REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=

SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DANS LE DOMAINE COMPLEXE.

=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Présentée par : Mr BEDDANI HAMID.

Soutenue le :10-01-2019 devant le jury composé de :

Président : Mr. BELAÏDI Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem.

Examinateurs :

Mr. Djaa Mustapha, Professeur au Centre universitaire de Relizane.

Mr. OUAHAB Abdelghani, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbès.

Mr. HABIB Habib, Maître de Conférences A à l'université de Sidi Bel-Abbès.

Mr. HAMOUDA Saada, Professeur à l'université de Mostaganem.

Encadreur :

Mme AZIZ HAMANI Karima, Professeur à l'université de Mostaganem.

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux.

Mes premiers remerciements vont biensûr à Mme AZIZ HAMANI Karima, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour avoir dirigé cette thèse, pour sa disponibilité, pour toute l'aide et les conseils qu'elle m'a apportés durant ces années. Je lui exprime donc toute ma reconnaissance.

Je n'oublie pas de remercier également le président du jury, Monsieur BELAÏDI Benharrat, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, les membres du jury : Monsieur DJAA Mustapha, Professeur au Centre universitaire de Relizane, Monsieur OUAHAB Abdelghani, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbès, Monsieur HABIB Habib, Maître de Conférences A à l'université de Sidi Bel-Abbès et Monsieur HAMOUDA Saada, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

Je dédie ce travail à mes très chers parents, ma femme, mes frères, mes sœurs et toute ma famille ainsi qu'à mes amis et à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'accomplissement de cette thèse.

Table des matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le mathématicien Rolf Nevanlinna ([32] , [7]) est devenue un outil très indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe. En particulier, la croissance et l'oscillation des solutions de ces équations.

Pour l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{0.0.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est connu que toute solution de l'équation (0.0.1) est une fonction entière et si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (0.0.1), alors au moins une des deux solutions f_1 et f_2 est d'ordre infini ([26], P. 167-168).

D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (0.0.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^z$ est une solution d'ordre fini de l'équation (0.0.1) avec $B(z) = -(1 + e^{-z})$.

Alors la question qui se pose est : Quelle condition doit-on imposer sur $B(z)$ pour garantir que toute solution non nulle de l'équation (0.0.1) soit d'ordre infini ?

Plusieurs auteurs tels que Amemiya et Ozawa [1], Gundersen [19], Langley [31], frei [16] et Ozawa [34] ont étudié ce problème. Ils ont démontré que si $B(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante d'ordre différent à un, alors toute solution non nulle de l'équation (0.0.1) est d'ordre infini.

En 2002, Chen [9] a considéré l'équation (0.0.1) mais dans le cas où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre égal à un.
Dans le même article, il a étudié ce problème pour des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$f'' + h_1(z)e^{az}f' + h_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{0.0.2}$$

où $h_j(z)(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à un, a et b sont des nombres complexes non nuls. Ses travaux ont été plus tard généralisés pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (voir par exemple ([11], [12])).

Différents chercheurs ([7], [10], [29]) se sont intéressés à l'étude des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{0.0.3}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants et $h_j(z)(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières. Ces résultats ont été aussi étendus pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (voir par exemple ([37]).

Belaïdi [5] a étudié l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_1(z)e^{P_1(z)}f + h_0(z)e^{P_0(z)}f = 0, \tag{0.0.4}$$

où $k \geq 2$ est un nombre entier, $P_j(z)(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des polynômes non constants et $h_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes.

En 2011, Peng et Chen [35] ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$f'' + e^{-z}f' + (A_1(z)e^{a_1 z} + A_2(z)e^{a_2 z})\, f = 0, \tag{0.0.5}$$

où $A_j(z)(j = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à un, a_1 et a_2 sont des nombres complexes non nuls. Sous certaines conditions, ils ont démontré que toute solution non nulle de l'équation (0.0.5) est d'ordre infini et d'hyper-ordre égal à un.

Habib et Belaïdi [20] ont ensuite généralisé les résultats du Peng et Chen pour l'équation différentielle suivante :

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}(D_j(z)+B_j(z)e^{b_jz})f^{(j)}+(D_0(z)+A_1(z)e^{a_1z}+A_2(z)e^{a_2z})\,f=0, \qquad (0.0.6)$$

où $k\geq 2$ est un nombre entier, $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s=1,2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j=1,...,k-1)$ et $D_m(z)$ $(m=0,1,2,...,k-1)$ sont des fonctions entières d'ordre fini, a_1,a_2,b_l $(l=1,...,k-1)$ sont des nombres complexes.
Ils ont aussi considéré dans [19] l'équation différentielle linéaire suivante :

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}(B_j(z)e^{b_jz}+D_j(z)e^{d_jz})f^{(j)}+(A_1(z)e^{a_1z}+A_2(z)e^{a_2z})\,f=0, \qquad (0.0.7)$$

où $k\geq 2$ est un nombre entier, $A_s\,(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s=1,2)$, $B_j\,(z)\,(\not\equiv 0)$, et $D_j\,(z)\,(\not\equiv 0)$ $(j=1,2,...,k-1)$ des fonctions entières d'ordre fini, a_1,a_2,b_j,d_j $(j=1,\ldots,k-1)$ sont des nombres complexes. Ils ont démontré que toute solution non nulle f de l'équation (0.0.7) est d'ordre infini et d'hyper-ordre est égal à un.

Dans cette thèse, on va considérer les résultats de Peng et Chen et ceux de Habib et Belaïdi pour démontrer différents résultats concernant la croissance des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires.

