

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Thèse

Présentée par

Mr Abdallah MENAD

Pour l'obtention du titre de

Doctorat En-Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Problèmes de Diffusion avec Interfaces et Applications Concrètes

Soutenue le : 20/11/2018

Devant le jury composé de :

Président	Benharrat BELAIDI, Professeur, Université de Mostaganem
Examineurs	Mustapha CHEGGAG, Professeur, ENP d'Oran Zoubir DAHMANI, Professeur, Université de Mostaganem Tewfik MAHDJOUR, MCA, Université de Tlemcen
Directeurs de thèse	Ahmed MEDEGHRI, Professeur, Université de Mostaganem Rabah LABBAS, Professeur, Université du Havre

Table des matières

Introduction	3
0.1 Motivation	3
0.2 Historique	5
0.3 Notre modèle	6
0.4 Description des chapitres et résultats obtenus	7
1 Notions et Rappels	18
1.1 Opérateurs linéaires fermés	18
1.2 Semi-groupes	18
1.3 Espaces d'interpolation	19
1.4 Espaces de Hölder	20
1.5 Théorème des traces	20
1.6 Calculs fonctionnels de Dunford et \mathcal{H}^∞	21
1.6.1 Formule de Cauchy-Intégrale de Dunford-Riesz	21
1.6.2 Fonctions holomorphes	22
1.6.3 Calcul fonctionnel de Dunford	23
1.6.4 Extention du calcul fonctionnel	24
1.6.5 Calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞	25
1.7 Dynamique de population	27
1.7.1 Caractéristiques d'une population	27
1.7.2 La croissance de la population	29
2 Lemmes techniques	31
2.1 Lemmes	32
2.2 Quelques résultats sur les opérateurs sectoriels	36
2.3 Quelques résultats sur les semigroupes analytiques	37
3 Le problème linéaire stationnaire	39
3.1 Notre modèle	39
3.2 Formulation opérationnelle	42
3.3 Résolution du problème opérationnel	43
3.3.1 Inversibilité du déterminant	43
3.3.2 Représentation formelle de la solution	47
3.4 Analyse de $v_-(G_-)$, $v_0(G_0)$ et $v_+(G_+)$	55
3.4.1 Analyse de $v_-(G_-)$ sur $(-1,0)$	55
3.4.2 Analyse de $v_0(G_0)$ sur $(0,1)$	55
3.4.3 Analyse de $v_+(G_+)$ sur $(1,2)$	56

3.4.4	Analyse des dérivées	57
3.5	Conditions nécessaires sur les données aux interfaces	58
3.6	Analyse de u_- au voisinage de -1	60
3.7	Analyse de u_- à l'interface $\{0\} \times]0, 1[$	61
3.8	Analyse de u_0 au voisinage de l'interface $\{0\} \times]0, 1[$	64
3.9	Analyse de u_0 au voisinage de 1	67
3.10	Analyse de u_+ au voisinage de 1	71
4	Dynamique de population dans deux patchs	75
4.1	Introduction	75
4.2	Etude de l'équation spectrale	77
4.3	Formulation opérationnelle de l'équation spectrale	77
4.4	Etude de l'équation de la résolvante	79
4.5	Inversibilité du déterminant $\Delta_{\lambda, p_-, p_+}$	85
4.6	Résolution de l'équation spectrale	87
4.6.1	La non-continuité de la densité	89
4.7	$u \in D(\mathcal{L})$	91
4.8	Estimation de l'opérateur résolvant	94
4.8.1	la norme $\ u_-\ _\infty$	94
4.8.2	Estimation de la semi-norme $[u_-]_\theta$	97
4.8.3	Estimation de la semi-norme $[u_+]_\theta$	101
5	Etude spectrale du problème initial	105
5.1	Introduction	105
5.2	Réduction du modèle général	106
5.3	Laplacien et conditions de Dirichlet	108
5.4	L'équation spectrale	110
5.4.1	Formulation opérationnelle de l'équation spectrale	110
5.4.2	Étude spectrale du problème initial	112
5.5	Discussion en dimension 2	115
5.5.1	signe de $w'_-(0^-)$	115
5.5.2	Etude des valeurs propres	116
5.5.3	Signification de σ_0	117
	Bibliographie	120

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du **Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées** à l'université de **Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis (LMPA)** en collaboration avec le **Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH)**.

Tout d'abord en premier lieu je remercie vivement mon directeur de thèse en Algérie, le professeur **Ahmed Medeghri** pour m'avoir intégré dans son équipe, d'avoir dirigé ce travail, pour son aide constante, ses encouragements, sa disponibilité et les moyens mis à ma disposition tout au long de mes recherches de graduation et post graduation, et sincèrement pour toute sa patience communicatrice et ses orientations.

J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse en France le professeur **Rabah Labbas**. Ses qualités scientifiques et humaines, son expérience, ses grandes compétences, sa finesse, ses nombreux conseils et ses précieuses remarques ont permis l'accomplissement et l'aboutissement de ce travail. J'ai eu un grand plaisir à apprendre et à travailler à ses côtés et je l'aurai toujours. Qu'il trouve ici les marques de ma reconnaissance et de mon profond respect.

J'ai le plaisir de remercier infiniment Monsieur **Belaidi Benharrat** Professeur à l'université de Mostaganem et directeur du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliqués (LMPAM) qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur **Cheggag Mustapha** Professeur à l'ENP d'Oran, pour ces conseils précieux et pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Mes grands remerciements vont aussi à Monsieur **Dahmani Zoubir**, professeur à l'université de Mostaganem d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer mes grands remerciements à Monsieur **Tewfik Mahdjoub** Professeur à l'université de Tlemcen pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse et d'examiner mon travail.

Je remercie également l'ensemble de mes collègues et particulièrement les membres de l'équipe de recherche "Equations Différentielles Abstraites (EDA) et la théorie des sommes d'opérateurs" qui m'ont accompagné durant la préparation de cette thèse.

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, ma femme, mes enfants, mes frères et mes soeurs pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et qui m'ont soutenu.

Introduction

0.1 Motivation

Le travail accompli dans cette thèse s'intéresse à l'étude de quelques modèles de diffusion en dynamique de population incluant des comportements individuels aux frontières et applications.

Une définition naïve du concept de la diffusion peut-être formulée de la manière suivante (selon Akira Okubo and Simon A. Levin [32]) : "**c'est la tendance que possède un ensemble de particules concentrés autour d'un point de l'espace à se propager ailleurs dans le temps pour occuper graduellement un plus grand (ou plus petit) espace**".

La diffusion est un phénomène qu'on rencontre dans de nombreuses situations concrètes comme en **dynamique de population**. Il existe alors plusieurs sortes de modèles mathématiques pour décrire l'évolution, de cette dernière.

Certains d'entre eux utilisent les équations aux dérivées partielles (EDP) : ils se basent sur la loi suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Taux de changement de la densité de population} \\ & \text{(Rate of the change in density)} \\ & = \text{taux de dispersion} + \text{taux de croissance (ou de décroissance),} \end{aligned}$$

modélisés par des équations d'évolution de type

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u + f(u) \\ \text{donnée initiale} \\ \text{Conditions aux bords,} \end{cases}$$

où $u(x_1, x_2, \dots, t)$ est la densité locale de population et $f(u)$ (généralement non linéaire) désigne le taux net de changement de population dû soit aux naissances soit aux décès. $f(u)$ est de type $ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ par exemple et est dite "**croissance logistique**".

On s'intéresse ici, à certains problèmes, modélisés par des EDP décrivant une dynamique de populations dans trois habitats (dont un refuge) et incluant des comportements individuels aux frontières.

Compte tenu de la géométrie cylindrique des "patches", on montre que la méthode qui s'adapte le mieux est celle qui utilise la théorie des semi-groupes et les équations différentielles à coefficients opérateurs.

Il y a aussi des équations de type

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u + f(u) + \sum_{i=1}^n s \delta_S N_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ \text{Conditions aux bords et Condition initiale,} \end{cases}$$

avec la masse de Dirac δ_S et $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ est le vecteur conormal à la surface S . Ce dernier modèle correspond au mouvement brownien "biaisé" ou assymétrique (appelé en

anglais : skew brownian motion) représenté par le terme "drift" généralisé :

$$\sum_{i=1}^n s_i \delta_S N_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où intervient la masse de Dirac sur l'interface S et dont le coefficient s_i traduit l'assymétrie (the skewness). L'effet de ce terme est traduit par une condition de transmission signifiant la perméabilité à travers S .

Il existe d'autres modèles du même genre concernant des fluides entre le milieu poreux et les fissures ou ceux liés à des concentrations de traceurs dans un réseau de fissures.

Ces modèles tiennent compte de l'effet aléatoire introduit par une probabilité p comme on le verra. En général les populations possèdent des caractéristiques déterministes mais les individus qui les composent ont presque toujours des comportements aléatoires.

Il existe aussi d'autres modèles plus généraux qui considèrent des systèmes d'EDP de type précédent où interviennent plusieurs espèces de populations, voir par exemple [35]. On trouvera à ce sujet plusieurs modèles exposés dans le travail de [22].

Dans R.S. Cantrell et C.Cosner [4] les auteurs construisent de modèles de dispersion d'une population qui incorporent la réaction des individus aux interfaces entre les types d'habitats.

Ce genre de processus est appelée mouvement brownien biaisé (Skew Brownian Motion).

Ces modèles prennent la forme d'EDP avec des conditions, aux interfaces entre les régions, sur les densités et les flux de population.

La fragmentation des paysages est augmentée par les effets du développement humain.

Dans certains cas, la fragmentation est préméditée et les fragments sont désignés comme des réserves naturelles, des zones tampons, des zones agricoles, des banlieues, et ainsi de suite.

Il est souhaitable d'avoir des modèles spatialement explicites (SEPMs) qui peuvent expliquer l'hétérogénéité de l'environnement et le comportement des individus aux frontières, voir Dunning et al. [23]. Les modèles de population spatialement explicites, (SEPMs), sont des outils de plus en plus utiles pour les écologistes, les biologistes, qui s'intéressent à la préservation des espèces et les gestionnaires territoriaux ou fonciers.

Dans ce travail on étudie certains problèmes de dispersion de la dynamique de populations qui intègrent des réponses aux interfaces entre les différents types d'habitats.

Ces problèmes sont basés sur des équations aux dérivées partielles de type parabolique situées dans le paysage suivant constitué par trois habitats différents

$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

où

$$\begin{cases} \Omega_- =]-l, 0[\times]0, 1[\\ \Omega_0 =]0, 2L[\times]0, 1[\\ \Omega_+ =]2L, 2L + l[\times]0, 1[, \end{cases}$$

avec $l, L > 0$. L'équation de diffusion est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d \cdot \Delta u_-(t, x, y) + F(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_- \\ d_0 \cdot \Delta u_0(t, x, y) + F_0(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_0 \\ d \cdot \Delta u_+(t, x, y) + F(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_+, \end{cases}$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y) & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_0(x, y) & \text{dans } \Omega_0 \\ \varphi_+(x, y) & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-(t, -l, y) = f_-(t, y), & y \in]0, 1[\\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in]-l, 0[\\ u_0(t, x, 0) = u_0(t, x, 1) = 0, & x \in]0, 2L[\\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & x \in]2L, 2L + l[\\ u_+(t, 2L + l, y) = f_+(t, y), & y \in]0, 1[, \end{cases}$$

les conditions de continuité aux interfaces $\Gamma_0 = \{0\} \times]0, 1[$, $\Gamma_{2L} = \{2L\} \times]0, 1[$

$$\begin{cases} u_0(t, 0, y) = u_-(t, 0, y), & y \in]0, 1[\\ u_0(t, 2L, y) = u_+(t, 2L, y), & y \in]0, 1[, \end{cases}$$

et les conditions d'interfaces d'assymetrie sont

$$\begin{cases} (1 - p)d \frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, 0, y), & y \in]0, 1[\\ pd_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, 2L, y) = (1 - p)d \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 2L, y), & y \in]0, 1[. \end{cases}$$

Nous avons utilisé ci-dessus les notations naturelles

$$u_- = u|_{\Omega_-}, \quad u_0 = u|_{\Omega_0}, \quad u_+ = u|_{\Omega_+}.$$

Ici, $u(t, x, y)$ représente la densité de la population, Ω_0 c'est le **refuge** alors que

$$\Omega_- \cup \Omega_+,$$

est la zone tampon avec leurs coefficients de diffusion correspondants d_0 et d .

0.2 Historique

Plusieurs travaux ont traité ce genre de problèmes dans différents cadres (cadre **Biologie** et cadre **EDA**) :

1. Dans le cadre **Biologique** on peut citer les travaux suivants :

- a) Le travail de **Cantrell et Cosner** [4], Problème de dynamique de population dans la dimension 1, ils ont construit des modèles de dispersion d'une population qui incorporent la réaction des individus aux interfaces entre les types d'habitats.

- b) Le travail de **Cantrell et Cosner [5]**, où ils ont traité la construction du mouvement Brownien (Skew Brownian Motion), ils ont utilisé des modèles de diffusions avec interfaces, en particulier des modèles mathématiques en sciences médicales et de la santé.
- c) Le travail de **Antoine Lejay [1]** : Il a traité la construction du mouvement Brownien et quelques applications.
2. Dans le cadre d'**EDA** on peut citer les travaux suivants :
- a) Le travail de Belhamiti et al [2] qui ont étudié dans les espaces de Hölder un problème aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince.
- b) Le travail de MINT AGHRABATT Fatimetou avec RABAH Labbas [16] où ils ont traité deux classes de problèmes aux limites et de transmission de nature différente
- Une classe de problèmes aux limites et de transmission posés dans un domaine formé d'un corps fixe juxtaposé avec une couche mince d'épaisseur petite $\delta > 0$. Pour cette classe , l'étude a été faite à δ fixé et puis ils ont fait l'étude complète du problème lorsque $\delta \rightarrow 0$
 - L'autre classe de problèmes aux limites et de transmission posés dans deux corps joints par une couche mince d'épaisseur petite $\delta > 0$ (modélisant la colle). Ces deux classes sont complètement étudiées dans le cadre fonctionnel des espaces de Hölder.
 - Des résultats nouveaux d'existence, d'unicité et de régularité maximale pour les solutions de ces deux classes de problèmes sont démontrés **sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité sur les données vérifiées aux interfaces.**
- c) Signalons aussi le travail du G. Dore et al [11] où ils ont étudié un problème de transmission avec un paramètre δ très petit, ils ont traité ce problème séparément sur deux intervalles $] -1, 0[$ et $] 0, \delta[$ dans le cadre fonctionnel L^P , dans ce travail ils ont utilisé le H^∞ -calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels.
- d) Le travail de FAVINI et al [17] , où les auteurs ont traité un problème de transmission avec une équation fondamentale qui modélise l'équilibre transversal d'une plaque isotrope mince de surface moyenne rectangulaire

$$\Omega =]a, b[\times]c, d[,$$

gouvernée par le bilaplacien

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f.$$

0.3 Notre modèle

On considère l'habitat global $\Omega =]-l, 2L + l[\times \mathbb{k}$ (bi-dimensionnel ou $(n+1)$ -dimensionnel) formé par le refuge (du milieu)

$$\Omega_0 =]0, 2L[\times \mathbb{k},$$

auquel sont juxtaposées à gauche et à droite deux zones tampon "buffer zone" (habitat de gauche et habitat de droite) :

$$\Omega_g =]-l, 0[\times \mathbb{k}, \quad \Omega_d =]2L, 2L + l[\times \mathbb{k},$$

où \mathbb{k} peut être un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière régulière $\partial\mathbb{k}$.

Pour simplifier, on prendra $\mathbb{k} =]0, 1[$ et (x, y) désignera la variable générique de Ω . Notons

$$\Gamma_0 = \{0\} \times \mathbb{k}, \quad \Gamma_{2L} = \{2L\} \times \mathbb{k}.$$

Un problème similaire à (***) en mode stationnaire, est :

$$(P0) \begin{cases} \mu \cdot \Delta u + \rho u + s \frac{\partial u}{\partial x} \delta_0 + s \frac{\partial u}{\partial x} \delta_{2L} = g \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur }]-l, 2L + l[\times \partial\mathbb{k} \\ u = f_- \text{ sur } \{-l\} \times \mathbb{k} \\ u = f_+ \text{ sur } \{2L + l\} \times \mathbb{k}, \end{cases}$$

où δ_0 est la distribution de Dirac en 0, et δ_{2L} est la distribution de Dirac en $2L$, u est la densité d'une population vivant dans un environnement comportant une "pièce" favorite dite refuge $\Omega_0 =]0, 2L[\times \mathbb{k}$ séparée d'une région moins favorable, ici $\Omega_g \cup \Omega_d$ comportant deux frontières Γ_0 et Γ_{2L} plus ou moins perméables.

Ici, le second membre g peut être, par exemple, un élément source de l'espace

$$C(\overline{\Omega} \setminus \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_{2L}}) = C([-l, 0[\times \overline{\mathbb{k}}) \cup C(]0, 2L[\times \overline{\mathbb{k}}) \cup C(]2L, 2L + l[\times \overline{\mathbb{k}})$$

$$\rho = \begin{cases} -r & \text{sur }]-l, 0[\times \mathbb{k} \\ r_0 & \text{sur }]0, 2L[\times \mathbb{k} \\ -r & \text{sur }]2L, 2L + l[\times \mathbb{k}, \end{cases}$$

avec r_0 et r strictement positifs (croissance et décroissance de la population dans les zones tampon respectives),

$$\mu = \begin{cases} d & \text{sur }]-l, 0[\times \mathbb{k} \\ d_0 & \text{sur }]0, 2L[\times \mathbb{k} \\ d & \text{sur }]2L, 2L + l[\times \mathbb{k}, \end{cases}$$

où d et d_0 (strictement positifs aussi) sont les coefficients de diffusion dans les "patch" correspondants.

0.4 Description des chapitres et résultats obtenus

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le **premier chapitre**, on donne des rappels sur quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail. En particulier le H^∞ -calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels [13], le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes

[34], les espaces d'interpolation [20] et [38], et les espaces de Hölder avec leurs propriétés fondamentales.

Le deuxième chapitre contient quelques résultats et lemmes techniques avec leurs preuves, très utiles pour notre travail.

Au troisième chapitre on considère le problème d'évolution en mode linéaire stationnaire comme suit

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Eqs)} \left\{ \begin{array}{l} d\Delta u_- - ru_- = g_- \quad \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_0\Delta u_0 + r_0u_0 = g_0 \quad \text{sur }]0, 2L[\times]0, 1[\\ d\Delta u_+ - ru_+ = g_+ \quad \text{sur }]2L, 2L+l[\times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Bound.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{dans }]-l, 2L+l[\times \partial\mathbb{k} \\ u_- = f_- \quad \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ u_+ = f_+ \quad \text{dans } \{2L+l\} \times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Interf.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_- = u_0 \quad \text{sur } \{0\} \times]0, 1[\\ u_0 = u_+ \quad \text{sur } \{2L\} \times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Skew.C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1-p)d\frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_0\frac{\partial u_0}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[\\ pd_0\frac{\partial u_0}{\partial x}(2L, y) = (1-p)d\frac{\partial u_+}{\partial x}(2L, y), \quad y \in]0, 1[. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ici $p \in]0, 1[$ représente la probabilité de se déplacer à droite de l'interface Γ_0 , (et donc $1-p$ à sa gauche). Lorsque

$$p = 1/2,$$

les conditions de transmission dans (*Skew.C.*) traduisent tout simplement la continuité du flux à travers les interfaces $\{0\} \times \mathbb{k}$ et $\{2L\} \times \mathbb{k}$.

On supposera dans notre travail le cas intéressant du mouvement brownien biaisé correspondant à l'hypothèse

$$p \neq 1/2.$$

Dans ce travail on a privilégié la direction de déplacement de la population dans l'axe de la variable x . On a supposé aussi, qu'en dehors de l'habitat global $\Omega =]-l, 2L+l[\times \mathbb{k}$, la région extérieure est complètement hostile (d'où la condition au limite sur $]-l, 2L+l[\times \partial\mathbb{k}$ excepté sur $\{-l\} \times \mathbb{k}$ et $\{2L+l\} \times \mathbb{k}$ où on pourrait aussi supposer nulle la densité).

Ce modèle peut représenter le comportement d'une population de poissons dans une rivière où les interfaces $\{0\} \times \mathbb{k}$ et $\{2L\} \times \mathbb{k}$ peuvent être des "filets", etc.....

On va se focaliser sur l'étude complète de ce problème (*P1*). Notre méthode sera basée essentiellement sur les techniques des équations différentielles opérationnelles et la théorie des semigroupes.

Le problème linéaire stationnaire peut s'écrire sous la forme opérationnelle suivante, en définissant l'opérateur A dans l'espace de Banach $E = C[0, 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{\varphi \in C_y^2[0, 1] : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ A\varphi = \varphi''. \end{array} \right.$$

Dans le cas où $E = L^q(0, 1)$, ($q \in]1, +\infty[$), cet opérateur sera défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in W_y^{2,q}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ A\varphi = \varphi'', \end{cases}$$

$$(P_A) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} \quad \text{sur }]-l, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} \quad \text{sur }]0, 2L[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \frac{r}{d}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d} \quad \text{sur }]2L, 2L+l[\end{array} \right. \\ \text{(Bond.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = f_- \\ u_+(2L+l) = f_+ \end{array} \right. \\ \text{(Interfaces.Cont)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(2L) = u_+(2L) \end{array} \right. \\ \text{(Skew.C)} \left\{ \begin{array}{l} (1-p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0) \\ pd_0u'_0(2L) = (1-p)du'_+(2L) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dans un espace de Banach complexe E vérifiant l'hypothèse d'ellipticité de Krein suivante

$$\rho(A) \supset]0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|},$$

avec $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A , ici $D(A)$ n'est pas nécessairement dense; le second membre g est tel que

$$\begin{cases} g_- = g_{/[-l,0]} \in C^\theta([-l, 0], E) \\ g_0 = g_{/[0,2L]} \in C^\theta([0, 2L], E) \\ g_+ = g_{/[2L,2L+l]} \in C^\theta([2L, 2L+l], E), \end{cases}$$

les résultats obtenus sont donnés par (voir [26]) : Solvability of elliptic differential equations, set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces.

Théorème 0.1 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

1. u_- est la solution du notre problème sur $]-1, 0[$
2. $u_- \in C([-1, 0]; D(B^2)) \cap C^2([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_- + \frac{g_-(-1)}{d} \in \overline{D(B)},$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0} \right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 0.2 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

1. u_- est la solution du notre problème sur $] -1, 0[$
2. $B^2 u_-(\cdot)$, $u_-'' \in C^\theta([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_- + \frac{g_-(-1)}{d} \in D_B(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0} \right) \in D_B(\theta, +\infty).$$

Théorème 0.3 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. Alors

1. u_0 est la solution de notre problème sur $]0, 1[$
2. $u_0 \in C([0, 1]; D(B^2)) \cap C^2([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d} \right) \in \overline{D(B_0)},$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in \overline{D(B_0)}.$$

Théorème 0.4 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. Alors

1. u_0 est la solution de notre problème sur $]0, 1[$.
2. $B_0^2 u_0(\cdot)$, $u_0'' \in C^\theta([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d} \right) \in D_{B_0}(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in D_{B_0}(\theta, +\infty).$$

Théorème 0.5 Soient $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_+ \in D(B^2).$$

Alors,

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1, 2[$
2. $u_+ \in C([1, 2]; D(B^2)) \cap C^2([1, 2]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in \overline{D(B)}$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 0.6 Soient $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_+ \in D(B^2).$$

Alors

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1, 2[$
2. $B^2 u_+(\cdot), u_+'' \in C^\theta([1, 2]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in D_B(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in D_B(\theta, +\infty).$$

Dans le **quatrième chapitre** on étudie la dynamique de population en **deux patches**, on signale que dans le papier de Cantrell, R. S., et Cosner, C. [4] on a trouvé une étude intéressante sur les modèles de diffusion en dynamique de la population incluant des comportements individuels aux frontières et applications. Cette étude a été détaillée dans une dimension spatiale.

Notre objectif dans ce chapitre est d'analyser la situation analogue dans l'espace à deux dimensions. Plus précisément, nous nous occuperons de l'étude de l'analyticité de C_0 semi-groupe généré par le processus de dispersion dans deux habitats sous une condition d'asymétrie et une condition de dispersion continue (skewness condition) à l'interface qui représentent le comportement des individus aux limites. Ces problèmes sont basés sur les équations différentielles partielles de type parabolique établies dans le paysage suivant constitué par deux habitats différents :

$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+,$$

où

$$\begin{cases} \Omega_- =]-l, 0[\times]0, 1[\\ \Omega_+ =]0, L[\times]0, 1[\end{cases}$$

avec $l, L > 0$. L'équation de diffusion est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d_- \cdot \Delta u_-(t, x, y) + F_-(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_- \\ d_+ \cdot \Delta u_+(t, x, y) + F_+(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_+, \end{cases} \quad (1)$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y) & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_+(x, y) & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

les conditions aux bords

$$\begin{cases} u_-(t, -l, y) = f_-(t, y), & y \in]0, 1[\\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in]-l, 0[\\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & x \in]0, L[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, L, y) = f_+(t, y), & y \in]0, 1[, \end{cases}$$

La continuité de la dispersion à l'interface $\Gamma_0 = \{0\} \times]0, 1[$,

$$\begin{cases} d_- \Delta u_-(t, 0, y) + F_-(u_-(t, 0, y)) = d_+ \Delta u_+(t, 0, y) + F_+(u_+(t, 0, y)), \\ y \in]0, 1[, \end{cases}$$

et les conditions d'interface d'asymétrie (skewness interface conditions)

$$(1 - p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 0, y), \quad y \in]0, 1[.$$

Comme dans le chapitre précédent $u(t, x, y)$ représente la densité de la population, Ω_+ est le refuge or Ω_- est la zone tampon avec leurs coefficients de diffusion correspondants d_+ et d_- . L'équation (1) décrit la diffusion différente dans les habitats avec leur croissance ou décroissance des fonctions logistiques F_+ et F_- .

Nous commençons par examiner l'analyse du cas fixe stationnaire. Nous ne considérerons donc que la partie linéarisée des fonctions logistiques, c'est-à-dire

$$\begin{cases} F_-(u_-) = -r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ F_+(u_+) = r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

ici r_+ est le taux de **croissance** dans le refuge Ω_+ et r_- est le taux de **mortalité** dans la zone tampon Ω_- .

Dans ce chapitre on étudie l'opérateur suivant

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} d_- \Delta u_- - r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

où u vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound.C.)} \\ \text{(Interf.C.)} \\ \text{(Skew.C.)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 \quad \text{dans }]-l, L[\times \{1\} \\ u_- = 0 \quad \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \{L\} \times]0, 1[\\ d_- \Delta u_-(0, y) - r_- u_- = d_+ \Delta u_+(0, y) + r_+ u_+, \quad y \in]0, 1[, \\ (1 - p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[. \end{array} \right.$$

On doit donc étudier

$$\mathcal{L}u - \lambda u = g, \quad (2)$$

dans un espace adapté , où u verifie (Bound.C.), (Interf.C.) and (Skew.C.).

