REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

Présenté par :

ROUDJANE CHAREF

Soutenu le /05/2017

Les membres de jury

Mme.BOUABDELLI Rabab	Président	M.C.B	**U. MOSTAGANEM.**
Mme.Khadidja Bechaoui	Examinatrice	M.A.A	**U. MOSTAGANEM.**
Mr.Mohand Ould Ali	Encadreur	M.C.A	**U. MOSTAGANEM.**
Mr.Djillali Bouagada	Coeucadreur	Professeur	**U. MOSTAGANEM**

Année Universitaire 2016- 2017

Table des matières

Remerciments

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents et ma femme qui m'ont soutenue, encouragé et motivé tout au long de mes études.

Je remercie Monsieur Mohand Ould Ali qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidé avec ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de ce travail.

Il est important pour moi de remercier Monsieur Djillali Bouagada qui m'a guidé tout au long de ce travail.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury pour m'avoir donné l'occasion de discuter ce travail. Je remercie vivement Mademoiselle Rabab BOUABDELLI pour avoir accepter de présider ce mémoire et Madame Khadidja BECHAOUI pour avoir accepter d'examiner ce modeste travail.

INTRODUCTION

Beaucoup d'applications importantes de la fermeture de l'image dans l'étude spectrale d'opérateurs différentiels et aussi dans le contexte de la théorie de perturbation, cette importance a été confirmée par plusieurs recherches, nous citerons à titre d'exemple les réferences suivantes [1] *et* [4] *autrement dit les travaux de*

_ ***(Q.Huang ;M.S.Moslehian*[1]*)*** *qui ont donné la relation entre la fermeture de l'image d'un opérateur, la propriété Hyers-Ulam stabilité et l'inverse de Moore-Penrose. ainsi que*

_ ***(M.THAMBAN NAIR*[4]*)*** *qui ont donné une caractérisation spectrale de l'opérateur de image fermé.*

Dans ce travail nous rassemblons plusieurs resultats équivalents sur la fermeture de l'image d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert.

On rappelle que l'étude de la fermeture de l'image d'un opérateur borné A est en ralation directe avec la résolution de l'équation $Ax = y$.

Notre manuscrit se compose de quatres chapitres :

- Dans le premier on définit la relation entre la fermeture de l'image d'un opérateur, la propriété Hyers-Ulam stabilité et l'inverse géneralisé.

- Dans le deuxième chapitre on donne les différentes notions dont on a besoin : espace de Hilbert ; opérateur borné ; opérateur fermé.

- L'avant dernier chapitre est consacré à l'étude des caractérisations de la fermeture de l'image d'un opérateur borné (on donne le résultat principal de notre travail pour $R(A)$ fermé, avec A un opérateur borné).

- En fin, dans le dernier chapitre nous étudierons le problème de stabilisation par la décomposition spectrale. Nous terminons notre étude par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

1.1 Produit scalaire, norme, espace de Hilbert :

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur E noté $\langle .,. \rangle$ est une forme sesquilineaire, hermetiene ,définie positive :*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \rightarrow & \langle x,y \rangle \end{array}$$

- *Sesquilinéaire :*

$$\forall u,v,w \in E : \begin{cases} \langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \\ \langle u+v, w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle \end{cases}$$

et

$$\forall u,v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \begin{cases} \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle \\ \langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u,v \rangle \end{cases}$$

- *Hermetienne :*

$$\forall u,v \in E , \langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$$

- *Définie Positive :*

$$\forall u,v \in E : \langle u,u \rangle \geq 0 \ et \ \langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Définition 1.1.2 *Une norme sur un* $\Bbbk$*-espace vectoriel* E *est une application* $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant :*

$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in E$

$\|\lambda x\| \quad = \quad |\lambda| \ \|x\| \qquad \forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in E$

$\|\lambda x\| \quad \leq \quad \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$

un $\Bbbk$*-espace vectroriel muni d'une norme* $\| \ \|$ *est appelé un* $\Bbbk$*-espace vectoriel normé ou simplement un espace normé.*

Définition 1.1.3 *un espace de Hilbert est un espace véctoriel* H *muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associé :*

$$\forall x \in H \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1.2 Opérateurs bornés

Définition 1.2.1 *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* $A : H \to H$ *un opérateur linéaire . On dit que* A *est borné s'il existe un norme réel positif* K *tell que :*

$$\|Ax\| \leq K\|x\| \text{ ; } \forall x \in H$$

On note par $B(H)$ *l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur* H *.*

$\mathcal{L}(E, F)$: *l'ensemble des opérateurs linéaires de* E *dans* F

$D(A)$: *le domaine de* A *est l'ensemble des vecteurs* $x \in E$ *pour lesquels il existe une image* $y \in F$:

$$D(A) = \{x, \ Ax \ \ \textit{existe}\}$$

$N(A)$: *le noyau de* A *est le sous espace de* E *défini par :*

$$N(A) = \{x \in D(A) \text{ ;} A(x) = 0\}$$

$R(A)$: *l'image de* A *est le sous espace de* F *défini par :*

$$R(A) = \{y \in F \text{ ;} y = A(x) \ \ , x \in D(A)\}$$

Définition 1.2.2 *: (**Somme de deux opérateurs**)*

Soient S et A deux opérateurs de X dans Y . On définit l'opérateur somme $A+S$ par :

$$(A+S)(x) = A(x) + S(x)$$

de domaine $D(A+S) = D(A) \cap D(S)$ pour tout $x \in D(A+S)$.