Cette thèse est composée de quatre chapitres :

Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de Nevanlinna nécessaires par la suite pour notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ordre et l'hyper-ordre de croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}(D_j(z)+B_j(z)e^{P_j(z)})f^{(j)}+\left(D_0(z)+A_1(z)e^{Q_1(z)}+A_2(z)e^{Q_2(z)}\right)f=0, \qquad (0.0.8)$$

où $k\geq 2$ est un nombre entier, $Q_s(z)(s=1,2)$ et $P_j(z)$ $(j=1,\ldots,k-1)$ sont des polynômes non constants, $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s=1,2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j=1,...,k-1)$ et $D_m(z)$ $(m=0,1,...,k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini.

Dans le troisième chapitre, on va étudier la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(B_j(z)e^{P_j(z)} + D_j(z)e^{R_j(z)}\right) f^{(j)} + \left(A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right) f = 0, \qquad (0.0.9)$$

où $k \geq 2$ est un nombre entier, $Q_s(z)(s = 1, 2)$, $P_j(z)$, et $R_j(z)$ $(j = 1, \ldots, k-1)$ sont des polynômes non constants, $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s = 1, 2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ et $D_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini.

Dans le dernier chapitre, on s'intéressera à l'hyper-ordre des solutions méromorphes transcendantes des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_j\left(z\right) e^{P_j(z)} + B_j\left(z\right) e^{Q_j(z)}\right) f^{(j)} = 0, \qquad (0.0.10)$$

où $k \geq 2$ un nombre entier, $P_j(z)$ et $Q_j(z)(j = 0, \ldots, k-1)$ sont des polynômes non constants, $A_j(z)$ et $B_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini.

Chapitre 1

Quelques éléments de La théorie de R. Nevanlinna.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

Définition 1.1.1 *([24], [27]) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Chaque pôle étant comptée avec son ordre de multiplicité*

Posons

$$N\left(r,a,f\right)=N(r,\frac{1}{f-a})=\int_0^r\frac{n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)}{t}dt+n\left(0,a,f\right)\log r,\ a\neq\infty, \quad (1.1.1)$$

$$N\left(r,\infty,f\right)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n\left(t,\infty,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)}{t}dt+n\left(0,+\infty,f\right)\log r, \quad (1.1.2)$$

$$\overline{N}\left(r,a,f\right)=\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})=\int_0^r\frac{\overline{n}\left(t,a,f\right)-\overline{n}\left(0,a,f\right)}{t}dt+\overline{n}\left(0,a,f\right)\log r,\ a\neq\infty, \quad (1.1.3)$$

$$\overline{N}\left(r,\infty,f\right)=\overline{N}(r,f)=\int_0^r\frac{\overline{n}\left(t,\infty,f\right)-\overline{n}\left(0,\infty,f\right)}{t}dt+n\left(0,+\infty,f\right)\log r, \quad (1.1.4)$$

$$m(r,a,f)=m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta\ ,\quad a\neq\infty, \tag{1.1.5}$$

$$m(r,\infty\ ,f)=m(r,\ f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta, \tag{1.1.6}$$

où

$$\log^+ x=\max\{0,\log x\}=\begin{cases}\log x, & x>1\\ 0, & 0<x\leq 1\end{cases}. \tag{1.1.7}$$

$\overline{n}(t,a,f)$ le nombre des racines distincts de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$. $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. $N(r,a,f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$ et $m(r,a,f)$ est dite fonction de proximité de f.

Définition 1.1.2 *([24], [27]) Soit f une fonction méromorphe non constante. On définit la fonction caractéristique $T(r,f)$ de la fonction f par :*

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f). \tag{1.1.8}$$

Exemple 1.1.1 *Soit la fonction $f(z)=e^{az^n}$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}^*$.*

Posons $a=|a|e^{i\varphi}$ et $z=re^{i\theta}$. Alors

$$|f(z)|=\left|f(re^{i\theta})\right|=e^{|a|r^n\cos(n\theta+\varphi)}$$

D'où

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+e^{|a|r^n\cos(n\theta+\varphi)}d\theta.$$

Par un changement de variable, on a

$$m(r,f)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\varphi}^{2n\pi+\varphi}\log^+e^{|a|r^n\cos(\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+e^{|a|r^n\cos(\tau)}d\tau$$

$$=\frac{|a|r^n}{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\tau)\,d\tau+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos(\tau)\,d\tau\right]=\frac{|a|}{\pi}r^n.$$

Ainsi

$$T(r,f) = \frac{|a|}{\pi} r^n. \tag{1.1.9}$$

Exemple 1.1.2 *([24, p. 7]) Pour la fonction* $f(z) = e^{e^z}$, *on a*

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, \quad r \to +\infty.$$

Exemple 1.1.3 ([7]) *Pour la fonction* $f(z) = \frac{e^{az^n}}{z}$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$, *on a*

$$T(r,f) = \frac{|a|}{\pi} r^n + O(\log r), \ r \to +\infty.$$

Proposition 1.1.1 ([32]) *Une fonction méromorphe est une fonction rationnelle si et seulement si*

$$T(r,f) = O(\log r), \ r \to +\infty.$$

1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna.

Théorème 1.2.1 *([32]) Soit* f *une fonction méromorphe non constante et soit*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{+\infty} C_i z^i, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{1.2.1}$$

la série de Laurent de $(f - a)$ *à l'origine.*

Alors pour tout nombre complexe a, *on a*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|C_m| + \varphi(r,a), \tag{1.2.2}$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leqslant \log 2 + \log^+ |a|. \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.1 *Le premier Théorème fondamental peut être exprimé sous la forme :*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \ r \to +\infty \ \text{et} \ a \in \mathbb{C}. \tag{1.2.4}$$

Proposition 1.2.1 *([24], [27]) Soient* $f, f_1, \ldots, f_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *des fonctions méromorphes et* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *avec* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Alors on a

a) $T\left(r, \prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k)$ pour $n \geq 1$.