Remarque 0.1 *Les dimensions l , L et h des deux habitats sont importantes pour l'analyse du spectre de \mathcal{L} , comme cela a été démontré dans [4] dans une dimension. Nous étudierons la situation similaire pour notre problème dans le chapitre suivant.*

La formulation opérationnelle de l'équation (2) dans l'espace de Banach E , s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r_-}{d_-}u_-(x) - \frac{\lambda}{d_-}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d_-} \quad \text{sur }]-l, 0[\\ u''_+(x) + Au_+(x) + \frac{r_+}{d_+}u_+(x) - \frac{\lambda}{d_+}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d_+} \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) \\ = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+) \end{array} \right. \\ (1-p)d_-u'_-(0^-) = pd_+u'_+(0^+), \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ et } \varphi'' \in C_0([0, 1])\} \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{array} \right.$$

Notons qu'il n'y a aucune raison que la condition

$$d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+),$$

implique la continuité de la densité elle-même sur l'interface. En tenant compte de nos conditions de limites et de transmission, il est clair que la continuité de la dispersion spatiale en direction de la variable x est en quelque sorte plus «nuancée» que celle en direction de la variable y C'est pourquoi nous étudierons notre travail dans l'espace suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \{u \in C([-l, L] \setminus \{0\}; E) : \exists u(0^-) \in E, \exists u(0^+) \in E, \\ & \text{et } u|_{[-l, 0[} \in C^\theta([-l, 0[; E), u|_{]0, L]} \in C^\theta(]0, L]; E)\}. \end{aligned}$$

On peut conclure par le résultat principal suivant

Théorème 0.7 *L'opérateur de dispersion \mathcal{L} défini dans les deux habitats décrits dans (2) génère un semi-groupe analytique (pas nécessairement continu en 0) dans l'espace de Banach \mathcal{E}_* (voir 4.9 dans chapitre 4).*

Remarque 0.2 *Notons que la condition que la densité de la population disparaisse sur la limite extérieure de la zone tampon Ω_- est naturelle et le fait que sur $\{L\} \times]0, 1[$ et sur l'interface $\{0\} \times]0, 1[$ nous avons une Hölder-condition continue est en quelque sorte réaliste.*

Remarque 0.3 *Nous pouvons spécifier la fermeture du domaine $D(\mathcal{L})$ en utilisant les fameux espaces de Banach continus (petits espaces de Hölder).*

Au cinquième chapitre on fait l'étude spectrale du problème initial, il s'agit de revenir au problème avec les paramètres l, L

$$(P1A) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} \quad \text{dans }]-l, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} \quad \text{dans }]0, 2L[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \frac{r}{d}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d} \quad \text{dans }]2L, 2L + l[\end{array} \right. \\ \text{(Bounda C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = f_- \\ u_+(2L + l) = f_+ \end{array} \right. \\ \text{(Transmission. C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(2L) = u_+(2L) \end{array} \right. \\ \text{(Skewness C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0) \\ pd_0u'_0(2L) = (1 - p)du'_+(2L). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. dans le cas de conditions aux limites **homogènes**, on considère le problème aux valeurs propres σ et vecteurs propres v :

$$(P1ASp) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} dv''_-(x) + dAv_-(x) - rv_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{dans }]-l, 0[\\ d_0v''_0(x) + d_0Av_0(x) + r_0v_0(x) = \sigma v_0(x) \quad \text{dans }]0, 2L[\\ dv''_+(x) + dAv_+(x) - rv_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{dans }]2L, 2L + l[\end{array} \right. \\ \text{(Bound. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(-l) = 0 \\ v_+(2L + l) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(BTS) (Transmi. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(0) = v_0(0) \\ v_0(2L) = v_+(2L) \end{array} \right. \\ \text{(Skew. C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - p)dv'_-(0) = pd_0v'_0(0) \\ pd_0v'_0(2L) = (1 - p)dv'_+(2L). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ici

$$v(x) = \begin{cases} v_-(x) & \text{dans }]-l, 0[\\ v_0(x) & \text{dans }]0, 2L[\\ v_+(x) & \text{dans }]2L, 2L + l[. \end{cases}$$

Cette étude de valeurs propres est très importante pour l'analyse du problème complet d'évolution. En effet, posons

$$\begin{aligned} D(\mathcal{H}) &= \{v \in C([-l, 2L + l], E), v_- \in C^2([-l, 0], E), v_0 \in C^2([0, 2L], E) \\ &\quad v_+ \in C^2([2L, 2L + l], E) \text{ et (BTS)}\} \\ \mathcal{H}v &= \begin{cases} dv''_- - rv_- & \text{dans }]-l, 0[\\ d_0v''_0 + r_0v_0 & \text{dans }]0, 2L[\\ dv''_+ - rv_+ & \text{dans }]2L, 2L + l[; \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} D(\mathcal{M}) = C([-l, 2L + l], D(A)) \\ (\mathcal{M}v)(x) = Av(x); \end{cases}$$

et il s'agit alors de résoudre l'équation spectrale

$$(\mathcal{H} + \mathcal{M})\phi = \sigma\phi.$$

En effet, supposons qu'il existe une valeur σ et une fonction ϕ vérifiant cette équation, alors l'équation de diffusion introduite au début

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) = (\mathcal{H} + \mathcal{M})(u(t, \cdot))$$

admet pour solutions

$$u(t, \cdot) = \phi(\cdot)e^{\sigma t}$$

2. Dans un premier temps, on reconsidère le problème simplifié suivant (compte tenu de l'idée de Cantrell and Cosner, voir [4] page 194) uniquement sur deux habitats

$$\text{(Equats)} \begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} & \text{dans }]-l, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} & \text{dans }]0, L[, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites et transmission suivantes :

$$\begin{cases} \text{(Bounda C.)} & \begin{cases} u_-(-l) = f_- \\ u'_0(L) = f_+ \end{cases} \\ \text{(Transmission C.)} & u_-(0) = u_0(0) \\ \text{(Skewness C.)} & (1-p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0). \end{cases}$$

Et on refait une étude brève de ce problème en gardant surtout les dimensions L et l .

Dans ce chapitre on étudie l'opérateur

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} d_- \Delta u_- - r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

où u satisfait

$$\begin{cases} \text{(Bound.C.)} & \begin{cases} u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{1\} \\ u_- = 0 & \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 & \text{dans } \{L\} \times]0, 1[\end{cases} \\ \text{(Interf.C.)} & d_- \Delta u_-(0, y) - r_- u_- = d_+ \Delta u_+(0, y) + r_+ u_+, \quad y \in]0, 1[, \\ \text{(Skew.C.)} & (1-p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[. \end{cases}$$

Nous devons étudier l'équation spectrale

$$\mathcal{L}u = \sigma u,$$

dans un espace approprié \mathcal{E} , où u vérifie (Bound.C.), (Interf.C.) et (Skew.C.), c'est-à-dire

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Eqs)} \left\{ \begin{array}{l} d_- \Delta u_- - r_- u_- = \sigma u_- \quad \text{sur }]-l, 0[\times]0, h[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ = \sigma u_+ \quad \text{sur }]0, L[\times]0, h[\end{array} \right. \\ \text{(Bound.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 \quad \text{dans }]-l, L[\times \{h\} \\ u_- = 0 \quad \text{dans } \{-l\} \times]0, h[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \{L\} \times]0, h[\end{array} \right. \\ \text{(Interf.C.)} \quad u_- = u_+ \quad \text{sur } \{0\} \times]0, h[\\ \text{(Skew.C.)} \quad (1-p)d \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, h[. \end{array} \right.$$

alors on écrit le problème (2) dans E , comme suit :

$$(P1ASp) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} d_- v''_-(x) + d_- A v_-(x) - r_- v_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{sur }]-l, 0[\\ d_+ v''_+(x) + d_+ A v_+(x) + r_+ v_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \text{(BTS)} \left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(-l) = 0 \\ v'_+(L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(Transmi. C.)} \quad v_-(0) = v_+(0) \\ \text{(Skew. C.)} \quad (1-p)d_- v'_-(0^-) = pd_+ v'_+(0^+). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ici

$$v(x) = \begin{cases} v_-(x) & \text{sur }]-l, 0[\\ v_+(x) & \text{sur }]0, L[. \end{cases}$$

Et pour être complet, dans toute cette étude, la dimension par rapport à la variable cachée y (qui apparaît dans A) doit être considérée et aura son importance.

Cette étude des valeurs propres est très importante pour l'analyse du problème complet de l'évolution.

Là on utilise essentiellement Cantrell et Cosner [4], où ils détaillent cette étude dans une dimension spatiale. Dans notre travail, on analyse la situation analogue dans l'espace de deux dimensions. Nous chercherons les vecteurs propres de notre problème abstrait sous la forme suivante :

$$v_{\pm}(x) = w_{\pm}(x) \varphi_k.$$

Telle que $w_+(x)$ est la solution de l'équation spectrale

$$d_+ v''_+(x) + d_+ A v_+(x) + r_+ v_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{sur }]0, L[,$$

et $w_-(x)$ la solution de l'équation spectrale

$$d_-v''_-(x) + d_-Av_-(x) - r_-v_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{sur }]-l, 0[,$$

et φ_k sont les vecteurs propres correspondants de l'opérateur $d_\pm A$.

Chapitre 1

Notions et Rappels

Dans ce chapitre on donne quelques définitions, et notions utilisées dans ce travail. Nous considérons E un espace de Banach complexe.

1.1 Opérateurs linéaires fermés

1. Un opérateur linéaire A (de domaine de définition $D(A)$) dans E est un opérateur linéaire **fermé** si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que

$$x_n \rightarrow x \text{ et } Ax_n \rightarrow y,$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

2. On dit que A est **fermable** si et seulement s'il admet une extension fermée, c-à-d pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ vérifiant

$$x_n \rightarrow 0 \text{ et } Ax_n \rightarrow y,$$

on a $y = 0$.

1.2 Semi-groupes

Définition 1.1 Soit $(G(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille d'opérateurs linéaires continus dans E . On dit que cette famille forme un **semi-groupe** si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $G(0) = I$.
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}_+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Si, dans la définition ci-dessus, \mathbb{R}_+ est remplacé par \mathbb{R} , alors on dit que la famille $(G(t))_{t \in \mathbb{R}}$ constitue un **groupe**.

Définition 1.2 On dit que le semi-groupe $(G(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est **fortement continu** (et on le note C_0 semi-groupe) si et seulement si pour tout $x \in E$; l'application

$$\begin{aligned} G(t)x : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto G(t)x \end{aligned}$$

est continue i.e

$$\forall x \in E ; \lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_E = 0.$$

Définition 1.3 On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe $(G(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, l'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ \varphi \in E ; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$$A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

Définition 1.4 Soit le secteur $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ et pour $z \in \Delta$ soit $G(z)$ est un opérateur borné. La famille $(G(z))_{z \in \Delta} \subset \mathcal{L}(E)$ est dite **semi-groupe analytique** si

1. $G(0) = I_E$
2. $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$, pour tout $z_1, z_2 \in \Delta$
3. $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} G(z)\varphi = \varphi$, pour tout $\varphi \in E$
4. $z \rightarrow G(z)$ est analytique sur Δ .

1.3 Espaces d'interpolation

Soit E un espace de Banach. Pour $p \in [1, +\infty[$, on note par $L_*^p(\mathbb{R}_+, E)$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ à valeurs dans E et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit

$$L_*^\infty(\mathbb{R}_+, E) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E \text{ est fortement mesurable et } \sup_{0 < t < +\infty} \|f(t)\|_E < \infty\}.$$

Soient E_0, E_1 deux espaces de Banach, tels que $E_0 \cap E_1 \subset E_0 \subset E_0 + E_1$ et $E_0 \cap E_1 \subset E_1 \subset E_0 + E_1$.

Pour l'espace d'interpolation $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ on a les définitions équivalentes suivantes

Définition 1.5 On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta, p}$, $0 < \theta < 1$, $p \in [1, +\infty]$ si et seulement si,

$$\begin{cases} i) \forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1 \text{ tels que } x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \text{ et } t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.6 On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ si, et seulement il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_0 \cap E_1$ telle que

$$\begin{cases} i) x = \int_0^\infty u(s) \frac{ds}{s} \\ ii) t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \text{ et } t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.7 On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ si, et seulement si il existe une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow E_0 \cap E_1$ telle que

$$\begin{cases} i) x = \int_{\mathbb{R}} u(y) dy \\ ii) e^{-\theta y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0), \quad e^{(1-\theta)y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.8 (définition discrète) On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z} : x = v_n + w_n, \text{ avec } v_n \in E_0, w_n \in E_1 \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{-\theta n} v_n\|_{E_0}^p < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{(1-\theta)n} w_n\|_{E_1}^p < \infty. \end{cases}$$

1.4 Espaces de Hölder

Définition 1.9 Soient E un espace de Banach complexe et $C([0, 1], E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans E , muni de la norme

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{t \in [0, 1]} \|f(t)\|_E.$$

On considère, pour $0 < \theta < 1$, l'espace

$$C^\theta([0, 1], E) = \left\{ f \in C([0, 1], E) / \sup_{t-s \neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_E}{|t-s|^\theta} < +\infty, \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{t-s \neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_E}{|t-s|^\theta}.$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace **hölderien d'ordre** θ .

1.5 Théorème des traces

Théorème 1.1 On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ si, et seulement si, il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_0$ telle que

$$\begin{cases} i) t^\theta u \in L_*^p(E_0) \\ ii) t^\theta u' \in L_*^p(E_1) \\ iii) x = u(0), \text{ trace de } u \text{ en } 0. \end{cases}$$

Définition 1.10 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$, muni de sa norme du graphe :

$$\forall x \in D(A); \|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E.$$

On pose alors, en suivant les notations de P. Grisvard

$$D_A(\theta; p) = (D(A); E)_{1-\theta, p},$$

où $p \in [1; +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta; p)$ ainsi.

Théorème 1.2 *Soient $p \in [1; +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.*

1. *Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta; p) = \{x \in E : t^\theta A (A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}, \text{ si } p \neq +\infty$$

$$D_A(\theta; +\infty) = \left\{ x \in E : \sup_{t>0} \|t^\theta A (A - tI)^{-1} x\|_E \leq C < +\infty \right\},$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta; +\infty)} = \|x\|_E + \sup_{t>0} \|t^\theta A (A - tI)^{-1} x\|_E.$$

Voir P. Grisvard [19].

2. *Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E*

$$D_A(\theta; p) = \{x \in E : t^{-\theta} (e^{tA} - I) x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}.$$

Voir J. L. Lions [29].

3. *Si A génère un semi-groupe analytique borné dans E , alors*

$$D_A(\theta; p) = \{x \in E : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}.$$

1.6 Calculs fonctionnels de Dunford et \mathcal{H}^∞

Dans cette partie, on met en évidence une classe de fonctions permettant de définir l'image d'un opérateur sectoriel (voir chapitre 2, section 2), enfin, on introduit une notion assez nouvelle en analyse et introduite par A. McIntosh dans [31], à savoir le calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ .

1.6.1 Formule de Cauchy-Intégrale de Dunford-Riesz

Définition 1.11 *Soit U un ouvert de \mathbb{C} . On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes, de U dans \mathbb{C} .*

Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K , la formule de Cauchy assure que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K .

Définition 1.12 *Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(T)$ où T est un opérateur linéaire borné et f est holomorphe.*

Plus précisément si $T \in \mathcal{L}(E)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(T)$ (le spectre de T) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(T)$ et contenu dans U .

L'application

$$\begin{aligned} \phi : H(U) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto f(T) \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbre qui vérifie entre autre

$$(z^n)(T) = T^n \text{ si } n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit d'étendre, sous certaines conditions, ce calcul fonctionnel aux opérateurs sectoriels.

1.6.2 Fonctions holomorphes

On considère $\omega \in [0, \pi]$ et on définit

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\} & \text{si } \omega \in]0, \pi[\\]0, +\infty[& \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Nous abordons dans cette sous-section des classes de fonctions holomorphes définies de la manière suivante

Définition 1.13 Soit $\varphi \in]0, \pi[$. On désigne par :

1. $H(S_\varphi)$ l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur S_φ .
2. $H^\infty(S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H(S_\varphi)$ vérifiant

$$\sup_{z \in S_\varphi} |f(z)| < \infty$$

L'espace $H^\infty(S_\varphi)$ muni de la norme

$$|f|_\infty^\varphi = \sup \{|f(\lambda)| : |\arg \lambda| < \varphi\},$$

est un algèbre de Banach.

3. $H_0^\infty(S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H^\infty(S_\varphi)$ vérifiant

$$\exists s \in \mathbb{R}^+ : \sup_{z \in S_\varphi} \max \{|z|^s, |z|^{-s}\} |f(z)| < \infty.$$

4. $H_p(S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H^\infty(S_\varphi)$, qui admettent un prolongement holomorphe sur un voisinage de 0 et qui vérifient

$$\exists s > 0 / |f(z)| < O(|z|^{-s}), \text{ (quand } |z| \rightarrow +\infty).$$

La proposition suivante donne quelques caractérisations de l'espace $H_0^\infty(S_\varphi)$

Proposition 1.1 *Soit $\varphi \in]0, \pi[$ et soit $f : S_\varphi \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. La fonction f appartient à $H_0^\infty(S_\varphi)$.
2. Il existe $C \geq 0$ et $s > 0$ tels que

$$\forall z \in S_\varphi, |f(z)| \leq C \min \{|z|^s, |z|^{-s}\}$$

3. Il existe $C \geq 0$ et $s > 0$ tels que

$$\forall z \in S_\varphi, |f(z)| \leq C \frac{|z|^s}{1 + |z|^{2s}}$$

Il existe $C \geq 0$ et $s > 0$ tels que

$$\forall z \in S_\varphi, |f(z)| \leq C \left(\frac{|z|^s}{1 + |z|^s} \right)^2.$$

Pour la preuve voir [20]

1.6.3 Calcul fonctionnel de Dunford

On suppose que $\omega \in]0, \pi[$. Λ est un opérateur linéaire dans un espace de Banach complexe E est dit **sectoriel d'angle** ω si

1. $\sigma(\Lambda) \subset \overline{S_\omega}$ et
2. $M(\Lambda, \omega') := \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}} \|\lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1}\| < \infty$ pour tout $\omega' \in]\omega, \pi[$.

Nous écrivons alors cela $\Lambda \in \text{Sect}(\omega)$.

On considère donc ici $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\omega)$.

Définition 1.14 *Soit $f \in H_0^\infty(S_\varphi) \cup H_p(S_\varphi)$ où $\varphi \in]\pi, \omega[$. On pose alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où la courbe Γ est définie comme suit

1. Si $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$, on fixe $\omega' \in]\varphi, \omega[$ et on prend pour Γ , le bord orienté positivement de $S_{\omega'}$.
2. Si $f \in H_p(S_\varphi)$, on fixe $\omega' \in]\varphi, \omega[$ et on prend pour Γ , le bord orienté positivement de $S_{\omega'} \cup B(0, r)$. (où r est un réel strictement positif, choisis de sorte que f soit holomorphe au voisinage de $B(0, r)$), $f(A)$ ainsi défini ne dépend pas du choix de ω' ou r .

Définition 1.15 Si $f \in H_0^\infty(S_\varphi) + H_p(S_\varphi)$ alors

$$f = g + h,$$

où

$$g \in H_0^\infty(S_\varphi), \quad h \in H_p(S_\varphi).$$

On pose alors

$$f(A) = g(A) + h(A).$$

Proposition 1.2 Si $f, g \in H_0^\infty(S_\varphi) + H_p(S_\varphi)$ alors

1. $f(A) \in \mathcal{L}(E)$.
2. $(cf + dg)(A) = c(f(A)) + d(g(A))$ où $c, d \in \mathbb{C}$.

1.6.4 Extention du calcul fonctionnel

On considère encore $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\omega)$.

Définition 1.16 On pose, pour $\varphi \in]0, \pi[$

$$\mathcal{A}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) / \exists n \in \mathbb{N} : \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in H_0^\infty(S_\varphi) + H_p(S_\varphi) \right\}.$$

Notons que $\mathcal{A}(S_\varphi)$ contient $H_0^\infty(S_\varphi) + H_p(S_\varphi)$, mais aussi toutes les fonctions rationnelles qui ont leurs pôles hors de $\overline{S_\varphi}$ et en particulier les constantes.

Définition 1.17 Pour tout $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$ où $\varphi \in]\omega, \pi[$, on définit $f(A)$ en posant

$$f(A) = (I + A)^n \left(\frac{f(z)}{(1+z)^n} \right) (A).$$

Les principales propriétés de ce calcul fonctionnel étendu sont données ci-dessous.

Proposition 1.3 Si $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$ avec $\varphi \in]\omega, \pi[$, alors

1. $f(A)$ est un opérateur fermé sur E .
2. Si A est borné alors $f(A)$ est borné.
3. $1(A) = I$, $(z^n)(A) = A^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\lambda \notin \overline{S_\varphi} \implies \left(\frac{f(z)}{\lambda - z} \right) (A) = f(A) (\lambda I - A)^{-1}$ et en particulier

$$\left(\frac{1}{\lambda - z} \right) (A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Remarque 1.1 Dans le cas particulier où A est injectif et dans l'optique de définir A^α , pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à une nouvelle classe de fonctions.

1. On pose pour $\varphi \in]0, \pi[$

$$\mathcal{B}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi) / \exists n \in \mathbb{N} : \frac{z^n f(z)}{(1+z)2^n} \in H_0^\infty(S_\varphi) \right\}.$$

2. Si A est injectif, pour tout $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$, ($\varphi \in]\omega, \pi[$), on définit $f(A)$ en posant

$$f(A) = ((1+A)^2 A^{-1})^n \left(\frac{z^n f(z)}{(1+z)2^n} \right) (A).$$

Proposition 1.4 *Si $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$ avec $\varphi \in]\omega, \pi[$, alors*

1. $f(A)$ est un opérateur fermé sur E .
2. Si A est borné et inversible alors $f(A)$ est borné.

Remarque 1.2 *Si f est dans l'intersection de deux des espaces de fonctions holomorphes précédemment définis, $f(A)$ admet alors deux formules de définition et ces formules coïncident.*

1.6.5 Calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞

Le calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ est nouveau concept important, et il étroitement lié au calcul fonctionnel de Dunford pour les opérateurs sectoriels. Cette notion a été traitée, par exemple, par A. McIntosh (voir [31]) et par M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi (voir [8]). Les preuves de certains résultats (dans un cadre plus général) cités ici ont été effectuées par Dore et Venni (voir [13]).

Considérons $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\omega)$, on a la définition suivante

Définition 1.18 *L'opérateur A admet un calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ borné s'il existe $\varphi > \omega$ et $C_\varphi > 0$ tels que*

$$\forall f \in H^\infty(S_\varphi), \text{ on ait } \|f(A)\| \leq C_\varphi |f|_\infty^\varphi, \quad (1.1)$$

avec

$$|f|_\infty^\varphi = \sup \{ |f(\lambda)| : |\arg \lambda| < \varphi \}.$$

On note par $\mathcal{H}^\infty(E)$ l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E admettant un calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ borné, et par

$$\varphi_A^\infty = \inf \{ \varphi > \omega : 1.1 \text{ est vrai} \}, \text{ l'angle } \mathcal{H}^\infty.$$

Il est difficile dans la pratique de montrer qu'un opérateur admet un calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ , mais beaucoup d'opérateurs ont cette propriété. Signalons à titre illustratif (voir [10]).

1. Opérateur m-accrétif dans un espace de Hilbert.
2. Générateur d'un C_0 -semi-groupe borné sur les espaces L^p , $1 < p < \infty$.
3. Générateur positif (ou négatif) d'un semi-groupe de contraction sur les espaces L^p , $1 < p < \infty$.

Maintenant, nous donnons quelques résultats sur le calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ pour les opérateurs injectifs et sectoriels.

Proposition 1.5 Soit $\varphi \in]0, \pi[$ et soit $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense et vérifiant la propriété suivante

$$\exists C_\varphi > 0 : \forall f \in H_0^\infty(S_\varphi), \text{ on ait } \|f(A)\| \leq C_\varphi |f|_\infty^\varphi.$$

Alors, l'opérateur A admet un calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ borné.

Preuve. Voir [8], corollaire 2.2. ■

Proposition 1.6 Soient $\varphi \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense. Soient f et g deux éléments de $H_p(S_\varphi)$. Alors

$$f(A) + g(A) \subseteq (f + g)(A),$$

et

$$f(A)g(A) \subseteq (fg)(A).$$

Dans le cas où $g \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$f(A) + g(A) = (f + g)(A),$$

et

$$f(A)g(A) = (fg)(A).$$

Si en particulier A admet un calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ borné, alors

$$\begin{aligned} \phi : H^\infty(S_\varphi) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto f(A), \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbre.

Preuve. Voir [8] ■

Proposition 1.7 Soient $\varphi \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense. Soit f un élément non identiquement nul de $H_p(S_\varphi)$, tel que

$$1/f \in H_p(S_\varphi) \quad \text{et} \quad 1/f \in \mathcal{L}(E).$$

Alors $f(A)$ admet un inverse borné donné par la formule suivante

$$[f(A)]^{-1} = 1/f(A).$$

Preuve. Voir [12] Proposition 4.3. ■

Remarque 1.3 Pour un opérateur A sectoriel d'angle spectral α , il est possible de définir sa racine carré $(A)^{1/2}$ (Voir [15]). De plus la racine carré $(A)^{1/2}$ est aussi un opérateur sectoriel d'angle spectral $\alpha/2$ (voir [15]). La proposition suivante donne un résultat analogue sur le calcul \mathcal{H}^∞ .

Proposition 1.8 Soient $\varphi \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense. On suppose que A admet un calcul fonctionnel $\mathcal{H}^\infty(S_\varphi)$. Alors l'opérateur

$$B := (A)^{1/2},$$

est sectoriel, injectif à image dense, et admet un calcul fonctionnel $\mathcal{H}^\infty(S_{\varphi/2})$.

Preuve. Voir [12], proposition 4.4. ■

On rappelle que pour un opérateur A sectoriel d'angle spectral appartenant à $]0, \pi/2[$, alors $-A$ est générateur d'un semi-groupe analytique borné (voir [14]). Maintenant, si de plus l'opérateur A est injectif et à image dense, le semi-groupe peut alors être obtenu par l'intermédiaire du calcul fonctionnel \mathcal{H}^∞ . D'où la proposition suivante

Proposition 1.9 Soient $\varphi \in]0, \pi/2[$ et $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense. Pour $t \in [0, +\infty[$, on considère la fonction $f_t \in \mathcal{H}^\infty(S_{\pi/2})$, définie par

$$\begin{aligned} f_t : \mathcal{H}^\infty(S_{\pi/2}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_t(z) = e^{-tz}. \end{aligned}$$

Alors $\forall t > 0$, l'opérateur $f_t(A)$ est borné et $(f_t(A))_{t>0}$ est le semi-groupe analytique généré par $-A$.

Preuve. Voir [12], proposition 4.4. ■

Nous terminons cette section en donnant un résultat de convergence.

Proposition 1.10 Soient $\varphi \in]0, \pi/2[$ et $A \in \text{Sect}(\varphi)$, un opérateur injectif à image dense. Soit $\delta \in]0, 1]$ et considérons les fonctions $f_\delta, g \in \mathcal{H}^\infty(S_\varphi)$ telles que les hypothèses suivantes soient vérifiées

1. $f_\delta \longrightarrow g$ presque partout sur S_φ lorsque $\delta \longrightarrow 0$,
2. $\sup_{\delta \in]0, 1]} |f_\delta|_\infty^\varphi < \infty$.
3. $f_\delta(A)$ est uniformément borné.

Alors $g(A)$ est borné ; et $f_\delta(A)$ converge fortement vers $g(A)$ dans $\mathcal{L}(E)$, lorsque $\delta \longrightarrow 0$.

1.7 Dynamique de population

Une **population** est un groupe d'organismes vivant dans le **même habitat** qui appartiennent à la même espèce.

1.7.1 Caractéristiques d'une population

Dynamique de la population : le changement de la population en raison de :

1. **Taille de la population :** nombre d'individus.
2. **Densité de la population :** taille de la population dans un certain espace à un moment donné.
3. **Dispersion de la population :** répartition spatiale de l'habitat.
4. **Structure par âge :** proportion de personnes dans chaque groupe d'âge dans la population.

Démographie : C'est l'étude statistique des populations, faire des prédictions sur la façon dont une population va changer.

Quelques principales caractéristiques des populations :

1. **La taille de la population** : Nombre d'individus dans une zone.

Taux de croissance : Taux de natalité (**natalité**)-Taux de mortalité (**mortalité**).

Combien de personnes sont nés (vs) combien meurent.

$$\text{Taux de natalité (b)} - \text{Taux de mortalité (d)} = \text{Taux d'accroissement naturel (r)}.$$

Natalité : Nombre d'individus ajoutés par la reproduction.

Taux brut de natalité : Naissances pour 1000.

Taux de fécondité total : Nombre moyen d'enfants nés vivants par femme dans sa vie.

Mortalité : Nombre d'individus décédés.

Taux brut de mortalité **Décès pour 1000**

2. **La densité de la population** : (ou la densité de population écologique) : Est la quantité d'individus dans une population par unité de surface de l'habitat. Donc c'est la mesure de la population par unité de surface ou de volume unitaire.

Certaines espèces existent dans des densités élevées :-Souris.

Certaines espèces existent en faible densité :-lions de montagne. La mesure de la population par unité de surface ou de volume unitaire est donnée par

$$\text{Densité pop} = \text{nombre de personnes} \div \text{unité d'espace.}$$

$$D_P = \frac{N}{S}.$$

La densité dépend de

- (a) La structure sociale (population)
- (b) La relation d'accouplement.
- (c) La période de l'année.

3. **Les facteurs qui affectent la densité** :

(a) **Immigration** : Circulation des personnes **dans** une population.

(b) **Emigration** : Circulation des personnes **en dehors** d'une population.

(c) **Facteurs dépendent de la densité** : Les facteurs biotiques dans l'environnement qui ont un effet quand la taille de la population augmente de plus en plus.

Exemples : maladie, compétition, parasites.

(d) **Facteurs indépendant de la densité** : Les facteurs abiotiques dans l'environnement qui affectent les populations indépendamment de leur densité.

Exemples : température, tempêtes, destruction de l'habitat, sécheresse, facteurs qui influent sur l'avenir de la croissance démographique.

4. **Dispersion de la population** : La dispersion de la population est la répartition spatiale de la distribution.

Il y a trois classifications principales de la dispersion d'une population :

(a) agglutinées (clumped), (b) uniforme, (c) aléatoire (Random).

(a) **Agglutinées** (clumped) : les individus sont regroupés dans des groupes.

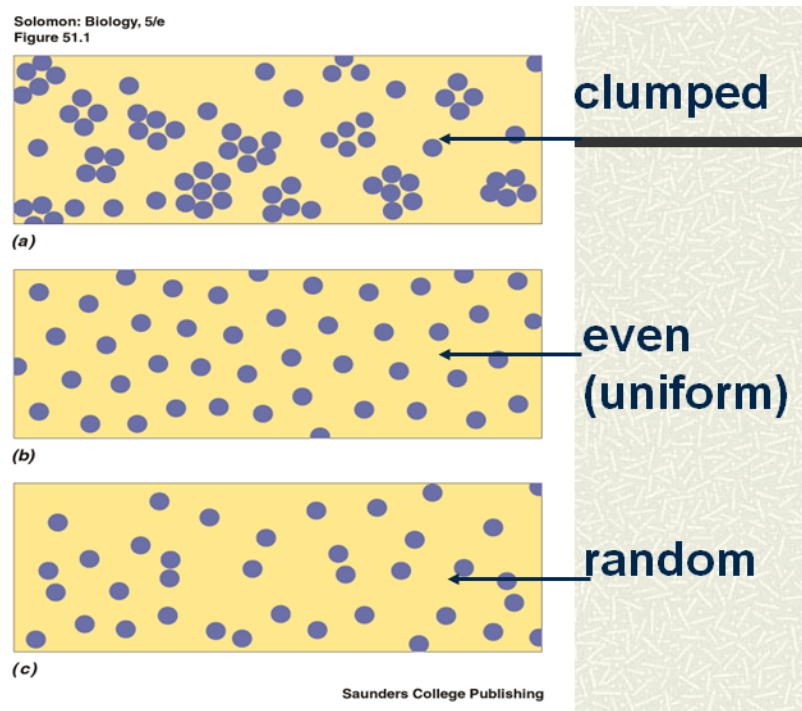
Exemple : Oiseaux grégaires.

(b) **Uniforme** : Les individus sont régulièrement espacés dans l'environnement.

Exemple : Créosote brousse en raison de l'antagonisme entre les individus.