Définition 1.2.3 *: (**Opérateur produit**)*

Soient E,F,J et G des espaces vectoriels, et soient $T : E \to F$ et $S : F \to J$ deux opérateurs linéaires de domaine $D(T) \subseteq E$ et $D(S) \subseteq F$ respectivment, On définit l'opérateur composition ST (dit opérateur produit) de T par S

$$(ST)(x) = S(T(x))$$

de domaine,

$$D(ST) = \{x \in D(T) \; ; T(x) \in D(S)\}$$

- *Si R est un opérateur de J dans G, alors $(RS)T = R(ST)$*
- *Si R est un opérateur de F dans J, alors $(R+S)T = RT + ST$*

Définition 1.2.4 *: (**Opérateur inverse**)*

Soient E et F deux espaces vectoriels.normés, un opérateur $T : E \to F$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $T : F \to E$ de domaine $D(S) = F$ tel que

$$TS = I_F \quad \text{et} \quad ST = I_{D(T)}$$

Définition 1.2.5 *:(**Densité**)*

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur $\overline{A}$:$E \to F$ est dit densement defini si son domaine $D\left(\overline{A}\right)$ est dense dans E ie

$$\overline{D(A)} = E$$

1.2.1 Adjoint d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert

Définition 1.2.6 *: Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$ l'unique application linéaire telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$ on ait $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$ est apellée adjoint de A*

Proposition 1.2.1 *: Soinet E et F deux espaces de Hilbert, l'aplication $A \to A^*$est antilinéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, de plus $\forall A \in \mathcal{L}(E,F)$:*

1. $(A^*)^* = A$
2. $\|A\| = \|A^*\|$
3. $\|A^*A\| = \|A\|^2$
4. $(AS)^* = S^*A^*$

Preuve :

Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, Pour tout $x \in E$, $y \in F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (A_1+\lambda A_2)^*(y)\rangle &= \langle (A_1+\lambda A_2)^*(x), y\rangle \\
&= \langle A_1(x), y\rangle + \lambda\langle A_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, (A_1^*)(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda} A_2^*(y)\rangle \\
&= \langle x, \left(A_1^* + \overline{\lambda} A_2^*\right)\rangle
\end{aligned}$$

ainsi $A \to A^*$ est antilinéaire.

1) *Montrons que $(A^*)^* = A$, pour cela on montre que pour tout $x \in E$ et $y \in F$: $\langle A(x), y\rangle = \langle (A^*)^*(x), y\rangle$ on a :*

$$\begin{aligned}
\langle A(x), y\rangle &= \langle x, A^*(y)\rangle \\
&= \overline{\langle A^*(y), x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (A^*)^*(x)\rangle} \\
&= \langle (A^*)^*(x), y\rangle
\end{aligned}$$

d'où $(A^*)^* = A$.

1. *Montrons que* $\|A\| = \|A^*\|$:

   On montre $\|A^*\| \leq \|A\|$

   On utilse l'inégalité de Cauchy Schawrtsz

   $\|A^*(y)\|^2 = \langle A^*(y), A^*(y)\rangle \leq \|AA^*(y)\| \|y\| \leq \|A\| \|A^*(y)\| \|y\|$ *c'est-à-dire on a :*

   $$\|A^*(y)\|^2 \leq \|A\| \|A^*(y)\| \|y\| \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

   Si $\|A^*(y)\| \geq 0$ *alors on peut déviser l'inégalité* (1.2.1) *sur* $\|A^*(y)\|$ et *on obtient*

   $$\|A^*(y)\| \leq \|A\| \|y\|$$

   Si $\|A^*(y)\| = 0$ *l'inégalité* (1.2.1) *est vérifiée.*

   donc pour tout $y \in F$ *on a Si* $\|A^*(y)\| \leq \|A\| \|y\|$ *d'où* $\|A^*\| \leq \|A\|$

2. *Montrons que* $\|A^*A\| = \|A\|^2$

   comme $\|A\| = \|A^*\|$, *on a :*

   $$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 \qquad (1.2.2)$$

   d'autre part :

   $$\begin{aligned} \|A(x)\|^2 &= \langle A(x), A(x)\rangle \\ &= \langle A^*A(x), Ax\rangle \qquad \textit{Par la définition de } A^* \\ &\leq \|A^*A(x)\| \|x\| \qquad \textit{Par l'inégalité de cauchy schwartz} \\ &\leq \|A^*A\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

   Par conséquent

   $$\|A\|^2 \geq \|A^*A\| \qquad (1.2.3)$$

   de 1.2.2 et 1.2.3 il s'ensuit $\|A\|^2 = \|A^*A\|$

3. *Pour vérifier que* $(AS)^* = S^*A^*$, *il suffit de montrer que pour tout* $x \in E$ *et* $y \in F$ *on a :*

   $$\langle (AS)^*(x), y\rangle = \langle S^*A^*(x), y\rangle$$

Par définition de l'adjoint, on a :

$$\begin{aligned}\langle (AS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (AS)(y)\rangle \\ &= \langle A^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*A^*(x), y\rangle\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout vecteur x, y on a l'égalité $(AS)^* = S^*A^*$.

Définition 1.2.7 *: Soit H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$ alors A est auto-adjoint si $A = A^*$*

Exemples :

1 *Soit H un espace de Hilbert et I est l'opérateur identité I si $x, y \in H$ alors :$\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Iy\rangle$ par conséquant $I = I^*$, d'où I est un opérateur auto-adjoint.*

2 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$ alors les opérateurs A^*A est AA^* sont auto-adjoint, On a d'après la proposition précédente :*
$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ d'où A^*A est auto-adjoint et aussi l'opérateur A^*A est auto-adjoint.

Lemme 1.2.1 *Soient H_1 H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in B(H_1, H_2)$:*

(a) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

(b) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$

(c) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$

Preuve *:*

1. *D'abord on montre que $N(A) \subseteq R(A^*)^{\perp}$ pour cela. soit $x \in N(A)$ et soit $z \in R(A^*)$, comme $z \in R(A^*)$ il existe $y \in H_2$ telle que $A^*(y) = z$ donc $\langle x, z\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$ ainsi $x \in R(A^*)^{\perp}$ d'où $N(A) \subseteq R(A^*)^{\perp}$*

ensuite nous montrons que $R(A^*)^{\perp} \subseteq N(A)$ .dans ce cas soit $v \in R(A^*)^{\perp}$ comme $A^*Av \in R(A^*)$ on a :

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = 0$$

donc $Av = 0$ d'où $v \in N(A)$ .Par conséquent $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

2 *d'après 1) et la proposition précedente on aura,*

$$N(A^*) = (R((A^*)^*))^{\perp} = R(A)^{\perp}$$

3 *On a :*

$$N(A^*) = R(A)^{\perp} \Leftrightarrow N(A^*)^{\perp} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{R(A)}$$

Définition 1.2.8 *Si $A \in C(H)$, $\sigma(A) = \mathbb{C} \diagdown \rho(A)$ est appelé spectre de l'opérateur A où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant défini par :*

$$\rho(A) = \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I) \text{ défini de } D(A) \text{ dans } H \text{ est inversible} \\ \qquad \text{et } R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in B(H) \end{cases}$$

Définition 1.2.9 *Soient H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$, on dit que A est positif si A auto-adjoint et,*

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$$

Remarque 1.2.1 *Si H un espace de Hilbert complexe et $A \in B(H)$ est auto-adjoint si A est positif alors $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty[$*

Exemples :

Soient H un espace de Hilbert complexe , R et $S \in B(H)$ sont positives , et $A \in B(H)$ et soit α un nombre réel positive .