(1.2.5)

b) $T(r, f^n) = nT(r, f),\ n \in \mathbb{N}^*$.

(1.2.6)

c) $T\left(r, \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k) + \log n,$ pour $n \geq 1$.

(1.2.7)

d) $T\left(r, \dfrac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) = T(r, f) + O(1)$ *en supposant que* $f \not\equiv -\delta/\gamma$.

(1.2.8)

1.3 Croissance d'une fonction méromorphe.

1.3.1 Ordre et Hyper-ordre de croissance.

Définition 1.3.1 *([24]* [32]*) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de croissance de f est défini par :*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} \tag{1.3.1}$$

Proposition 1.3.1 *([24]* [32]*) Soient f et g deux fonctions méromorphes. Alors on a*

1) $\sigma(f + g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$
2) $\sigma(fg) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$
3) Si $\sigma(f) < \sigma(g)$, alors $\sigma(fg) = \sigma(f + g) = \sigma(g)$.

Remarque 1.3.1 *Si f est une fonction entière, alors l'ordre de croissance de f est défini par :*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.3.2}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.1 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$, *on a* $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)| = e^r$.

D'où

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log e^r}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.3.2 *Pour la fonction* $f(z) = \frac{e^{az^n}}{z}$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$, *on a* $\sigma(f) = n$.

Définition 1.3.2 *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'hyper-ordre de f est défini par :*

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \tag{1.3.3}$$

Remarque 1.3.2 *Si f est une fonction entière, alors l'hyper-ordre de f est défini par :*

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.3.4}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.3 *([24, p. 7]) Pour la fonction* $f(z) = e^{e^z}$, *on a* $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = 1$.

1.3.2 Exposant et Hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe.

Définition 1.3.3 *([24] [32]) L'exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe f est défini par :*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}. \tag{1.3.5}$$

Exemple 1.3.4 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$, *on a* $\lambda(f) = 0$.

Exemple 1.3.5 *Pour la fonction* $f(z) = e^z + b$ *avec* $b \in \mathbb{C}^*$, *on a* $\lambda(f) = 1$.

Définition 1.3.4 *([24] [32]) L'exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f est défini par :*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}. \tag{1.3.6}$$

où $\overline{N}(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r$, et $\overline{n}(t, \frac{1}{f})$ désinge le nombre des zéros distincts de f situées dans le disque $|z| \leq t$.

Définition 1.3.5 *([24] [32]) L'hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe f est défini par :*

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}. \tag{1.3.7}$$

Définition 1.3.6 *([24] [32]) L'hyper-exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f est défini par :*

$$\overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}. \tag{1.3.8}$$

1.3.3 Mesure linéaire et Mesure logarithmique.

Définition 1.3.7 *([25]) On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par :*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt, \tag{1.3.9}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Exemple 1.3.6 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2, 7] \cup [9, 11] \subset [0, +\infty)$ est donnée par :*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_2^7 dt + \int_9^{11} dt = 7.$$

Définition 1.3.8 *([25]) On définit la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ par :*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt, \tag{1.3.10}$$

où χ_F *est la fonction caractéristique de l'ensemble* F*.*

Exemple 1.3.7 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e^5] \subset [1, +\infty)$ *est donnée par :*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \chi_{_F}(t) \frac{dt}{t} = \int_1^{e^5} \frac{dt}{t} = 5.$$

Chapitre 2

Croissance des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

2.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{2.1.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière, on sait que toute solution de l'équation (2.1.1) est une fonction entière et si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.1.1), alors au moins une des deux solutions f_1 et f_2 est d'ordre infini [[16], p. $167 - 168$].

D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (2.1.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, l'équation (2.1.1) avec $B(z) = -(1 + e^{-z})$ possède la solution d'ordre fini $f(z) = e^z$.

Une question naturelle qui se pose est : Quelles sont les conditions sur $B(z)$ qui garantissent que toute solution f $(\not\equiv 0)$ de (2.1.1) soit d'ordre infini ? Ozawa [34], Gundersen [19], Amemiya et Ozawa [1], et Langley [31] ont étudié ce problème. Ils ont démontré que toute solution f $(\not\equiv 0)$ de (2.1.1) est d'ordre infini lorsque $B(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante avec $\sigma(B) \neq 1$.

Récemment, Peng et Chen [35] ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de l'équation (2.1.1) et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 ([35]) *Soient $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, 2)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a_1, a_2 deux nombres complexes tels que $a_1a_2 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$ (supposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou $a_1 < -1$, alors toute solution f $(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{-z}f' + (A_1(z)e^{a_1z} + A_2(z)e^{a_2z}) f = 0 \tag{2.1.2}$$

es*t d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.*

Récemment dans([20], [6]), les auteurs ont étendu le Théorème 2.1.1 pour des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coeffcients fonctions entières comme suit :