(c) **Au hasard (Random)** : Les individus sont dispersés au hasard dans l'environnement

Exemple : Pissenlits en raison de la distribution aléatoire des ressources dans l'environnement.



Dispersion de la population

4. Pyramide des ages :

La structure par âge d'une population est généralement représentée graphiquement.

La population est généralement divisée en prereproductives, reproductives et postreproductives.

La structure par âge d'une population détermine si la taille va croître, diminuer ou stagner.

1.7.2 La croissance de la population

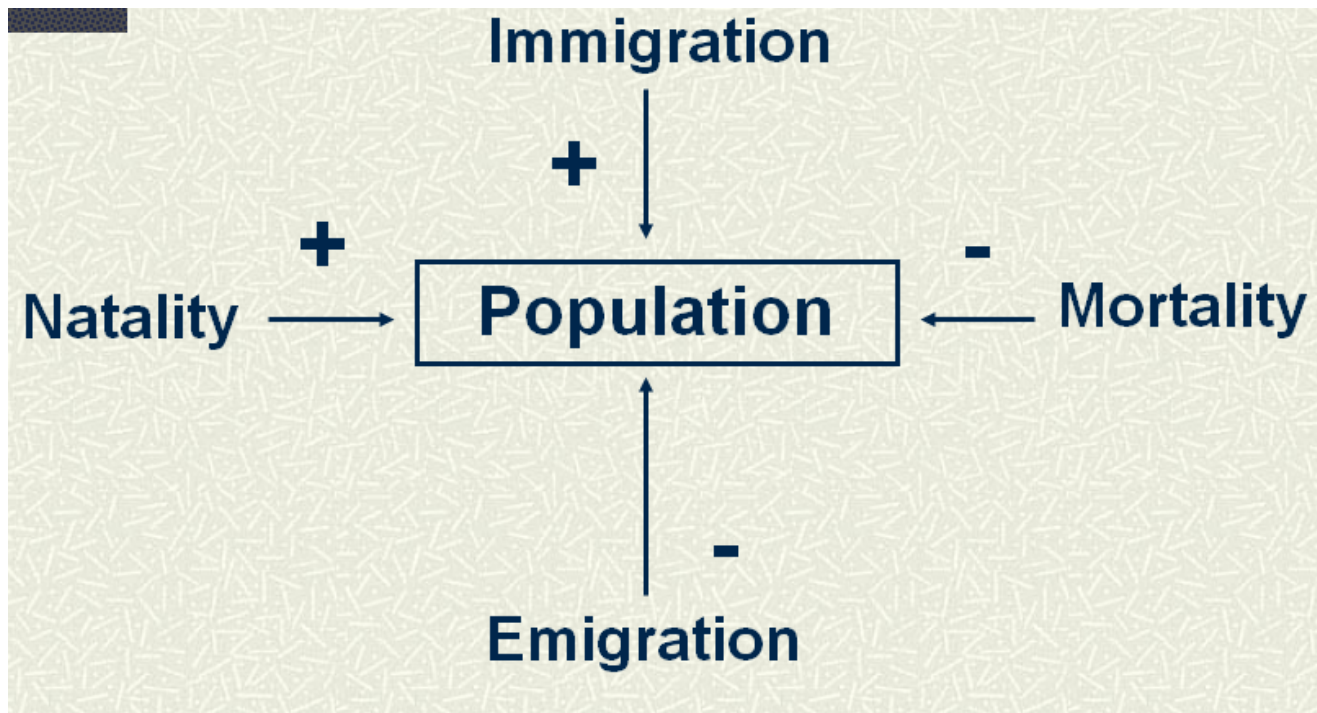
Les facteurs qui influent sur l'augmentation et la diminution de la taille d'une population d'organismes au fil du temps sont :

La disponibilité de nourriture- les prédateurs- les parasites- des événements catastrophiques- la concurrence d'autres espèces- la migration- l'appauvrissement de l'habitat.

La croissance démographique dépend de :

1. Taux de natalité.
2. Taux de mortalité.
3. Les taux d'immigration (dans la zone).

4. Taux d'émigration (zone de sortie).



Les populations montrent deux types de croissance :

1. **Exponentiel** : Courbe en forme de J , la croissance est **indépendante** de la densité de la population.
2. **Logistique** : Courbe en forme de S , la croissance est **dépendante** de la densité de la population.

Chapitre 2

Lemmes techniques

Dans ce chapitre on énonce quelques lemmes techniques qui sont très utiles pour la suite de ce travail.

On considère A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ vérifiant l'hypothèse d'ellipticité selon Krein [25] suivante :

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda} \quad (2.1)$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A .

L'hypothèse (2.1) implique qu'il existe $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $r_0 > 0$ tels que

$$\rho(A) \supset s(r_0, \theta_0),$$

où $s(r_0, \theta_0)$ est défini par

$$s(r_0, \theta_0) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \geq r_0 \text{ et } |\arg z| < \theta_0\} \cup B(0, r_0),$$

où l'estimation (2.1) est encore vérifiée pour $\lambda \in s(r_0, \theta_0)$.

Pour les mêmes r_0 et θ_0 ci-dessus, on définit les secteurs suivants :

$$\Sigma_{r_0, \theta_0} = \mathbb{C} \setminus s(r_0, \theta_0),$$

et

$$S(r_0, \theta_0) = \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |t| \geq \sqrt{r_0} \text{ et } |\arg t| \leq (\pi - \theta_0)/2\}.$$

On considérera la courbe γ de Jordan joignant $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ et définie par

$$\gamma = \partial \Sigma_{r_0, \theta_0},$$

et

$$\begin{cases} c = \sin \theta_0 / 2 \\ c_0 = \sqrt{r_0} c \\ c_1 = \frac{c_0}{1 + c_0}, \quad c_2 = \frac{2c_0}{1 + 2c_0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Notons que pour tout $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$, il est clair que

$$\operatorname{Re} \sqrt{-z} \geq c_0.$$

2.1 Lemmes

(pour plus de détails voir [2] ou [16])

Lemme 2.1 Soit $(z_i)_{i=1,2,\dots,n} \subset S(r_0, \theta_0)$. Alors

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \geq \left(\sum_{i=1}^n |z_i| \right) \sin(\theta_0/2).$$

Preuve. Pour $z_i \in S(r_0, \theta_0)$ avec $i = 1, 2, \dots, n$ et $z_i \neq 0$, nous avons

$$\cos(\arg(z_i)) > 0,$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| &\geq \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \cos \left(\arg \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} z_i \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i| \cos(\arg(z_i)). \end{aligned}$$

Puisque $z_i \in S(r_0, \theta_0)$, on a

$$-(\pi - \theta_0)/2 \leq \arg(z_i) \leq (\pi - \theta_0)/2,$$

ce qui nous donne

$$\cos(\arg(z_i)) \geq \cos(\pi - \theta_0)/2 = \sin(\theta_0/2) = c.$$

■

Remarque 2.1 Pour $z \in \gamma$, $|z| \geq r_0$, $\delta > 0$ et $x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[$, on a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(\sqrt{-z}|x|) > 0 \\ |\arg(\sqrt{-z}\delta)| = |\arg(\sqrt{-z}x)| = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} > 0 \\ \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) = \delta |z|^{1/2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) = \delta |z|^{1/2} \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right). \end{cases}$$

Lemme 2.2 Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ on a :

$$\left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq C_{\theta_0} = \min \left(1 - e^{-\pi/2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}; 1 - e^{-r_0^{1/2}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) \right) > 0$$

Preuve. Soit $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ avec $|z| = r_0$ (on rappelle que r_0 est assez petit) on a

$$\left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq 1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos \nu} = 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})},$$

avec $\nu \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right]$.

Pour $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ avec $|z| > r_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right|^2 &= \left|1 + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} - i \operatorname{Im} \sqrt{-z}}\right|^2 \\
&= \left|e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} (e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + e^{-i \operatorname{Im} \sqrt{-z}})\right|^2 \\
&= e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 2e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) + 1\right) \\
&= \left(e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1\right) + 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \leq \pi / \left[2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)\right]$, alors

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| \leq \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2},$$

ainsi

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \geq 0,$$

donc

$$\left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq 1.$$

Si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \geq \pi / \left[2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)\right]$, on a

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| = \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \leq 0,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right|^2 &\geq e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1 - 2e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} = \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}\right)^2 \\
&\geq \left(1 - e^{-\pi/2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.3 Pour tout $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ on a :

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq \frac{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}{1 + \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \geq c_1,$$

(c_1 est la constante définie au 2.2).

Preuve. pour la démonstration nous avons besoin de l'inégalité suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1 - e^{-x} \geq 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

alors pour tout $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ nous avons

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq 1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}},$$

et comme

$$1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \geq 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{Re} \sqrt{-z}} = \frac{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}{1 + \operatorname{Re} \sqrt{-z}},$$

donc

$$\left| 1 - e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq c_1.$$

■

Remarque 2.2 De la même façon on a pour tout $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$

$$\left| 1 + e^{-2\delta \sqrt{-z}} \right| \geq C_{\theta_0} > 0,$$

et

$$\left| 1 - e^{-2\delta \sqrt{-z}} \right| \geq \delta \cdot c_1 > 0,$$

(les constantes C_{θ_0}, c_1 sont indépendantes de δ).

Lemme 2.4 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense vérifiant l'hypothèse d'ellipticité (2.1), alors :

$$\overline{D(A)} = \overline{D(\sqrt{-A})},$$

Preuve. On rappelle que :

$$D(A) \subset D(\sqrt{-A})$$

donc

$$\overline{D(A)} \subset \overline{D(\sqrt{-A})}$$

cette inclusion est évidente.

D'autre part, soit $x \in \overline{D(\sqrt{-A})}$ alors

$$x = \lim_n x_n,$$

où

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in D(\sqrt{-A}),$$

mais

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^{-1/2} (A - z)^{-1} y_n dz,$$

alors

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in \overline{D(A)},$$

vu que l'intégrale existe et dont les éléments à l'intérieur sont dans $D(A)$. Par conséquent

$$x = \lim_n x_n \in \overline{D(A)}.$$

Pour une autre preuve de ce lemme voir [20]. ■

Remarque 2.3 On peut aussi montrer de la même manière que

$$\overline{D(A)} \subset \overline{D\left(\left(\sqrt{-A}\right)^\nu\right)},$$

pour tout $\nu \in]0, 1[$.

Lemme 2.5 Pour r assez grand ($r > \lambda$), $\forall z \in \gamma_\lambda, \exists k > 0$ tels que

$$|z + r| \geq kr \implies |z + r| \geq k|z|,$$

et

$$|z - r| \geq kr \implies |z - r| \geq k|z|.$$

Lemme 2.6 $\exists C > 0$ ne dépendant que de γ tel que pour tout $r > 0$ on a

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} \leq \frac{C}{r^\alpha}, \forall z \in \gamma.$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent. On pose

$$\gamma = \gamma_r \cup (\gamma - \gamma_r),$$

avec

$$\gamma_\lambda = \{z \in \gamma : |z| \leq r\},$$

et

$$\gamma - \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| > r\}.$$

Alors

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} = \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} + \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} &= \int_{\substack{z \in \gamma \\ |z| \leq r}} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} \\ &\leq \frac{k}{r} \int_0^r \frac{|dz|}{|z|^\alpha} \\ &\leq \frac{k}{r} [|z|^{1-\alpha}]_0^r \\ &\leq \frac{k}{r} r^{1-\alpha} = \frac{k}{r^\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} &= \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z \pm r||z|^\alpha} \\ &\leq k \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \\ &\leq k [|z|^{-\alpha}]_r^{+\infty} = \frac{k}{r^\alpha}. \end{aligned}$$

Voir aussi [28] ■

2.2 Quelques résultats sur les opérateurs sectoriels

On considère $\omega \in [0, \pi]$ et on définit

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\} & \text{si } \omega \in]0, \pi[\\]0, +\infty[& \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.7 Soit $\eta \in]0, \pi/2[$. Pour tous $z \in S_\eta$, on a

1. $|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| < \eta$
2. $|1 + e^{-z}| \geq C_\eta = 1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan \eta}} > 0$
3. $\frac{|z| \cos \eta}{1 + |z| \cos \eta} \leq |1 - e^{-z}| \leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}$.

La preuve complète de ce lemme est dans [11], Proposition 4.10, p.1880.

Lemme 2.8 Soient $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a

$$|w + z| \geq (|w| + |z|) \left| \cos \frac{\arg w - \arg z}{2} \right|.$$

Voir Proposition 4.9, p.1879 dans [11].

Maintenant on rappelle quelques résultats de Haase [20]. On suppose que $\omega \in [0, \pi[$. Λ un opérateur linéaire dans un espace de Banach complexe E , est dit **sectoriel d'angle ω** si

1. $\sigma(\Lambda) \subset \overline{S_\omega}$ et
2. $M(\Lambda, \omega') := \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}} \|\lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1}\| < \infty$ pour tout $\omega' \in]\omega, \pi[$.

Nous écrivons alors cela $\Lambda \in \text{Sect}(\omega)$.

L'angle suivant

$$\omega_A := \min \{ \omega \in [0, \pi[: \Lambda \in \text{Sect}(\omega) \},$$

s'appelle l'**angle spectral** de Λ . Nous rappelons les propriétés suivantes de l'ensemble $\text{Sect}(\omega)$. Il est clair que l'assertion 2 implique nécessairement que Λ est fermé.

Proposition 2.1 Si $]-\infty, 0[\subset \rho(\Lambda)$ et

$$M(\Lambda) := M(\Lambda, \pi) := \sup_{t > 0} \|t(\Lambda + tI)^{-1}\| < \infty,$$

alors $M(\Lambda) \geq 1$ et

$$\Lambda \in \text{Sect}(\pi - \arcsin(1/M(\Lambda))).$$

Soit Λ est un opérateur sectoriel et soit $\nu \in]0, 1/2[$. Alors $\Lambda^\nu \in \text{Sect}(\nu\omega_A)$, ainsi $-\Lambda^\nu$ génère un semigroupe analytique. Voir Haase [20] p. 80-81.

La proposition suivante donne quelques détails sur les propriétés des opérateurs sectoriels.

Proposition 2.2 Soient $\omega' \in]0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\omega)$. On a les résultats suivants :

1. Si A est injectif alors $A^{-1} \in \text{Sect}(\omega)$
2. La famille d'opérateurs $(A + \delta I)_{\delta > 0}$ est uniformément sectorielle d'angle ω , cela est justifié par l'inégalité

$$M(A + \delta I, \omega') \leq c(\alpha') M(A, \omega'), \quad (\delta > 0, \omega' \in (\alpha, \pi))$$

3. La famille d'opérateurs $(\epsilon A)_{\epsilon > 0}$ est uniformément sectorielle d'angle α , cela est justifié par l'égalité

$$M((\epsilon A)_{\epsilon > 0}, \omega') = M(A, \omega'), \quad \forall \omega' \in (\omega, \pi) \text{ et } \forall \epsilon > 0.$$

Pour la preuve voir Haase [20].

On considère maintenant l'espace suivant

$$H^\infty(S_\omega) = \{f : f \text{ est une fonction holomorphe et bornée sur } S_\omega\},$$

avec $\omega \in]0, \pi[$; nous rappelons que si $f \in H^\infty(S_\omega)$ alors $1/f \in H^\infty(S_\omega)$ et

$$(1/f)(\Lambda) \in \mathcal{L}(E),$$

alors $f(\Lambda)$ est inversible d'inverse borné et

$$[f(\Lambda)]^{-1} = (1/f)(\Lambda), \quad (2.3)$$

voir par exemple [8].

2.3 Quelques résultats sur les semigroupes analytiques

Soit $(B, D(B))$ un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach complexe E . On suppose que B est inversible et génère un semigroupe analytique $(e^{tB})_{t > 0}$, qui n'est pas nécessairement continu en 0. Alors il existe deux constantes positives a et M tels que pour tout $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \|e^{tB}\|_{L(E)} \leq M e^{-at} \\ \|B^m e^{tB}\|_{L(E)} \leq M_m t^{-m} e^{-at}. \end{cases}$$

Voir par exemple [34], p. 70, propriétés (6.5), (6.6) et (6.7).

On rappelle les résultats suivants de [36]

Lemme 2.9 Soit $\phi \in E$ et $\chi \in C^\theta([0, T]; E)$ avec $T > 0$, alors

1. $e^{B\xi}\phi \longrightarrow \phi$ quand $\xi \longrightarrow 0^+$ ssi $\phi \in \overline{D(B)}$ (voir [36] proposition 1.2, p.20)
2. $\xi \mapsto e^{B\xi}\phi \in C^\theta([0, T]; E)$ ssi $\phi \in D_B(\theta, +\infty)$ (voir [36] Proposition 1.12; p.29)
3. $\xi \mapsto \int_0^\xi B e^{(\xi-t)B} [\chi(t) - \chi(\xi)] dt \in C^\theta([0, T]; E) \cap B(0, T; D_B(\theta, +\infty))$ (voir [36] Théorème 4.5; p.53).

Ici $C^\theta([0, T]; E)$, $\theta \in]0, 1[$, est un espace de Hölder d'exposant θ .

Proposition 2.3 Soit L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $(e^{xL})_{x \geq 0}$.

1. Soit $\varphi \in E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes (voir [36])

(a) $e^{-L}\varphi \in C([0, 1]; E)$.

(b) $\varphi \in \overline{D(L)}$.

2. Soit $\theta \in]0, 1[$, $g \in C^\theta([0, 1]; E)$, $\varphi \in E$. Posons

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L}g(s) ds, \quad x \in [0, 1].$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes (voir [36])

(a) $S \in C^1([0, 1]; E) \cap C([0, 1]; D(L))$.

(b) $\varphi \in D(L)$ et $g(0) + L\varphi \in \overline{D(L)}$.

On rappelle que pour un opérateur P dans E qui vérifie $\rho(P) \supset]0, +\infty[$ et

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \|(P - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

les propriétés de l'espace d'interpolation $D_P(\theta, +\infty)$

$$D_P(\theta, +\infty) = \left\{ x \in E : \sup_{t > 0} \|t^\theta P(P - tI)^{-1}x\| < +\infty \right\}.$$

sont données dans [19].

Proposition 2.4 Soient $\theta \in]0, 1[$ et L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $(e^{xL})_{x \geq 0}$.

1. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $e^{-L}\varphi \in C^\theta([0, 1]; E)$.

(b) $\varphi \in D_L(\theta, +\infty)$.

2. Soit $g \in C([0, 1]; E)$ et $\varphi \in E$. Posons

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L}g(s) ds, \quad x \in [0, 1].$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $S \in C^{1,\theta}([0, 1]; E) \cap C^\theta([0, 1]; D(L))$.

(b) $g \in C^\theta([0, 1]; E)$, $\varphi \in D(L)$ et $g(0) + L\varphi \in D_L(\theta, +\infty)$.

3. Soit $g \in C^\theta([0, 1]; E)$. Alors

$$L \int_0^1 e^{sL}(g(s) - g(0)) ds \in D_L(\theta, +\infty).$$

Pour plus de détails voir [36].

Chapitre 3

Le problème linéaire stationnaire

Cette partie est consacrée à l'étude du problème linéaire stationnaire. (voir [26]).

3.1 Notre modèle

On considère l'habitat global

$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

tel que

$$\begin{cases} \Omega_- =]-l, 0[\times]0, 1[\\ \Omega_0 =]0, 2L[\times]0, 1[\\ \Omega_+ =]2L, 2L + l[\times]0, 1[, \end{cases}$$

avec $l, L > 0$.

L'équation de la diffusion est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d \cdot \Delta u(t, x, y) + F(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_- \\ d_0 \cdot \Delta u(t, x, y) + F_0(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_0 \\ d \cdot \Delta u(t, x, y) + F(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_+, \end{cases} \quad (3.1)$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y) & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_0(x, y) & \text{dans } \Omega_0 \\ \varphi_+(x, y) & \text{dans } \Omega_+. \end{cases} \quad (3.2)$$

Posons

$$u_- = u_{]0, T[\times \Omega_-}, \quad u_0 = u_{]0, T[\times \Omega_0}, \quad u_+ = u_{]0, T[\times \Omega_+},$$

les conditions aux bords donnent

$$\begin{cases} u_-(t, -l, y) = f_-(t, y), \quad y \in]0, 1[\\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, \quad x \in]-l, 0[\\ u_0(t, x, 0) = u_0(t, x, 1) = 0, \quad x \in]0, 2L[\\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, \quad x \in]2L, 2L + l[\\ u_+(t, 2L + l, y) = f_+(t, y), \quad y \in]0, 1[. \end{cases} \quad (3.3a)$$

La continuité du flux à travers les interfaces $\Gamma_0 = \{0\} \times]0, 1[$, $\Gamma_{2L} = \{2L\} \times]0, 1[$ est traduite par les conditions

$$\begin{cases} u_0(t, 0, y) = u_-(t, 0, y), & y \in]0, 1[\\ u_0(t, 2L, y) = u_+(t, 2L, y), & y \in]0, 1[\end{cases} \quad (3.4)$$

et les conditions de l'assymétrie (the skewness interface conditions)

$$\begin{cases} (1-p)d \frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = p d_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, 0, y), & y \in]0, 1[\\ p d_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, 2L, y) = (1-p)d \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 2L, y), & y \in]0, 1[\end{cases} \quad (3.5)$$

ici $p \in]0, 1[$ représente la probabilité de se déplacer à droite de l'interface Γ_0 , (et donc $1-p$ à sa gauche). Lorsque

$$p = 1/2,$$

les conditions de transmission dans (*Skew.C.*) traduisent tout simplement la continuité du flux à travers les interfaces $\{0\} \times]0, 1[$ et $\{2L\} \times]0, 1[$.

Ici $u(t, x, y)$ représente la densité de la population, Ω_0 est le refuge, alors $\Omega_- \cup \Omega_+$ sont deux zones tampon "buffer zone" (habitat de gauche et habitat de droite) auxquels correspondent les coefficients de diffusion d_0 et d . L'équation (3.1) désigne la diffusion dans les habitats avec F_0 et F représentent la croissance et la décroissance de la population dans les zones tampons respectives. Dans les conditions aux bords (3.3a) la densité de la population est fixée sur $\{-l\} \times]0, 1[$ et $\{2L+l\} \times]0, 1[$. Les conditions (3.4) explicitent la continuité de la densité de la population, les conditions dans (3.5) sont basées sur la notion du mouvement brownien "biaisé (skew brownian motion) caractérisée par le paramètre $p \in]0, 1[$.

On supposera dans notre travail le cas intéressant du mouvement brownien biaisé correspondant à l'hypothèse

$$p \neq 1/2. \quad (3.6)$$

Ici, on a privilégié la direction de déplacement de la population dans l'axe de la variable x . On a supposé aussi, qu'en dehors de l'habitat global $\Omega =]-l, 2L+l[\times \mathbb{k}$ avec $\mathbb{k} =]0, 1[$, (Pour simplifier, on prendra $\mathbb{k} =]0, 1[$ et (x, y) désignera la variable générique de Ω .) la région extérieure est complètement hostile (d'où la condition au limite sur $]-l, 2L+l[\times \partial\mathbb{k}$) excepté sur $\{-l\} \times \mathbb{k}$ et $\{2L+l\} \times \mathbb{k}$ où on pourrait aussi supposer nulle la densité).

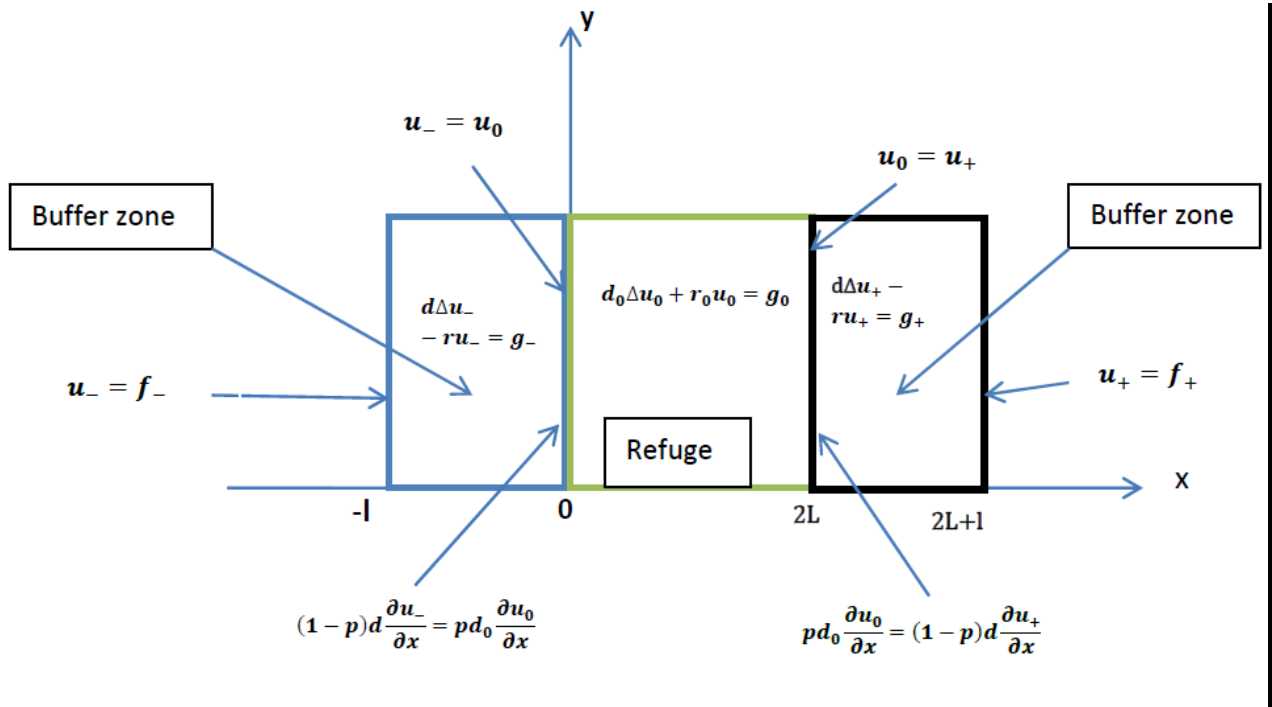
Ce modèle peut représenter le comportement d'une population de poissons dans une rivière où les interfaces $\{0\} \times \mathbb{k}$ et $\{2L\} \times \mathbb{k}$ peuvent être des "filets".

On va se focaliser sur l'étude complète du problème stationnaire linéarisé. Notre méthode sera basée essentiellement sur les techniques des équations différentielles opérationnelles et la théorie des semigroupes.

Donc on considère uniquement la partie linéaire des fonctions logistiques

$$\begin{cases} F(u(t, x, y)) = -ru_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ F_0(u(t, x, y)) = r_0 u_0 & \text{sur }]0, 2L[\times]0, 1[\\ F(u(t, x, y)) = -ru_+ & \text{sur }]2L, 2L+l[\times]0, 1[\end{cases}$$

ici r_0 est le taux de **croissance** dans le refuge, et r le taux de **mortalité** dans les zones tampons.



Densité de population dans trois habitats.

Par conséquent, notre problème stationnaire devient

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Eqs)} \left\{ \begin{array}{l} d\Delta u_- - ru_- = g_- \quad \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_0\Delta u_0 + r_0u_0 = g_0 \quad \text{sur }]0, 2L[\times]0, 1[\\ d\Delta u_+ - ru_+ = g_+ \quad \text{sur }]2L, 2L+l[\times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Bound.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{dans }]-l, 2L+l[\times \partial\mathbb{k} \\ u_- = f_- \quad \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ u_+ = f_+ \quad \text{dans } \{2L+l\} \times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Interf.C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_- = u_0 \quad \text{sur } \{0\} \times]0, 1[\\ u_0 = u_+ \quad \text{sur } \{2L\} \times]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Skew.C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1-p)d\frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_0\frac{\partial u_0}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[\\ pd_0\frac{\partial u_0}{\partial x}(2L, y) = (1-p)d\frac{\partial u_+}{\partial x}(2L, y), \quad y \in]0, 1[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

où g_- , g_0 et g_+ quelques fonctions données dans un espace approprié.

Le but de cette partie est de donner une analyse complète de (P), afin d'étudier le problème d'évolution (3.1)~ (3.5).

3.2 Formulation opérationnelle

On définit l'opérateur A dans l'espace de Banach $E = C[0, 1]$

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C^2([0, 1] : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{cases}$$

Dans le cas où $E = L^q(0, 1)$, ($q \in]1, +\infty[$), cet opérateur sera défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in W_y^{2,q}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ A\varphi = \varphi'', \end{cases}$$

et c'est ce cadre qui sera détaillé dans un premier temps.

Les notations usuelles suivantes des fonctions à valeurs vectorielles

$$u_{\pm}(x)(y) := u_{\pm}(x, y), \dots, u_0(x)(y) := u_0(x, y),$$

permettent alors d'écrire le problème précédent (P) sous la forme opérationnelle suivante

$$(P_A) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} & \text{sur }]-l, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} & \text{sur }]0, 2L[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \frac{r}{d}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d} & \text{sur }]2L, 2L+l[\end{cases} \\ \text{(Bond.C.)} \begin{cases} u_-(-l) = f_- \\ u_+(2L+l) = f_+ \end{cases} \\ \text{(Interfaces.Cont)} \begin{cases} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(2L) = u_+(2L) \end{cases} \\ \text{(Skew.C)} \begin{cases} (1-p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0) \\ pd_0u'_0(2L) = (1-p)du'_+(2L), \end{cases} \end{array} \right.$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dans un espace de Banach complexe E vérifiant l'hypothèse d'ellipticité de Krein. Ici $D(A)$ n'est pas nécessairement dense ; le second membre g est tel que

$$\begin{cases} g_- = g_{/[-l,0]} \in C^\theta([-l, 0], E) \\ g_0 = g_{/[0,2L]} \in C^\theta([0, 2L], E) \\ g_+ = g_{/[2L,2L+l]} \in C^\theta([2L, 2L+l], E), \end{cases}$$

(avec $0 < \theta < 1$).

