x(u)g'(u)duf'(t)dt.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int_a^t M_x(u)g'(u)du = M_x(t)g(t) - \int_a^t (x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt+\int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt\\
=\;& M_x(x)\Big[\int_a^x\left(M_x(t)g(t)-\int_a^t(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du\right)f'(t)dt\\
&\qquad+\int_a^x M_x(t)(g(x)-g(t))f'(t)dt\Big]\\
&-\int_a^x M_x(t)f'(t)dt\left(M_x(x)g(x)-\int_a^x(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt+\int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt\\
=\;& M_x(x)\int_a^x M_x(t)g(t)f'(t)dt-M_x(x)\int_a^x\int_a^t(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)duf'(t)dt\\
&+M_x(x)g(x)\int_a^x M_x(t)f'(t)dt-M_x(x)\int_a^x M_x(t)g(t)f'(t)dt\\
&-M_x(x)g(x)\int_a^x M_x(t)f'(t)dt+\int_a^x(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du\int_a^x M_x(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt+\int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt\\
=\;&\int_a^x(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du\int_a^x M_x(t)f'(t)dt-M_x(x)\int_a^x\int_a^t(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)duf'(t)dt.
\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

D'autre part, par integration par partie, on obtient

$$\int_a^x\int_a^t(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)duf'(t)dt=f(x)\int_a^x(x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du-\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}p(t)g(t)f(t)dt\tag{3.3.10}$$

et

$$\int_a^x M_x(t)f'(t)dt = M_x(x)f(x) - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)f(t)dt \tag{3.3.11}$$

Si on remplace (3.3.10) et (3.3.11) dans (3.3.9), alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
= \ &\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du \left(M_x(x)f(x) - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)f(t)dt\right) \\
&-M_x(x)\left(f(x)\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}p(u)g(u)du - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)g(t)f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt + \int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt \\
= \ &\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)dt \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)f(t)g(t)dt \\
&-\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)f(t)dt\right)\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}p(t)g(t)dt\right).
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

On multiplie (3.3.12) par $\frac{1}{[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}$, on obtient (3.3.6).

Théorème 3.3.2 *Soient $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction integrable telle que l'inégalité (3.3.1) soit satisfaite et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f' \in L^\infty[a,b]$ et $g' \in L^1[a,b]$ alors, on a*

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x) - \frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x \widetilde{P}_x(t)g'(t)dt.$$

Preuve :

Par l'égalité (3.3.6), on a

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$

$$= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\left|\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)duf'(t)dt+\int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)duf'(t)dt\right|.$$

Donc

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$

$$\leq \frac{\|f'\|}{[\Gamma(\alpha)J_a^\alpha p(x)]^2}\left|\int_a^x \overline{M}_x(t)\int_a^t M_x(u)g'(u)dudt+\int_a^x M_x(t)\int_t^x \overline{M}_x(u)g'(u)dudt\right|.$$

Par conséquent

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$

$$\leq \|f'\|\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xpg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xp(x))\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xpg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xp(x))\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\geq 0.$$

Donc

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|$$

$$\leq \|f'\|\left(\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xpg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(xp(x))\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right).$$

Et par l'expression (2.4.8), on a

$$\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[x(pg)(x)]-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha[xp(x)]\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)=\frac{1}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int_a^x g'(t)\widetilde{P}_x(t)dt$$

Finalement, on déduit que

$$\left|\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pfg)(x)-\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pf)(x)\frac{1}{J_a^\alpha p(x)}J_a^\alpha(pg)(x)\right|\leq\frac{\|f'\|_\infty}{[J_a^\alpha p(x)]^2}\int\limits_a^x\widetilde{P}_x(t)g'(t)dt.$$

Chapitre 4

Inégalités Intégrales avec Fonctions Convexes

4.1 Intoduction

Les fonctions convexes jouent un role important dans les différent domaines mathématique, donc leurs inégalités sont très utilisables et l'un de ce utilisation est le calcul fractionnaire.