1. *I est un opérateur positif :*

   On a I est auto-adjoint .Si $x \in H$ alors $\langle Ix, x \rangle = \langle x, x \rangle \geq 0$ d'où I est positif.

2. *A^*A est un opérateur positif*

   On a A^*A est auto-adjoint . Si $x \in H$ alors $\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$ d'où A^*A est positif.

3. *$R + S$ et αS sont positives :*

$R + S$ et αS sont auto-adjoint .Si $x \in H$ alors $\langle (R + S)x, x \rangle = \langle Rx, x \rangle + \langle Sx, x \rangle \geq 0$ et $\langle (\alpha S)x, x \rangle = \alpha \langle Sx, x \rangle \geq 0$ d'où $R + S$ et αS sont positives.

Définition 1.2.10 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in B(H)$,la racine carrée de A est un opérateur $B \in B(H)$ telle que $B^2 = A$*

Définition 1.2.11 *Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit densement définie si $\overline{D(A)} = H_1$*

1.3 Opérateur fermé et le théoréme du graph fermé

Définition 1.3.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. et soit $A : D(A) \subset E \to F$ une application. le graphe de A est le sous espace vectoriel de $E \times F$ noté $G(A)$ définie par :*

$$G(A) = \{(x, Ax)\,; x \in D(A)\}$$

L'opérateur A est fermé si et seulement si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Proposition 1.3.1 *Un opérateur A défini sur H et de domaine $D(A)$ est fermé si et seulement si l'assertion suivante a lieu :*

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\{x_n\} \subset D(A) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow x \in D(A) \;\; \text{et } y = Ax \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n = y \end{array}\right\}$$

On note par $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermé à domaine dense dans H

Théorème 1.3.1 *(**du graphe fermé**) Soient E et F deux espaces de Banach. et Soit $A : E \to F$ une application. alors A est continue si et seulement si le graphe $G(A)$ de A est fermé dans $E \times F$.*

Preuve : *On considère sur E la norme $\|.\|_2$ définie par :*

$$\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

appelée norme du graphe, Comme A est fermé alors $(E, \|x\|_2)$ est de Banach car : $(E, \|x\|_2)$ est complet c-à-d :

Soit $(x_n) \in E$ une suite de Cauchy. alors,

$$\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\|_2 \leq \epsilon$$

et on a :

$$\|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\|_E + \|Ax_n - Ax_m\|_F$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} \|x_n - x_m\|_E \leq \epsilon \\ \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \epsilon \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_n) \text{ est une suite de Cauchy dans } (E, \|.\|_F) \\ (Ax_m) \text{ est une suite de Cauchy dans } (F, \|.\|_F) \end{array}\right. \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists x \in E : x_n \to x \\ \exists y \in F : x_m \to y \end{array}\right. \end{aligned}$$

d'où (x_n) *converge pour* $\|.\|_2$

d'autre part , On déduit qui'il existe $c > 0$ *tel que :*

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq c\,\|x\|_E \Rightarrow \|x\|_E + \|Ax\|_F \leq c\,\|x\|_E \\ &\Rightarrow \|Ax\|_F \leq (c-1)\,\|x\|_E \end{aligned}$$

d'où A *est continu.*

Chapitre 2

Stabilité de Hyers-Ulam, et l'inverse généralisé

2.1 Stabilité de Hyers-Ulam

2.1.1 Définition de la propriété de stabilité de Hyers-Ulam

Définition 2.1.1 *: Soient X, Y deux espaces linéaires normés et soit A une application (qui n'est pas néccessairment linéaire) de X dans Y. On dit que A possède la stabilité de Hyers-Ulam s'il existe une constante $K > 0$ telle que :*

i) $\forall y \in R(A), \forall \epsilon > 0, \forall x \in D(A) \diagup \|Ax - y\| \leq \epsilon, \exists x_0 \in D(A)$ *tel que :*

$$Ax_0 = y \text{ et } \|x - x_0\| \leq K_\epsilon$$

Nous appelons $K > 0$ une constante de stabilité de Hyers-Ulam pour A
Si A possède la stabilité de Hyers-Ulam, alors pour tout ϵ, la solution approximative x de l'équation $Ax = y$ correspond une solution exacte x_0 dans un voisinage K_ϵ de x
Si A est linéaire alors la condition (i) est équivalente à (ii) et (iii) telle que,

ii) $\forall \epsilon > 0$ *et* $x \in D(A)$ *avec* $\|Ax\| \leq \epsilon$,$\exists x_0 \in D(A)$ *tel que* :$Ax_0 = 0$ et $\|x - x_0\| \leq K_\epsilon$

iii) $\forall x \in D(A), \exists x_0 \in N(A)$ *telle que :* $\|Ax - x_0\| \leq K \|Ax\|$

Remarque 2.1.1 *La stabilité de Hyers-Ulam exprime qu'au voisinage de toute solution approchée de l'équation $Ax = y$, on trouve une solution exacte*

Définition 2.1.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach la* **conorme** *de $A \in C(X,Y)$ est définie par :*

$$\gamma(A) = \inf \left\{ \|Ax\| : x \in D(A) \ \text{ avec } d(x, N(A)) = \inf_{z \in N(A)} d(x,z) = 1 \right.$$

Si X ,Y sont deux espaces de Hilbert, alors,

$$\gamma(A) = \inf \left\{ \|Ax\| : x \in D(A) \cap N(A)^{\perp} \ \text{ avec } \ \|x\| = 1 \right\}$$

2.2 L'inverse généralisé d'un opérateur

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaine de mathématiques. l'équation $Ax = y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, malheursement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur no inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif,ou d'inverse non borné. Dans ce cas on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriété que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé de A.