Remarque 3.1 *L'hölderianité de g_- , g_0 , g_+ implique L'hölderianité globale de g sur $[-l, 2L+l]$ si et seulement si $g_-(0) = g_0(0)$ et $g_0(2L) = g_+(2L)$, on ne supposera pas cette condition.*

3.3 Résolution du problème opérationnel

3.3.1 Inversibilité du déterminant

Proposition 3.1 *les opérateurs*

$$\begin{aligned}\Delta &= -p_+(I - e^{2B_0})(I - e^{2B})B_0B^{-1} - p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0}) \\ \Delta_1 &= \left[I + 2p_-(I + e^{2B})e^{2B_0}\Delta^{-1} \right] \\ \Delta_2 &= \left[-p_+I + p_-(I + e^{2B})(I - e^{2B})^{-1}BB_0^{-1} \right],\end{aligned}$$

sont linéaires continus inversibles et d'inverses bornés, avec

$$\begin{aligned}B &= -\left[-\left(A - \frac{r}{d}I \right) \right]^{1/2}, & B_0 &= -\left[-\left(A + \frac{r_0}{d_0}I \right) \right]^{1/2} \\ k &= \frac{r}{d} & \text{et} & & k_0 &= \frac{r_0}{d_0}.\end{aligned}$$

Preuve. On rappelle que les opérateurs $I - e^{2B_0}$, $I + e^{2B_0}$, $I - e^{2B}$ et $I + e^{2B}$ sont bornés et inversibles, voir ([30]) p.60, Proposition 2.3.6. On applique ce résultat dans cette sous section.

On commence par l'étude de l'opérateur suivant afin de l'inverser.

$$\Delta_* = p_+(I - e^{2B_0})(I + e^{2B_0})^{-1}B_0B^{-1} + p_-(I + e^{2B})(I - e^{2B})^{-1},$$

puisque

$$\begin{aligned}\Delta &= -p_+(I - e^{2B_0})(I - e^{2B})B_0B^{-1} - p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0}) \\ &= -(I - e^{2B})(I + e^{2B_0})\Delta_*.\end{aligned}$$

On utilise le H^∞ -calcul en considérant la fonction

$$f(z) = \frac{p_+\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z-k_0}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z-k_0}})} + p_-\frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})}.$$

Maintenant soit $z \in S_{\eta, k_0}$ avec

$$S_{\eta, k_0} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \eta \text{ et } |z| \geq k_0\} \quad \text{avec } \eta \in]0, \pi[.$$

Alors $f \in H^\infty(S_{\eta, k_0})$. On a, pour tout $z \in S_{\eta, k_0}$

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left| \frac{p_+\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z-k_0}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z-k_0}})} + p_-\frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right| \\ &\geq \left(\left| \frac{p_+\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z-k_0}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z-k_0}})} \right| + \left| p_-\frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right| \right) \times \\ &\quad \left| \cos \frac{\arg w_1 - \arg w_2}{2} \right|,\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} w_1 = \frac{p_+ \sqrt{z - k_0} (1 - e^{-2\sqrt{z - k_0}})}{\sqrt{z + k} (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}})} \\ w_2 = p_- \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z + k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z + k}})}. \end{cases}$$

Alors

$$\arg w_1 = \arg \sqrt{z - k_0} - \arg \sqrt{z + k} + \arg (1 - e^{-2\sqrt{z - k_0}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}})$$

$$\arg w_2 = \arg (1 + e^{-2\sqrt{z + k}}) - \arg (1 - e^{-2\sqrt{z + k}}),$$

et

$$\begin{aligned} & \arg w_1 - \arg w_2 \\ = & \arg \sqrt{z - k_0} - \arg \sqrt{z + k} + \arg (1 - e^{-2\sqrt{z - k_0}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}}) \\ & + \arg (1 - e^{-2\sqrt{z + k}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z + k}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\arg w_1 - \arg w_2| \leq & \left| \arg (1 - e^{-2\sqrt{z + k}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z + k}}) \right| \\ & + \left| \arg (1 - e^{-2\sqrt{z - k_0}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}}) \right| \\ & + \left(\arg \sqrt{z - k_0} - \arg \sqrt{z + k} \right); \end{aligned}$$

on a

$$\left| \arg (1 - e^{-2\sqrt{z + k}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z + k}}) \right| \leq \arg (\sqrt{z + k}) \leq \frac{\pi - \eta}{2},$$

il n'est pas difficile de voir qu'il existe un petit nombre réel positif $\varepsilon_0 \in]0, \pi[$ tel que

$$\left| \arg (1 - e^{-2\sqrt{z - k_0}}) - \arg (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}}) \right| \leq \arg (\sqrt{z - k_0}) \leq \frac{\pi - \eta - \varepsilon_0}{2},$$

$$\begin{aligned} |\arg w_1 - \arg w_2| & \leq \arg (\sqrt{z + k}) + \arg (\sqrt{z - k_0}) + \arg \sqrt{z - k_0} - \arg \sqrt{z + k} \\ & \leq \pi - \eta - \varepsilon_0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{p_+ \sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z-k_0}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z-k_0}})} + p_- \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right| \quad (3.7) \\
&\geq \left(\left| \frac{p_+ \sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z-k_0}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z-k_0}})} \right| + \left| p_- \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right| \right) \left| \cos \frac{\pi - \eta - \varepsilon_0}{2} \right| \\
&\geq p_- \left| \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right| \sin(\varepsilon_0/2) \\
&\geq p_- \sin(\varepsilon_0/2) \frac{1 + |z+k|^{1/2} \cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)}{4|z+k|^{1/2}} \left(1 - e^{-\pi/2 \tan\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)}\right) \\
&\geq p_- \sin(\varepsilon_0/2) \cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right) \left(1 - e^{-\pi/2 \tan\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Donc $1/f \in H^\infty(S_{\eta, k_0})$. ■

Premier cas

On considère le cas

$$r_0 = -r \text{ et } d_0 = d,$$

qui correspond à la situation où la population a le même comportement aux zones tampons. On déduit que

$$B_0 B^{-1} = I, \quad p_+ + p_- = d,$$

et

$$\begin{aligned}
f(z) &= p_+ \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})} + p_- \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \\
&= p_+ \frac{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}} - 2e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})} + p_- \frac{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}} + 2e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \\
&= p_+ + p_- - \frac{2p_+ e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})} + \frac{2p_- e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \\
&= d \left(1 - \frac{2p e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1 + e^{-2\sqrt{z+k}})} + \frac{2(1-p)e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1 - e^{-2\sqrt{z+k}})} \right) \\
&= dg(z).
\end{aligned}$$

Il est clair que g et $1/g$ appartient à $H^\infty(S_{\eta, k_0})$. On écrit que

$$\left(\frac{1}{g}\right)(-A) = \left(\frac{1-g}{g} + 1\right)(-A) = \left(\frac{1-g}{g}\right)(-A) + I,$$

où

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1-g}{g} \right) (z) \\
&= \frac{\frac{2pe^{-2\sqrt{z+k}}}{(1+e^{-2\sqrt{z+k}})} - \frac{2(1-p)e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})}}{1 - \frac{2pe^{-2\sqrt{z+k}}}{(1+e^{-2\sqrt{z+k}})} + \frac{2(1-p)e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})}} \\
&= \frac{2pe^{-2\sqrt{z+k}}(1-e^{-2\sqrt{z+k}}) - 2(1-p)e^{-2\sqrt{z+k}}(1+e^{-2\sqrt{z+k}})}{(1+e^{-2\sqrt{z+k}})(1-e^{-2\sqrt{z+k}})} \left(1 - \frac{2pe^{-2\sqrt{z+k}}}{(1+e^{-2\sqrt{z+k}})} + \frac{2(1-p)e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})} \right),
\end{aligned}$$

donc $\left(\frac{1}{g} \right) (-A) \in \mathcal{L}(E)$ qui nous assure que $g(-A)$ est inversible et a un inverse borné et

$$[g(-A)]^{-1} = (1/g)(-A).$$

On obtient donc

Proposition 3.2 *L'opérateur*

$$\begin{aligned}
\Delta &= -p_+(I - e^{2B_0})B_0B^{-1}(I - e^{2B}) - p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0}) \\
&= -p_+(I - e^{2B_0})(I - e^{2B}) - p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0}) \\
&= -(I - e^{2B})(I + e^{2B})\Delta_*,
\end{aligned}$$

est inversible d'inverse borné.

Deuxième cas : $B_0B^{-1} \neq I$

En écrivant Δ_* comme suit

$$\begin{aligned}
\Delta_* &= p_+(I - e^{2B_0})(I + e^{2B_0})^{-1}B_0B^{-1} + p_-(I + e^{2B})(I - e^{2B})^{-1} \\
&= p_+(I + e^{2B_0} - 2e^{2B_0})(I + e^{2B_0})^{-1}B_0B^{-1} + p_-(I - e^{2B} + 2e^{2B})(I - e^{2B})^{-1} \\
&= p_+B_0B^{-1} + p_-I - 2p_+e^{2B_0}(I + e^{2B_0})^{-1}B_0B^{-1} + 2p_-e^{2B}(I - e^{2B})^{-1},
\end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned}
f(z) &= p_- + p_+ \frac{\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}} - \frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}})} + \frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})} \\
&= p_- + p_+ \frac{\sqrt{z-k_0} - \sqrt{z+k} + \sqrt{z+k}}{\sqrt{z+k}} - \frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}})} \\
&\quad + \frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})} \\
&= p_- + p_+ - \frac{p_+(k+k_0)}{\sqrt{z+k}(\sqrt{z-k_0} + \sqrt{z+k})} - \frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}})} \\
&\quad + \frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{(1-e^{-2\sqrt{z+k}})},
\end{aligned}$$

$$f(z) = (p_- + p_+) \left[1 - \frac{p_+(k + k_0)}{(p_- + p_+) \sqrt{z + k} (\sqrt{z - k_0} + \sqrt{z + k})} - \frac{2p_+ \sqrt{z - k_0} e^{-2\sqrt{z - k_0}}}{(p_- + p_+) \sqrt{z + k} (1 + e^{-2\sqrt{z - k_0}})} + \frac{2p_- e^{-2\sqrt{z + k}}}{(p_- + p_+) (1 - e^{-2\sqrt{z + k}})} \right].$$

Il es clair de (3.7) que $f/(p_- + p_+)$ et $1/(f/(p_- + p_+))$ appartiennent à $H^\infty(S_{\eta, k_0})$ et de l'égalité ci dessus on déduit que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(f/(p_- + p_+))} \right) (-A) \\ = & \left(\frac{1 - (f/(p_- + p_+))}{(f/(p_- + p_+))} + 1 \right) (-A) = \left(\frac{1 - (f/(p_- + p_+))}{(f/(p_- + p_+))} \right) (-A) + I \in \mathcal{L}(E) \end{aligned}$$

et en utilisant (2.3), Δ_* est inversible et

$$\Delta_*^{-1} = \left(\frac{1}{(f/(p_- + p_+))} \right) (-A) \in \mathcal{L}(E).$$

Remarque 3.2 Notons que, dans Δ_* , les opérateurs B_0 et B agissent par l'action $B_0 B^{-1}$.

Proposition 3.3 L'opérateur Δ est inversible et

$$\Delta^{-1} = -(I - e^{2B})^{-1} (I + e^{2B_0})^{-1} \Delta_*^{-1}.$$

3.3.2 Représentation formelle de la solution

Afin de ne pas compliquer inutilement les calculs, on prendra les constantes d'intervalles $l = 1$ et $L = 1/2$ quitte à faire des translations de la variable x . Notre problème devient alors

$$(PA) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equations)} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d} u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} \quad \text{dans }]-1, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0} u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} \quad \text{dans }]0, 1[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \frac{r}{d} u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d} \quad \text{dans }]1, 2[\end{array} \right. \\ \text{(Boundary C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(-1) = f_- \\ u_+(2) = f_+ \end{array} \right. \\ \text{(Transmission C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(1) = u_+(1) \end{array} \right. \\ \text{(Skewness C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - p) du'_-(0) = p d_0 u'_0(0) \\ p d_0 u'_0(1) = (1 - p) du'_+(1). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On commence par résoudre le problème suivant

$$(P_{BB_0}) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equations)} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) - B^2 u_-(x) = G_-(x) \text{ dans }]-1, 0[\\ u''_0(x) - B_0^2 u_0(x) = G_0(x) \text{ dans }]0, 1[\end{array} \right. \\ \text{(Boundary C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(-1) = f_- \\ u'_0(1) = \Psi \end{array} \right. \\ \text{(Transmission C.) } u_-(0) = u_0(0) \\ \text{(Skewness C.) } p_- u'_-(0) = p_+ u'_0(0). \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_-(x) &= e^{-xB} \alpha_- + e^{(1+x)B} \beta_- + v_-(G_-)(x), \quad x \in]-1, 0[\\ u_0(x) &= e^{xB_0} \alpha_0 + e^{(1-x)B_0} \beta_0 + v_0(G_0)(x), \quad x \in]0, 1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= -B e^{-xB} \alpha_- + B e^{(1+x)B} \beta_- + v'_-(G_-)(x), \quad x \in]-1, 0[\\ u'_0(x) &= B_0 e^{xB_0} \alpha_0 - B_0 e^{(1-x)B_0} \beta_0 + v'_0(G_0)(x), \quad x \in]0, 1[\end{aligned}$$

avec $\alpha_-, \beta_-, \alpha_0, \beta_0 \in E$ et

$$\begin{aligned} v_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-t)B} B^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B} B^{-1} G_-(t) dt, \\ v_0(G_0)(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(t-x)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt. \end{aligned}$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-(-1) = e^B \alpha_- + \beta_- + v(g_-)(-1) = f_- \\ u'_0(1) = B_0 e^{B_0} \alpha_0 - B_0 \beta_0 + v'(G_0)(1) = \Psi, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} u'_-(0) &= -B \alpha_- + B e^B \beta_- + v'(G_-)(0), \quad x \in]-1, 0[\\ u'_0(0) &= B_0 \alpha_0 - B_0 e^{B_0} \beta_0 + v'(G_0)(0), \quad x \in]0, 1[\end{aligned}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_- = -e^B \alpha_- - v(g_-)(-1) + f_- \\ \beta_0 = e^{B_0} \alpha_0 + B_0^{-1} v'(G_0)(1) - B_0^{-1} \Psi; \end{array} \right. \quad (3.8)$$

les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-(0) = u_0(0) \\ p_-(u_-)'(0) - p_+(u_0)'(0) = 0, \end{array} \right.$$

donnent

$$\begin{aligned} &\alpha_- + e^B \beta_- - \alpha_0 - e^{B_0} \beta_0 \\ &= -v(G_-)(0) + v(G_0)(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_- (-\alpha_- + e^B \beta_-) - p_+ (B^{-1} B_0 \alpha_0 - B^{-1} B_0 e^{B_0} \beta_0) \\ &= -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0), \end{aligned}$$

on remplace β_- et β_0 , on obtient

$$\begin{aligned} & \alpha_- + e^B (-e^B \alpha_- - v(g_-)(-1) + f_-) - \alpha_0 - e^{B_0} (e^{B_0} \alpha_0 + B_0^{-1} v'(G_0)(1) - B_0^{-1} \Psi) \\ &= -v(G_-)(0) + v(G_0)(0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & p_- (-\alpha_- + e^B (-e^B \alpha_- - v(g_-)(-1) + f_-)) \\ & - p_+ (B^{-1} B_0 \alpha_0 - B^{-1} B_0 e^{B_0} (e^{B_0} \alpha_0 + B_0^{-1} v'(G_0)(1) - B_0^{-1} \Psi)) \\ &= -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0), \end{aligned}$$

on rassemble

$$\begin{aligned} & (I - e^{2B}) \alpha_- - (I + e^{2B_0}) \alpha_0 = \\ & -e^B (-v(g_-)(-1) + f_-) + e^{B_0} (B_0^{-1} v'(G_0)(1) - B_0^{-1} \Psi) - v(G_-)(0) + v(G_0)(0), \\ & -p_- (I + e^{2B}) \alpha_- - p_+ (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} \alpha_0 \\ &= -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0) + p_- e^B v(g_-)(-1) - p_- e^B f_- - p_+ B^{-1} e^{B_0} v'(G_0)(1) \\ & + p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi. \end{aligned}$$

En utilisant (3.8), on obtient le système

$$\begin{cases} (I - e^{2B}) \alpha_- - (I + e^{2B_0}) \alpha_0 = f_* \\ -p_- (I + e^{2B}) \alpha_- - p_+ (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} \alpha_0 = g_*, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f_* = -e^B (-v(g_-)(-1) + f_-) + e^{B_0} (B_0^{-1} v'(G_0)(1) + B_0^{-1} \Psi) - v(G_-)(0) + v(G_0)(0) \\ \quad = -e^B f_- - e^{B_0} B_0^{-1} \Psi + e^B v(g_-)(-1) + e^{B_0} B_0^{-1} v'(G_0)(1) - v(G_-)(0) + v(G_0)(0) \\ g_* = -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0) + p_- e^B v(g_-)(-1) - p_- e^B f_- - p_+ B^{-1} e^{B_0} v'(G_0)(1) \\ \quad + p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi \\ \quad = -p_- e^B f_- + p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi + p_- e^B v(g_-)(-1) - p_+ B^{-1} e^{B_0} v'(G_0)(1) - p_- B^{-1} v'(G_-)(0) \\ \quad + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0), \end{cases}$$

le déterminant de ce système est

$$\begin{aligned} \Delta &= -p_+ (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} (I - e^{2B}) - p_- (I + e^{2B}) (I + e^{2B_0}) \\ &= -p_+ (I - e^{2B_0}) (I - e^{2B}) B_0 B^{-1} - p_- (I + e^{2B}) (I + e^{2B_0}), \end{aligned}$$

qui est inversible, on obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha_- &= \Delta^{-1} [-p_+ (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} f_* + (I + e^{2B_0}) g_*] \\ \alpha_0 &= \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) \alpha_- f_* + (I - e^{2B}) g_*], \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \beta_- = -e^B \Delta^{-1} [-p_+(I - e^{2B_0})B_0 B^{-1} f_* + (I + e^{2B_0}) g_*] - v(g_-)(-1) + f_- \\ \beta_0 = e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) \alpha_- f_* + (I - e^{2B}) g_*] + B_0^{-1} v'(G_0)(1) - B_0^{-1} \Psi; \end{cases}$$

les solutions s'écrivent, pour $x \in]-1, 0[$

$$u_-(x) = e^{-xB} \alpha_- + e^{(1+x)B} \beta_- + v(G_-)(x)$$

$$\begin{aligned} u_-(x) &= e^{-xB} \Delta^{-1} [-p_+(I - e^{2B_0})B_0 B^{-1} f_* + (I + e^{2B_0}) g_*] \\ &\quad - e^{(1+x)B} e^B \Delta^{-1} [-p_+(I - e^{2B_0})B_0 B^{-1} f_* + (I + e^{2B_0}) g_*] \\ &\quad - v(g_-)(-1) + f_- + v(G_-)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_-(x) &= -p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} f_* \\ &\quad + e^{-xB} \Delta^{-1} (I + e^{2B_0}) g_* \\ &\quad + p_+ e^{(1+x)B} e^B \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} f_* \\ &\quad - e^{(1+x)B} e^B \Delta^{-1} (I + e^{2B_0}) g_* \\ &\quad - e^{(1+x)B} v(g_-)(-1) + e^{(1+x)B} f_- + v(G_-)(x). \end{aligned}$$

Et pour $x \in]0, 1[$, on obtient

$$u_0(x) = e^{xB_0} \alpha_0 + e^{(1-x)B_0} \beta_0 + v(G_0)(x)$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= +e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_* \\ &\quad + e^{(1-x)B_0} (e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_*]) \\ &\quad + e^{(1-x)B_0} (e^{B_0} \Delta^{-1} [(I - e^{2B}) g_*]) \\ &\quad + e^{(1-x)B_0} (B_0^{-1} v'(G_0)(1)) \\ &\quad - e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Psi \\ &\quad + v(G_0)(x). \end{aligned}$$

Maintenant on passe à u_+ .

On résoud

$$(P_B) \begin{cases} \text{(Equations)} & u_+''(x) - B^2 u_+(x) = G_+(x) \text{ dans }]1, 2[\\ \text{(Boundary C.)} & \begin{cases} u_+(1) = u_0(1) = H(\Psi) \\ u_+(2) = f_+ \end{cases} \end{cases}$$

avec la condition

$$p d_0 u_0'(1) = (1-p) du_+'(1).$$

qui va nous permettre de trouver Ψ .

Or on a

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= +e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* \\
&+ e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_* \\
&+ e^{(1-x)B_0} (e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_*]) \\
&+ e^{(1-x)B_0} (e^{B_0} \Delta^{-1} [(I - e^{2B}) g_*]) \\
&+ e^{(1-x)B_0} (B_0^{-1} v' (G_0) (1)) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Psi \\
&+ v(G_0)(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(\Psi) &= u_0(1) \\
&= +2e^{B_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* \\
&+ 2e^{B_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_* \\
&+ (B_0^{-1} v' (G_0) (1)) \\
&- B_0^{-1} \Psi \\
&+ v(G_0)(1),
\end{aligned}$$

donc

$$u_+(x) = e^{(x-1)B} \alpha_+ + e^{(2-x)B} \beta_+ + v_+(G_+(\cdot))(x),$$

avec

$$v_+(G_+(\cdot))(x) = \frac{1}{2} \int_1^x e^{(x-t)B} B^{-1} \frac{g_+(t)}{d} dt + \frac{1}{2} \int_x^2 e^{(t-x)B} B^{-1} \frac{g_+(t)}{d} dt,$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_+(1) = H(\Psi) \\ u_+(2) = f_+, \end{cases}$$

donnent

$$\begin{cases} \alpha_+ + e^B \beta_+ + v_+(G_+(\cdot))(1) = H(\Psi) \\ e^B \alpha_+ + \beta_+ + v_+(G_+(\cdot))(2) = f_+, \end{cases}$$

de la deuxième égalité on a

$$\beta_+ = -e^B \alpha_+ - v_+(G_+(\cdot))(2) + f_+,$$

on remplace dans la première égalité

$$\alpha_+ + e^B [-e^B \alpha_+ - v_+(G_+(\cdot))(2) + f_+] + v_+(G_+(\cdot))(1) = H(\Psi),$$

$$(I - e^{2B}) \alpha_+ = e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B f_+ - v_+(G_+(\cdot))(1) + H(\Psi),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_+ &= (I - e^{2B})^{-1} e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^B f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \\
&+ (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= -e^B \alpha_+ - v_+(G_+(\cdot))(2) + f_+ \\
&= -e^B \left[\begin{aligned} &(I - e^{2B})^{-1} e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^B f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \\ &+ (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \end{aligned} \right] \\
&\quad - v_+(G_+(\cdot))(2) + f_+ \\
\beta_+ &= - \left[\begin{aligned} &(I - e^{2B})^{-1} e^{2B} v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^{2B} f_+ - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \\ &+ e^B (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \end{aligned} \right] \\
&\quad - v_+(G_+(\cdot))(2) + f_+ \\
&= \left[(I - e^{2B})^{-1} e^{2B} + I \right] f_+ - \left[(I - e^{2B})^{-1} e^{2B} + I \right] v_+(G_+(\cdot))(2) \\
&\quad - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) - e^B (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \\
\beta_+ &= \left[(I - e^{2B})^{-1} e^{2B} + I \right] f_+ - \left[(I - e^{2B})^{-1} e^{2B} + I \right] v_+(G_+(\cdot))(2) \\
&\quad - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) - e^B (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi), \\
\beta_+ &= (I - e^{2B})^{-1} f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \\
&\quad - e^B (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi),
\end{aligned}$$

donc la solution s'écrit

$$\begin{aligned}
u_+(x) &= e^{(x-1)B} \alpha_+ + e^{(2-x)B} \beta_+ + v_+(G_+(\cdot))(x), \\
u_+(x) &= e^{(x-1)B} \left(\begin{aligned} &(I - e^{2B})^{-1} e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^B f_+ \\ &- (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) + (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \end{aligned} \right) \\
&\quad + e^{(2-x)B} \left(\begin{aligned} &(I - e^{2B})^{-1} f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) \\ &- e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) - e^B (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \end{aligned} \right) \\
&\quad + v_+(G_+(\cdot))(x), \\
u_+(x) &= e^{xB} (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) - e^{xB} (I - e^{2B})^{-1} f_+ \\
&\quad - e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) + e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \\
&\quad + e^{(2-x)B} (I - e^{2B})^{-1} f_+ - e^{(2-x)B} (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) \\
&\quad - e^{(3-x)B} (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) - e^{(3-x)B} (I - e^{2B})^{-1} H(\Psi) \\
&\quad + v_+(G_+(\cdot))(x),
\end{aligned}$$

pour trouver Ψ on utilise

$$pd_0 u'_0(1) = (1-p) du'_+(1),$$

avec nos notations

$$\begin{cases} p_- = (1-p)d \\ p_+ = pd_0, \end{cases}$$

qui donne

$$p_+u'_0(1) = p_-u'_+(1).$$

$$\begin{aligned} & p_+B_0e^{B_0}\alpha_0 \\ & -p_+B_0\beta_0 \\ & -p_-B\alpha_+ \\ & +p_-Be^B\beta_+ \\ = & p_-v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+v'_0(G_0)(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_+B_0e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] \\ & -p_+B_0(e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] + B_0^{-1}v'_0(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi) \\ & -p_-B \left((I-e^{2B})^{-1}e^Bv_+(G_+(\cdot))(2) - (I-e^{2B})^{-1}e^Bf_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right. \\ & \quad \left. + (I-e^{2B})^{-1}H(\Psi) \right) \\ & +p_-Be^B \left((I-e^{2B})^{-1}f_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B(I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right. \\ & \quad \left. - e^B(I-e^{2B})^{-1}H(\Psi) \right) \\ = & p_-v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+v'_0(G_0)(1) \\ & -p_+\Psi \\ & -p_-B(I+e^{2B})(I-e^{2B})^{-1}H(\Psi) \\ = & p_-v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+v'_0(G_0)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] \\ & +p_+B_0(e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] + B_0^{-1}v'_0(G_0)(1)) \\ & +p_-B \left((I-e^{2B})^{-1}e^Bv_+(G_+(\cdot))(2) - (I-e^{2B})^{-1}e^Bf_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\ & -p_-Be^B \left((I-e^{2B})^{-1}f_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B(I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right), \end{aligned}$$

avec

$$H(\Psi) = 2e^{B_0}\Delta^{-1}p_-(I+e^{2B})f_* + 2e^{B_0}\Delta^{-1}(I-e^{2B})g_* + B_0^{-1}v'_0(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(1), \blacksquare$$

donc

$$\begin{aligned} & -p_+\Psi \\ & -p_-B(I+e^{2B})(I-e^{2B})^{-1} \left[2e^{B_0}\Delta^{-1}p_-(I+e^{2B})f_* + 2e^{B_0}\Delta^{-1}(I-e^{2B})g_* \right. \\ & \quad \left. + B_0^{-1}v'_0(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(1) \right] \\ = & p_-v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+v'_0(G_0)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] \\ & +p_+B_0(e^{B_0}\Delta^{-1} [p_-(I+e^{2B})f_* + (I-e^{2B})g_*] + B_0^{-1}v'_0(G_0)(1)) \\ & +p_-B \left((I-e^{2B})^{-1}e^Bv_+(G_+(\cdot))(2) - (I-e^{2B})^{-1}e^Bf_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\ & -p_-Be^B \left((I-e^{2B})^{-1}f_+ - (I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B(I-e^{2B})^{-1}v_+(G_+(\cdot))(1) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -p_+ \Psi \\
& + p_- B (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} B_0^{-1} \Psi \\
= & p_- v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+ v'_0(G_0)(1) - p_+ B_0 e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_* + (I - e^{2B}) g_*] \\
& + p_+ B_0 (e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_* + (I - e^{2B}) g_*] + B_0^{-1} v'(G_0)(1)) \\
& + p_- B \left((I - e^{2B})^{-1} e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^B f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\
& - p_- B e^B \left((I - e^{2B})^{-1} f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\
& + p_- B (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} \left[\begin{array}{c} 2e^{B_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* + 2e^{B_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_* \\ + B_0^{-1} v'(G_0)(1) + v(G_0)(1) \end{array} \right] \\
& \left[-p_+ I + p_- (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} B B_0^{-1} \right] \Psi \\
= & p_- v'_+(G_+(\cdot))(1) - p_+ v'_0(G_0)(1) - p_+ B_0 e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_* + (I - e^{2B}) g_*] \\
& + p_+ B_0 (e^{B_0} \Delta^{-1} [p_- (I + e^{2B}) f_* + (I - e^{2B}) g_*] + B_0^{-1} v'(G_0)(1)) \\
& + p_- B \left((I - e^{2B})^{-1} e^B v_+(G_+(\cdot))(2) - (I - e^{2B})^{-1} e^B f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\
& - p_- B e^B \left((I - e^{2B})^{-1} f_+ - (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(2) - e^B (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+(\cdot))(1) \right) \\
& + p_- B (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} \left[\begin{array}{c} 2e^{B_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* + 2e^{B_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_* + B_0^{-1} v'(G_0)(1) \\ + v(G_0)(1) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Psi = & \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} (p_- v'_+(G_+)(1) + p_+ v'_0(G_0)(1)) \\
& + 2p_- \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} B e^B (I - e^{2B})^{-1} (v_+(G_+)(2) - f_+) \\
& + \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} (p_+ B_0 v_0(G_0)(1) - p_- B v_+(G_+)(1)) + \Delta_2^{-1} B_0 v_0(G_0)(1) \\
& + 4p_-^2 \Delta_1^{-1} D_+^{-1} B e^{B_0} e^B \Delta^{-1} (v_-(G_-)(-1) - f_-) + v'_0(G_0)(1) \\
& + 2p_- \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} (I + e^{2B}) e^{B_0} \Delta^{-1} B_0 (p_+ + \Delta_1) (v_0(G_0)(0) - v_-(G_-)(0)) \\
& + 2p_- \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} (I + e^{2B}) e^{B_0} \Delta^{-1} (p_+ v'_0(G_0)(0) - p_- v'_-(G_-)(0)) .
\end{aligned}$$