Théorème 2.1.2 ([20]) *Soient $k \geq 2$ un entier, $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s = 1, 2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$, $D_m(z)$ $(m = 0, 1, 2, ..., k-1)$ des fonctions entières avec $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_m)\} < 1$, b_l $(l = 1, ..., k-1)$ des constantes complexes telles que (i) $\arg b_l = \arg a_1$ et $b_l = c_la_1$ $(0 < c_l < 1)$ $(l \in I_1)$ et (ii) b_l sont des constantes réelles telles que $b_l \leq 0$ $(l \in I_2)$, où $I_1 \neq \varnothing$, $I_2 \neq \varnothing$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ et $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, k-1\}$ et a_1, a_2 sont deux nombres complexes tels que $a_1a_2 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$ (supposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou a_1 est un nombre réel tel que $a_1 < \dfrac{b}{1-c}$, où $c = \max\{c_l : l \in I_1\}$ et $b = \min\{b_l : l \in I_2\}$, alors toute solution f $(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1}(D_j(z) + B_j(z)e^{b_jz})f^{(j)} + (D_0(z) + A_1(z)e^{a_1z} + A_2(z)e^{a_2z}) f = 0 \tag{2.1.3}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Théorème 2.1.3 ([6]) *Soient $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, 2)$, $B_l(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(l = 1, ..., k-1)$, des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(A_j)(j = 1, 2), \sigma(B_l)(l = 1, ..., k-1)\} < 1$, b_l $(l = 1, ..., k-1)$ des constantes complexes telles que* ***(i)*** *$b_l = c_la_1$ $(0 < c_l < 1)$ $(l \in I_1)$ et* ***(ii)*** *b_l sont des constantes réelles telles que $b_l \leq 0$ $(l \in I_2)$, où $I_1 \neq \varnothing$, $I_2 \neq \varnothing$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ et $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, k-1\}$ et a_1, a_2 sont deux nombres complexes tels que $a_1a_2 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$ (supposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou a_1 est un nombre réel tel que $a_1 < \dfrac{b}{1-c}$, où $c = \max\{c_l : l \in I_1\}$ et $b = \min\{b_l : l \in I_2\}$, alors toute solution f $(\not\equiv 0)$ dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + B_{k-1}(z)e^{b_{k-1}z}f^{(k-1)} + \cdots + B_1(z)e^{b_1z}f' + (A_1(z)e^{a_1z} + A_2(z)e^{a_2z}) f = 0 \tag{2.1.4}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = 1$.

Dans ce chapitre, on continue la recherche pour ce type de problèmes. On va étendre les résultats précédents pour certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. On va prouver les résultats suivants :

Théorème 2.1.4 ([3]) *Soient* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $Q_s(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,s} z^i$ $(s = 1, 2)$ *et* $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j} z^i$ $(j = 1, \ldots, k-1)$ *des polynômes non constants, où* $a_{0,s}, ..., a_{n,s}$ $(s = 1, 2), b_{0,j}, ..., b_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{n,s} = |a_{n,s}| e^{i\theta_s} \neq 0$ $(s = 1, 2)$, $\theta_s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *et* $a_{n,1} \neq a_{n,2}$. *Soient* $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s = 1, 2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ *et* $D_m(z)$ $(m = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_m)\} < n$. *Soient* I *et* J *deux ensembles vérifiant* $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$ *et* $I \cup J = \{1, \ldots, k-1\}$ *tels que pour* $j \in I$, $b_{n,j} = c_j a_{n,1}$ $(0 < c_j < 1)$ *et pour* $j \in J$, $b_{n,j} < 0$.

Si $\theta_1 \neq \pi$ *ou* $a_{n,1}$ *est un nombre réel tel que* $(1-c)a_{n,1} < b$, *où* $c = \max\{c_j : j \in I\}$ *et* $b = \min\{b_{n,j} : j \in J\}$, *alors toute solution méromorphe* f $(\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (D_j(z) + B_j(z) e^{P_j(z)}) f^{(j)} + \left(D_0(z) + A_1(z) e^{Q_1(z)} + A_2(z) e^{Q_2(z)}\right) f = 0 \tag{2.1.5}$$

est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq n$. *De plus, si* $\lambda(1/f) < +\infty$, *alors* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 2.1.1 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' + \left(\frac{i}{z} - ie^{iz}\right) f'' + \left(\frac{z+1}{z} + \frac{i}{z} e^{-2z}\right) f' + \left(\frac{(2z+1)\,i}{z} e^{2iz} + \frac{e^{(i-2)z}}{z}\right) f = 0. \tag{2.1.6}$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1} z = 2iz, \;\; Q_2(z) = a_{1,2} z = (i-2)z, \;\; P_1(z) = b_{1,1} z = -2z \text{ et } P_2(z) = b_{1,2} z = iz.$$

On a

$a_{1,1} = 2i, \;\; a_{1,2} = i - 2, \;\; b_{1,1} = -2 < 0$ et $b_{1,2} = i = \frac{1}{2} a_{1,1}$.

Alors d'après le Théorème 2.1.3, toute solution méromorphe f $(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.6) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.

Ramarquons que la fonction $f(z) = e^{e^{iz}}$ est une solution de l'équation (2.1.6) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 2.1.2 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' - \left(\frac{z+4}{z+2} + e^z\right) f'' + \left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-z}}{z}\right) f' + \left(\frac{z-1}{z^2} - \frac{z^2+z+2}{z(z+2)} e^{2z} + \frac{e^{-z}}{z^2}\right) f = 0. \quad (2.1.7)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -z \text{ et } P_2(z) = b_{1,2}z = z.$$

On a

$a_{1,1} = 2,\ a_{1,2} = -1,\ b_{1,1} = -1 < 0$ et $b_{1,2} = 1 = \frac{1}{2}a_{1,1}$.

Alors d'après le Théorème 2.1.4, toute solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.7) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.