Définition 2.2.1 *Un opérateur $A \in C(X,Y)$ possède un inverse généralisé s'il existe un opérateur $S \in B(Y,X)$ telle que $R(S) \subseteq D(A)$ et :*

1. $ASAx = Ax \ \forall x \in D(A)$
2. $SASy = Sy \ \forall y \in Y$
3. SA *est continue.*

On note l'inverse généralisé de A par A^{+}

Lemme 2.2.1 *a) Soit $A \in C(X,Y)$. Supposons que $N(A)$ admet un complément topologique $N(A)^{c}$ sur X et $\overline{R(A)}$ admet un complément topologique $\overline{R(A)}^{c}$, ie*

$$X = N(A) \oplus N(A)^{c} \quad et \; Y = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(A)}^{c}$$

Soit P le projecteur de X sur $N(A)$ parallélement à $N(A)^{c}$ et Q est le projecteur de Y parallélement à $\overline{R(A)}^{c}$, alors il existe un unique $S \in C(X,Y)$ vérifie :

1. $ASA = A$ *sur* $D(A)$

2. $SAS = S$ *sur* $D(S)$

3. $SA = I - P$ *sur* $D(A)$

4. $AS = Q$ *sur* $D(S)$ *où* $D(S) = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(A)}^c$

b) Sous les hypothéses de la partie (a), S est borné si et seulement si $R(A)$ est fermé. dans ce cas, S est un inverse généralisé borné de A avec $D(S) = Y, N(A) = R(A)^c$ et $R(S) = D(A) \cap N(A)^c$.

2.3 L'inverse de Moore-Penrose

Définition 2.3.1 ***(L'inverse de Moore-Penrose)*** *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$. Si les décompositions topologique dans le lemme* 1.2.1 *sont orthogonaux ie $X = N(A) \oplus N(A)^c$ et $Y = \overline{R(A)} \oplus R(A)^{\perp}$, alors l'inverse généralisé correspondant est appelé habituellement l'inverse de Moore-Penrose de A.dans ce cas, les opérateurs P et Q dans le lemme* 2.2.1 *sont orthogonaux.*

on note l'inverse de Moore-penrose de A par A^+

Définition 2.3.2 *(l'inverse de Moore-Penrose) Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ on définit $A^+ : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ par :*

$$A^+(y) = 0; \forall y \in R(A)^{\perp} \, et A^+(y) = \left(A_{\diagup R(A^*)}\right)^{-1} y; \forall y \in R(A)$$

Proposition 2.3.1 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors*

1. $A^+Ax = 0.\forall x \in N(A)$ et $A^+Ax = x \ \forall x \in R(A^*) = R(A^+)$

2. $A^+Ay = 0.\forall y \in R(A)$ et $A^+Ax = x \ \forall x \in R(A^*) = R(A^+)$

3. $(A^+)^+ = A$

Preuve :

1. $Ax = 0; \ \forall x \in N(A) \Rightarrow A^+Ax = 0.\forall x \in N(A)$ *et* $Ax \in R(A); \forall x \in R(A^*) \Rightarrow A^+Ax = \left(A_{\diagup R(A^*)}\right)^{-1} Ax = x \ \forall x \in R(A^*)$.

2. $\forall y \in R(A)^{\perp} \Rightarrow A^{+}y = 0.\forall y \in R(A) \Rightarrow A^{+}Ay = 0 \ \forall y \in R(A)^{\perp}$. et $\forall y \in R(A) \Rightarrow$ $A^{+}y = \left(A_{\diagup R(A^{*})}\right)^{-1} \Rightarrow A^{+}Ay = A\left(A_{\diagup R(A^{*})}\right)^{-1} y = y$
3. $(A^{+})^{+} : \mathbb{C}^{n} \to \mathbb{C}^{m}$

$\forall x \in R(A^{*})\,;\, (A^{+})^{+} x = \left(\left(A_{\diagup R(A^{*})}\right)^{-1}\right)^{+} x = \left(\left(A_{\diagup R(A^{*})}\right)^{-1}\right)^{-1} x = Ax$ et $\forall x \in R(A^{*})^{\perp}\,;\, (A^{+})^{+} x = 0$, donc $(A^{+})^{+} = A$.

Lemme 2.3.1 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$ avec un inverse généralisé $A^{+} \in B(Y, X)$, alors A possède un inverse de Moore-Penrose A^{+} et $A^{+} = \left[I - P_{N(A)}^{\perp}\right] A^{+} P_{R(A)}^{\perp}$*

2.4 Relation entre l'inverse de Moore-Penrose et Hyers-Ulam stabilité

Théorème 2.4.1 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$,alors les assertions suivantes sont équivalents :*

1. *A possède la propriété de Hyers-Ulam stabilité.*
2. *A possède un inverse de Moore-Penrose borné A^{+}*
3. *A possède un inverse généralisé borné A^{+}*
4. *A à image fermé.*

de plus, si l'une des conditions au-dessus est vrai, alors

$$D\left(A^{+}\right) = Y \ , \ N\left(A^{+}\right) = R(A)\,, \ R\left(A^{+}\right) = D(A) \cap N\left(A^{+}\right)^{\perp}$$

et,

$$K_{A} = \left\|A^{+}\right\| = \gamma(A)^{-1}$$

Preuve :

Notons que $A\diagup_{N(A)^{\perp}} : D(A) \cap N(A)^{\perp} \to R(A)$ est inversible et A^{+} est définie par :

$$A = A^{+}y = \left(A\diagup_{N(A)^{\perp}}\right)^{-1} Qy \qquad \left(y \in R(A) + R(A)^{\perp}\right)$$

où Q est le projecteur orthogonle de Y sur $\overline{R(A)}$, alors A^{+} est un opérateur fermé densement défini avec,

$$D\left(A^{+}\right) = R(A) + R(A)^{\perp}$$

et

$$R\left(A^{+}\right)=D(A)\cap N(A)^{\perp}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) *Si A possède un inverse de Moore-penrose borné A^{+}, alors pour tout $x\in D(A)$ $(I-A^{+}A)x\in N(A)$ et*

$$\left\|x-\left(I-A^{+}A\right)x\right\|=\left\|A^{+}Ax\right\|\leq\left\|A^{+}\right\|\|Ax\|$$