Pour trouver Ψ Il faut inverser

$$\begin{aligned}
\Delta_1 & = \left[-p_+ I + p_- (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} B B_0^{-1} \right] \\
& = - (I - e^{2B})^{-1} [p_+ (I - e^{2B}) - p_- (I + e^{2B}) B B_0^{-1}] ,
\end{aligned}$$

et

$$\Delta_2 = I + 2P_- (I + e^{2B}) (I - e^{2B})^{-1} e^{2B_0} \Delta_-^{-1}$$

pour inverser Δ_1 et Δ_2 on utilise les mêmes techniques pour Δ

avec

$$\Delta = - [p_+ (I - e^{2B_0}) (I - e^{2B}) B_0 B^{-1} + p_- (I + e^{2B}) (I + e^{2B_0})] .$$

3.4 Analyse de $v_-(G_-)$, $v_0(G_0)$ et $v_+(G_+)$

3.4.1 Analyse de $v_-(G_-)$ sur $(-1,0)$

On a pour, $x \in]-1, 0[$

$$v_-(G_-)(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-t)B} B^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B} B^{-1} G_-(t) dt,$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} & v_-(G_-)(x) \\ = & \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-t)B} B^{-1} [G_-(t) - G_-(x)] dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B} B^{-1} [G_-(t) - G_-(x)] dt \\ & + \frac{1}{2} e^{(x+1)B} B^{-2} [G_-(x) - G_-(-1)] \\ & + \frac{1}{2} e^{-xB} B^{-2} [G_-(x) - G_-(0)] - B^{-2} G_-(x) \\ & + \frac{1}{2} e^{(x+1)B} B^{-2} G_-(-1) + \frac{1}{2} e^{-xB} B^{-2} G_-(0) \\ = & R_-(x) + S_{-, -1}(x) + S_{-, 0}(x), \end{aligned}$$

où

$$S_{-, -1}(x) = \frac{1}{2} e^{(x+1)B} B^{-2} G_-(-1), \quad S_{-, 0}(x) = \frac{1}{2} e^{-xB} B^{-2} G_-(0).$$

De la proposition 2.3, R_- a la propriété de la régularité maximale suivante

$$\forall x \in [-1, 0], \quad R_-(x) \in D(B^2) \quad \text{et} \quad x \mapsto B^2 R_-(x) \in C^\theta([-1, 0]; E),$$

alors que pour $S_{-, -1}$ et $S_{-, 0}$ nous avons seulement

$$S_{-, -1} \in C(]-1, 0]; D(B^2)) \quad \text{et} \quad S_{-, 0} \in C([-1, 0[; D(B^2)).$$

Le comportement de $B^2 S_{-, -1}(x)$ au voisinage de -1 est celui de

$$\frac{1}{2} e^{(x+1)B} G_-(-1), \tag{3.9}$$

et le comportement de $B^2 S_{-, 0}(x)$ au voisinage de 0 est celui de

$$\frac{1}{2} e^{-xB} G_-(0).$$

3.4.2 Analyse de $v_0(G_0)$ sur $(0,1)$

Rappelons que, pour $x \in]0, 1[$

$$v_0(G_0)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(t-x)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt,$$

qui peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}
& v_0(G_0)(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_0} B_0^{-1} [G_0(t) - G_0(x)] dt + \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(t-x)B_0} B_0^{-1} [G_0(t) - G_0(x)] dt \\
&\quad - B_0^{-2} G_0(x) + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} [G_0(x) - G_0(0)] \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} [G_0(x) - G_0(1)] \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) + \frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&= R_0(x) + S_{0,0}(x) + S_{0,1}(x),
\end{aligned}$$

où

$$S_{0,0}(x) = \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0), \quad S_{0,1}(x) = \frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1).$$

Du lemme 2.9, le terme R_0 a la propriété de la régularité maximale suivante

$$\forall x \in [0, 1] \quad R_0(x) \in D(B_0^2) \quad \text{et} \quad x \mapsto B_0^2 R_0(x) \in C^\theta([0, 1]; E),$$

alors que pour $S_{0,0}$ et $S_{0,1}$ nous avons seulement

$$S_{0,0} \in C(]0, 1[; D(B_0^2)) \quad \text{et} \quad S_{0,1} \in C([0, 1[; D(B_0^2)).$$

Le comportement de $B_0^2 S_{0,0}(x)$ au voisinage de 0 est celui de

$$\frac{1}{2} e^{xB_0} G_0(0),$$

et le comportement de $B_0^2 S_{0,1}(x)$ au voisinage de 1 est celui de

$$\frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} G_0(1).$$

3.4.3 Analyse de $v_+(G_+)$ sur $(1, 2)$

On a, pour $x \in]1, 2[$

$$\begin{aligned}
& v_+(G_+)(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_1^x e^{(x-t)B} B^{-1} [G_+(t) - G_+(x)] dt + \frac{1}{2} \int_x^2 e^{(t-x)B} B^{-1} [G_+(t) - G_+(x)] dt \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(x-1)B} B^{-2} [G_+(x) - G_+(1)] \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(2-x)B} B^{-2} [G_+(x) - G_+(2)] - B^{-2} G_+(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(x-1)B} B^{-2} G_+(1) + \frac{1}{2} e^{(2-x)B} B^{-2} G_+(2) \\
&= R_+(x) + S_{+,1}(x) + S_{+,2}(x),
\end{aligned}$$

où

$$S_{+,1}(x) = \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(1), \quad S_{+,2}(x) = \frac{1}{2}e^{(2-x)B}B^{-2}G_+(2).$$

Du lemme 2.9, le terme R_+ a la propriété de la régularité maximale suivante

$$\forall x \in [1, 2] \quad R_+(x) \in D(B^2) \quad \text{et} \quad x \mapsto B^2R_+(x) \in C^\theta([1, 2]; E),$$

alors pour les termes $S_{+,1}$ et $S_{+,2}$ on a seulement

$$S_{+,1} \in C([1, 2]; D(B^2)) \quad \text{et} \quad S_{+,2} \in C([1, 2[; D(B^2)).$$

Le comportement de $B^2S_{+,1}(x)$ au voisinage de 1 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{(x-1)B}G_+(1),$$

et le comportement de $B^2S_{+,2}(x)$ au voisinage de 2 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{(2-x)B}G_+(2).$$

3.4.4 Analyse des dérivées

Analysons le comportement des dérivée de $v_-(G_-)$, $v_0(G_0)$ et $v_+(G_+)$, afin d'étudier la régularité de la solution de notre problème. Pour tout $x \in]-1, 0[$, on a

$$\begin{aligned} & v'_-(G_-)(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-t)B} G_-(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B} G_-(t) dt + \frac{1}{2} B^{-1} G_-(x) - \frac{1}{2} B^{-1} G_-(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-t)B} G_-(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B} G_-(t) dt, \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} v'_-(G_-)(0) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-tB} G_-(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-tB} [G_-(t) - G_-(0)] dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-tB} G_-(0) dt \\ &= -\frac{1}{2} B^{-1} G_-(0) + \frac{1}{2} B^{-1} e^B G_-(0) + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-tB} [G_-(t) - G_-(0)] dt. \end{aligned}$$

Similairement, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$v'_0(G_0)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_0} G_0(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(t-x)B_0} G_0(t) dt,$$

et alors

$$\begin{aligned}
v'_0(G_0)(1) &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1-t)B_0} G_0(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1-t)B_0} [G_0(t) - G_0(1)] dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1-t)B_0} G_0(1) dt \\
&= -\frac{1}{2} B_0^{-1} G_0(1) + \frac{1}{2} B_0^{-1} e^{B_0} G_0(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1-t)B_0} [G_0(t) - G_0(1)] dt.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
v'_0(G_0)(0) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{tB_0} G_0(t) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{tB_0} [G_0(t) - G_0(0)] dt - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{tB_0} G_0(0) dt \\
&= \frac{1}{2} B_0^{-1} G_0(0) - \frac{1}{2} B_0^{-1} e^{B_0} G_0(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{tB_0} [G_0(t) - G_0(0)] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_+(G_+)(1) &= \frac{1}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{1}{2} B^{-1} e^B G_+(1) - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{(t-1)B} [G_+(t) - G_+(1)] dt,
\end{aligned}$$

3.5 Conditions nécessaires sur les données aux interfaces

On suppose que u_- , u_0 , et u_+ vérifient

$$\begin{cases} u_- \in C([-1, 0]; D(B^2)) \cap C^2([-1, 0]; E) \\ u_0 \in C([0, 1]; D(B_0^2)) \cap C^2([0, 1]; E) \\ u_+ \in C([1, 2]; D(B^2)) \cap C^2([1, 2]; E), \end{cases}$$

alors

$$u_-(0) = u_0(0) \in D(B^2), u_0(1) = u_+(1) \in D(B^2),$$

et pour tout $\tau \in [-1, 0]$

$$(u_-)'(\tau) = \lim_{\tau' \rightarrow \tau} \frac{u_-(\tau) - u_-(\tau')}{\tau - \tau'} \in \overline{D(B^2)} = \overline{D(A)},$$

on déduit aussi que

$$(u_-)''(\tau) \in \overline{D(B^2)}.$$

De manière similaire, pour tout

$$\tau_1 \in [0, 1], (u_0)'(\tau_1), (u_0)''(\tau_1) \in \overline{D(B^2)},$$

et pour tout

$$\tau_2 \in [1, 2], (u_+)'(\tau_2), (u_+)''(\tau_2) \in \overline{D(B^2)},$$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} (u_-)''(0) = G_-(0) + B^2 u_-(0) \in \overline{D(B^2)} \\ (u_0)''(0) = G_0(0) + B_0^2 u_0(0) \in \overline{D(B^2)}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (u_0)''(1) = G_0(1) + B_0^2 u_0(1) \in \overline{D(B^2)} \\ (u_+)''(1) = G_+(1) + B^2 u_+(1) \in \overline{D(B^2)}. \end{cases}$$

En utilisant la première condition d'interface

$$u_-(0) = u_0(0),$$

on a

$$\begin{aligned} (u_0)''(0) &= G_0(0) + B_0^2 u_0(0) \\ &= G_0(0) + B_0^2 u_-(0) \\ &= G_0(0) + B_0^2 B^{-2} ((u_-)''(0) - G_-(0)), \end{aligned}$$

à partir de laquelle on déduit la première condition nécessaire de compatibilité suivante

$$G_0(0) - B_0^2 B^{-2} G_-(0) = (u_0)''(0) - B_0^2 B^{-2} ((u_-)''(0) - G_-(0)) \in \overline{D(B^2)}.$$

La deuxième condition d'interface

$$u_0(1) = u_+(1),$$

donne

$$\begin{aligned} (u_0)''(1) &= G_0(1) + B_0^2 u_0(1) \\ &= G_0(1) + B_0^2 u_+(1) \\ &= G_0(1) + B_0^2 B^{-2} ((u_+)''(1) - G_+(1)), \end{aligned}$$

qui implique la deuxième conditions nécessaire de compatibilité suivante

$$(u_0)''(1) - B_0^2 B^{-2} ((u_+)''(1) - G_+(1)) = G_0(1) - B_0^2 B^{-2} G_+(1) \in \overline{D(B^2)}.$$

Remarque 3.3 Dans le cas

$$B_0^2 B^{-2} = I,$$

les conditions nécessaires et suffisantes aux interfaces sont

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0} \right) \in \overline{D(B)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in \overline{D(B)}.$$

3.6 Analyse de u_- au voisinage de -1

On suppose la condition nécessaire $f_- \in D(B^2) = D(A)$. Rappelons que

$$u_-(x) = e^{-xB}\alpha_- + e^{(1+x)B}\beta_- + v_-(G_-)(x),$$

où, du (3.8), on a

$$\beta_- = -e^B\alpha_- - v_-(G_-)(-1) + f_-.$$

Puis le comportement de $B^2u_-(x)$ au voisinage de -1 est celui de la fonction

$$e^{(1+x)B}B^2[-v_-(G_-)(-1) + f_-] + B^2v_-(G_-)(x).$$

On a

$$\begin{aligned} & v_-(G_-)(-1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{(t+1)B} B^{-1} [G_-(t) - G_-(-1)] dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{(t+1)B} B^{-1} G_-(-1) dt \\ &= -\frac{1}{2} B^{-2} G_-(-1) + R^-(G_-)(-1), \end{aligned}$$

et le terme $R^-(G_-)(-1)$ est régulier puisque

$$B^2 [R^-(G_-)(-1)] \in D_B(\theta, +\infty),$$

voir lemme 2.9.

Maintenant, à partir de l'étude et des résultats sur le comportement de $B^2v_-(G_-)(x)$ au voisinage de -1 voir (3.9), nous concluons que le comportement de $B^2u_-(x)$ au voisinage de -1 est le même que

$$\begin{aligned} & e^{(1+x)B} \left[\frac{1}{2} G_-(-1) + B^2 f_- \right] + \frac{1}{2} e^{(1+x)B} G_-(-1) \\ &= e^{(1+x)B} [G_-(-1) + B^2 f_-]. \end{aligned}$$

Du lemme 2.9, $B^2u_-(.)$ a les propriétés suivantes de la régularité maximale au voisinage de -1

$$\begin{cases} B^2u_-(.) \in C([-1, 0[; E) & \text{ssi } [G_-(-1) + B^2 f_-] \in \overline{D(B^2)} = \overline{D(A)} \\ B^2u_-(.) \in C^\theta([-1, 0[; E) & \text{ssi } [G_-(-1) + B^2 f_-] \in D_B(\theta, +\infty). \end{cases}$$

Pour l'analyse de u_+ au voisinage de 2 on peut utiliser les mêmes techniques que l'analyse de u_- au voisinage de -1 , on obtient la régularité maximale suivante de $B^2u_+(.)$ au voisinage de 2 .

$$\begin{cases} B^2u_+(.) \in C([1, 2[; E) & \text{ssi } [G_+(2) + B^2 f_-] \in \overline{D(B^2)} = \overline{D(A)} \\ B^2u_+(.) \in C^\theta([1, 2[; E) & \text{ssi } [G_+(2) + B^2 f_-] \in D_B(\theta, +\infty). \end{cases}$$

3.7 Analyse de u_- à l'interface $\{0\} \times]0, 1[$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq v(G_-)(x) - p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} f_* \\
&\quad + e^{-xB} \Delta^{-1} (I + e^{2B_0}) g_* + \text{Rég} \\
&= \text{Rég} + v(G_-)(x) - p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} \left[\begin{array}{l} -e^B f_- - e^{B_0} B_0^{-1} \Psi + e^B v(g_-)(-1) \\ + e^{B_0} B_0^{-1} v'(G_0)(1) - v(G_-)(0) + v(G_0)(0) \end{array} \right] \\
&\quad + e^{-xB} \Delta^{-1} (I + e^{2B_0}) \left[\begin{array}{l} -p_- e^B f_- + p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi + p_- e^B v(g_-)(-1) - p_+ B^{-1} e^{B_0} v'(G_0)(1) \\ -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0) \end{array} \right] \\
&= \text{Rég} + v(G_-)(x) \\
&\quad - p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} [v(G_0)(0) - v(G_-)(0)] \\
&\quad + p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} [-e^{B_0} B_0^{-1} \Psi] \\
&\quad + \Delta^{-1} e^{-xB} (I + e^{2B_0}) B^{-1} [p_+ v'(G_0)(0) - p_- v'(G_-)(0)] \\
&\quad + \Delta^{-1} e^{-xB} (I + e^{2B_0}) B^{-1} [p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi].
\end{aligned}$$

Or on a

$$[v(G_0)(0) - v(G_-)(0)] = \frac{1}{2} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) + \text{Rég},$$

et

$$p_+ v'(G_0)(0) - p_- v'(G_-)(0) = \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) + \text{Rég},$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + v(G_-)(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \\
&\quad + \Delta^{-1} e^{-xB} (I + e^{2B_0}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} B^{-2} e^{-xB} G_-(0) \\
&\quad + \frac{1}{2} p_+ e^{-xB} \Delta^{-1} (I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \\
&\quad + e^{-xB} \Delta^{-1} (I + e^{2B_0}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= -p_+(I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} (I - e^{2B}) - p_-(I + e^{2B}) (I + e^{2B_0}) \\
&= -[p_+(I - e^{2B_0}) B_0 B^{-1} (I - e^{2B}) + p_-(I + e^{2B}) (I + e^{2B_0})] \\
&= -[p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}p_+e^{-xB}\Delta^{-1}(I - e^{2B_0})B_0B^{-1}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&\quad + e^{-xB}\Delta^{-1}(I + e^{2B_0})B^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(0) + \frac{p_-}{2}B^{-1}G_-(0)\right] \\
&\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I - e^{2B_0})[p_+B_0B^{-1}](B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I + e^{2B_0})[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}G_-(0)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
&\quad + L \\
&\quad + M
\end{aligned}$$

On écrit que

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I - e^{2B_0})[p_+B_0B^{-1}](B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&= \frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I - e^{2B_0})[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}] \times \\
&\quad (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I - e^{2B_0})[-p_-I - \text{Opereg}] \times \\
&\quad (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&= \frac{1}{2}e^{-xB}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) + \text{Opereg} \\
&\quad - \frac{p_-}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&= \frac{1}{2}e^{-xB}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) + \text{Opereg} \\
&\quad - \frac{p_-}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}B^{-2}G_-(0) \\
&\quad + \frac{p_-}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}B_0^{-2}G_0(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}(I + e^{2B_0})[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}G_-(0)] \\
&= -\frac{1}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}G_-(0)] + \text{Opereg} \\
&= -\frac{p_+}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + \text{Opereg} \\
&\quad - \frac{p_-}{2}e^{-xB}[p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1}B^{-2}G_-(0) + \text{Opereg}.
\end{aligned}$$

Il reste

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}G_-(0) + \text{Opereg} \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB}B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - \frac{p_-}{2}e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B^{-2}G_-(0) \\
&\quad + \frac{p_-}{2}e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - \frac{p_+}{2}e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + \text{Opereg} \\
&\quad - \frac{p_-}{2}e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} + e^{-xB}B^{-2}G_-(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB}B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B^{-2}G_-(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-xB} [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} (p_-B_0^{-2} - p_+B_0^{-1}B^{-1}) G_0(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{-xB} \left[I - p_- [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} \right] B^{-2}G_-(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB} \left[I - [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} (p_-I - p_+B_0B^{-1}) \right] B_0^{-2}G_0(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{-xB} \left[I - p_- [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} [p_+B_0B^{-1} + p_-I - p_+B_0B^{-1}] \right] B^{-2}G_-(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB} \left[I - [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} (p_+B_0B^{-1} + p_-I - 2p_+B_0B^{-1}) \right] B_0^{-2}G_0(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{-xB} [p_+B_0B^{-1}] [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B^{-2}G_-(0) \\
&\quad - e^{-xB} [p_+B_0B^{-1}] [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{-xB} [p_+B_0B^{-1}] [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}]^{-1} (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)).
\end{aligned}$$

Théorème 3.1 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

1. u_- est la solution du notre problème sur $] -1, 0[$
2. $u_- \in C([-1, 0]; D(B^2)) \cap C^2([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_- + \frac{g_-(-1)}{d} \in \overline{D(B)},$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0} \right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 3.2 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

1. u_- est la solution du notre problème sur $] -1, 0[$
2. $B^2 u_-(\cdot)$, $u_-'' \in C^\theta([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_- + \frac{g_-(-1)}{d} \in D_B(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0} \right) \in D_B(\theta, +\infty).$$

3.8 Analyse de u_0 au voisinage de l'interface $\{0\} \times]0, 1[$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + v(G_0)(x) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) f_* \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) g_*, \end{aligned}$$

on remplace f_* et g_* on obtient

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + v(G_0)(x) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) \left(\begin{array}{c} -e^B f_- - e^{B_0} B_0^{-1} \Psi + e^B v(g_-)(-1) + e^{B_0} B_0^{-1} v'(G_0)(1) \\ -v(G_-)(0) + v(G_0)(0) \end{array} \right) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) \left[\begin{array}{c} -p_- e^B f_- + p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi + p_- e^B v(g_-)(-1) - p_+ B^{-1} e^{B_0} v'(G_0)(1) \\ -p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0) \end{array} \right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + v(G_0)(x) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) (-e^{B_0} B_0^{-1} \Psi - v(G_-)(0) + v(G_0)(0)) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) [+p_+ B^{-1} e^{B_0} \Psi - p_- B^{-1} v'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v'(G_0)(0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + v(G_0)(x) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) (v(G_0)(0) - v(G_-)(0)) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1} [p_+ v'(G_0)(0) - p_- v'(G_-)(0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + v(G_0)(x) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \right) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right] \end{aligned}$$

$$v(G_0)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(t-x)B_0} B_0^{-1} G_0(t) dt.$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} p_- (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \right) \\ &\quad + e^{xB_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= -p_+(I - e^{2B_0})B_0 B^{-1} (I - e^{2B}) - p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0}) \\ &= -[p_+(I - e^{2B_0})B_0 B^{-1} (I - e^{2B}) + p_-(I + e^{2B})(I + e^{2B_0})] \\ &= -[p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\ &\quad - e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} p_- (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \right) \\ &\quad - e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\ &\quad + I \\ &\quad + II \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} p_- (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2} (G_-(0)) - B_0^{-2} (G_0(0))) \right) \\
&= -e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} [(p_- I + p_+ B_0 B^{-1} + \text{Opereg}) - p_+ B_0 B^{-1} - \text{Opereg}] \\
&\quad \times (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \right) \\
&= -e^{xB_0} (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \right) \\
&\quad + e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+ B_0 B^{-1}] \left(\frac{1}{2} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \right) + \text{Opereg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= -e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-1} G_-(0) \right] \\
&= -e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B^{-1} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-2} G_-(0) \right] + \text{Opereg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I + II &= -e^{xB_0} (I + e^{2B}) \left(\frac{1}{2} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \right) \\
&\quad + e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+ B_0 B^{-1}] \left(\frac{1}{2} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \right) \\
&\quad - e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} \left[\frac{p_+}{2} B^{-1} B_0^{-1} G_0(0) + \frac{p_-}{2} B^{-2} G_-(0) \right] + \text{Opereg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I + II &= -\frac{1}{2} e^{xB_0} ((B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0))) \\
&\quad - e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+ B_0 B^{-1}] B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} (p_+ B_0 B^{-1} - p_- I) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad + I \\
&\quad + II
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{xB_0} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) \\
&\quad - e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+ B_0 B^{-1}] B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}])^{-1} (p_+ B_0 B^{-1} - p_- I) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{xB_0} (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
&\quad - e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+B_0B^{-1}] B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} \times \\
&\quad (p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg} - p_-I - \text{Opereg} - p_-I) B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{xB_0} (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) + \frac{1}{2}e^{xB_0} B^{-2}G_-(0) \\
&\quad - e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+B_0B^{-1}] B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) - e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+B_0B^{-1}] B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{xB_0} \left[I - ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} [p_+B_0B^{-1}] \right] B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{xB_0} \left[\begin{array}{c} I - ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} \times \\ [p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg} - p_-I - \text{Opereg}] \end{array} \right] \times B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B_0^{-2}G_0(0) \\
&\quad - p_-e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} B^{-2}G_-(0)
\end{aligned}$$

$$u_0 \simeq \text{Rég} + p_-B^{-2}e^{xB_0} ([p_+B_0B^{-1} + p_-I + \text{Opereg}])^{-1} (B^2B_0^{-2}G_0(0) - G_-(0))$$

3.9 Analyse de u_0 au voisinage de 1

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + v_0(G_0)(x) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v'_0(G_0)(1) - e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + v_0(G_0)(x) \\
&+ e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v'_0(G_0)(1) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_- v'_+(G_+)(1) + p_+ v'_0(G_0)(1)) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_+ B_0 v_0(G_0)(1) - p_- B v_+(G_+)(1)) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_1^{-1} B_0 v_0(G_0)(1) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v'_0(G_0)(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + v_0(G_0)(x) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_- v'_+(G_+)(1) + p_+ v'_0(G_0)(1)) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_+ B_0 v_0(G_0)(1) - p_- B v_+(G_+)(1)) \\
&- e^{(1-x)B_0} \Delta_1^{-1} v_0(G_0)(1).
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
p_- v'_+(G_+)(1) + p_+ v'_0(G_0)(1) &= \frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \\
p_+ B_0 v_0(G_0)(1) - p_- B v_+(G_+)(1) &= \frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \\
v_0(G_0)(1) &= \text{Rég} - \frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + v_0(G_0)(x) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \left(\frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \right) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \left(\frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \right) \\
&- e^{(1-x)B_0} \Delta_1^{-1} \left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + v_0(G_0)(x) \\
&- e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_- B^{-1} G_+(1) - p_+ B_0^{-1} G_0(1)) \\
&+ \frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} \Delta_1^{-1} B_0^{-2} G_0(1).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1} &= -[p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + \text{Opereg}]^{-1} \\
\Delta_1 &= [I + 2p_-(I + e^{2B})e^{2B_0} \Delta^{-1}] \\
\Delta_1 &= I + \text{Opereg} \\
\Delta_1^{-1} &= [I + \text{Opereg}]^{-1} \simeq I \\
\Delta_2 &= [-p_+ I + p_- B B_0^{-1} (I + e^{2B})(I - e^{2B})^{-1}] \\
&= [-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + \text{Opereg}] \\
\Delta_2^{-1} &= [-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [I + \text{Opereg}]^{-1} (p_- B^{-1} G_+(1) - p_+ B_0^{-1} G_0(1)) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} [I + \text{Opereg}]^{-1} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} (p_- B^{-1} G_+(1) - p_+ B_0^{-1} G_0(1)) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} (p_- B_0^{-1} B^{-1} G_+(1) - p_+ B_0^{-2} G_0(1)) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+(1) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I - p_- B B_0^{-1}] B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+(1) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1}] B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+(1) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + p_+ I] B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+(1) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} p_+ [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+(1) \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I - p_- B B_0^{-1}] B_0^{-2} G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} \left[I - p_+ [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} \right] B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B^{-1} B_0^{-1}] G_+(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} \left[I - [p_- B B_0^{-1} - p_+ I - p_- B B_0^{-1}] [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} \right] B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B^{-1} B_0^{-1}] G_+(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1}] B_0^{-2} G_0(1) \\
&\quad - e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1}] B^{-2} G_+(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(1-x)B_0} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I + \text{Opereg}]^{-1} [p_- B B_0^{-1}] (B_0^{-2} G_0(1) - B^{-2} G_+(1)).
\end{aligned}$$

Et on aura les théorèmes suivants

Théorème 3.3 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. Alors

1. u_0 est la solution de notre problème sur $]0, 1[$
2. $u_0 \in C([0, 1]; D(B^2)) \cap C^2([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d} \right) \in \overline{D(B_0)},$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in \overline{D(B_0)}.$$

Théorème 3.4 Soient $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1, 0]; E)$ et $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. Alors

1. u_0 est la solution de notre problème sur $]0, 1[$.
2. $B_0^2 u_0(\cdot)$, $u_0'' \in C^\theta([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d} \right) \in D_{B_0}(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in D_{B_0}(\theta, +\infty).$$

3.10 Analyse de u_+ au voisinage de 1

$$\begin{aligned} u_+ &\simeq e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} v_+(G_+)(1) \\ &+ e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} B_0^{-1} v'_0(G_0)(1) + e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} v_0(G_0)(1) \\ &+ e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} \Lambda \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_- v'_+ G_+(1) + p_+ v'_0 G_0(1)) \\ &+ e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} \Lambda \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} (p_+ B_0 v_0 G_0(1) - p_- B v_+ G_+(1)) \\ &+ e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} \Lambda \Delta_1^{-1} B_0 v_0(G_0)(1) \\ &+ e^{(x-1)B} (I - e^{2B})^{-1} \Lambda v'_0 G_0(1) \\ &+ v_+ G_+(x). \end{aligned}$$

Avec

$$\Lambda = -B_0^{-1} \Delta_1 + 2p_+ e^{2B_0} \Delta^{-1} (I - e^{2B}) B^{-1}$$

$$\begin{aligned} u_+ &\simeq \text{Rég} + v_+ G_+(x) \\ &- e^{(x-1)B} \left(-\frac{1}{2} B^{-2} G_+(1) \right) + e^{(x-1)B} B_0^{-1} \left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1) \right) \\ &+ e^{(x-1)B} \left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1) \right) \\ &+ e^{(x-1)B} [-B_0^{-1} + \text{Operég}] [-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + \text{Operég}]^{-1} \times \\ &[I + \text{Operég}]^{-1} \left(\frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \right) \\ &+ e^{(x-1)B} [-B_0^{-1} + \text{Operég}] [-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + \text{Operég}]^{-1} \times \\ &[I + \text{Operég}]^{-1} \left(\frac{p_-}{2} B^{-1} G_+(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} G_0(1) \right) \\ &+ e^{(x-1)B} [-B_0^{-1} + \text{Operég}] [I + \text{Operég}]^{-1} B_0 \left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1) \right) \\ &+ e^{(x-1)B} [-B_0^{-1} + \text{Operég}] \left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} G_0(1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} + \frac{1}{2}B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(1) - \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-3}G_0(1) \\
&- \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+ e^{(x-1)B}B_0^{-1}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} \left(\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1) \right) \\
&+ e^{(x-1)B}B_0^{-1}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} \left(\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1) \right) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-3}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&- \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-1}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} (p_+B_0^{-1}G_0(1) - p_-B^{-1}G_+(1)) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-1}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} (p_+B_0^{-1}G_0(1) - p_-B^{-1}G_+(1)) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&- \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}p_+B_0^{-2}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1}G_0(1) \\
&- \frac{1}{2}e^{(x-1)B}p_-B_0^{-1}B^{-1}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1}G_+(1) \\
&+ \frac{p_+}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1}G_0(1) \\
&- \frac{p_-}{2}e^{(x-1)B}[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1}B^{-1}B_0^{-1}G_+(1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&\quad + e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(1) \\
&\quad - e^{(x-1)B}p_-B_0^{-1}B^{-1} [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} G_+(1) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(x-1)B} \left(I - p_-BB_0^{-1} [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} \right) B^{-2}G_+(1) \\
&\quad + e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(x-1)B} \left(I - [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} [p_-BB_0^{-1} - p_+I + p_+I] \right) B^{-2}G_+(1) \\
&\quad + e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} \\
&\quad - e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} B^{-2}G_+(1) \\
&\quad + e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ &\simeq \text{Rég} \\
&\quad + e^{(x-1)B}p_+ [-p_+I + p_-BB_0^{-1} + \text{Opereg}]^{-1} (B_0^{-2}G_0(1) - B^{-2}G_+(1)).
\end{aligned}$$

Donc on aura les théorèmes suivants

Théorème 3.5 Soient $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_+ \in D(B^2).$$

Alors

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1, 2[$.
2. $u_+ \in C([1, 2]; D(B_{r,d}^2)) \cap C^2([1, 2]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in \overline{D(B)},$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 3.6 Soient $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0, 1]; E)$ et $\frac{g_+}{d} \in C^\theta([1, 2]; E)$ avec $0 < \theta < 1$. On suppose que

$$f_+ \in D(B^2).$$

Alors

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1, 2[$
2. $B^2 u_+(\cdot)$, $u_+'' \in C^\theta([1, 2]; E)$ si et seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in D_B(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d} \right) \in D_B(\theta, +\infty).$$

Chapitre 4

Dynamique de population dans deux patches

4.1 Introduction

Dans le papier de Cantrell, R. S., et Cosner, C. [4] on a trouvé une étude intéressante sur les modèles de diffusion en dynamique de population incluant des comportements individuels aux frontières et applications. Cette étude a été détaillée dans une dimension spatiale.