4.2 Fonctions convexes

Définition 4.2.1 *Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$$\forall x, y \in I,\ \forall \mu \in [0,1], \quad \varphi(\mu x + (1-\mu)y) \leq \mu\varphi(x) + (1-\mu)\varphi(y)$$

φ sera dite concave si $-\varphi$ est convexe.

Proposition 4.2.1 *Soient I un ensemble convexe et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *φ est convexe sur I.*
(ii) $\forall x, y \in I,\ \ \varphi(y) - \varphi(x) \geq \varphi'(x)(y-x)$.

4.3 Quelques inégalités des intégrales classiques à fonctions convexes

Théorème 4.3.1 *[23]Soient $f(x), g(x), h(x) > 0$ des fonctions continues sur $[a,b]$, avec $f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a,b]$,f et g sont croissantes et la foction $\frac{f}{h}$ decroissante.On suppose que*

φ est une fonction positive et convexe telle que $\varphi(0) = 0$. Alors on a

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b h(x)dx} \geq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))g(x)dx}{\int_a^b \varphi(h(x))g(x)dx}. \tag{4.3.1}$$

Théorème 4.3.2 *[23]Soient f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ vérifie*

$$\int_x^b f^{\min\{1,\beta\}}(t)dt \geq \int_x^b (t-a)^{\min\{1,\beta\}}dt, \quad \forall x \in [a,b]. \tag{4.3.2}$$

Alors on a

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x)dx \geq \int_a^b (x-a)^{\alpha} f^{\beta}(x)dx, \tag{4.3.3}$$

pour tout $\alpha, \beta > 0$.

4.4 Rappels

Théorème 4.4.1 *[9] Soient $f(x), g(x), h(x) > 0$ des fonctions continues sur $[a,b]$, avec $f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a,b]$,f et g sont croissante et la foction $\frac{f}{h}$ decroissante.On suppose que φ est une fonction positive et convexe telle que $\varphi(0) = 0$. Alors pour toute $\alpha > 0$ et $a < t \leq b$, on a*

$$\frac{J_a^{\alpha} f(t)}{J_a^{\alpha} h(t)} \geq \frac{J_a^{\alpha}[\varphi(f(t))g(t)]}{J_a^{\alpha}[\varphi(h(t))g(t)]}. \tag{4.4.1}$$

Théorème 4.4.2 *[10] Soient f et g deux fonctions positive sur $[a,b]$, telle que f est decroissante et g est croissante sur $[a,b]$.Alors pour tout $\alpha > 0, \beta \geq \gamma > 0, \delta > 0$, on a*

$$\frac{J_a^{\alpha}\left[f^{\beta}(t)\right]}{J_a^{\alpha}\left[f^{\gamma}(t)\right]} \geq \frac{J_a^{\alpha}\left[g^{\delta} f^{\beta}(t)\right]}{J_a^{\alpha}\left[g^{\delta} f^{\gamma}(t)\right]};\ t \in [a,b] \tag{4.4.2}$$

4.5 Résultats fractionnaires

On commence par le théorème suivant :

Théorème 4.5.1 *Soient $f(x), g(x), h(x) > 0$ des fonctions continues sur $[a,b]$, avec $f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a,b]$,f et g sont croissante et la foction $\frac{f}{h}$ decroissante. On suppose que φ est* *une fonction positive et convexe telle que $\varphi(0) = 0$. Alors on a*

$$\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)} \geq \left(\frac{J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)}{J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)}\right)^\lambda, \ \forall\lambda \geq 1, \tag{4.5.1}$$

telle que $x \in]a, b]$ et $\alpha > 0$.