Ramarquons que la fonction $f(z) = ze^{e^z}$ est une solution de l'équation (2.1.7) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 2.1.3 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' + \left(\frac{3}{z} + e^{-z}\right) f'' - \left(\frac{2z+3}{z} + 3e^z\right) f' - \left(\frac{z^2+3}{z^2} + e^{3z} + \frac{2}{z^3}e^{-z}\right) f = 0, \quad (2.1.8)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 3z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = z \text{ et } P_2(z) = b_{1,2}z = -z.$$

On a

$a_{1,1} = 3,\ a_{1,2} = -1,\ b_{1,1} = 1 = \frac{1}{3}a_{1,1}$ et $b_{1,2} = -1 < 0$.

Alors d'après le Théorème 2.1.4, toute solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.8) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.

Ramarquons que la fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution de l'équation (2.1.8) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Théorème 2.1.5 ([3]) *Soient $k \geq 2$ un nombre entier, $Q_s(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,s} z^i$ $(s = 1, 2)$ et $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j} z^i$ $(j = 1, \ldots, k-1)$ des polynômes non constants, où $a_{0,s}, ..., a_{n,s}$ $(s = 1, 2), b_{0,j}, ..., b_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,s} = |a_{n,s}|e^{i\theta_s} \neq 0$ $(s = 1, 2)$, $\theta_s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ et $a_{n,1} \neq a_{n,2}$. Soient $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s = 1, 2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ et $D_m(z)$ $(m = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_m)\} < n$. Soient I et J deux ensembles vérifiant $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = \{1, \ldots, k-1\}$ tels que pour $j \in I$, $b_{n,j} = \alpha_j a_{n,1}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ et pour $j \in J$, $b_{n,j} = \beta_j a_{n,2}$ $(0 < \beta_j < 1)$. Posons $\alpha = \max\{\alpha_j : j \in I\}$ et $\beta = \max\{\beta_j : j \in J\}$.*

Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :
(1) $\theta_1 \neq \pi$ *et* $\theta_1 \neq \theta_2$.
(2) $\theta_1 \neq \pi$, $\theta_1 = \theta_2$ *et* [**(i)** $|a_{n,1}| < (1-\beta)|a_{n,2}|$ *ou* **(ii)** $|a_{n,2}| < (1-\alpha)|a_{n,1}|$].
(3) $a_{n,1}$ *et* $a_{n,2}$ *sont des nombres réels tels que* **(i)** $(1-\beta)a_{n,2} < a_{n,1} < 0$ *ou* **(ii)** $(1-\alpha)a_{n,1} < a_{n,2} < 0$.
Alors toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 2.1.4 *Considérons l'équation différentielle linéaie suivante :*

$$f^{(4)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+6z}{z} + \frac{1-4z}{2z}e^{-2z}\right)f''' + \frac{1}{2}\left(\frac{3+4z}{z} + \frac{3-16z}{2z}e^{-2z}\right)f''$$
$$\left(\frac{1}{z} + \frac{e^{-z}}{z}\right)f' + \left(\frac{e^{-2z}}{z} + \frac{1}{2}(\frac{4z-1}{4z})e^{-5z}\right)f = 0. \tag{2.1.9}$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = -2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -5z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -z,$$

$$P_2(z) = b_{1,2}z = -2z \text{ et } P_3(z) = b_{1,3}z = -2z.$$

On a
$$a_{1,1} = -2,\ a_{1,2} = -5,\ b_{1,1} = -1 = \tfrac{1}{2}a_{1,1},\ b_{1,2} = b_{1,3} = -2 = \tfrac{2}{5}a_{1,2}$$

$$\text{et } \left(1 - \tfrac{2}{5}\right)a_{1,2} < a_{1,1} < 0.$$

Alors d'après le Théorème 2.1.5, toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.9) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z) = e^{e^{-z}}$ est une solution de l'équation (2.1.9) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 2.1.5 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f^{(4)}+\left(\frac{7z^2-8z+6}{z^2}+e^{-2z}\right)f^{(3)}-\left(2-\frac{2z-3}{z}e^{-2z}\right)f''$$

$$-\left(1-\frac{(z-3)\left(7z^2-8z+6\right)}{z^2}e^{-z}\right)f'+\left(\frac{1}{z}+\frac{7z^4-13z^3-3z^2+24z-18}{z^3}e^{-2z}+e^{-5z}\right)f=0. \tag{2.1.10}$$

Posons

$$Q_1(z)=a_{1,1}z=-2z,\ Q_2(z)=a_{1,2}z=-5z,\ P_1(z)=b_{1,1}z=-z,$$

$$P_2(z)=b_{1,2}z=-2z \text{ et } P_3(z)=b_{1,3}z=-2z.$$

On a

$$a_{1,1}=-2,\ a_{1,2}=-5,\ b_{1,1}=-1=\tfrac{1}{2}a_{1,1},\ b_{1,2}=b_{1,3}=-2=\tfrac{2}{5}a_{1,2}$$

$$\text{et } \left(1-\tfrac{2}{5}\right)a_{1,2}<a_{1,1}<0.$$

Alors d'après le Théorème 2.1.5, toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.10) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f)\geq 1$.
Ramarquons la fonction $f(z)=ze^{e^{-z}}$ est une solution de l'équation (2.1.10) avec $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)=1$.