Notre objectif dans ce travail est d'analyser la situation analogue dans l'espace à deux dimensions. Plus précisément, nous nous occuperons de l'étude de l'analyticité de C_0 semi-groupe généré par le processus de dispersion dans deux habitats sous une condition d'asymétrie et une condition de dispersion continue (skewness condition) à l'interface qui représentent le comportement des individus aux limites.

Ces problèmes sont basés sur les équations de type parabolique établies dans un paysage constitué par deux habitats différents :

$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+,$$

où

$$\begin{cases} \Omega_- =]-l, 0[\times]0, 1[\\ \Omega_+ =]0, L[\times]0, 1[\end{cases}$$

avec $l, L > 0$. L'équation de diffusion est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d_- \Delta u_-(t, x, y) + F_-(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_- \\ d_+ \Delta u_+(t, x, y) + F_+(u(t, x, y)) & \text{dans }]0, T[\times \Omega_+, \end{cases} \quad (4.1)$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y) & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_+(x, y) & \text{dans } \Omega_+, \end{cases} \quad (4.2)$$

les conditions aux bord

$$\begin{cases} u_-(t, -l, y) = f_-(t, y), & y \in]0, 1[\\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in]-l, 0[\\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & x \in]0, L[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, L, y) = f_+(t, y), & y \in]0, 1[, \end{cases} \quad (4.3)$$

la continuité de la dispersion à l'interface $\Gamma_0 = \{0\} \times]0, 1[$,

$$\begin{cases} d_- \Delta u_-(t, 0, y) + F_-(u_-(t, 0, y)) = d_+ \Delta u_+(t, 0, y) + F_+(u_+(t, 0, y)) \\ y \in]0, 1[, \end{cases} \quad (4.4)$$

et les conditions d'interface d'asymétrie (skewness interface conditions)

$$(1 - p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 0, y), \quad y \in]0, 1[. \quad (4.5)$$

Nous avons utilisé les notations naturelles

$$u_- = u_{]0, T[\times \Omega_-}, \quad u_+ = u_{]0, T[\times \Omega_+},$$

avec

$$u_{\pm}(x)(y) = u_{\pm}(x, y).$$

Ici $u(t, x, y)$ représente la densité de la population, Ω_+ est le refuge et Ω_- est la zone tampon avec leurs coefficients de diffusion correspondants d_+ et d_- . L'équation (4.1) décrit la diffusion différente dans les habitats avec leur croissance diminution des fonctions logistiques F_- et F_+ . Les conditions aux bords (4.3) signifient simplement que les individus meurent lorsqu'ils atteignent les autres parties des limites $]-l, L[\times \{0\}$ et $]-l, L[\times \{1\}$ (ce qui signifie que notre domaine délimité est entouré d'un habitat hostile); la densité de population est donnée sur $\{-l\} \times]0, 1[$ par exemple et son flux également sur $\{L\} \times]0, 1[$.

Comme a été spécifié dans [4], les conditions (4.4) sont essentielles dans ce travail et expriment le fait que le processus de dispersion ne permet pas aux individus de se coincer à n'importe quel emplacement fixe et ne permet pas de barrières impénétrables à la dispersion, il faut donc supposer sa continuité dans tout le domaine.

Enfin, les conditions d'interface dans (4.5) sont basées sur un mouvement brownien biaisé caractérisé par le paramètre $p \in]0, 1[$ qui est la probabilité qu'un individu sur l'interface se déplacera dans le refuge Ω_+ . Bien sûr, lorsque $p = 1/2$ les conditions signifient la continuité du flux.

La justification des conditions (4.5) est due au fait que le temps locale du processus avec $p \neq 1/2$ est discontinue, voir par exemple Otso Ovaskainen et Stephen J. Cornell dans [33].

Notons également que lorsque nous considérons les différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement global du mouvement.

On commence par le cas linéaire stationnaire, on considère donc que la partie linéarisée des fonctions logistiques, c'est-à-dire

$$\begin{cases} F_-(u_-) = -r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ F_+(u_+) = r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

ici r_+ est le taux de **croissance** dans le refuge Ω_+ et r_- est le taux de **mortalité** dans la zone tampon Ω_- .

4.2 Etude de l'équation spectrale

On s'intéresse à l'étude de l'opérateur suivant

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} d_- \Delta u_- - r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

où u vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound.C.)} \quad \begin{cases} u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{1\} \\ u_- = 0 & \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 & \text{dans } \{L\} \times]0, 1[\end{cases} \\ \text{(Interf.C.)} \quad d_- \Delta u_-(0, y) - r_- u_- = d_+ \Delta u_+(0, y) + r_+ u_+, \quad y \in]0, 1[, \\ \text{(Skew.C.)} \quad (1-p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[. \end{array} \right.$$

On doit étudier l'équation spectrale

$$\mathcal{L}u - \lambda u = g, \tag{4.6}$$

dans un espace adapté, où u vérifie (Bound.C.), (Interf.C.) et (Skew.C.).

On rappelle que les constantes r_-, r_+, d_-, d_+ sont strictement positives, $p \in]0, 1[$ et λ est dans un secteur défini dans le chapitre 2 Section 2.

4.3 Formulation opérationnelle de l'équation spectrale

On considère l'espace de Banach

$$E = C_0([0, 1]) = \{\varphi \in C([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\},$$

muni de la norme sup de $C([0, 1])$. On définit l'opérateur A dans E comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ et } \varphi'' \in C_0([0, 1])\} \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{array} \right.$$

Ensuite, nous savons que cet opérateur linéaire fermé vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{D(A)} = E; \text{ pour } \eta \in]0, \pi[, \rho(A) \supset S_{\pi-\eta} \cup \{0\} \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall z \in S_{\pi-\eta} \cup \{0\}, \|(zI - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |z|}, \end{array} \right. \tag{4.7}$$

d'autre part on sait qu'il existe une boule $\mathcal{B}(0, \delta)$, $\delta > 0$, telle que $\rho(A) \supset \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$ et l'estimation (4.7) reste vraie dans $S_{\pi-\eta} \cup \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$. Ici $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A .

Remarque 4.1 La condition φ'' est nulle en 0 et 1 dans la définition de $D(A)$ est nécessaire pour définir correctement l'opérateur A dans E . Ce n'est pas une restriction puisque nous supposons naturellement que la dispersion spatiale en direction de la variable y en dehors du domaine est nulle.

Remarque 4.2 1. On peut considérer les espaces plus naturels

$$E = C_0([0, h]) = \{\varphi \in C([0, h]) : \varphi(0) = \varphi(h) = 0\},$$

ou

$$E = C_0(\bar{U}) = \{\varphi \in C(\bar{U}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial U\},$$

où U est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

2. Notons que les dimensions l , L et h des deux habitats sont importantes pour l'analyse du spectre de \mathcal{L} , comme cela a été démontré dans [4] dans une dimension. Nous étudierons la situation similaire pour notre problème dans le chapitre suivant.

Les notations de fonctions vectorielles bien connues

$$u_{\pm}(x)(y) := u_{\pm}(x, y),$$

alors on écrit le problème (4.6) dans E , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r_-}{d_-}u_-(x) - \frac{\lambda}{d_-}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d_-} \quad \text{sur }]-l, 0[\\ u''_+(x) + Au_+(x) + \frac{r_+}{d_+}u_+(x) - \frac{\lambda}{d_+}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d_+} \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) \\ = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+) \end{array} \right. \\ (1-p)d_-u'_-(0^-) = pd_+u'_+(0^+). \end{array} \right.$$

Notons qu'il n'y a aucune raison que la condition

$$d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+),$$

Implique la continuité de la densité elle-même sur l'interface. En tenant compte de nos conditions de limites et de transmission, il est clair que la continuité de la dispersion spatiale en direction de la variable x est en quelque sorte plus «nuancée» que celle en direction de la variable y . C'est pourquoi on étudie notre travail dans l'espace suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \{u \in C([-l, L] \setminus \{0\}; E) : \exists u(0^-) \in E, \exists u(0^+) \in E, \\ & \text{et } u|_{[-l, 0[} \in C^0([-l, 0[; E), u|_{]0, L]} \in C^0(]0, L]; E)\}. \end{aligned}$$

Maintenant on utilisera les résultats suivants

Lemme 4.1 *Soit U un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors toute fonction $\psi \in C^\theta(U; E)$ Peut être étendu en fonction dans $C^\theta(\bar{U}; E)$. En particulier $C^\theta(U; E) \subset C^\theta(\bar{U}; E)$.*

La preuve est dans CL. Zuily et H. Queffélec [39]. Et par conséquent on a

$$\begin{cases} C^\theta([-l, 0[; E) = C^\theta([-l, 0]; E) \\ C^\theta(]0, L]; E) = C^\theta([0, L]; E), \end{cases}$$

ce qui implique que les espaces $C^\theta([-l, 0[; E)$ et $C^\theta(]0, L]; E)$ sont équipés des mêmes normes que $C^\theta([-l, 0]; E)$ et $C^\theta([0, L]; E)$.

Posons

$$\mathcal{E} = \{u \in C([-l, L] \setminus \{0\}; E) : u|_{[-l, 0[} \in C^\theta([-l, 0]; E) \text{ et } u|_{]0, L]} \in C^\theta([0, L]; E)\}.$$

Alors \mathcal{E} est un espace de Banach muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{E}} &= \max\left(\|u_-\|_{C^\theta([-l, 0]; E)}, \|u_+\|_{C^\theta([0, L]; E)}\right) \\ &= \max\left(\|u_-\|_{C^\theta([-l, 0]; E)}, \|u_+\|_{C^\theta([0, L]; E)}\right). \end{aligned}$$

La fonction $g \in \mathcal{E}$ telle que

$$\begin{cases} g_- = g|_{[-l, 0]} \in C^\theta([-l, 0]; E) \\ g_+ = g|_{[0, L]} \in C^\theta([0, L]; E), \end{cases}$$

(avec $0 < \theta < 1$). Ce n'est pas difficile de montrer que l'hölderianité de g_- et g_+ implique l'hölderianité globale de g sur $[-l, L]$ si et seulement si

$$g_-(0) = g_+(0).$$

On ne supposera pas cette condition.

Précisons le domaine de \mathcal{L} :

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{E} : \forall x \in [-l, L] \setminus \{0\} \quad u(x) \in D(A), \\ u_- \in C^2(]-l, 0[; E), u_+ \in C^2(]0, L]; E), \\ x \mapsto [u''_-(x) + Au_-(x)] \in C^\theta([-l, 0]; E), \\ x \mapsto [u''_+(x) + Au_+(x)] \in C^\theta(]0, L]; E), \\ \text{et (Bound.C.), (Interf.C.), (Skew.C.).} \end{array} \right\}.$$

4.4 Etude de l'équation de la résolvante

Fixons un petit nombre ε_0 . On suppose que le nombre complexe λ vérifie

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0.$$

Notre équation spectrale pour \mathcal{L} écrit :

$$(P_A) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r_-}{d_-}u_-(x) - \frac{\lambda}{d_-}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d_-} = G_-(x) \text{ sur }]-l, 0[\\ u''_+(x) + Au_+(x) + \frac{r_+}{d_+}u_+(x) - \frac{\lambda}{d_+}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d_+} = G_+(x) \text{ sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) \\ = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+) \end{array} \right. \\ (1-p)d_-u'_-(0^-) = pd_+u'_+(0^+). \end{array} \right.$$

Posons

$$A_- = A - \frac{r_-}{d_-}I - \frac{\lambda}{d_-}I, \quad A_+ = A + \frac{r_+}{d_+}I - \frac{\lambda}{d_+}I,$$

qui ont le même domaine

$$D(A_-) = D(A_+) = D(A),$$

que l'opérateur $-A$, nous pouvons vérifier que cet opérateur ,

$$-A_- = -A + \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-}$$

est sectoriel dans E . En fait, nous pouvons facilement prouver que $] -\infty, 0] \subset \rho(-A_-)$ et, si nous posons

$$M(-A_-) := M(-A_-, \pi) := \sup_{t>0} \|t(-A_- + tI)^{-1}\|,$$

Ensuite, nous obtenons pour tout λ vérifiant

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0,$$

$$M(-A_-) \leq \sup_{t>0} \left(\frac{t}{\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right) \right]} \frac{1}{\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right|} \right).$$

On distingue deux cas :

1. si $|\arg(\lambda)| < \pi/2$ alors on a évidemment pour $t > 0$

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left(\frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \frac{r_-}{d_-} + t,$$

où $d(\cdot)$ est la distance euclidienne.

2. Si $\pi/2 \leq |\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0$

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left(\frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \left(\frac{r_-}{d_-} + t \right) \sin \alpha,$$

avec $\alpha \in]\varepsilon_0, \pi/2]$ et alors

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left(\frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \left(\frac{r_-}{d_-} + t \right) \sin \varepsilon_0.$$

Par conséquent il existe une constante C indépendante de λ telle que

$$\begin{aligned} M(-A_-) &\leq \sup_{t>0} \left(\frac{t}{\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right) \right]} \frac{1}{\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right|} \right) \\ &\leq \frac{C}{\cos \frac{\pi - \varepsilon_0}{2}} \sup_{t>0} \left(\frac{t}{\left| \frac{r_-}{d_-} + t \right|} \right) \\ &= \frac{C}{\sin(\varepsilon_0/2)} \sup_{t>0} \left(\frac{t}{\left| \frac{r_-}{d_-} + t \right|} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi

$$-A_- \in \text{Sect} [\pi - \arcsin (1/M(-A_-))]$$

avec $M(-A_-)$ est indépendant de λ , voir Proposition 2.1.1 dans [20].

Maintenant, puisque

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0,$$

alors il existe un petit $\varepsilon_0(r_+, d_+) > 0$ tel que

$$\varepsilon_0(r_+, d_+) < \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \left| \arg \left(\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right) \right| < \pi - \varepsilon_0(r_+, d_+);$$

Nous obtenons alors de manière similaire, mais différemment

$$-A_+ \in \text{Sect} (\pi - \arcsin [1/M(-A_+)]),$$

avec $M(-A_+)$ indépendant de λ .

Nous déduisons également que les opérateurs suivants

$$B = -(-A)^{1/2}, \quad B_- = - \left[- \left(A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right) \right]^{1/2}, \quad B_+ = - \left[- \left(A + \frac{r_+}{d_+} I - \frac{\lambda}{d_+} I \right) \right]^{1/2},$$

de mêmes domaines

$$D(B_-) = D(B_+) = D(B),$$

sont bien définis et génèrent des semigroups analytiques sur E , voir [20] p.81 et aussi [3].

D'autre part, en utilisant la proposition 3.1.2 dans [20], on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon(B_-) \right\}, \\ \|(B_- - zI)^{-1}\| \leq \frac{C_-}{|z|}, \\ \text{et pour tout } z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon(B_+) \right\}, \\ \|(B_+ - zI)^{-1}\| \leq \frac{C_+}{|z|}, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

où les constantes

$$C_-, C_+, \epsilon(B_-) \text{ et } \epsilon(B_+),$$

sont indépendantes de λ .

Posons

$$p_- = (1 - p)d_-, \quad p_+ = pd_+.$$

Notre équation spectrale

$$\mathcal{L}u - \lambda u = g \in \mathcal{E},$$

s'écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) - B_-^2 u_-(x) = G_-(x) \quad \text{sur }]-l, 0[\\ u''_+(x) - B_+^2 u_+(x) = G_+(x) \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_- u_-(0^-) \\ = d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+ u_+(0^+) \end{array} \right. \\ (1 - p)d_- u'_-(0^-) = pd_+ u'_+(0^+). \end{array} \right.$$

Alors

$$u_{\pm}(x) = e^{(x-a_{\pm})B_{\pm}} \alpha_{\pm} + e^{(b_{\pm}-x)B_{\pm}} \beta_{\pm} + v_{\pm}(G)(x),$$

avec $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm} \in E$; $a_- = -l, b_- = 0 : a_+ = 0, b_+ = L$ et

$$v_{\pm}(G_{\pm})(x) = \frac{1}{2} \int_{a_{\pm}}^x e^{(x-t)B_{\pm}} B_{\pm}^{-1} G_{\pm}(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^{b_{\pm}} e^{(t-x)B_{\pm}} B_{\pm}^{-1} G_{\pm}(t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_-(x) &= e^{(x+l)B_-} \alpha_- + e^{-xB_-} \beta_- + v_-(G_-)(x), \quad x \in]-l, 0[\\ u_+(x) &= e^{xB_+} \alpha_+ + e^{(L-x)B_+} \beta_+ + v_+(G_+)(x), \quad x \in]0, L[, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt, \\ v_+(G_+)(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= B_- e^{(x+l)B_-} \alpha_- - B_- e^{-xB_-} \beta_- + v'_-(G_-)(x), \quad x \in]-l, 0[\\ u'_+(x) &= B_+ e^{xB_+} \alpha_+ - B_+ e^{(L-x)B_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(x), \quad x \in]0, L[, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_-(0) &= B_- e^{lB_-} \alpha_- - B_- \beta_- + v'_-(G_-)(0) \\ u'_+(0) &= B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(0). \end{aligned}$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-(-l) = \alpha_- + e^{lB_-} \beta_- + v_-(G_-)(-l) = 0 \\ u'_+(L) = B_+ e^{LB_+} \alpha_+ - B_+ \beta_+ + v'_+(G_+)(L) = 0, \end{cases}$$

donnent

$$\begin{cases} \alpha_- = -e^{lB_-} \beta_- - v_-(G_-)(-l) \\ \beta_+ = e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L). \end{cases}$$

La condition de continuité (The interface dispersal condition)

$$d_- [u''_-(0) - B_-^2 u_-(0)] - r_- u_-(0) = d_+ [u''_+(0) - B_+^2 u_+(0)] + r_+ u_+(0)$$

devient

$$d_- G_-(0) + \lambda u_-(0) = d_+ G_+(0) + \lambda u_+(0)$$

ou

$$\begin{aligned} & d_- G_-(0) + \lambda [e^{lB_-} \alpha_- + \beta_- + v_-(G_-)(0)] \\ &= d_+ G_+(0) + \lambda [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+ + v_+(G_+)(0)], \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} u'_-(0) &= B_- e^{lB_-} \alpha_- - B_- \beta_- + v'_-(G_-)(0) \\ u'_+(0) &= B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(0), \end{aligned}$$

La condition d'asymétrie (the skewness condition)

$$p_-(u_-)'(0) - p_+(u_+)'(0) = 0,$$

donne

$$\begin{aligned} & p_- (B_- e^{lB_-} \alpha_- - B_- \beta_-) - p_+ (B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+) \\ &= -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0). \end{aligned}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha_- = -e^{lB_-} \beta_- - v_-(G_-)(-l) \\ \beta_+ = e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ p_- (B_- e^{lB_-} \alpha_- - B_- \beta_-) - p_+ (B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+) \\ = -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0) \\ \lambda [e^{lB_-} \alpha_- + \beta_-] - \lambda [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+] \\ = d_+ G_+(0) - d_- G_-(0) + \lambda v_+(G_+)(0) - \lambda v_-(G_-)(0), \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_- = -e^{lB^-} \beta_- - v_-(G_-)(-l) \\ \beta_+ = e^{lB^+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ p_- (e^{lB^-} \alpha_- - \beta_-) - p_+ (B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{lB^+} \beta_+) \\ = B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] := (I) \\ [e^{lB^-} \alpha_- + \beta_-] - [\alpha_+ + e^{lB^+} \beta_+] \\ = \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_- (0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) := (II), \end{array} \right.$$

ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_- = -e^{lB^-} \beta_- - v_-(G_-)(-l) \\ \beta_+ = e^{lB^+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ p_- (e^{lB^-} \alpha_- - \beta_-) - p_+ (B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{lB^+} \beta_+) = (I) \\ [e^{lB^-} \alpha_- + \beta_-] - [\alpha_+ + e^{lB^+} \beta_+] = (II); \end{array} \right.$$

en utilisant les deux première équations, on obtient

$$\begin{aligned} & p_- (e^{lB^-} \alpha_- - \beta_-) - p_+ (B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{lB^+} \beta_+) \\ &= p_- (e^{lB^-} [-e^{lB^-} \beta_- - v_-(G_-)(-l)] - \beta_-) \\ & \quad - p_+ (B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{lB^+} [e^{lB^+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)]) \\ &= -p_- [e^{2lB^-} \beta_- + \beta_-] - p_- e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) - p_+ B_-^{-1} B_+ \alpha_+ \\ & \quad + p_+ B_-^{-1} B_+ e^{2lB^+} \alpha_+ + p_+ B_-^{-1} B_+ e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ &= -p_- [I + e^{2lB^-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ [I - e^{2lB^+}] \alpha_+ \\ & \quad + p_+ B_-^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) - p_- e^{lB^-} v_-(G_-)(-l), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & [e^{lB^-} \alpha_- + \beta_-] - [\alpha_+ + e^{lB^+} \beta_+] \\ &= e^{lB^-} [-e^{lB^-} \beta_- - v_-(G_-)(-l)] + \beta_- \\ & \quad - [\alpha_+ + e^{lB^+} [e^{lB^+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)]] \\ &= (I - e^{2lB^-}) \beta_- - (I + e^{2lB^+}) \alpha_+ \\ & \quad - e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) - e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L), \end{aligned}$$

le système ci-dessus devient

$$\left\{ \begin{array}{l} -p_- [I + e^{2lB^-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ [I - e^{2lB^+}] \alpha_+ \\ = (I) - p_+ B_-^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) := (I') \\ (I - e^{2lB^-}) \beta_- - (I + e^{2lB^+}) \alpha_+ \\ = (II) + e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) := (II'), \end{array} \right.$$

or

$$\left\{ \begin{array}{l} -p_- [I + e^{2lB^-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ [I - e^{2lB^+}] \alpha_+ = (I') \\ (I - e^{2lB^-}) \beta_- - (I + e^{2lB^+}) \alpha_+ = (II'). \end{array} \right.$$

Le déterminant abstrait de ce système est

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda,p_-,p_+} &= p_- (I + e^{2lB_-}) (I + e^{2LB_+}) \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (I - e^{2lB_-}). \end{aligned}$$

Pour l'inversibilité de Δ_{λ,p_-,p_+} , on utilisera le H^∞ -calcul pour les opérateurs sectoriels.

On rappelle que les opérateurs $(I + e^{2lB_-})$, $(I + e^{2LB_+})$, $(I - e^{2LB_+})$ et $(I - e^{2lB_-})$ sont bornés inversibles par application la Proposition 2.3.6, page 60 dans A. Lunardi [30].

4.5 Inversibilité du déterminant Δ_{λ,p_-,p_+}

On pose

$$\frac{r_-}{d_-} = \rho_-, \quad \frac{\lambda}{d_-} = \lambda_-, \quad \frac{r_+}{d_+} = \rho_+, \quad \frac{\lambda}{d_+} = \lambda_+,$$

considérons $\omega \in]0, \pi[$ et rappelons que

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

On considère la fonction suivante

$$e_{\lambda,p_-,p_+} : S_\omega \ni z \longmapsto e_{\lambda,p_-,p_+}(z),$$

définie comme suit

$$\begin{aligned} &e_{\lambda,p_-,p_+}(z) \\ &= p_- \left(1 + e^{-2l(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \right) \left(1 + e^{-2L(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}} \right) \\ &\quad + p_+ \frac{(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}}{(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \left(1 - e^{-2L(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}} \right) \left(1 - e^{-2l(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \right); \end{aligned}$$

il est clair que cette fonction est holomorphe et bornée puisque

$$\operatorname{Re}(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} > 0,$$

donc $e_{\lambda,p_-,p_+} \in H^\infty(S_\omega)$. D'autre part on sait que l'opérateur $-A$ a un $H^\infty(S_\omega)$ calcul fonctionnel borné; donc on a

$$\Delta_{\lambda,p_-,p_+} = e_{\lambda,p_-,p_+}(-A).$$

On a

$$\begin{aligned} &|e_{\lambda,p_-,p_+}(z)| \\ &\geq \left(p_+ \left| \frac{(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}}{(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2L(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2l(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + p_- \left| 1 + e^{-2l(z+\lambda_-+\rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z+\lambda_+-\rho_+)^{1/2}} \right| \right) \cdot \left| \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi &= \arg \left(\frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) + \arg \left(1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) \\ &\quad + \arg \left(1 - e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \\ &\quad - \arg \left(1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}&|\Phi| \\ &\leq \left| \arg (z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} - \arg (z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \right| \\ &\quad + \left| \arg \left(1 - e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \right| \\ &\quad + \left| \arg \left(1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) \right|.\end{aligned}$$

Maintenant puisque

$$z \in S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\},$$

alors, on peut remarquer qu'il existe $\omega_{\lambda_-, \rho_-} \in]0, \omega/2[$ et $\omega_{\lambda_+, \rho_+} \in]0, \omega/2[$, (avec $\omega_{\lambda_-, \rho_-} < \omega_{\lambda_+, \rho_+}$) tels que

$$\begin{cases} 2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_-, \rho_-}} \\ 2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_+, \rho_+}}; \end{cases}$$

en utilisant le lemme 2.7 dans le chapitre 2 Section 2, on a

$$\begin{cases} \left| \arg \left(1 - e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \right| < \omega_{\lambda_-, \rho_-} \\ \left| \arg (z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} - \arg (z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \right| \leq \omega_{\lambda_+, \rho_+}, \end{cases}$$

d'où on en déduit

$$|\Phi| < \omega_{\lambda_+, \rho_+} - \omega_{\lambda_-, \rho_-} + \omega_{\lambda_-, \rho_-} + \omega_{\lambda_+, \rho_+} < 2\omega_{\lambda_+, \rho_+} < \omega,$$

et

$$\begin{aligned}&|e_{\lambda, \rho_-, \rho_+}(z)| \\ &\geq \left(p_+ \left| \frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + p_- \left| 1 + e^{-2l(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} \right),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
|e_{\lambda,p_-,p_+}(z)| &\geq p_- \left| 1 + e^{-2l(z+\lambda_+ + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z+\lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&\geq p_- \left[1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_-, \rho_-}))} \right] \left[1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_+, \rho_+}))} \right] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&\geq p_- \left(1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega/2))} \right)^2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) > 0;
\end{aligned}$$

puisque pour tout $z \in S_\omega$, on a

$$\tan(\omega_{\lambda_-, \rho_-}) \leq \tan(\omega/2) \quad \text{et} \quad \tan(\omega_{\lambda_+, \rho_+}) \leq \tan(\omega/2).$$

Alors la fonction $e_{\lambda,p_-,p_+}(z)$ ne s'annule pas dans S_ω et la fonction $1/e_{\lambda,p_-,p_+}(z)$ est bornée, donc appartient à $H^\infty(S_\omega)$. Donc

$$\|1/e_{\lambda,p_-,p_+}\|_\infty \leq \frac{C}{p_-} = \frac{C}{(1-p)d_-}.$$

Nous concluons alors que Δ_{λ,p_-,p_+} est borné inversible et

$$\begin{cases} \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} = (1/e_{\lambda,p_-,p_+})(-A) \\ \|\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{(1-p)d_-}. \end{cases}$$

Notons que la constante C est indépendante des habitats et du paramètre λ .