Preuve :

On a $\forall x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq h(x)$, donc, pour tout $\lambda \geq 1$, on peut écrire :

$$\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)} \geq \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)}\right)^\lambda. \tag{4.5.2}$$

Par le théorème **4.4.1**, on a

$$\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)} \geq \frac{J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)}{J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)}.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)}\right)^\lambda \geq \left(\frac{J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)}{J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)}\right)^\lambda, \ \forall\lambda \geq 1. \tag{4.5.3}$$

Enfin, on utilise (4.5.2) et (4.5.3), alors on déduit que

$$\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)} \geq \left(\frac{J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)}{J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)}\right)^\lambda, \ \forall\lambda \geq 1.$$

Théorème 4.5.2 *Soient $f(x), g(x), h(x) > 0$ des fonctions continues sur $[a, b]$ avec $f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$ telle que f et g sont croissante et $\frac{f}{h}$ soit une fonction decroissante. Supposons que $\varphi(x)$ est une fonction convexe et positive. Alors l'inégalité*

$$\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)} \geq \frac{\left(J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)\right)^\theta}{\left(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)\right)^\lambda} \tag{4.5.4}$$

est vraie, si l'un des conditions suivantes est vérifiée :

1. *$\varphi[f(a)]g(a)J_a^\alpha 1 \geq 1$, pour $1 \leq \theta < \lambda$, $\alpha > 0$ et $x \in]a, b]$.*

2. *$\varphi[f(b)]g(b)J_a^\alpha 1 \leq 1$, pour $1 \leq \lambda < \theta$, $\alpha > 0$ et $x \in]a, b]$.*

Preuve :

Partie 1 : pour $1 \leq \theta < \lambda$, il existe $s > 0$ telle que $\lambda = \theta + s$.

On a
$$\frac{(J_a^\alpha[\varphi(f)g](x))^\theta}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^\lambda}=\left(\frac{J_a^\alpha[\varphi(f)g](x)}{J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)}\right)^\theta\times\frac{1}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^s}.$$
On utilise théorème **4.5.1**, on obtient
$$\frac{(J_a^\alpha[\varphi(f)g](x))^\theta}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^\lambda}\leq\frac{J_a^\alpha f(x)}{J_a^\alpha h(x)}\times\frac{1}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^s}.$$
donc, il suffit de montrer que $\frac{1}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^s}\leq 1.$
On a
$$J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)=J_a^\alpha[\frac{\varphi(h)}{h}hg](x).$$
Par conséquent
$$J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)\geq J_a^\alpha[\frac{\varphi(h)}{h}fg](x).$$
D'autre part, φ est une fonction convexe, donc par la proposition **4.2.1** , on a x,y $(y-x)\varphi'(x)\leq\varphi(y)-\varphi(x)$. Pour $y=0$, on obtient $x\varphi'(x)-\varphi(x)\geq 0$, donc $\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)'=\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}\geq 0$, et par conséquent $\frac{\varphi(x)}{x}$ est fonction croissante et le fait que $f(t)\leq h(t)$, alors on a $\frac{\varphi[f(t)]}{f(t)}\leq\frac{\varphi[h(t)]}{h(t)}$.
Par conséquent
$$J_a^\alpha[\frac{\varphi(h)}{h}fg](x)\geq J_a^\alpha[\frac{\varphi(f)}{f}fg](x).$$
D'autre part, on a f,g et $\frac{\varphi(t)}{t}$ sont des fonctions croissantes, donc $[\frac{\varphi(f)}{f}fg](x)$ est croissante, ce qui implique que $\forall x\in[a,b]$, $[\frac{\varphi(f)}{f}fg](x)\geq\varphi[f(a)]g(a)$.
Donc
$$J_a^\alpha[\frac{\varphi(f)}{f}fg](x)\geq\varphi[f(a)]g(a)J_a^\alpha 1\geq 1.$$
D'où
$$J_a^\alpha[\frac{\varphi(h)}{h}fg](x)\geq 1.$$
Donc
$$J_a^\alpha[\varphi(h)g](x)\geq 1.$$
Et par conséquent
$$\frac{1}{(J_a^\alpha[\varphi(h)g](x))^s}\leq 1.$$