Ceci veut dire que A possède la propriété de Hyers-Ulam stabilité et $K_A\leq\|Ax\|$ supposons que K est la constante de Hyers-Ulam stabilité ie, pour tout $x\in D(A)$, il existe $x_0\in N(A)$ telle que

$$\|x-x_0\|\leq K\|Ax\|$$

alors pour tout $y\in Y$, $A^{+}y\in D(A)\cap N(A)^{\perp}$ et il existe $x_1\in N(A)$ telle que,

$$\left\|A^{+}y-x_1\right\|\leq K\left\|A^{+}Ay\right\|$$

comme $A^{+}y\perp x_1$, nous obtenons

$$\left\|A^{+}y\right\|\leq\left\|A^{+}y-x_1\right\|\leq K\left\|AA^{+}y\right\|\leq K\|y\| \tag{2.4.1}$$

d'où $K\geq\|A^{+}\|$ et donc $K_A\geq\|A^{+}\|$ par conséquent $K_A=\|A^{+}\|$.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Si A possède la propriété de Hyres-Ulam stabilité alors de 2.4.1 on a que l'inverse de Moore-Penrose A^{+} est borné.*

(2) $\Rightarrow$ (3) *d'après le lemme 2.3.1 on a* (3) $\Rightarrow$ (2) *et comme l'inverse de Moore-Penrose est un inverse généralisé, d'où* (2) $\Rightarrow$ (3)

(4) $\Rightarrow$ (2) *Si $R(A)$ est fermé, alors $D(A^{+})=Y$, et d'après le lemme 2.4 .1 est borné .*

(2) $\Rightarrow$ (4) *Si A^{+} est borné, comme A^{+} est un opérateur fermé densement défni, nous obtenons $D(A^{+})=Y$*

ie $Y=R(A)+R(A)^{\perp}$ ceci implique que $R(A)$ est fermé.

dans la suite,montrons que $\gamma(A)=\|A^{+}\|^{-1}$.

en effet, pour tout $x\in D(A)$,nous avons $(I-A^{+}A)x\in N(A)$ et

$$d(x,N(A))\leq\left\|x-\left(I-A^{+}A\right)x\right\|=\left\|A^{+}Ax\right\|\leq\left\|A^{+}\right\|\|Ax\|$$

alors $\gamma(A) \geq \|A^{+}\|^{-1}$ *.comme* $\gamma(A) \leq \|A^{+}\|^{-1}$ *pour tout* $x \in D(A) \cap N(A)^{\perp}$ avec $\|x\| = 1$ *nous obtenons pour tout* $y \in Y$ tel *que,*

$$\left\|A^{+}y\right\| = 1, \gamma(A) \leq \left\|AA^{+}y\right\| = \|Qy\| \leq \|y\|$$

d'où pour tout $y \in Y$ *avec* $A^{+}y \neq 0$, $\gamma(A) \leq \frac{\|y\|}{\|A^{+}y\|}$, *donc*

$$\gamma(A) \leq \inf\left\{\frac{\|y\|}{\|A^{+}y\|} : y \in Y, A^{+}y \neq 0\right\} = \left(\sup\left\{\frac{\|A^{+}y\|}{\|y\|} : y \in Y\right\}\right)^{-1} = \left\|A^{+}\right\|^{-1}$$

Par conséquent $\gamma(A) = \|A^{+}\|^{-1}$.

Chapitre 3

Caractérisation des opérateurs bornés à image fermé

3.1 Fermeture de l'image d'un opérateur borné

Nous présontons dans ce chapitre une caractérisation qualitative de l'image d'un opérateur borné A sur un espace de Hilbert H. En fait, nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(A)$ soit fermé.
pour ce faire, nous nous basans sur les références suivantes **[3][5].**

Théorème 3.1.1 *Si $A \in B(H)$, alors les propriétes suivantes sont équivalentes*

1. $R(A)$ *est fermé.*
2. $R(A^*)$ *est fermé.*
3. $R(AA^*)$ *est fermé.*
4. $R(A^*A)$ *est fermé.*
5. $\gamma(A) > 0$
6. A^+ *est borné*
7. *La famille* $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ *est uniformément borné où* $R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}$
8. *0 n'est pas point d'accumulation de* $\sigma(A^*A)$

Preuve :*Pour la preuve, nous donnerons seulement l'équivalence entre la propriété 1 et les propriétés 7 et 8. Les équivalences entre 1), 2), 3), 4), 5) et 6) sont connues et se trouvent pratiquement dans toute la littérature spécialisée eu partuculier.*

Pour cela énonçons d'abord un lemme caractérisant la famille R_α.

Lemme 3.1.1 *la famille $\{R_\alpha y\}$ converge vers A^+y, pour tout $y \in D(A)$.*

Preuve : *Pour $y \in H$, on pose $\overset{\curlywedge}{x} = A^+y$ et $x_\alpha = R_\alpha y$*
d'où,

$$(A^*A + \alpha I)\overset{\curlywedge}{x} = A^*y + \alpha\overset{\curlywedge}{x} \text{ et } (A^*A + \alpha I)\, x_\alpha = A^*y$$

et par suite,

$$\overset{\curlywedge}{x} - x_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y + \alpha (A^*A + \alpha I)^{-1}\overset{\curlywedge}{x} - (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y = \alpha (A^*A + \alpha I)^{-1}\overset{\curlywedge}{x}$$