Maintenant de l'équation

$$\Delta_{\lambda,p_-,p_+} A^{-1} = A^{-1} \Delta_{\lambda,p_-,p_+},$$

Il s'ensuit que

$$\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} A = A \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1},$$

sur $D(A)$, puisque $\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}$ est un opérateur borné sur $D(A)$. Alors par interpolation $\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}$ est borné sur n'importe quel espace d'interpolation $(D(A), E)_{\alpha,q}$ (voir la définition dans [19]) on a donc la même estimation

$$\|\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}\|_{\mathcal{L}((D(A), E)_{\alpha,q})} \leq \frac{C}{(1-p)d_-}.$$

4.6 Résolution de l'équation spectrale

Rappelons que

$$\begin{cases} (I) = B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ (II) = \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (I') = (I) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) \\ (II') = (II) + e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L); \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} (I') &= (I) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) \\ &= B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ &\quad - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II') &= (II) + e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ &= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \\ &\quad + e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L). \end{aligned}$$

Du système

$$\begin{cases} -p_- (I + e^{2lB_-}) \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \alpha_+ = (I') \\ (I - e^{2lB_-}) \beta_- - (I + e^{2LB_+}) \alpha_+ = (II'), \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \beta_- = \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ \alpha_+ = \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [-p_- (I + e^{2lB_-}) (II') - (I - e^{2lB_-}) (I')], \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_- &= -e^{lB_-} \beta_- - v_-(G_-)(-l) \\ &= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{lB_-} ([p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ &\quad - v_-(G_-)(-l), \end{aligned}$$

d'où on en déduit

$$\begin{aligned} u_-(x) &= e^{(x+l)B_-} \alpha_- + e^{-xB_-} \beta_- + v_-(G_-)(x) \\ &= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{lB_-} e^{(x+l)B_-} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ &\quad - e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] \\ &\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ &\quad + v_-(G_-)(x); \end{aligned}$$

maintenant, en utilisant

$$\begin{aligned} &p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I') \\ &= p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[\frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + \right] \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) [v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0)] \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) [e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)] \\ &\quad - B_-^{-1} (I + e^{2lB_-}) [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ &\quad - (I + e^{2LB_+}) [p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L)]; \end{aligned}$$

on obtient pour $x \in]-l, 0[$,

$$\begin{aligned}
& u_-(x) \\
&= e^{(x+l)B_-} \alpha_- + e^{-xB_-} \beta_- + v_-(G_-)(x) \\
&= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{lB_-} e^{(x+l)B_-} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\
&\quad - e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] \\
&\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\
&\quad + v_-(G_-)(x),
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& u_-(x) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II')] \\
&\quad - \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [(I + e^{2LB_+}) (I')] \\
&\quad - e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] \\
&\quad + v_-(G_-)(x).
\end{aligned}$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{LB_+} [-p_- (I + e^{2LB_-}) (II') - (I - e^{2LB_-}) (I')] \\
&\quad + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L),
\end{aligned}$$

et pour tout $x \in]0, L[$,

$$\begin{aligned}
& u_+(x) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{xB_+} + e^{(2L-x)B_+}) [-p_- (I + e^{2LB_-}) (II') - (I - e^{2LB_-}) (I')] \\
&\quad + B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad + v_+(G_+)(x).
\end{aligned}$$

4.6.1 La non-continuité de la densité

Comme nous l'avons mentionné, la densité de la population n'est pas continue dans toute l'interface. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
& u_-(0) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I - e^{2LB_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\
&\quad - e^{lB_-} [v_-(G_-)(-l)] + v_-(G_-)(0),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_+(0) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I + e^{2LB_+}) [-p_- (I + e^{2LB_-}) (II') - (I - e^{2LB_-}) (I')] \\
&\quad + B_+^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + v_+(G_+)(0),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& u_-(0) - u_+(0) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I - e^{2lB^-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2lB^+}) (II') - (I + e^{2lB^+}) (I')] \\
&\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I + e^{2lB^+}) [p_- (I + e^{2lB^-}) (II') + (I - e^{2lB^-}) (I')] \\
&\quad - e^{lB^-} [v_-(G_-)(-l)] - B_+^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad + v_-(G_-)(0) - v_+(G_+)(0);
\end{aligned}$$

mais

$$\Delta_{\lambda, p_-, p_+} = p_- (I + e^{2lB^-}) (I + e^{2lB^+}) + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2lB^+}) (I - e^{2lB^-}),$$

alors

$$\begin{aligned}
& u_-(0) - u_+(0) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2lB^+}) (I - e^{2lB^-}) \\
&\quad + p_- (I + e^{2lB^+}) (I + e^{2lB^-})] (II') \\
&\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [(I + e^{2lB^+}) (I - e^{2lB^-}) - (I - e^{2lB^-}) (I + e^{2lB^+})] (I') \\
&\quad - e^{lB^-} [v_-(G_-)(-l)] - B_+^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad + v_-(G_-)(0) - v_+(G_+)(0) \\
&= (II') - e^{lB^-} [v_-(G_-)(-l)] - B_+^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad + v_-(G_-)(0) - v_+(G_+)(0);
\end{aligned}$$

Maintenant, rappelons que

$$\begin{aligned}
(II') &= (II) + e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\
&= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \\
&\quad + e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& u_-(0) - u_+(0) \\
&= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \\
&\quad + e^{lB^-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB^+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad - e^{lB^-} [v_-(G_-)(-l)] - B_+^{-1} e^{lB^+} v'_+(G_+)(L) \\
&\quad + v_-(G_-)(0) - v_+(G_+)(0) \\
&= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \neq 0,
\end{aligned}$$

puisque

$$d_+ G_+(0) - d_- G_-(0) = g_+(0) - g_-(0) \neq 0.$$

4.7 $u \in D(\mathcal{L})$

On doit vérifier que $u \in D(\mathcal{L})$. Rappelons que pour tout $x \in]-l, 0[$

$$\begin{aligned} & u_-(x) \\ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II')] \\ & \quad - \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [(I + e^{2LB_+}) (I')] \\ & \quad - e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] + v_-(G_-)(x), \end{aligned}$$

et pour tout $x \in]0, L[$,

$$\begin{aligned} & u_+(x) \\ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{xB_+} + e^{(2L-x)B_+}) [-p_- (I + e^{2LB_-}) (II') - (I - e^{2LB_-}) (I')] \\ & \quad + B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} v'_+(G_+)(L) + v_+(G_+)(x). \end{aligned}$$

On doit montrer que $u \in D(\mathcal{L})$ c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} i) u_- \in C^\theta([-l, 0[; C_0([0, 1])) \\ ii) u'_-, u''_- \in C([-l, 0[; C_0([0, 1])) \\ iii) x \mapsto [u''_-(x) - B_-^2 u_-(x)] \in C^\theta([-l, 0[; C_0([0, 1]))), \\ iv) u_+ \in C^\theta(]0, L]; C_0([0, 1])) \\ v) u'_+, u''_+ \in C(]0, L]; C_0([0, 1])) \\ vi) x \mapsto [u''_+(x) - B_+^2 u_+(x)] \in C^\theta(]0, L]; C_0([0, 1]))), \end{array} \right.$$

et toutes les conditions aux bords, d'asymétrie et de dispersion sont vérifiées.

Notons que *iii)* et *vi)* impliquent que

$$[u''_-(0^-) - B_-^2 u_-(0^-)] \quad \text{et} \quad [u''_+(0^+) - B_+^2 u_+(0^+)],$$

existent.

Montrons par exemple *iii)*. On a, pour tout $x \in]-l, 0[$

$$\begin{aligned} & B_-^2 u_-(x) \\ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} B_-^2 (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II')] \\ & \quad - \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} B_-^2 (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) (I + e^{2LB_+}) (I') \\ & \quad - B_-^2 e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] + B_-^2 v_-(G_-)(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & u''_-(x) \\ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} B_-^2 (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II')] \\ & \quad - \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} B_-^2 (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) (I + e^{2LB_+}) (I') \\ & \quad - B_-^2 e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] + v''_-(G_-)(x). \end{aligned}$$

On a

$$v_-(G_-)(x) = \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt,$$

$$\begin{aligned} v'_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} G_-(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} G_-(t) dt \\ &= w_1(x) + w_2(x). \end{aligned}$$

Posons pour $\varepsilon > 0$ assez petit

$$w_{1\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} e^{(x-t)B_-} G_-(t) dt, \quad w_{2\varepsilon}(x) = -\frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 e^{(t-x)B_-} G_-(t) dt,$$

alors

$$\begin{aligned} w'_{1\varepsilon}(x) &= \left(\frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} e^{(x-t)B_-} G_-(t) dt \right)' \\ &= \frac{1}{2} e^{\varepsilon B_-} G_-(x-\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} B_- e^{(x-t)B_-} G_-(t) dt, \\ &= \frac{1}{2} e^{\varepsilon B_-} G_-(x-\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} B_- e^{(x-t)B_-} G_-(x) dt, \\ w'_{1\varepsilon}(x) &= \frac{1}{2} e^{\varepsilon B_-} [G_-(x-\varepsilon) - G_-(x)] + \frac{1}{2} e^{(x+l)B_-} G_-(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-l}^{x-\varepsilon} B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt, \end{aligned}$$

de même, on obtient

$$\begin{aligned} w'_{2\varepsilon}(x) &= \left(-\frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 e^{(t-x)B_-} G_-(t) dt \right)' \\ &= \frac{1}{2} e^{\varepsilon B_-} G_-(x+\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 B_- e^{(t-x)B_-} G_-(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}e^{\varepsilon B_-}G_-(x + \varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 B_-e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 B_-e^{(t-x)B_-} G_-(x) dt, \\
&= \frac{1}{2}e^{\varepsilon B_-} (G_-(x + \varepsilon) - G_-(x)) + \frac{1}{2}e^{-xB_-}G_-(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{x+\varepsilon}^0 B_-e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&-B_-^2v_-(G_-)(x) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-l}^x B_-e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt - \frac{1}{2} \int_{-l}^x B_-e^{(x-t)B_-} G_-(x) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_x^0 B_-e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt - \frac{1}{2} \int_x^0 B_-e^{(t-x)B_-} G_-(x) dt, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-l}^x B_-e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt - \frac{1}{2} \int_x^0 B_-e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2}G_-(x) - \frac{1}{2}e^{(x+l)B_-}G_-(x) - \frac{1}{2}e^{-xB_-}G_-(x) + \frac{1}{2}G_-(x),
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\| [w'_{1\varepsilon}(x) + w'_{2\varepsilon}(x)] - B_-^2v_-(G_-)(x) - G_-(x) \| \\
&\leq \| [G_-(x - \varepsilon) - G_-(x)] \| + \| [G_-(x + \varepsilon) - G_-(x)] \| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| \int_{x-\varepsilon}^x B_-e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \right\| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| \int_x^{x+\varepsilon} B_-e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \right\| \\
&\leq C \left(\varepsilon^\theta + \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\theta-1} dt + \int_x^{x+\varepsilon} (t-x)^{\theta-1} dt \right) \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)},
\end{aligned}$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il s'ensuit

$$v''_-(G_-)(x) - B_-^2v_-(G_-)(x) = G_-(x);$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & u''_-(x) - B_-^2 u_-(x) \\ = & v''_-(G_-(x)) - B_-^2 v_-(G_-(x)) = G_-(x), \end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$x \mapsto [u''_-(x) - B_-^2 u_-(x)] \in C^\theta([-l, 0[; C_0([0, 1])),$$

et

$$d_- [u''_-(x) + Au_-(x)] - r_- u_-(x) = \lambda u_-(x) + d_- G_-(x).$$

Puisque nous avons calculé $u_-(0^-)$, nous en déduisons que la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [d_- [u''_-(x) + Au_-(x)] - r_- u_-(x)],$$

existe et

$$[d_- [u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_- u_-(0^-)] = \lambda u_-(0^-) + d_- G_-(0).$$

Similairement, on obtient, pour tout $x \in]0, L[$

$$d_+ [u''_+(x) + Au_+(x)] + r_+ u_+(x) = \lambda u_+(x) + d_+ G_+(x),$$

qui implique

$$d_+ [u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+ u_+(0^+) = \lambda u_+(0^+) + d_+ G_+(0).$$

4.8 Estimation de l'opérateur résolvant

4.8.1 la norme $\|u_-\|_\infty$

Ici $x \in [-l, 0]$. Toutes les constantes C dans cette sous-section sont indépendantes de λ en vertu de (4.8).

Premièrement on estime

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(x) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(x) dt, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
(a) &= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} G_-(x) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|(a)\|_E &\leq C \|B_-^{-2}\| \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)} \\
&\leq C \left\| \left(A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right)^{-1} \right\| \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)} \\
&\leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)}.
\end{aligned}$$

Maintenant on estime

$$\begin{aligned}
(b) &= v_-(G_-)(-l) = \frac{1}{2} \int_{-l}^0 e^{(t+l)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt + \frac{1}{2} B_-^{-1} \int_{-l}^0 e^{(t+l)B_-} G_-(-l) dt \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt + \frac{1}{2} B_-^{-2} (e^{lB_-} - I) G_-(-l),
\end{aligned}$$

comme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\|(b)\|_E &\leq C \|B_-^{-2}\| \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)} \\
&\leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)}.
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme suivant

$$\begin{aligned}
(c) &= v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L e^{tB_+} B_+^{-1} G_+(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-l}^0 e^{-tB_-} B_-^{-1} G_-(t) dt,
\end{aligned}$$

on écrit

$$\begin{aligned}
(c) &= \frac{1}{2} \int_0^L e^{tB_+} B_+^{-1} G_+(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-l}^0 e^{-tB_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L B_+^{-1} e^{tB_+} (G_+(t) - G_+(0)) dt + \frac{1}{2} \int_0^L B_+^{-1} e^{tB_+} G_+(0) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-l}^0 B_-^{-1} e^{-tB_-} (G_-(t) - G_-(0)) dt - \frac{1}{2} \int_{-l}^0 B_-^{-1} e^{-tB_-} G_-(0) dt,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
(c) &= \frac{B_+^{-2}}{2} \int_0^L B_+ e^{tB_+} (G_+(t) - G_+(0)) dt \\
&\quad - \frac{B_-^{-2}}{2} \int_{-l}^0 B_- e^{-tB_-} (G_-(t) - G_-(0)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} (e^{LB_+} - I) G_+(0) + \frac{1}{2} B_-^{-2} (I - e^{lB_-}) G_-(0),
\end{aligned}$$

dont il suit

$$\begin{aligned}
\|(c)\|_E &\leq C \|B_+^{-2}\| \|G_+\|_{C^\theta([0,L];E)} + C \|B_-^{-2}\| \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)} \\
&\leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|G_+\|_{C^\theta([0,L];E)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)};
\end{aligned}$$

l'estimation similaire est obtenue pour tous les termes de $u_-(x)$. Résumons que nous avons, pour tous les complexes λ tels que

$$\begin{cases} |\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0 \\ |\lambda| > r_+, \end{cases}$$

l'estimation

$$\|u_-\|_{C([-l,0];E)} \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|G_+\|_{C^\theta([0,L];E)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)}.$$

De la même manière, nous obtenons pour tous les complexes λ tels que $|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0$,

$$\|u_+\|_{C([0,L];E)} \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|G_+\|_{C^\theta([0,L];E)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)}.$$

4.8.2 Estimation de la semi-norme $[u_-]_\theta$

Comme ci-dessus, toutes les constantes C dans cette sous-section sont indépendantes de λ en vertu de (4.8). Nous devons maintenant estimer la semi-norme

$$[u_-]_\theta = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [-l, 0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\|u_-(x_1) - u_-(x_2)\|_E}{|x_1 - x_2|^\theta};$$

on rappelle que

$$\begin{aligned} & u_-(x) \\ = & \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ & - e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] \\ & + v_-(G_-)(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} & p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I') \\ = & p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[\frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \right] \\ & + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) [e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)] \\ & - B_-^{-1} (I + e^{2LB_+}) [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ & - (I + e^{2LB_+}) [p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L)]; \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} & p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I') \\ = & p_+ B_-^{-1} B_+ \left[\frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \right] \\ & + p_+ B_-^{-1} B_+ [v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0)] \\ & - p_+ B_-^{-1} B_+ e^{2LB_+} \left[\frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \right] \\ & + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) [e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)] \\ & - B_-^{-1} (I + e^{2LB_+}) [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ & - (I + e^{2LB_+}) [p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L)]; \end{aligned}$$

donc on peut écrire

$$\begin{aligned} & p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I') \\ = & \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (III), \end{aligned}$$

où le terme (III) est régulier, c'est-à-dire au moins dans le domaine de B_- . On obtient pour la représentation de u_-

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \\
&+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{(x+2l)B_-} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\
&+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{-xB_-} - e^{(x+2l)B_-}) [(III)] \\
&- e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] \\
&+ v_-(G_-)(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
e^{(x+l)B_-} [v_-(G_-)(-l)] &= \frac{1}{2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 e^{(t+l)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 e^{(t+l)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(-l)) dt \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(-l) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} (e^{lB_-} G_-(-l) - G_-(-l)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&v_-(G_-)(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-l}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} G_-(x) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x).
\end{aligned}$$

En résumé, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& u_-(x) \\
&= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (IV) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} (e^{lB_-} G_-(-l) - G_-(-l)) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} G_-(x) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x);
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& u_-(x) \\
&= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (IV) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} e^{lB_-} G_-(-l) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} G_-(-l) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-l}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} (G_-(x) - G_-(-l)) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+l)B_-} G_-(-l) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} (G_-(x) - G_-(0)) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(0) \\
&\quad - B_-^{-2} G_-(x);
\end{aligned}$$

où le terme (IV) est régulier. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-l}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ w_2(x) = \frac{1}{2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ \Psi = \int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt. \end{array} \right.$$

Ensuite, nous savons que

$$[w_1]_\theta \leq C \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)}, \quad [w_2]_\theta \leq C \|G_-\|_{C^\theta([-l,0];E)},$$

en appliquant exactement les mêmes techniques dans [36], p. 46. D'autre part on a

$$\Psi \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\theta/2, +\infty),$$

ce qui implique que

$$x \mapsto e^{(x+l)B_-} \left(\int_{-l}^0 B_- e^{(t+l)B_-} (G_-(t) - G_-(-l)) dt \right) \in C^\theta([-l,0];E).$$

On écrit maintenant

$$w_3(x) = e^{-xB_-} (G_-(x) - G_-(0)) + e^{-xB_-} G_-(0) := w_{31}(x) + w_{32}(x),$$

on remarque que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} w_3(x) = G_-(0),$$

puisque $G_-(0) \in E = \overline{D(A)} = \overline{D(B_-)}$, ainsi $w_3 \in C([-l,0];E)$ et on sait que

$$w_{31} \in C^\theta([-l,0];E),$$

en vertu de [36], (voir p. 47 l'hölderianité de la fonction dans (4.19)). D'autre part

$$w_{32} \in C^\theta([-l,0];E),$$

si et seulement si

$$G_-(0) \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\theta/2, +\infty).$$

Similairement on obtient

$$x \mapsto e^{(x+l)B_-} G_-(-l) \in C^\theta([-l,0];E),$$

si et seulement si

$$G_-(-l) \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\theta/2, +\infty).$$

En résumé, si on suppose que

$$g_+(0), g_-(0), g_-(-l) \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

on a

$$\begin{aligned} [u_-]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \\ &\quad + C \|B_-^{-2}\| \|g_-\|_{C^\theta([-l, 0]; E)} \\ &\quad + C \|B_-^{-2}\| \left[\|e^{lB_-} G_-(-l)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \|G_-(-l)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \right] \\ &\quad + C \|B_-^{-2}\| \|g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}, \end{aligned}$$

or

$$\|B_-^{-2}\| = \left\| - \left[- \left(A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|},$$

ainsi

$$\begin{aligned} [u_-]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|g_-\|_{C^\theta([-l, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \left[\|e^{lB_-} G_-(-l)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \|G_-(-l)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \right] \\ &\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}. \end{aligned}$$

4.8.3 Estimation de la semi-norme $[u_+]_\theta$

Comme dans les deux sous-sections ci-dessus, toutes les constantes C ici sont indépendantes de λ en vertu de (4.8).

Rappelons que

$$\begin{aligned} &u_+(x) \\ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (e^{xB_+} + e^{(2L-x)B_+}) [-p_- (I + e^{2lB_-}) (II') - (I - e^{2lB_-}) (I')] \\ &\quad + B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} v'_+(G_+)(L) \\ &\quad + v_+(G_+)(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} (I') = (I) - p_+ B_-^{-1} e^{lB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) \\ (II') = (II) + e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L), \\ (I) = B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ (II) = \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0), \end{cases}$$

puisque

$$\begin{aligned}
& -p_- (I + e^{2lB_-}) (II') - (I - e^{2lB_-}) (I') \\
= & -p_- (I + e^{2lB_-}) [(II) + e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)] \\
& - (I - e^{2lB_-}) [(I) - p_+ B_-^{-1} e^{lB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l)] \\
= & -p_- (I + e^{2lB_-}) \left[\frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \right] \\
& -p_- (I + e^{2lB_-}) [e^{lB_-} v_-(G_-)(-l) + e^{lB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)] \\
& - (I - e^{2lB_-}) [B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)]] \\
& - (I - e^{2lB_-}) [-p_+ B_-^{-1} e^{lB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{lB_-} v_-(G_-)(-l)].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& v_+(G_+)(x) + B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} v'_+(G_+)(L) \\
= & \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt \\
& + \frac{1}{2} B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} \int_0^L e^{(L-t)B_+} G_+(t) dt.
\end{aligned}$$

Et puisque

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} \int_0^L e^{(L-t)B_+} G_+(t) dt \\
= & \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} \int_0^L B_+ e^{(L-t)B_+} [G_+(t) - G_+(L)] dt \\
& + \frac{1}{2} B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} \int_0^L e^{(L-t)B_+} G_+(L) dt \\
= & \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} \int_0^L B_+ e^{(L-t)B_+} [G_+(t) - G_+(L)] dt \\
& - \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} G_+(L) + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} e^{LB_+} G_+(L),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt \\
&= \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_0^x B_+ e^{(x-t)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_x^L B_+ e^{(t-x)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-1} \int_0^x e^{(x-t)B_+} G_+(x) dt + \frac{1}{2} B_+^{-1} \int_x^L e^{(t-x)B_+} G_+(x) dt \\
&= \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_0^x B_+ e^{(x-t)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_x^L B_+ e^{(t-x)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{xB_+} [G_+(x) - G_+(0)] + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{xB_+} G_+(0) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} [G_+(x) - G_+(L)] + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} G_+(L) \\
&\quad - B_+^{-2} G_+(x).
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque

$$\|B_+^{-2}\| = \left\| - \left[- \left(A + \frac{r_+}{d_+} I - \frac{\lambda}{d_+} I \right) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|},$$

l'estimation de $[u_+]_\theta$ est obtenue comme $[u_-]_\theta$ si on suppose

$$g_+(0), g_+(L) \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
[u_+]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|g_+\|_{C^\theta([0, L]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|g_+(L)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \\
&\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|} \|g_+(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Toute cette analyse nous amène à considérer l'espace naturel suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_* = & \left\{ u \in C([-l, L] \setminus \{0\}; E) : \exists u(0^-) \in E_0, \exists u(0^+) \in E_0, \right. \\ & u(-l) = 0, u(L) \in E_0, u|_{[-l, 0[} \in C^\theta([-l, 0[; E) \text{ et} \\ & \left. u|_{]0, L]} \in C^\theta(]0, L]; E) \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où

$$E_0 = D_A(\theta/2, +\infty) = \{ \varphi \in C^\theta([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \};$$

puis, on peut montrer que \mathcal{E}_* est un espace de Banach muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{E}_*} = & \max \left(\|u_-\|_{C^\theta([-l, 0[; E)}, \|u_+\|_{C^\theta(]0, L]; E)} \right) \\ & + \max \left(\|u_-(0^-)\|_{C^\theta([0, 1])}, \|u_+(0^+)\|_{C^\theta([0, 1])}, \|u_+(L)\|_{C^\theta([0, 1])} \right). \end{aligned}$$

Nous concluons ensuite par le résultat principal suivant

Théorème 4.1 *L'opérateur de dispersion \mathcal{L} défini dans les deux habitats décrits dans (4.6) génère un semi-groupe analytique (pas nécessairement continu en 0) dans l'espace de Banach \mathcal{E}_**

Remarque 4.3 *Notons que la condition que la densité de la population disparaisse sur la limite extérieure de la zone tampon Ω_- est naturelle et le fait que sur $\{L\} \times]0, 1[$ et sur l'interface $\{0\} \times]0, 1[$ nous avons une Hölder-condition continue est en quelque sorte réaliste*

Remarque 4.4 *Nous pouvons spécifier la fermeture du domaine $D(\mathcal{L})$ en utilisant les fameux petits espaces de Banach continus Hölder.*

Chapitre 5

Etude spectrale du problème initial

5.1 Introduction

Ici il s'agit de revenir au problème avec les paramètres l, L

$$(P1A) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} \quad \text{dans }]-l, 0[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} \quad \text{dans }]0, 2L[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \frac{r}{d}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d} \quad \text{dans }]2L, 2L + l[\end{array} \right. \\ \text{(Bounda C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = f_- \\ u_+(2L + l) = f_+ \end{array} \right. \\ \text{(Transmission. C.)} \left\{ \begin{array}{l} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(2L) = u_+(2L) \end{array} \right. \\ \text{(Skewness C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0) \\ pd_0u'_0(2L) = (1 - p)du'_+(2L). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans le cas de conditions aux limites **homogènes**, on considère le problème aux valeurs propres σ et vecteurs propres v :

$$(P1ASp) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} dv''_-(x) + dAv_-(x) - rv_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{dans }]-l, 0[\\ d_0v''_0(x) + d_0Av_0(x) + r_0v_0(x) = \sigma v_0(x) \quad \text{dans }]0, 2L[\\ dv''_+(x) + dAv_+(x) - rv_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{dans }]2L, 2L + l[\end{array} \right. \\ \text{(Bound. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(-l) = 0 \\ v_+(2L + l) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(BTS) (Transmi. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(0) = v_0(0) \\ v_0(2L) = v_+(2L) \end{array} \right. \\ \text{(Skew. C.)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - p)dv'_-(0) = pd_0v'_0(0) \\ pd_0v'_0(2L) = (1 - p)dv'_+(2L). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ici

$$v(x) = \begin{cases} v_-(x) & \text{dans }]-l, 0[\\ v_0(x) & \text{dans }]0, 2L[\\ v_+(x) & \text{dans }]2L, 2L + l[. \end{cases}$$

Cette étude de valeurs propres est très importante pour l'analyse du problème complet d'évolution. En effet, posons

$$\begin{cases} D(\mathcal{H}) = \{v \in C([-l, 2L + l], E), v_- \in C^2([-l, 0], E), v_0 \in C^2([0, 2L], E) \\ v_+ \in C^2([2L, 2L + l], E) \text{ et } (BTS)\} \\ \mathcal{H}v = \begin{cases} dv''_- - rv_- & \text{dans }]-l, 0[\\ d_0v''_0 + r_0v_0 & \text{dans }]0, 2L[\\ dv''_+ - rv_+ & \text{dans }]2L, 2L + l[; \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(\mathcal{M}) = C([-l, 2L + l], D(A)) \\ (\mathcal{M}v)(x) = Av(x); \end{cases}$$

et il s'agit alors de résoudre l'équation spectrale

$$(\mathcal{H} + \mathcal{M})\phi = \sigma\phi. \quad (5.1)$$

Supposons maintenant qu'il existe une valeur σ et une fonction ϕ vérifiant cette équation, alors l'équation de diffusion introduite au début

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) = (\mathcal{H} + \mathcal{M})(u(t, \cdot)) \quad (5.2)$$

admet pour solutions

$$u(t, \cdot) = \phi(\cdot)e^{\sigma t}.$$

5.2 Réduction du modèle général

On signale que le modèle qui dépend de temps (3.1)~(3.5) est assez compliqué à analyser complètement, cependant on peut évaluer l'effet de la variation des différents paramètres dans le modèle sur la stabilité globale de l'environnement en déterminant le taux moyen de croissance démographique ou de décroissance prévu par le modèle. Le modèle complet peut être écrit sous forme condensée comme en 5.2, où $(\mathcal{H} + \mathcal{M})$ est le générateur infinitésimal de la dispersion et de processus de la croissance. Si on peut trouver une fonction positive $\phi(x)$ dans le domaine de $(\mathcal{H} + \mathcal{M})$ telle que

$$(\mathcal{H} + \mathcal{M})\phi = \sigma\phi$$

pour une constante σ alors l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) = (\mathcal{H} + \mathcal{M})(u(t, \cdot))$$

aura des solutions sous la forme

$$u(t, \cdot) = \phi(\cdot)e^{\sigma t}$$

qui croit ou décroît exponentiellement avec le taux σ .

L'équation 5.1 est un problème de valeur propre. Ces problèmes sont révélés utiles dans de nombreuses études sur les effets spatiaux via des modèles de diffusion; voir, par exemple, Cantrell et Cosner [4].

Dans ce problème, les équations dans 3.1 donnent

$$\begin{cases} dv_-''(x) + dAv_-(x) - rv_-(x) = \sigma v_-(x) & \text{dans }]-l, 0[\\ d_0v_0''(x) + d_0Av_0(x) + r_0v_0(x) = \sigma v_0(x) & \text{dans }]0, 2L[\\ dv_+''(x) + dAv_+(x) - rv_+(x) = \sigma v_+(x) & \text{dans }]2L, 2L + l[. \end{cases} \quad (5.3)$$

En utilisant 5.3 la condition (Transmission. C.) dans (P1ASp) devient équivalente à la valeur de $\sigma\phi(x)$ sur les interfaces en $x = 0$ et $x = 2L$, ie

$$\phi_-(0) = \phi_0(0), \quad \text{et} \quad \phi_0(2L) = \phi_+(2L). \quad (5.4)$$

Remarque 5.1 (*Cas dimension 1*) Dans le cas $\sigma = 0$ notons que

$$A\phi = 0$$

donc si

$$v = e^t\phi$$

alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v = (A + I)v,$$

Donc la fonction ϕ , devient une fonction propre pour $A + I$ avec $\sigma = 1$ puisque

$$(A + I)\phi = \phi.$$

Ainsi ϕ , est également une fonction propre pour un générateur de semi-groupe avec $\sigma = 1 \neq 0$ (donc 5.4 est vérifiée.) Une simplification supplémentaire de l'analyse peut être faite en notant que le problème est complètement symétrique autour de $x = L$, de sorte que la solution, $\phi(x)$ peut être construite en résolvant le problème sur l'intervalle $-l < x < L$ avec la condition

$$\frac{d\phi}{dx}(L) = 0,$$

par symétrie on obtient la solution dans $L < x < 2L + l$.