Partie 2 : Pour $1 \leq \lambda < \theta$, il existe $s > 0$ telle que $\theta = \lambda + s$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{\left(J_a^{\alpha}[\varphi(f)g](x)\right)^{\theta}}{\left(J_a^{\alpha}[\varphi(h)g](x)\right)^{\lambda}} &= \left(\frac{J_a^{\alpha}[\varphi(f)g](x)}{J_a^{\alpha}[\varphi(h)g](x)}\right)^{\lambda} \times \left(J_a^{\beta}[\varphi(f)g](x)\right)^{s} \\ &\leq \frac{J_a^{\alpha}f(x)}{J_a^{\alpha}h(x)} \times \left(J_a^{\beta}[\varphi(f)g](x)\right)^{s}.\end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer que $\left(J_a^{\beta}[\varphi(f)g](x)\right)^{s} \leq 1$.

Puisque $\varphi(f)g$ est une fonction croissante sur $[a,b]$, alors $[\varphi(f)g](x) \leq \varphi(f(b))g(b)$, $\forall x \in [a,b]$, donc

$$\begin{aligned}\left(J_a^{\alpha}[\varphi(f)g](x)\right)^{s} &\leq \left(\varphi(f(b))g(b)J_a^{\alpha}1\right)^{s}, \ \forall x \in [a,b] \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Remarque 4.5.1 *Pour $1 \leq \theta = \lambda$ dans le théorème **4.5.2**, on obtient le théorème **4.5.1**.*

Théorème 4.5.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+}$ une fonction continue, telle que :*

$$\int_x^b (u-a)^{\min(1,\beta)}du \leq \int_x^b f^{\min(1,\beta)}(u)du, \ x \in [a,b] \tag{4.5.5}$$

et

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(b-a)^{n+1}\int_a^b f^{\beta}(t)dt \leq 1; \ n = [\alpha]. \tag{4.5.6}$$

Alors, pour tout $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \geq 1$, $b - a \geq 1$, on a

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(u)du \geq \left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)^{\lambda} \tag{4.5.7}$$

Preuve :

Pour $\lambda \geq 1$, on a

$$\left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)^{\lambda} = \left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)\left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)^{\lambda-1}.$$

Par le **théorème 4.3.2 ,** on a $\int\limits_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du \leq \int\limits_a^b f^{\alpha+\beta}(u)du$, donc

$$\left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)^{\lambda} \leq \left(\int_a^b f^{\alpha+\beta}(u)du\right)\left(\int_a^b (u-a)^{\alpha}f^{\beta}(u)du\right)^{\lambda-1}$$

Donc pour montrer (4.5.7), il suffit de montrer que

$$\left(\int_a^b (u-a)^\alpha f^\beta(u)du\right)^{\lambda-1} \leq 1, \quad \forall \lambda \geq 1$$

qui est équivalent à démontrer que

$$\int_a^b (u-a)^\alpha f^\beta(u)du \leq 1.$$

Par une integration par partie, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b (u-a)^\alpha f^\beta(u)du &= -(u-a)^\alpha \int_u^b f^\beta(t)du|_{u=a}^{u=b} \\ &\quad +\alpha \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} \int_u^b f^\beta(t)dtdu \\ &= \alpha \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} \int_u^b f^\beta(t)dtdu.\end{aligned}$$

Et une autre integration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b (u-a)^\alpha f^\beta(u)du &= \alpha \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} \int_u^b f^\beta(t)dtdu \\ &= \alpha(\alpha-1) \int_a^b (u-a)^{\alpha-2} \int_u^b \int_{u_1}^b f^\beta(t)dtdu_1du \\ &\quad ... \\ &= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \int_a^b (u-a)^{\alpha-n} \\ &\quad \times \int_u^b \int_{u_1}^b ... \int_{u_{n-1}}^b f^\beta(t)dtdu_{n-1}...du_1du.\end{aligned}$$