Théorème 2.1.6 ([3]) *Soient $k\geq 2$ un nombre entier, $Q_s(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{i,s}z^i$ $(s=1,2)$ et $P_j(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_{i,j}z^i$ $(j=1,\ldots,k-1)$ des polynômes non constants, où $a_{0,s},...,a_{n,s}$ $(s=1,2), b_{0,j},...,b_{n,j}$ $(j=1,...,k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,s}=|a_{n,s}|e^{i\theta_s}\neq 0$ $(s=1,2)$, $\theta_s\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ et $a_{n,1}\neq a_{n,2}$. Soient $A_s(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(s=1,2)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j=1,...,k-1)$ et $D_m(z)$ $(m=0,1,...,k-1)$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(A_s),\sigma(B_j),\sigma(D_m)\}<n$. Soient I et J deux ensembles vérifiant $I\neq\varnothing$, $J\neq\varnothing$, $I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=\{1,\ldots,k-1\}$ tels que pour $j\in I$, $b_{n,j}=\alpha_j a_{n,1}+\beta_j a_{n,2}$ $(0<\alpha_j<1)$ $(0<\beta_j<1)$ et pour $j\in J$, $b_{n,j}<0$. Posons $\alpha=\max\{\alpha_j:j\in I\}$, $\beta=\max\{\beta_j:j\in I\}$ et $b=\min\{b_{n,j}:j\in J\}$.*

Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :
(1) *$\theta_1\neq\pi$ et $\theta_1\neq\theta_2$.*
(2) *$\theta_1\neq\pi$, $\theta_1=\theta_2$ et [(**i**) $|a_{n,1}|<(1-\beta)|a_{n,2}|$ ou (**ii**) $|a_{n,2}|<(1-\alpha)|a_{n,1}|$].*
(3) *$a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ sont des nombres réels tels que (**i**) $(1-\beta)a_{n,2}-b<a_{n,1}<0$ ou (**ii**) $(1-\alpha)a_{n,1}-b<a_{n,2}<0$.*

Alors toute solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation (2.1.5) est d'ordre infini et vérifie* $\sigma_2(f) \geq n$. *De plus, si* $\lambda(1/f) < +\infty$, *alors* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 2.1.6 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f^{(4)} - \left(\frac{3z+1}{z} + e^{z}\right) f'' + \left(3 - e^{-2z}\right) f''$$
$$+ \left(\frac{3-z^2}{z^2} + 2e^{-z}\right) f' - \left(\frac{3}{z^3} - \frac{3(z+1)}{z^2} e^{2z} - e^{-z}\right) f = 0. \qquad (2.1.11)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -z,$$

$$P_2(z) = b_{1,2}z = -2z \text{ et } P_3(z) = b_{1,3}z = z.$$

On a

$$a_{1,1} = 2,\ a_{1,2} = -1,\ b_{1,1} = -1 < 0,\ b_{1,2} = -2 < 0$$
$$\text{et } b_{1,3} = 1 = \tfrac{3}{4}a_{1,1} + \tfrac{1}{2}a_{1,2}.$$

Alors d'après le Théorème 2.1.6 toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.11) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons la fonction $f(z) = ze^{e^z}$ est une solution de l'équation (2.1.11), avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 2.1.7 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' - \left(\frac{4}{z} - \frac{e^{-2z}}{z-1}\right) f'' - \left(1 + 12e^{-2z}\right) f' + \left(\frac{1}{z} + \frac{6z^2+16z-16}{z^2} e^{-2z} - \frac{8z-12}{z-1} e^{-6z}\right) f = 0. \qquad (2.1.12)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = -2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -6z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -2z \text{ et } P_2(z) = b_{1,2}z = -2z.$$

On a

$a_{1,1}=-2,\ a_{1,2}=-6,\ b_{1,1}=-2<0,\, b_{1,2}=-2=\frac{1}{2}a_{1,1}+\frac{1}{6}a_{1,2}$

$$\text{et } (1-\tfrac{1}{6})a_{1,2}-b_{1,1}<a_{1,1}<0.$$

Alors d'après le Théorème 2.1.6 toute solution méromorphe f ($\not\equiv 0$) de l'équation (2.1.12) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f)\geq 1$.
Ramarquons la fonction $f(z)=ze^{e^{-2z}}$ est une solution de l'équation (2.1.12), avec $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)=1$.

Théorème 2.1.7 ([3]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.1.4 ou le Théorème 2.1.5 ou le Théorème 2.1.6 sont vérifiées. Si* φ ($\not\equiv 0$) *est une fonction méromorphe d'ordre fini, alors toute solution méromorphe* f ($\not\equiv 0$) *de l'équation* (2.1.5) *vérifie* $\lambda(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f-\varphi)=+\infty$ *et* $\lambda_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)\geq n$. *De plus, si* $\lambda(1/f)<+\infty$, *alors* $\lambda_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=n$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 ([2]) *Soient* $P_j(z)$ $(j=0,1,...,k)$ *des polynômes non constants avec* $\deg P_0(z)=n$ $(n\geq 1)$ *et* $\deg P_j(z)\leq n$ $(j=1,2,...,k)$. *Soient* $A_j(z)$ $(j=0,1,...,k)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini et* $\max\{\sigma(A_j):j=0,1,...,k\}<n$ *telles que* $A_0(z)\not\equiv 0$.
Posons

$$F(z)=A_k(z)\,e^{P_k(z)}+A_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}+...+A_1(z)\,e^{P_1(z)}+A_0(z)\,e^{P_0(z)}. \tag{2.2.1}$$

Si $\deg(P_0(z)-P_j(z))=n$ *pour tout* $j=1,...,k$, *alors* F *est une fonction méromorphe d'ordre fini et verifie* $\sigma(F)=n$.