En posant,

$$A_\alpha = \alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} \ , \forall \alpha > 0$$

on trouve alors,

$$\forall x \in H, \|A_\alpha A^*Ax\| = \alpha \left\|(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*Ax\right\|$$

et en utilisant les propriétés spectrales de l'opérateur auto-ajoint A^*A, on a :

$$\left\|(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*A\right\| \leq \sup \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \diagup \lambda \in \sigma(A^*A) \right\} \leq 1$$

il s'ensuit dans ce cas que $\|A_\alpha x\| \leq \alpha \|x\|$ d'où $\|A_\alpha\| \to 0$ lorsque $\alpha \to 0$ et celà $\forall x \in R(A^*A)$ comme $R(A^*A)$ est dense dans $D(A)$ et $\overset{\curlywedge}{x} \in (N(A))^\perp$ avec $\|A_\alpha x\| \leq \alpha, \forall \alpha > 0$ alors,

$$\left\|\overset{\curlywedge}{x} - x_\alpha\right\| = \left\|A_\alpha \overset{\curlywedge}{x}\right\| \underset{\alpha \to 0}{\to} 0$$

donc,

$$R_\alpha y \to A^+y, \forall y \ \in D(A)$$

Preuve de l'équivalence entre (1) et (7)
Supposons maintenant que la famille $\{R_\alpha y\}_{\alpha > 0}$ est uniformément borné. Vu que $D(A)$ est dense dans H et que $R_\alpha y \to A^+y, \forall y \in D(A)$, alors $\{R_\alpha y\}\alpha > 0$ converge pour tout $y \in H$ lorsque $\alpha \to 0$ et l'opérateur limite R_0 défini dans H par $R_0 y = \lim\limits_{\alpha \to 0} R_\alpha y$; $\forall y \in H$ est un opérateur borné sur H. De la propriété (6), on déduit que $R(A)$ est fermé. d'où $A^+ = R_0|_{R(A))}$ est aussi borné comme restriction d'opérateur borné.

Inversement :

Supposons que $R(A)$ *est fermé dans* H*, comme* $R_\alpha y$ *converge* $\forall y \in D(A)$ *alors la famille* $\{R_\alpha y\}\ \alpha > 0$ *est uniformément borné (Principe de la borne uniforme).*
Pour l'équivalence avec la propriété 8, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.1.2 *Si* $A \in B(H)$ *est auto-adjoint alors toute valeur spectrale isolée de* A *est une valeur propre de* A.

Preuve : *Soit une valeur spectrale isolée de* A *et soit* $r > 0$ *telle que :*

$$\sigma(A) \cap \{z \in C; |z - \lambda| < r\}$$

On a alors :

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \oint_\Gamma (A - zI)^{-1}\, dz$$

où Γ *est un contour complexe fermé simple autour de* λ *tel que* $(\sigma(A) \setminus \{\lambda\}) \cap \Gamma = \varnothing$ *et* P *est le projecteur orthogonale associé à* λ *et* Γ.
On a alors :

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)\, P &= \frac{-1}{2i\pi} \oint_\Gamma (A - \lambda I)\,(A - zI)^{-1}\, dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \oint_\Gamma [I - (\lambda - z)\,(A - zI)]\, dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma (\lambda - z)\,(A - zI)^{-1}\, dz
\end{aligned}$$

Comme A *est auto-adjoint, on a :*

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| = \frac{1}{dist\,(z, \sigma\,(A))} = \frac{1}{|\lambda - z|}, \forall z \in \Gamma$$

Si on note par $l\,(\Gamma)$ *la longueur de* Γ *, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda I)\, P\| &\leq \frac{l\,(\Gamma)}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |\lambda - z| \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{l\,(\Gamma)}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} \frac{|\lambda - z|}{dist\,(z, \sigma\,(A))} \\
&= \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 0, nous obtenons que $AP = \lambda P$ c'est à dire que λ est une valeur propre de A .

Lemme 3.1.3 *Soit $A \in B(H)$ alors $R(A)$ est fermé si et selment si il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\sigma \left(A^* A_{|N(A)^\perp} \right) \subseteq \left[\delta, \|A\|^2 \right]$$

preuve : *On sait que $N(A)^\perp = N(A^*A)^\perp = \overline{R(A^*A)}$ est invaraint par A^*A , considérons alors l'opérateur positif borné*

$$T = A^* A_{|N(A)^\perp} : N(A)^\perp \to N(A)^\perp$$

Alors :

$$\begin{aligned} R(A) \ \ est\ fermé &\Leftrightarrow \ \ R(A^*A) \ \ fermé \\ &\Leftrightarrow T \ \ est\ bijectif \\ &\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(T) \\ &\Leftrightarrow \exists \delta > 0; \sigma(A) \subseteq \left[\delta, \|A\|^2 \right] \end{aligned}$$

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \sigma(A^*A) &= \sigma\left(A^*A_{|N(A)}\right) \cup \sigma\left(A^*A_{|N(A)^\perp}\right) \\ &\subseteq \{0\} \cup \left[\delta, \|A\|^2\right] \end{aligned}$$

l'équivalence entre (1) et (8)

Montrons maintenant que la propriété 8 est équivalente aux précedentes propriétés. d'après le lemme 3.2.1, il suffit de montrer que $0 \notin \sigma \left(A^* A_{|N(A)^\perp} \right)$.

Supossons le contraire c'est à dire $0 \in \sigma \left(A^* A_{|N(A)^\perp} \right)$, il s'ensuit que 0 est une valeur spectrale isolée de $A^* A_{|N(A)^\perp} : N(A)^\perp \to N(A)^\perp$, c'est donc une valeur propre de $A^* A_{|N(A)^\perp}$. d'après le lemme alors $T = A^* A_{|N(A)^\perp}$ est bejectif ce qui contredit le fait que $R(A)$ est fermé.

.

.

Exemple 3.1.1 *Soit A l'opérateur défini sur l^2 comme suit :*

$$A\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...\right)=\left(\frac{\alpha_1}{1},\frac{\alpha_2}{2},\frac{\alpha_3}{3},...\right),\qquad A\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...\right)\in l^2$$

On voit bien que $e_j=(0,...,1,0,0,...)\in R(A),\forall j\in\mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que $R(A)$ est de dimension infinie, regardons si $R(A)$ est fermé.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(j)=\left\{\begin{array}{lll}1 & \text{si} & j\leq n\\ 0 & \text{si} & j>n\end{array}\right\}$$

Alors

$$(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}(j)=\left\{\begin{array}{lll}\frac{1}{j} & \text{si} & j\leq n\\ 0 & \text{si} & j>n\end{array}\right\}$$

On remarque que (Ax_n) converge vers l'élement $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right)$ qui n'appartient pas à $R(A)$.
Donc $R(A)$ n'est pas fermé .