D'autre part, on a $(u-a)^{\alpha-n} \leq (b-a)$, donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (u-a)^\alpha f^\beta(u)du &\leq \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \int_a^b (b-a) \\ &\times \int_u^b \int_{u_1}^b ... \int_{u_{n-1}}^b f^\beta(t)dtdu_{n-1}...du_1du.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b (u-a)^{\alpha} f^{\beta}(u)du \leq \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\int_a^b\int_a^b\int_a^b ...\int_a^b f^{\beta}(t)dtdu_{n-1}...du_1du_0du.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (u-a)^{\alpha} f^{\beta}(u)du &\leq \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\int_a^b f^{\beta}(t)dt \\ &\quad \times \int_a^b\int_a^b ...\int_a^b du_{n-1}...du_1du_0du.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_a^b (u-a)^{\alpha} f^{\beta}(u)du &\leq \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(b-a)^{n+1}\int_a^b f^{\beta}(t)dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(b-a)^{n+1}\int_a^b f^{\beta}(t)dt \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Théorème 4.5.4 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant*

$$\int_x^b (u-a)^{\min\{1,\beta\}}du \leq \int_x^b f^{\min\{1,\beta\}}(u)du, \quad \forall x \in [a,b].$$

et

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(b-a)^{n+1}J_a^{\delta}f^{\beta}(b) \leq 1, \text{ telle que } n=[\alpha].$$

Alors, pour toute $\alpha,\beta>0$, $\lambda \geq 1$, $\delta \geq 1$ et $b-a\geq 1$, on a

$$J_a^{\delta}f^{\alpha+\beta}(b) \geq \left(J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}\right)^{\lambda}$$

Preuve :

Pour $\lambda \geq 1$, on a

$$\left(J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}\right)^{\lambda} = \left(J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}\right)\left(J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}\right)^{\lambda-1}.$$

On comence par montrer que

$$J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} \leq J_a^{\delta}f^{\alpha+\beta}(b).$$

On a donc besoin de démontrer que

$$J_a^\delta (x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b} \geq \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}.$$

Pour $\beta \in]0,1]$, et par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t) \quad | \quad {}_{t=b} &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b (b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha f^\beta(x)dx. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \Big[(b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha \int_x^b f^\beta(u)du \; |_{x=a}^{x=b} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left(\int_x^b f^\beta(u)du \right) dx \Big]. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{d\left[(b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha\right]}{dx} \\ &= (\delta-1)(b-x)^{\delta-2}(x-a)^\alpha + \alpha(b-x)^{\delta-1}(x-a)^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Donc

$$J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t) \; |_{t=b} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left(\int_x^b f^\beta(u)du \right) dx.$$

Si on utilise l'hypothèse de théorème, alors on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left(\int_x^b f^\beta(u)du \right) dx \geq \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left(\int_x^b (u-a)^\beta du \right) dx.$$

Ce qui implique que

$$J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t) \; |_{t=b} \geq \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left(\int_x^b (u-a)^\beta du \right) dx$$

Donc

$$\begin{aligned} J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t) \quad | \quad {}_{t=b} &\geq \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x) \left[(b-a)^{\beta+1} - (x-a)^{\beta+1}\right] dx. \\ &= \frac{(b-a)^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x)dx - \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\delta)} \int_a^b g(x)(x-a)^{\beta+1}dx \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

D'autre part, et par integration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)(x-a)^{\beta+1}dx &= (b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha(x-a)^{\beta+1}|_{x=a}^{x=b} \\ &-(\beta+1)\int_a^b (b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha(x-a)^\beta dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\delta)}\int_a^b g(x)(x-a)^{\beta+1}dx &= \frac{-1}{\Gamma(\delta)}\int_a^b (b-x)^{\delta-1}(x-a)^{\alpha+\beta}dx \\ &= -J_a^\delta (x-a)^{\alpha+\beta}|_{x=b}. \\ &= \frac{-\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité (4.5.9) devient

$$J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t)\mid_{t=b} \geq \frac{(b-a)^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\delta)}\int_a^b g(x)dx + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.$$