Lemme 2.2.2 ([17]) *Soient* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante et* $\alpha>1$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_1\subset(1,+\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B>0$ *qui dépend uniquement de* i,j $(0\leq i<j\leq k)$ *tels que pour tout* z *vérifiant* $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$, *on ait*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\leq B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\log^{\alpha}r)\log T(\alpha r,f)\right]^{j-i}. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.3 ([14]) *Soit* $g(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $\sigma(g)=\sigma<+\infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon>0$ *donné, il existe un ensemble* $E_2\subset(1,+\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que*

$$|g(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \tag{2.2.3}$$

soit vérifiée pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2, r \to +\infty$.

Lemme 2.2.4 ([*35*]) *Supposons que* $n \geq 1$ *est un entier et* $Q_j(z) = a_{n,j}z^n + \ldots (j = 1,2)$ *sont des polynômes non constants, où* $a_{q,j}(q = 1,2,\ldots,n)$ *sont des nombres complexes avec* $a_{n,1}a_{n,2} \neq 0$. *Posons* $z = re^{i\theta}, a_{n,j} = |a_{n,j}| e^{i\theta_j}, \theta_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ \delta(Q_j,\theta) = |a_{n,j}| \cos(\theta_j + n\theta)$. *Alors il existe un ensemble* $E_3 \subset \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$ *de mesure linéaire nulle. Si* $\theta_1 \neq \theta_2$, *alors il existe une demi-droite* $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) / (E_3 \cup E_4)$ *tel que*

$$\delta(Q_1,\theta) > 0, \ \delta(Q_2,\theta) < 0 \tag{2.2.4}$$

ou

$$\delta(Q_1,\theta) < 0, \ \delta(Q_2,\theta) > 0, \tag{2.2.5}$$

où $E_4 = \left\{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) : \delta(Q_j,\theta) = 0\right\}$ *est un ensemble fini de mesure linéaire nulle.*

Remarque 2.2.1 ([*35*]) *Dans le Lemme 2.2.4, si on remplace* $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) / (E_3 \cup E_4)$ *par* $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) / (E_3 \cup E_4)$, *alors on obtient le même résultat.*

Lemme 2.2.5 ([*22*]) *Soient* $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ...(\alpha, \beta$ *sont des nombres réels,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$*), un polynôme de dégré* $n \geq 1$ *et* $A(z) (\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma(A) < n$. *Posons* $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta) = \alpha\cos(n\theta) - \beta\sin(n\theta)$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $E_5 \subset (1,+\infty)$ *de mesure logarthmique finie tel que pour tout* $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \backslash H$, *et* $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, *on ait*

(i) si $\delta(P,\theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.2.6}$$

(ii) si $\delta(P,\theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.2.7}$$

où $H = \left\{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) : \delta(P,\theta) = 0\right\}$.

Lemme 2.2.6 ([*18*]) *Soient* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *et* $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones non décroissantes telles que* $\varphi(r) \leq \psi(r)$ *pour tout* $r \notin E_6 \cup [0, 1]$*, où* $E_6 \subset (1, +\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit* $\alpha > 1$ *une constante donnée. Alors il existe* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *tel que* $\varphi(r) \leq \psi(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$.

Lemme 2.2.7 ([*2*]) *Soient* $k \geq 2$ *un entier et* $A_0(z)$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Soient* $\rho = \max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}$ *et* f *une solution méromorphe transcendante avec* $\lambda(1/f) < +\infty$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0. \tag{2.2.8}$$

Alors $\sigma_2(f) \leq \rho$.

Lemme 2.2.8 ([*8*]) *Soient* $A_0(z)$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$, *et* $F(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f + A_0(z) f = F, \tag{2.2.9}$$

alors f *vérifie* $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = +\infty$.

Lemme 2.2.9 ([*4*]) *Soient* $A_0(z)$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$, *et* $F(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (2.2.9) *avec* $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = \sigma$*, alors* f *vérifie* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.4

En premier, montrons que toute solution méromorphe $f(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante. Supposons que $f(\not\equiv 0)$ est une solution polynômiale ou rationnelle de l'équation (2.1.5). Alors $\sigma(f) = 0$. Ecrivons l'équation (2.1.5) sous la forme :

$$(A_1(z) f) e^{Q_1(z)} + (A_2(z) f) e^{Q_2(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(B_j(z) f^{(j)}\right) e^{P_j(z)} = B(z), \tag{2.3.1}$$

où $B(z) = -(f^{(k)} + D_0(z) f + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(z) f^{(j)})$, $A_s(z)f$ $(s = 1, 2)$ et $B_j(z)f^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $A_s f \not\equiv 0$ $(s = 1, 2)$, $\sigma(B) < n$, $\sigma(A_s f) < n$ $(s = 1, 2)$ et $\sigma(B_j f^{(j)}) < n$ $(j = 1, ..., k-1)$.

Si $\theta_1 \neq \pi$ ou $a_{n,1}$ est un nombre réel tel que $(1-c)a_{n,1} < b$, alors $\deg(Q_1(z) - Q_2(z)) = n$ et $\deg(Q_1(z) - P_j(z)) = n$ $(j = 1, ..., k-1)$. Ainsi d'après (2.3.1) et le Lemme 2.2.1, on a $\sigma(B) = n$. C'est une contradiction avec $\sigma(B) < n$. Alors toute solution méromorphe f $(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante.

Posons $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_m)\} = \rho < n$, où $(s = 1, 2)$, $(j = 1, ..., k-1)$ et $(m = 0, ..., k-1)$.