Chapitre 4

Stabilisation exponentielle par décomposition spectrale

Nous présentons dans cette section la notion de semi-groupe qui est d'un grand intérêt pour la résolution de systémes et équations différentiells dans le cas infinidimensionnel, notamment quand les opérateurs d'evolutions sont borné et sont définis dans des espaces de banach.

4.1 Semi groupe

On considére le systéme définit dans les espaces de dimension infini par :

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases} \tag{1}$$

avec $u \in U$, $x \in X$,$y \in Y$, *où* X, Y *et* U *sont des espaces de Banach.* B *et* C *deux opérateurs linéaires bornés et* A *est linéaire et c'est le génerateur Infinitésimal d'un* C_0*-semi-group dont il est définit par :*

Définition 4.1.1 *Si* $S(t)$ *est un opérateur définie de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathcal{L}(H)$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

1. $S(t+s) = S(t)S(s)$.
2. $S(0) = I_H$.
3. $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0, \forall x \in H$.

alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est dite un semi - groupe fortement continue. notée par* C_0 *semi - groupe*

Si on se limite à

$$\begin{cases} X' = AX \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- $x_0 \in D(A) \Rightarrow x(t) = S(t)x_0$

  si $x_0 \notin D(A)$, $S(t)x_0$ *n'est pas dérivable.*

- $\overline{D_A} = X$, $x_0 \in D(A)$; $S(t)x_0 = \lim\limits_{x_n \to x_0} S(t)x_n$, $x_n \in D(A)$

  $x(t) = S(t)x_0 = \lim\limits_{x_n \to x_0} S(t)x_n$

Cas générale

$$\begin{cases} X' = AX + f \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

le systéme est de solution,

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

- *Si la solution existe, elle est donnée par* (2)
- *elle est unique* ,

$$\begin{cases} z(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Conditions nécissaires

- $x_0 \in D(A)$
- $\phi(t) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$ *soit dérivable fortement et vérifie l'équation non homgene*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Conditions suffisants :

- f *est continue*; $f(t) \in D_A$ et $Af(t)$ *est continue avec* $x_0 \in D(A)$.
- f *est de class* C'; $x_0 \in D(A)$

la solution générale de l'équation est :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Solution de (1)

Définition 4.1.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi - groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur A de domaine de définition $D(A)$ définie par :*

$$D(A) = \{x \in H; \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; existe\}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Définition 4.1.3 (1) *est stable exponentiellement s'il existe $F \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que, $A+BF$ est générateur infinitésimal du Semi groupe exponentiellement asymptotiquement stable .*

Si B est borné , BF l'est aussi : A+BF est le générateur infinitésimal de $S_F(T)$ (Semi groupe) où :

$$S_F(T) = S(T) + \int_0^t S(t-\tau) BFS_F(\tau) d\tau$$

Les hypothèse :

(H_1) $X = X_- + X_+$

$PB = B_+$

$(I - P) B = B_-$

où :

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma_-(A) \cup \sigma_+(A) \\
\sigma_+(A) &= \{\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}\lambda \geq -\delta, \delta > 0\} \\
\sigma_-(A) &= \sigma(A) \diagup_{\sigma_+(A)}
\end{aligned}$$

$\sigma_+(A)$ est un ensemble borné à l'intérieur d'un domaine connexe dont la frontière est une courbe $\Gamma-$lisse :

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$X_+ = \operatorname{Im} P$; $X_- = \operatorname{Im}(I - P)$; X_+ et X_- *sont A-invariant*

$$\begin{aligned}
A_+x &= APx = PAx \\
A_-x &= (I-P)Ax = A(I-P)x \qquad (x \in D_A)
\end{aligned}$$

A_+ est le générateur infinitésimal du semi groupe $S_+(t)$ pour $A = S(t)|_{X+}$

A_- est le générateur infinitésimal du semi groupe $S_-(t)$ pour $A = S(t)|_{X_-}$

(H_2) A_- *Vérifie l'hypothèse de croissance spectrale* $(W_I = W_0)$

(H_3) (A_+, B_+) *est stabilisable*

$(H_2)\,;(H_2)$ et (H_2) *donne la stabilité exponentiellement de (A,B)*

X_+ *et* X_- *sont A - invariant*

Notre objectif est de décomposer le systéme (1) *en deux sous systémes,*

$$x'_+ = A_+x_+ + B_+U$$
$$x'_- = A_-x_- + B_-U$$

pour établir et garantir la stabilité.

Dans ce cas, il existe F_+ *tel que* $(A_+ + B_+F_+)\,x_+$ *est exponentiellement stable.*

autrement dit le sous systéme obtenu par décomposition spectrale sera tel que,

$$x'_+ = (A_+ + B_+F_+)\,x_+$$

et par suite,

$$\|S_{F_+}(t)x_+\| \leq Ne^{-\epsilon t}\|x_+\|$$

$U = F_+X_+\,,\, F = [F_+, 0] \quad Fx = F_+x_+ \implies x_-\,(t) = S_-\,(t)\,x_-^0 + \int_0^t S_-\,(t-\tau)\,B_-FS_-\,(t)\,x_-d\tau$

On utilse de suite l'hypothèse (H_2)

Ona

$$\begin{cases} \sigma\,(A_-) = \sigma_-\,(A) \\ \sigma\,(A+) = \sigma_+\,(A) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\sigma\,(A_-) \quad &< \quad -\delta \quad W_0\,(A_-) < 0 \\ \|S_+\,(t)\,x_+\| \quad &\leq \quad N_\epsilon e^{-\epsilon t} \\ &\implies \quad \|x_-\,(t)\,\| \leq N_1 e^{-1t} \end{aligned}$$

(1) *si B est compact et* (A, B) *est stabilisable*

(2) X_+ *est de dimension finie*

(3) (A_+, B_+) *est contrôlable qui veut dire* $(\forall x_0, \forall x_f\ \exists u$ *tel que* $x\,(t_f, x_0, u) = x_f)$ *(donc stabilisable)*

(4) A_- *est exponentiellement stable (A vérifie l'hypothese de croissans spectral)*