D'où

$$\begin{aligned}J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t) \quad \mid \quad {}_{t=b} \geq &\frac{(b-a)^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\delta)}\int_a^b \frac{d\left[(b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha\right]}{dx}dx + \\ &+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta} \\ = &\frac{(b-a)^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\delta)}(b-x)^{\delta-1}(x-a)^\alpha|_{x=a}^{x=b} + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.\end{aligned}$$

Et donc

$$J_a^\delta (t-a)^\alpha f^\beta(t)\mid_{t=b} \geq \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}, \tag{4.5.10}$$

pour $\beta > 1$,

Si on prend $\beta = 1$ en (4.5.10) , alors on trouve

$$J_a^\delta (t-a)^\alpha f(t)|_{t=b} \geq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\delta+2)}(b-a)^{\alpha+\delta+1} \tag{4.5.11}$$

Et par l'inégalité [23], on a

$$ps + qr \geq s^p r^q, \forall p,q,s,r > 0, \tag{4.5.12}$$

tel que $p+q=1$.

Si on prend $p = \frac{1}{\beta}$, $q = \frac{\beta-1}{\beta}$, $s = f^\beta(x)$ et $r = (x-a)^\beta$,on obtient

$$\frac{1}{\beta}f^\beta(x) + \frac{\beta-1}{\beta}(x-a)^\beta \geq f(x)(x-a)^{\beta-1}.$$

Et par conséquent

$$f^{\beta}(x)+(\beta-1)(x-a)^{\beta}\geq \beta f(x)(x-a)^{\beta-1}. \tag{4.5.13}$$

On multiplie les deux membres de (4.5.13) par $\frac{1}{\Gamma(\delta)}(b-x)^{\delta-1}(x-a)^{\alpha}$ puis on integre par raport à x sur $[a,b]$, on obtient

$$J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha}f^{\beta}(t)|_{t=b}+(\beta-1)J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha+\beta}|_{t=b}\geq \beta J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha+\beta-1}f(t)|_{t=b}.$$

On utilise l'inégalité (4.5.11), alors on obtient

$$J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha}f^{\beta}(t)|_{t=b}+(\beta-1)J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha+\beta}|_{t=b}\geq \beta\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.$$

Donc

$$J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha}f^{\beta}(t)|_{t=b}+(\beta-1)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}\geq \beta\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.$$

Par conséquent

$$J_a^{\delta}(t-a)^{\alpha}f^{\beta}(t)|_{t=b}\geq \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}.$$

Et maintenant on montre que $J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}\leq J_a^{\delta}f^{\alpha+\beta}(b)$.

Par (4.5.12), on a

$$ps+qr\geq s^{p}r^{q},\ \forall p,q,s,r>0,\ \text{avec } p+q=1.$$

Si on prend $p=\frac{\beta}{\alpha+\beta}, q=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $s=f^{\alpha+\beta}(x)$ et $r=(x-a)^{\alpha+\beta}$, on obtient

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}f^{\alpha+\beta}(x)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(x-a)^{\alpha+\beta}\geq (x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x). \tag{4.5.14}$$

On multiplie les deux membres de (4.5.14) par $\frac{1}{\Gamma(\delta)}(b-x)^{\delta-1}$ puis on intègre par raport à x sur $[a,b]$, on obtient

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}J_a^{\delta}f^{\alpha+\beta}(x)|_{x=b}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha+\beta}|_{x=b}\geq J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}.$$

Donc

$$\beta J_a^{\alpha}f^{\alpha+\beta}(x)|_{x=b}+\alpha J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha+\beta}|_{x=b}\geq \alpha J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}+\beta J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b}.$$