On considère donc le problème simplifié suivant (compte tenu de l'idée de Cantrell et Cosner, voir [4] page 194) uniquement sur deux habitats

$$\text{(Equats)} \begin{cases} u_-''(x) + Au_-(x) - \frac{r}{d}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d} & \text{dans }]-l, 0[\\ u_0''(x) + Au_0(x) + \frac{r_0}{d_0}u_0(x) = \frac{g_0(x)}{d_0} & \text{dans }]0, L[\end{cases}$$

avec les conditions aux limites et de transmission suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Bounda C.) } \left\{ \begin{array}{l} u_-(-l) = f_- \\ u'_0(L) = f_+ \end{array} \right. \\ \text{(Transmission C.) } u_-(0) = u_0(0) \\ \text{(Skewness C.) } (1-p)du'_-(0) = pd_0u'_0(0), \end{array} \right.$$

et on fait une étude brève de ce problème en gardant surtout les dimensions L et l .

5.3 Laplacien et conditions de Dirichlet

Cas de la dimension 1

On veut résoudre le problème suivant : trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que sur $(0, 1)$, le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0, \end{array} \right.$$

admet une solution non nulle.

Remarque 5.2 *Il ne s'agit pas d'un problème de Cauchy!*

1. **Cas** $\lambda < 0$: On pose : $\lambda = -\omega^2$. Les solutions sont de la forme :

$$u(x) = A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x).$$

On remarque que $u(0) = 0$ entraîne $A = 0$ et que $u(1) = 0$ implique

$$B \sinh(\omega) = 0.$$

La seule possibilité est

$$u = 0.$$

2. **Cas** $\lambda = 0$: u est alors affine et donc

$$u = 0.$$

3. **Cas** $\lambda > 0$: On pose : $\lambda = \omega^2$. Les solutions sont de la forme :

$$u(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

On trouve encore $A = 0$ et

$$B \sin(\omega) = 0.$$

Si $B = 0$, on obtient la solution triviale nulle. si $B \neq 0$, alors

$$\sin(\omega) = 0,$$

donc

$$\omega = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

On a donc trouvé une famille de λ qui conviennent :

$$\lambda_n = n^2 \pi^2.$$

On peut clairement se restreindre à $n \geq 1$. Pour chaque λ_n , l'ensemble des solutions est de dimension 1 et est associé à la fonction

$$u_n(x) = \sin(n\pi x).$$

On note que

$$u_1 > 0 \quad \text{sur} \quad (0, 1).$$

Remarque 5.3 Les λ_n sont appelées les valeurs propres de l'opérateur $-\partial_x^2$ avec condition de Dirichlet.

Cas de la dimension 2

Ici, on se place sur $C = (0, 1) \times (0, 1)$ et on cherche des solutions simples de :

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi = \lambda \psi, \quad \text{avec} \quad \psi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial C,$$

sous la forme :

$$\psi(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{avec} \quad f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0.$$

La séparation des variables donne

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda.$$

Cela entraîne

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda_1$$

et

$$-\frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda_2,$$

avec

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Cela mène au choix :

$$f(x) = cu_n(x) \quad \text{et} \quad g(y) = du_m(y),$$

avec

$$\lambda_1 = (n\pi)^2,$$

et

$$\lambda_2 = (m\pi)^2.$$

On pose

$$\lambda_{n,m} = (n^2 + m^2) \pi^2.$$

Cette famille de λ répond complètement à la question. Cela peut se montrer via les séries de Fourier. On peut aussi voir que pour un λ donné dans cette famille, l'espace des solutions est de dimension finie.

5.4 L'équation spectrale

On étudie l'opérateur suivant

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} d_- \Delta u_- - r_- u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, 1[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, 1[, \end{cases}$$

où u satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound.C.)} \begin{cases} u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{1\} \\ u_- = 0 & \text{dans } \{-l\} \times]0, 1[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 & \text{dans } \{L\} \times]0, 1[\end{cases} \\ \text{(Interf.C.)} & d_- \Delta u_-(0, y) - r_- u_- = d_+ \Delta u_+(0, y) + r_+ u_+, \quad y \in]0, 1[, \\ \text{(Skew.C.)} & (1-p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, 1[. \end{array} \right.$$

On doit étudier l'équation spectrale

$$\mathcal{L}u = \sigma u, \tag{5.5}$$

dans un espace approprié, où u vérifie (Bound.C.), (Interf.C.) et (Skew.C.), c'est-à-dire

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Eqs)} \begin{cases} d_- \Delta u_- - r_- u_- = \sigma u_- & \text{sur }]-l, 0[\times]0, h[\\ d_+ \Delta u_+ + r_+ u_+ = \sigma u_+ & \text{sur }]0, L[\times]0, h[\end{cases} \\ \text{(Bound.C.)} \begin{cases} u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{0\} \\ u = 0 & \text{dans }]-l, L[\times \{h\} \\ u_- = 0 & \text{dans } \{-l\} \times]0, h[\\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 & \text{dans } \{L\} \times]0, h[\end{cases} \\ \text{(Interf.C.)} & u_- = u_+ \text{ sur } \{0\} \times]0, h[\\ \text{(Skew.C.)} & (1-p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in]0, h[. \end{array} \right.$$

5.4.1 Formulation opérationnelle de l'équation spectrale

Considérons l'espace de Banach suivant

$$E = C_0([0, 1]) = \{\varphi \in C([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\},$$

muni de la norme-sup sur $C([0, 1])$. On définit l'opérateur A dans E par

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C^2([0, h]) : \varphi(0) = \varphi(h) = 0 \text{ et } \varphi'' \in C_0([0, h])\} \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{cases}$$

Ensuite, nous savons que cet opérateur linéaire fermé vérifie

$$\begin{cases} \overline{D(A)} = E; \text{ pour tout } \eta \in]0, \pi[, \rho(A) \supset S_{\pi-\eta} \cup \{0\} \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \in S_{\pi-\eta} \cup \{0\}, \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \quad (5.6)$$

d'autre part on sait que il existe une boule $\mathcal{B}(0, \delta)$, $\delta > 0$, telle que $\rho(A) \supset \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$ et l'estimation dans (5.6) reste vraie $S_{\pi-\eta} \cup \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$. Ici $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A .

Remarque 5.4 *La condition φ'' est nulle en 0 et 1 dans la définition de $D(A)$ est nécessaire pour définir correctement l'opérateur A dans E . Ce n'est pas une restriction puisque nous supposons naturellement que la dispersion spatiale en direction de la variable y en dehors du domaine est nulle.*

Remarque 5.5 1. *On peut considérer les espaces plus naturels*

$$E = C_0([0, h]) = \{\varphi \in C([0, h]) : \varphi(0) = \varphi(h) = 0\},$$

ou

$$E = C_0(\overline{U}) = \{\varphi \in C(\overline{U}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial U\},$$

où U est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

2. *Notons que les dimensions l , L et h des deux habitats sont importantes pour l'analyse du spectre de \mathcal{L} , comme cela a été démontré dans [4] dans une dimension. Nous étudions la situation similaire pour notre problème.*

On utilise les notations des fonctions vectorielles bien connues

$$v_{\pm}(x)(y) := v_{\pm}(x, y),$$

alors on écrit le problème (5.5) dans E , comme suit :

$$(P1ASp) \left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} d_- v_-''(x) + d_- A v_-(x) - r_- v_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{sur }]-l, 0[\\ d_+ v_+''(x) + d_+ A v_+(x) + r_+ v_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \text{(BTS)} \left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(-l) = 0 \\ v_+'(L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(Transmi .C.)} v_-(0) = v_+(0) \\ \text{(Skew. C.)} (1-p)d_- v_-'(0^-) = p d_+ v_+'(0^+). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ici

$$v(x) = \begin{cases} v_-(x) & \text{sur }]-l, 0[\\ v_+(x) & \text{sur }]0, L[. \end{cases}$$

Et pour être complet, dans toute cette étude, la dimension par rapport à la variable cachée y (qui apparaît dans A) doit être considérée et aura son importance.

Cette étude des valeurs propres est très importante pour l'analyse du problème complet de l'évolution.

5.4.2 Étude spectrale du problème initial

On utilise essentiellement Cosner [4], p. 194-195 où ils détaillent cette étude dans une dimension spatiale. Dans notre travail, on analyse la situation analogue dans l'espace de deux dimensions.

On étudie le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Equats)} \left\{ \begin{array}{l} d_- v_-''(x) + d_- A v_-(x) - r_- v_-(x) = \sigma v_-(x) \quad \text{sur }]-l, 0[\\ d_+ v_+''(x) + d_+ A v_+(x) + r_+ v_+(x) = \sigma v_+(x) \quad \text{sur }]0, L[\end{array} \right. \\ \text{(BTS)} \left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound. C.)} \left\{ \begin{array}{l} v_-(-l) = 0 \\ v_+'(L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(Transmi .C.)} v_-(0) = v_+(0) \\ \text{(Skew. C.)} (1-p)d_- v_-'(0^-) = p d_+ v_+'(0^+). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

On rappelle que le spectre de l'opérateur A est l'ensemble des valeurs suivantes

$$\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Avec les fonctions propres correspondantes : $y \mapsto \sin\left(k\pi \frac{y}{h}\right)$. Par conséquent, les valeurs propres de l'opérateur $d_{\pm}A$ sont

$$\mu_k = -\frac{k^2 \pi^2}{h^2} d_{\pm}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

et les vecteurs propres correspondants

$$\varphi_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi \sqrt{d_{\pm}}}{h} y\right).$$

On pose maintenant

$$\sigma = \mu + \mu_k.$$

Nous chercherons les vecteurs propres de notre problème abstrait sous la forme suivante :

$$v_{\pm}(x) = w_{\pm}(x) \varphi_k.$$

Par conséquent l'équation spectrale sur $]0, L[$

$$d_+ v_+''(x) + d_+ A v_+(x) + r_+ v_+(x) = \sigma v_+(x)$$

devient

$$d_+ w_+''(x) \varphi_k + d_+ w_+(x) A \varphi_k + r_+ w_+(x) \varphi_k = (\mu_k + \mu) w_+(x) \varphi_k$$

alors

$$\begin{aligned} & (d_+ w_+''(x) + (r_+ - \mu) w_+(x)) \varphi_k + (d_+ A \varphi_k - \mu_k \varphi_k) w_+(x) \\ &= 0 \\ &= (d_+ w_+''(x) + (r_+ - \mu) w_+(x)) \varphi_k \end{aligned}$$

Cela exige que

$$r_+ > \mu, \quad (5.8)$$

puisque $-r_- < r_+$.

On suppose que $r_+ - \mu > 0$ et donc $w_+(x) > 0$ sur $]0, L[$.

Il reste à trouver μ .

On se concentre sur

$$d_+ w_+''(x) + (r_+ - \mu) w_+(x) = 0, \quad x \in]0, L[,$$

la condition

$$v_+'(L) = 0 = w_+'(L) \varphi_k$$

impose que

$$w_+'(L) = 0,$$

d'où

$$w_+(x) = \beta \cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right), \quad x \in]0, L[,$$

et donc les vecteurs propres pour $x \in]0, L[$ sont

$$v_{+,k}(x) = w_+(x) \varphi_k = \beta \cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right) \cdot \varphi_k.$$

Tout d'abord, il faut avoir $\beta > 0$ pour la positivité de $v_{+,k}(x)$. D'autre part, on doit aussi garantir la positivité de $\cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right)$ pour tout $x \in [0, L]$; ce qui implique que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \leq \frac{\pi}{2},$$

or

$$\frac{r_+ - \mu}{d_+} (L - x)^2 < \frac{\pi^2}{4},$$

il suffit d'avoir

$$\frac{r_+ - \mu}{d_+} L^2 < \frac{\pi^2}{4},$$

donc

$$\mu > r_+ - \frac{\pi^2 d_+}{4L^2}. \quad (5.9)$$

Par conséquent, on obtient la relation suivante entre μ et r_+

$$r_+ - \frac{\pi^2 d_+}{4L^2} < \mu < r_+. \quad (5.10)$$

De même, on écrit sur $] -l, 0[$

$$v_-(x) = w_-(x) \varphi_k,$$

$$\sigma = \mu + \mu_k,$$

donc sur $] -l, 0[$ l'équation

$$d_- v_-''(x) + d_+ A v_-(x) - r_- v_-(x) = \sigma v_-(x),$$

devient

$$d_- w_-''(x) \varphi_k + d_- w_-(x) A \varphi_k - r_- w_-(x) \varphi_k = (\mu_k + \mu) w_-(x) \varphi_k,$$

d'où

$$\begin{aligned} & (d_- w_-''(x) - (r_- + \mu) w_-(x)) \varphi_k + (d_- A \varphi_k - \mu_k \varphi_k) w_-(x) \\ &= 0 \\ &= (d_- w_-''(x) - (r_- + \mu) w_-(x)) \varphi_k. \end{aligned}$$

Ainsi, la séparation des variables exige que

$$(d_- w_-''(x) - (r_- + \mu) w_-(x)) \varphi_k = 0,$$

or

$$w_-''(x) - \left(\frac{r_- + \mu}{d_-} \right) w_-(x) = 0.$$

Par conséquent, l'équation est écrite.

Nous ne connaissons pas le signe de $r_- + \mu$, alors nous examinerons les possibilités des trois cas :

$$\mu > -r_-, \quad \mu = -r_-, \quad \mu < -r_-.$$

$$w_-''(x) - \left(\frac{r_- + \mu}{d_-} \right) w_-(x) = 0.$$

Finalement on obtient

$$w_-(x) = \begin{cases} C_1 \cdot \sinh \left(\sqrt{\frac{r_- + \mu}{d_-}} (x + l) \right), & \text{si } \mu > -r_- \\ C_2 \cdot (x + l) & \text{si } \mu = -r_- \\ C_3 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{-r_- - \mu}{d_-}} (x + l) \right), & \text{si } \mu < -r_- \end{cases}, \text{ où } C_i > 0.$$

Finalement les vecteurs propres pour $x \in]0, L[$,

$$v_{+,k}(x) = w_+(x) \varphi_k = \beta \cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right) \cdot \varphi_k \quad (5.11)$$

et pour $x \in]-l, 0[$

$$\begin{aligned} v_{-,k}(x) &= w_-(x) \varphi_k \\ &= \begin{cases} C_1 \cdot \sinh \left(\sqrt{\frac{r_- + \mu}{d_-}} (x + l) \right) \cdot \varphi_k & \text{si } \mu > -r_- \\ C_2 \cdot (x + l) \cdot \varphi_k & \text{si } \mu = -r_- \\ C_3 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{-r_- - \mu}{d_-}} (x + l) \right) \cdot \varphi_k & \text{si } \mu < -r_- \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Rappelons que la valeur propre principale de notre problème (5.7) est de la forme suivante

$$\sigma = \mu - \frac{\pi^2}{h^2} d_{\pm},$$

Par conséquent, nous devons chercher la plus grande. Rappelons que

$$\begin{cases} v_{-,k}(x) = w_-(x)\varphi_k, & \text{pour } x \in]-l, 0[\\ v_{+,k}(x) = w_+(x)\varphi_k, & \text{pour } x \in]0, L[. \end{cases}$$

Pour déterminer cette valeur de μ , nous devons utiliser les conditions de transmission et d'asymétrie

$$\begin{cases} v_-(0) = v_+(0) \\ (1-p)d_-v'_-(0^-) = pd_+v'_+(0^+), \end{cases} \quad (5.13)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} w_-(0)\varphi_k = w_+(0)\varphi_k \\ (1-p)d_-w'_-(0^-)\varphi_k = pd_+w'_+(0^+)\varphi_k; \end{cases}$$

en utilisant (5.12) et (5.11), on obtient l'équation suivante

$$\frac{(1-p)d}{pd_0} f(\mu, r_+, L, d_+) = g(\mu, r_-, l, d_-), \quad (5.14)$$

où

$$f(\mu, r_+, L, d_+) = \frac{\cot \sqrt{\frac{(r_+ - \mu)}{d_+}} L}{\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}}},$$

et

$$g(\mu, r_-, l, d_-) = \begin{cases} \frac{\tan \left(\sqrt{\frac{(-r_- - \mu)}{d_-}} l \right)}{\sqrt{\frac{(-r_- - \mu)}{d_-}}} & \text{si } \mu < -r_- \\ l & \text{si } \mu = -r_- \\ \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\mu + r_-}}{d_- l} \right)}{\sqrt{\frac{\mu + r_-}{d_-}}} & \text{si } \mu > -r_- \end{cases}$$

5.5 Discussion en dimension 2

5.5.1 signe de $w'_-(0^-)$

D'après la condition d'asymétrie 5.13, il est clair que

$$w'_-(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} w'_-(x),$$

et la même chose pour

$$w'_+(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} w'_+(x).$$

On a pour $x \in]0, L[$

$$\begin{cases} w'_+(x) = -\beta \sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} \sin \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right) \\ w''_+(x) = -\beta \left(\frac{r_+ - \mu}{d_+} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right) \end{cases}$$

$$d_+ w''_+(x) = (\mu - r_+) \beta \cos \left(\sqrt{\frac{r_+ - \mu}{d_+}} (x - L) \right) = (\mu - r_+) w_+(x) > 0,$$

puisque $r_+ > \mu$. Il s'ensuit que la fonction w'_+ diminue strictement sur $]0, L[$, d'autre part $w'_+(L) = 0$ dont on déduit que

$$w'_+(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} w'_+(x) > 0,$$

ce qui implique que

$$w'_-(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} w'_-(x) > 0.$$

On rappelle que

$$w'_-(x) = \begin{cases} C_1 \sqrt{\frac{\mu + r_-}{d_-}} \cosh \sqrt{\frac{\mu + r_-}{d_-}} (x + l) & \text{si } \mu > -r_- \\ C_2 & \text{si } \mu = -r_- \\ C_3 \sqrt{\frac{-r_- - \mu}{d_-}} \cos \left(\sqrt{\frac{-r_- - \mu}{d_-}} (x + l) \right) & \text{si } \mu < -r_-, \end{cases}$$

donc

$$w'_-(0^-) > 0$$

si et seulement si

$$\cos \left(\sqrt{\frac{-r_- - \mu}{d_-}} l \right) > 0,$$

d'où

$$\mu > -r_- - \frac{\pi^2 d_-}{4l^2}. \quad (5.15)$$

5.5.2 Etude des valeurs propres

Rappelons ici toutes nos conditions sur les valeurs propres mentionnées ci-dessus

$$\begin{cases} r_+ - \frac{\pi^2 d_+}{4L^2} < \mu < r_+ \\ \mu > -r_- - \frac{\pi^2 d_-}{4l^2}. \end{cases}$$

Par conséquent, le taux moyen de croissance qui résulte de notre problème en dimension 2 est

$$\sigma_0 = \mu_0 - \frac{\pi^2 d}{h^2}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \mu_0 - \left[r_+ - \frac{\pi^2 d_+}{4L^2} \right] + r_+ - \frac{\pi^2 d_+}{4L^2} - \frac{\pi^2 d_+}{h^2} \\ &= \mu_0 + \frac{\pi^2 d_+}{4L^2} - \pi^2 d_+ \left[\frac{1}{4L^2} + \frac{1}{h^2} \right], \end{aligned}$$

La première remarque : est que si L croît et h fixé (élargir le refuge) de sorte que μ_0 croisse et donc σ_0 augmente ce qui est logique étant donné la condition de transmission dans x .

La deuxième remarque : nous agrandissons la zone du refuge

$$S_{\text{refuge}} = L \times h,$$

si L est fixé et h croît alors σ_0 augmente (comme en dimension 1)

si h est fixe et L croît alors σ_0 augmente (comme en dimension 1)

si h augmente et L augmente alors σ_0 augmente (comme en dimension 1)

La troisième remarque : nous laissons fixés tous les paramètres et on augmente r_+ et r_- , alors σ_0 augmente (comme dimension 1).

5.5.3 Signification de σ_0

On a

$$\sigma_0 = \mu_0 - \frac{\pi^2 d}{h^2},$$

σ_0 est écrit en fonction de L, l, r_-, r_+, d_-, d_+ et p tous les paramètres du problème.

σ_0 est la valeur fondamentale du problème = la première valeur propre.

Une première conclusion immédiate est que : σ_0 croît par rapport de L parce que si L augmente, $\frac{(1-p)d_-}{pd_+} f(\mu, r_+, L, d_+)$ diminue alors $g(\mu, -r_-, l, d_-)$ ne change pas (voir [4] FIG.3.1).

Si tous les facteurs incluant p sont fixés, alors si r_+ augmente σ_0 augmente ; et si r_- diminue σ_0 augmente (c'est le bon sens).

Donc, cela suppose des hypothèses on les fera plus loin.

D'autre part, quand l augmente (donc la zone tampon augmente) σ_0 augmente (c'est le bon sens).

Il y a une limite pour les effets bénéfiques de la zone tampon.

Si h augmente, σ_0 augmente (logique).

Perspectives

Voici ci-dessous quelques perspectives de poursuite de recherche dans la thématique de ce travail

1. Etudier le cas non linéaire en revenant au problème initial où cette fois-ci les fonctions F et F_0 sont non linéaires.
2. Etudier le problème stationnaire linéarisé dans le cadre fonctionnel L^p .
3. Etudier le problème stationnaire linéarisé avec des coefficients de diffusion variables.
4. Entamer un aspect nouveau de recherche complémentaire lié en particulier à la dynamique de population dans divers patches.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de certains problèmes de dispersion décrivant une dynamique de population dans trois habitats (dont un refuge et deux défavorables) et qui incluent des comportements individuels aux frontières entre les régions. Ces problèmes sont modélisés par des équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ce genre de processus est appelé mouvement brownien biaisé.

Tenant compte la géométrie cylindrique des patches ou des habitats on montre que la méthode qui s'adapte le mieux est celle qui utilise la théorie des équations différentielles à coefficients opérateurs.

Les techniques utilisées ici sont basées essentiellement sur la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, les espaces d'interpolation, et le H^∞ -calcul pour les opérateurs sectoriels.

Dans une première étape : l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution du problème linéaire stationnaire nous permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes sur les données aux niveau des interfaces. La deuxième étape est consacrée à l'étude de l'analyticité du C_0 -semi-groupe généré par le processus de dispersion dans deux habitats avec une condition de dispersion continue à l'interface. Dans la dernière étape on fait l'étude spectrale du problème initial qui est très importante pour l'analyse du problème complet d'évolution.

Mots clés : Dynamique de population, équation de diffusion, habitats, mouvement brownien, équation différentielle abstraite, semi-groupe, puissances fractionnaires d'opérateurs, les espaces d'interpolation, les espaces de hölder, le H^∞ -calcul, opérateurs sectoriels.

Abstract

This work is devoted to the study of some dispersal problems describing a population dynamics in three habitats (including a refuge and two unfavorable ones) and which include individual behaviors at the borders between the regions. These problems are modeled by parabolic partial differential equations. This kind of process is called skew Brownian motion.

Taking into account the cylindrical geometry of patches or habitats, it is shown that the method that best adapts is that which uses the theory of differential equations with operator coefficients.

The techniques used here are based essentially on the theory of semi-groups, the fractional powers of linear operators, the interpolation spaces, and the H^∞ -calculus for sectorial operators.

In a first step : the study of the existence, the unicity and the maximum regularity of the solution of the stationary linear problem allows us to obtain necessary and sufficient conditions on the data at the level of the interfaces. The second step is devoted to the study of the C_0 -semi-group analyticity generated by the dispersion process in two habitats with a continuous dispersal condition at the interface. In the last step we make the spectral study of the initial problem which is very important for the analysis of the complete problem of evolution.

Key words : Population dynamics, diffusion equation, habitats, Brownian motion, abstract differential equation, semi-group, fractional powers of operators, interpolation spaces, hölder spaces, H^∞ -calculus, sectorial operators.

Bibliographie

- [1] **Antoine Lejay** : *On the constuctions of the skew Brownian motion*, *Probability Surveys* Vol. 3 (2006) pp 413-466.
- [2] **Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K., Medeghri A.** : *Transmission Problems in a Thin Layer Set in the Framework of the Hölder Spaces, Resolution and Impedance*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 358, (2009), 457-484.
- [3] **Balakrishnan A. V .** : *Fractional powers of closed operators and the semigroupes generated by them*, *Pacif. J. Math* 10, pp419-437, 1960.
- [4] **Cantrell, R. S., and Cosner, C.** : *Diffusion Models for Population Dynamics Incorporating Individual Behavior at Boundaries : Applications to Refuge Design*, *Theoretical Population Biology* 55, 189-207 (1999).
- [5] **Cantrell R. S. and Cosner C.** : *Skew Brownian Motion : A Model for Diffusion with Interfaces*. *Mathematical Models in Medical and Health Sciences*. Mary Ann Horn, Gieri Simonett, and Glenn Webb (eds.), pp.73-78. Copyright 1998 bay Vanderbilt University Press, Nashville, TN.
- [6] **S. Campanato.** : *Generation of Analytic Semigroups by Elliptic Operators of Second Order in Hölder Spaces*, *Annal. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (4) 8(3) (1981), p. 495-512.
- [7] **H. Cartan.** : *Théorie Elémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*, 6ème édition, Hermann, Paris.
- [8] **Cowling M., I. Doust., McIntosh A., and Yagi A.,** : *Banach Space Operator with a Bounded H^∞ Functional Calculus*, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* 60, (1996), 51-89.
- [9] **Da Prato G., Grisvard P.** : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, *J. Math. Pures Appl., IX Ser.* 54, (1975), no. 3, 305-387.
- [10] **Denk D., Hieber M., and Pruss J.,** : *R-Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type*, *Mem. of the Am. Math. Soc., Vol 166. N* (first of 3 number), (2003). ISSN 0065-9266.
- [11] **Dore A., Favini A., Labbas R., Lemrabet K.** : *An Abstract Transmission Problem in a Thin Layer, I : Sharp Estimates*, *Journal of Functional Analysis*, 261 (2011) 1865–1922.
- [12] **Dore A., Favini A., Labbas R., Lemrabet K.** : *A Transmission Problem in a Thin Layer*, to appear.
- [13] **Dore G., Venni A.** : *H^∞ Functional Calculus for Sectorial and Bisectorial Operators*, *Studia Math.* 166, (2005), 221-241.

-
- [14] **Engel K.J., and Nagel R.,** : *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations* ; Graduate texts in Mathematics,194, Springer-Verlag, New York, (2000).
- [15] **Fattorini H.O.** : *The Cauchy problem, Encyclopedia Math. Appl., vol. 18, Addison-Wesley publishing Co., Reading, MA, 1983*
- [16] **Fatimetou Mint Aghrabatt** : *Sur l'opérateur de Stekklov-Poincaré dans une couche mince : analyse , résolution et résultats optimaux de deux classes de problèmes de transmission régis par des EDP et applications concrètes. Thèse de Doctorat, université du Havre, 2011.*
- [17] **Favini A., Labbas R., Lemrabet K., Maingot S., and Sidibe H.D.** : *Transmission problem for an Abstract fourth Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces,*
- [18] **Favini A., Labbas R Medeghri A., and Menad A.** *Analytic semigroups generated by the dispersal process in two habitats incorporating individual behavior at the interface, J. Math. Anal. App.(2018).DOI :10.1016/j.jmaa.2018.10.085.*
- [19] **Grisvard P.** : *Spazi di Tracce e Applicazioni, Rendiconti di Matematica (4) Vol. 5, série VI, (1972), 657-729.*
- [20] **Haase M.** : *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods,* Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.
- [21] **Haase M.** : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 169, 2006.*
- [22] **Holmes E. E., Lewis M. A., Banks J. E. and Veit R. R.** : *Partial Differential Equations in Ecology : Spatial Interaction and Population Dynamics, Ecology, Vol. 75, N°1, 17-29.*
- [23] **John B. Dunning, JR et al.** : *Spatially Explicit Population Models :Current Forms and Future Uses, Ecological Applications, 5(1), 1995, pp. 3-11.*
- [24] **Kalton F., Weis L.** : *The H^∞ -calculus and sums of closed operators, Mathematische Annalen, 321, (2001), 319-345.*
- [25] **Krein.S. G.** : *Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscou, 1967.*
- [26] **Labbas R., Medeghri A., and Menad A.** : *Solvability of elliptic differential equations, set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces, Mediterranean Journal of Mathematics, (2018).*
- [27] **Labbas R and Terreni B.** : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1^{ere} Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7) ,pp.545-569 (1987).*
- [28] **Labbas R and Terreni B.** : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 2^{ere} Partie. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7) ,pp. 141-162 (1988).*
- [29] **J.L. Lions et J. Peetre.** : *Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68*
- [30] **Lunardi A.** : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, (1995).
- [31] **A. McIntosh** : *Operators wich have an \mathcal{H}_∞ Functional Calculus, Minconference on operator theory and partial differential equations (North Ryde, 1986), Proc. Center. Anal. Austral. Nat. univ., 14, 210-231, Austral. Nat. Univ., Camberra, (1986).*

-
- [32] **Okubo A and Simon A. Levin.** : *Diffusion and Ecological Problems, Modern Perspectives*. Mathematical Biology, second Edition, Springer.
- [33] **Ovaskainen O. and S. J. Cornell.** : *Biased movement at a boundary and conditional occupancy times for diffusion process*, J. Appli. Prob. 40, (2003), 557-580.
- [34] **Pazy A.** : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).
- [35] **Shuklar V. P.** : *Effects of Dispersive Migration on Stability of two Species-System in two-dimensional Habitats under Non-uniform reservoir conditions*, Indian J. pure appli. Math., 15(7), 781-794.
- [36] **Sinestrari E.** : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Space of Continuous Functions*, J. Math. Anal. App. 66, (1985), 16-66.
- [37] **Tanabe H.** : *Equations of Evolution*, Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, (1979).
- [38] **Triebel H.** : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North Holland, Amesterdam, (1078).
- [39] **CL. Zuily et H. Queffélec.** : *Eléments d'analyse pour l'agrégation* , Masson, Paris, 1995.