Lemme 4.1.1 *(KATO) Si K est un espace compact , A fermé alors*

$$\begin{aligned}\sigma_{ess}(A) &= \sigma_{ess}(A+K)\\ &= \sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)\cup\{\,V.P \text{ avec un nombre infinie de v.p linéaire indipendant }\}\end{aligned}$$

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma(A)\setminus\sigma_d(A)$$

$$\sigma_d(A) = \{\,V.P \text{ d'ordre de multiplicité fini}\}$$

Supposons (A, B) *stable alors :* $\|S_F(t)\| \leq N_\epsilon e^{-\epsilon t}$

$$\begin{gathered}\Rightarrow W_0(A+BF) \leq -\epsilon < 0\\ \Rightarrow W_s(A+BF) \leq -\epsilon < 0\\ \sigma_{ess}(A+BF) = \sigma_{ess}(A)\\ \Rightarrow \operatorname{Re}\sigma_{ess}(A) \leq -\epsilon\end{gathered}$$

Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$ *alors* λ *est une valeur propre (isolée) d'ordre de multiplicité fini.*

Si λ *est un point d'annulation du spectre de* $A(\sigma(A))$ alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$

cas où B- est de rang fini

Soit λ *est tel que* : $\operatorname{Re}\lambda > -\epsilon$, λ *est une valeur propre de* A, $\quad (\lambda \notin \sigma(A+BF))$

Soit y_λ *un vecteur propre, considérons :*

$$\begin{aligned}(\lambda I - A - BF)\,y_\lambda &= -BFy_\lambda\\ \lambda &\notin \sigma(A+BF) \Rightarrow y_\lambda = -(\lambda I - A - BF)^{-1} BFy_\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda I - A - BF)^{-1} &= R(\lambda, A+BF)\\ &= R(\lambda_0, A+BF) + (\lambda_0 - \lambda)\,R(\lambda_0, A+BF)\,R(\lambda, A+BF)\\ &\Rightarrow y_\lambda \in \operatorname{Im} R(\lambda_0, A+BF)\,BF\\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma(A)\,tq\operatorname{Re}\lambda > -\epsilon \ sont\ en\ nombre\ fini\end{aligned}$$

On considère Γ *un contour à l'intérieur du quel se trouvent les v.p* λ_i,*P étant le Projecteur :*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int (\lambda I - A)^{-1}\,d\lambda$$

$X_+ = PX$ est de dim$<\infty$

Notons qu'en général les vecteurs propres sont $(\lambda I - A)^k x = 0$ *pour un certain k.*

on montre aisément que

$$(\sigma(A_+) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \operatorname{Re}\lambda_i > -\varepsilon \text{ et } (A, B) \text{ est stable})$$

Supposon X *et* U *deux espace de Hilbert*

$$X_1 = \overline{\cup \operatorname{Im} S(t) B}$$

$$X_2 = \cap \ker B^* S^*(t) = X_\lambda^\perp$$

P_1 *projection sur* X_1

P_2 *projection sur* X_2

$x' = Ax + Bu$

$$\begin{aligned} P_1 x' &= P_1 A x + P_1 B u \\ &= P_1 A P_1 x_1 + P_1 A P_2 x_2 + P_1 B u \end{aligned}$$

$$P_2 x' = P_2 A P_1 x_1 + P_2 A P_2 x_2 + P_2 B u$$

$$\beta \subset X_1 \Rightarrow P_2 B = 0$$

X_1 *est A-invaraint* $\Rightarrow P_2 A P_1 = 0$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U$$

$A_{ij} = P_i A P_j$

Théorème 4.1.1 *Si le systeme* (A, B) *est exponentiellement stable*

i) (A_{11}, B_1) *est exponentiellement stable.*

ii) A_{22} *est exponentiellement stable.*

(i) et (ii) sont vérifie et de plus A_{12} *est borné alors le systeme (A,B) est exponentiéllement stable*

Exemple 4.1.1 $x = l_2; u = \mathbb{R}\,; Bu = bu$

$$Ax = (0, x_1, x_2, ...)$$

$$x = (x_1, ...)$$

$$\sigma(A) = \overline{B(0,1)}\ \lambda \in \sigma(A) \quad ;\ \lambda \textit{ n'est pas V.P}$$
$$\Rightarrow \lambda \in \textit{ au spectre essentiel}$$

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + K)$$

Si K est compact (A, B) est stable *$\exists\ F$ tq $A + BF$ est le génerateur Infinitémal d'un C_0-semi groupe exponentiéllement stable*

CONCLUSION

Notre objectif dans ce mémoire c'est l'étude de la classe des opérateurs à image fermé.
Des caractérisations pour cette classe d'opérateurs a été déduite pour ensuite entamer le probléme de stabilité.
Nous avons également a traiter le cas du sytéme $X\prime = AX$ *avec* A *opérateur borné, et nous avons étudier le probléme de la stabilisation par la décomposition spectrale.*

Bibliographie

[1] **Q.Huang.,M.S.Moslehian.**,Relationship Between The Hyers-Ulam Stability And The Moore-Penrose Inverse.2010 Mathematics Subject Classification.47A55,46A32,39B82,47A05,47A30.

[2] **M.THAMBAN NAIR.,** Functional Analysis : A First Course, Prentice-Hall Of India, New Delhi, 2002.

[3] **T.Kato**,Perturbation theory for linear operators, second ed.(Berlin :Springer-Verlag)(1976) Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132,MR MR0407617 (53#11389)

[4] **C.W.Groetsch**., Inclusions for the Moore-penrose Inverse With Applications to computational Methodes, Contributions in Numerical Mathematics. World Sci.,River Edge, NJ, (1933),203-211

[5] **S.Goldberg.**,Unbounded Linear Operators.Mc Graw Hill, New York, 1966.

[6] **G.Hirassawa.,T.Miura**, Hyers-Ulam Stability of a closed Operator in a Hilbert Space Bull.korean Math.Soc.43(2006), 107-117

[7] **M.S.Moslehian., G.Sadeghi.**,Perturbation of closed Range Operators.Turk.J.Math.32 (2008), 1-9.

[8] **M.Ould Ali.**, Stabilité de la fermeture de l'image Des Opérateurs Fermés.Es Sinia 2010.

[9] **D.Bouagada** " Probleme de Controle en dimension infinie " Cours de Master 2, 2017