D'autre part on a $J_a^\delta(t-a)^\alpha f^\beta(t)|_{t=b} \geq \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}$, donc

$$\begin{aligned}\beta J_a^\alpha f^{\alpha+\beta}(x)|_{x=b} + \alpha J_a^\delta(x-a)^{\alpha+\beta}|_{x=b} &\geq \alpha \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}(b-a)^{\alpha+\beta+\delta} \\ &\quad + \beta J_a^\delta(x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\beta J_a^\delta f^{\alpha+\beta}(x)|_{x=b} + \alpha\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} &\geq \alpha\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)(b-a)^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} \\ &\quad + \beta J_a^\delta(t-a)^\alpha f^\beta(t)|_{t=b}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$J_a^\delta f^{\alpha+\beta}(b) \geq J_a^\delta(t-a)^\alpha f^\beta(t)|_{t=b}.$$

Donc maintenant il suffit de montrer que

$$\left(J_a^\delta(x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b}\right)^{\lambda-1} \leq 1,$$

c'est à dire

$$J_a^\delta(x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b} \leq 1.$$

On a :

$$\begin{aligned}J^\delta(x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b} &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_a^b (b-u)^{\delta-1}(u-a)^\alpha f^\beta(u)du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[-(u-a)^\alpha \int_u^b (b-t)^{\delta-1} f^\beta(t)du \\ &\quad + \alpha\int_a^b (u-a)^{\alpha-1}\int_u^b (b-t)^{\delta-1} f^\beta(t)dtdu\Big].\end{aligned}$$

D'où

$$J^\delta(x-a)^\alpha f^\beta(x)|_{x=b} = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\left[\alpha\int_a^b (u-a)^{\alpha-1}\int_u^b (b-t)^{\delta-1} f^\beta(t)dtdu\right].$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\left[\alpha(\alpha-1)\int_a^b (u-a)^{\alpha-2}\int_u^b\int_{u_1}^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dtdu_1du\right] \\
&\quad ... \\
&= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\int_a^b (u-a)^{\alpha-n} \\
\times &\quad \int_u^b\int_{u_1}^b ... \int_{u_{n-1}}^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dtdu_{n-1}...du_1du\Big].
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $(u-a)^{\alpha-n} \leq (b-a)$, donc

$$\begin{aligned}
J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &\leq \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\int_a^b (b-a) \\
\times &\quad \int_u^b\int_{u_1}^b ... \int_{u_{n-1}}^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dtdu_{n-1}...du_1du\Big].
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &\leq \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\times \\
&\quad \int_a^b\int_a^b\int_u^b\int_{u_1}^b ... \int_{u_{n-1}}^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dtdu_{n-1}...du_1du_0du\Big]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &\leq \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \\
\times &\quad \int_a^b\int_a^b\int_a^b ... \int_a^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dtdu_{n-1}...du_1du_0du\Big].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &\leq \frac{1}{\Gamma(\delta)}\Big[\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\int_a^b (b-t)^{\delta-1}f^{\beta}(t)dt \\
\times &\quad \int_a^b\int_a^b ... \int_a^b du_{n-1}...du_1du_0du\Big].
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} \leq \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(b-a)^{n+1}J_a^{\delta}f^{\beta}(b).$$

Finalement

$$\begin{aligned} J^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)|_{x=b} &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(b-a)^{n+1}J_a^{\delta}f^{\beta}(b) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Proposition 4.5.1 *Soient $f(x), h(x) > 0$ deux fonction continue sur $[a, b]$, avec $f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in [a, b]$, telle que f est croissante et $\frac{f}{h}$ est une decroissante. Alors, on a*

$$\frac{J_a^{\delta}f(x)}{J_a^{\delta}h(x)} \geq \left(\frac{J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}f^{\beta}(x)}{J_a^{\delta}(x-a)^{\alpha}h^{\beta}(x)}\right)^{\lambda},$$

telle que $\delta, \alpha > 0, \beta,\ \lambda \geq 1$ et $0 \leq a < x \leq b$.

Preuve :

Si on prend $\varphi(x) = x^{\beta}$ et $g(x) = (x-a)^{\alpha}$ dans le théorème **4.5.1**, alors on trouve la proposition **4.5.1**.

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a établit des nouveaux résultats sur les intégrales fractionnaires en utilisant l'approche de Riemann-Liouville. On a généralisé des résultats classiques de type Chebychev et et type Steffensen de [2] .On a aussi établit des résultats intégraux avec des fonctions convexes inspirés de [1].

Nos résultats demontrés sont soumis pour publication dans deux journaux internationaux de Mathématiques.

Bibliographie

[1] Artion Kashuri, Rozana Liko, Some new results of two open problems related to integral inequalities, Journal of Mathematical Inequalities. JMI, 10(3), 2016, 877–883.

[2] K.M. Awan, J. Pecaric, A. Rehman : Steffensen's generalization of Chebyshev inequality. J. Math. Inequal., 9(1), (2015), 155-163.

[3] S. Belarbi, Z. Dahmani : On some new fractional intégral inequalities. JIPAM, 10(3), (2009), 1-9.

[4] P. Cerone, S.S. Dragomir : Some Ostrowski-type bounds for the Chebyshev functional and applications, J. Math. Inequal., 8(1), (2014), 159-170.

[5] P.L. Chebyshev : Sur les expressions approximatives des integrales definis par les autres prises entre les memes limite. Proc. Math. Soc. Charkov, 2, (1882), 93-98.

[6] Z. Dahmani : New inequalities in fractional integrals. International Journal of Nonlinear Sciences, 9(4), (2010), 493-497.

[7] Z. Dahmani : About some integral inequalities using Riemann-Liouville integrals. General Mathematics, 20(4), (2012), 63-69.

[8] Z. Dahmani, O. Mechouar, S. Brahami : Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving Riemann-Liouville operator. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3(4), (2011), 38-44.

[9] Z. Dahmani, A note on some new fractional results involving convex functions, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXXI, 2 (2012), pp. 241-246.

[10] Z. Dahmani, N. Bedjaoui, Some generalized integral inequalities, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, Vol. , Issue. , 2011, pp. 1-9.

[11] Z. Dahmani, L. Tabharit : On weighted Gruss type inequalities via fractional integrals, JARPM, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2(4), (2010), 31-38.

[12] S.S. Dragomir : A generalization of Gruss inequality in inner product spaces and applications. J. Math. Annal. Appl., 237(1), (1999), 74-82.

[13] R. Gorenflo, F. Mainardi : Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order. Springer Verlag, Wien, (1997), 223-276.

[14] A. McD Mercer : An improvement of Gruss inequality. JIPAM, 10 (4), (2005), Art.93.

[15] A. McD Mercer, P. Mercer : New proofs of the Gruss inequality. Aust. J. Math. Anal. Appl., 1(2), (2004), Art.12.

[16] A.M. Ostrowski : On an integral inequality. Aequationes Math., 4 (1970), 358-373.

[17] J. E. PEČARIĆ, On the Ostrowski Generalisation of Čebyšev Inequality, J. Math. Anal. Appl. 102(1984), 479-487.

[18] M.Z. Sarikaya, H. Yaldiz : New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Gruss type. Lobachevskii Journal of Mathematics, 34(4), (2013), 326–331.

[19] M.Z. Sarikaya, N. Aktan, H. Yildirim : On weighted Chebyshev-Gruss like inequalities on time scales. J. Math. Inequal., 2(2), (2008), 185-195.

[20] M.Z. Sarikaya : On the Ostrowski type integral inequality, Acta Math. Univ. Comenianaen, LXXIX(1), (2010), 129-134.

[21] M.Z. Sarikatya, A. Karaca : On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications, International Journal of Statistics and Mathematics, 1(3), (2014), 33-43.

[22] J. F. STEFFENSEN, En ulighed mellem middelve edier, Mat. Tidsskrift B,49-53.

[23] Wen-Jun Liu, Guo-sheng Cheng and Chun-Cheng Li, Further Development of an Open Problem, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(1), 2008, art. 14.

[24] Wen-Jun Liu, Quoc-Anh Ngo and Vu Nhat Huy, Several interesting integral inequalities, Journal of Mathematical Inequalities. JMI, 3(2), 2009, 201–212.