Supposons que f $(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5). D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left[T(2r, f)\right]^{j+1} \ (j = 1, ..., k). \tag{2.3.2}$$

D'après le Lemme 2.2.3, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < n - \rho)$, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que

$$|D_m(z)| \leq \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \ (m = 0, ..., k-1). \tag{2.3.3}$$

soit vérifiée pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \to +\infty$.

Cas 1. $\theta_1 \neq \pi$.

(i) Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, où E_3 et E_4 sont définis comme dans le Lemme 2.2.4 et vérifiant

$$\delta(Q_1, \theta) > 0, \ \delta(Q_2, \theta) < 0 \quad \text{ou} \quad \delta(Q_1, \theta) < 0, \ \delta(Q_2, \theta) > 0.$$

a) Quand $\delta(Q_1, \theta) > 0$, $\delta(Q_2, \theta) < 0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n - \rho, (1-c)/2(1+c)\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1, \theta)r^n\}, \tag{2.3.4}$$

et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2, \theta)r^n\} < 1. \tag{2.3.5}$$

De (2.3.4) et (2.3.5), on a

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \geq \left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| - \left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right|$$

$$\geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} - 1$$

$$\geq (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \tag{2.3.6}$$

De (2.1.5), il vient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(\left|D_{k-1}(z)\right| + \left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+ \cdots + \left(\left|D_1(z)\right| + \left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|D_0(z)\right|. \tag{2.3.7}$$

Pour $j \in I$, on a $\delta(P_j,\theta) = c_j\delta(Q_1,\theta) > 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(Q_1,\theta)r^n\}. \tag{2.3.8}$$

Pour $j \in J$, on a $\delta(P_j,\theta) = -\left|b_{n,j}\right|\cos(n\theta) < 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta)r^n\} < 1. \tag{2.3.9}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.6), (2.3.8) et (2.3.9) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(Q_1,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.3.10}$$

où $M_1 > 0$ est une constante.

De (2.3.10) et $0 < 2\varepsilon < (1-c)/(1+c)$, il vient que

$$(1-o(1))\exp\{\frac{(1-c)}{2}\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{2.3.11}$$

Comme $\delta(Q_1,\theta)>0$ et $\rho+\varepsilon<n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.11), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

b) Quand $\delta(Q_1,\theta)<0$, $\delta(Q_2,\theta)>0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour le ε ci dessus il existe un ensemble $E_5\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_5$, $r\to+\infty$, on ait

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right|\leq\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}<1 \tag{2.3.12}$$

et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right|\geq\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{2.3.13}$$

De (2.3.12) et (2.3.13), on obtient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}+A_2(z)e^{Q_2(z)}\right|\geq(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{2.3.14}$$

Pour $j\in I$, on a $\delta(P_j,\theta)<0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right|\leq\exp\{(1-\varepsilon)c_j\delta(Q_1,\theta)r^n\}<1. \tag{2.3.15}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.9), (2.3.14) et (2.3.15) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z=\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_3\cup E_4)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_5$, $r\to+\infty$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}\leq M_2\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.3.16}$$

où $M_2>0$ est une constante.

Comme $\delta(Q_2,\theta)>0$ et $\rho+\varepsilon<n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.16), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemma 2.2.7, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

(ii) Supposons que $\theta_1=\theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z=\theta$ tel que $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_3\cup E_4)$ et $\delta(Q_1,\theta)>0$. Supposons que $|a_{n,1}|\leq|a_{n,2}|$. Puisque $a_{n,1}\neq a_{n,2}$ et $\theta_1=\theta_2$, il s'ensuit que $|a_{n,1}|<|a_{n,2}|$. Ainsi $\delta(Q_2,\theta)>\delta(Q_1,\theta)>0$. D'après le Lemme

2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, (|a_{n,2}| - |a_{n,1}|)/2(|a_{n,2}| + |a_{n,1}|)\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.13) et

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\right\}. \tag{2.3.17}$$

De (2.3.13) et (2.3.17), il vient que

$$\begin{aligned}\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| &\geq \left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| - \left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \\ &\geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} - \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \\ &\geq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}\left[\exp\{\gamma r^n\} - 1\right],\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

où

$$\gamma = (1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta).$$

Comme $0 < 2\varepsilon < (|a_{n,2}| - |a_{n,1}|)/(|a_{n,2}| + |a_{n,1}|)$, alors

$$\begin{aligned}\gamma &= (1-\varepsilon)|a_{n,2}|\cos(\theta_2 + n\theta) - (1+\varepsilon)|a_{n,1}|\cos(\theta_1 + n\theta) \\ &= (|a_{n,2}| - |a_{n,1}| - \varepsilon(|a_{n,2}| + |a_{n,1}|))\cos(\theta_1 + n\theta) \\ &> \frac{|a_{n,2}| - |a_{n,1}|}{2}\cos(\theta_1 + n\theta) > 0.\end{aligned}$$

Puisque $\gamma > 0$, alors d'après (2.3.18), on obtient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \geq (1-o(1))\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{\gamma r^n\}. \tag{2.3.19}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.8), (2.3.9) et (2.3.19) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1-o(1)) \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \exp\{\gamma r^n\} \leq M_3 \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(Q_1,\theta)r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.3.20}$$

où $M_3 > 0$ est une constante.

De (2.3.20), il vient que

$$(1-o(1)) \exp\{[(1+\varepsilon)(1-c)\,\delta(Q_1,\theta)+\gamma]r^n\} \leq M_3 \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{2.3.21}$$

Comme $\delta(Q_1,\theta) > 0$, $\gamma > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.21), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. $a_{n,1}$ est un nombre réel tel que $(1-c)a_{n,1} < b$, c'est-à-dire $\theta_1 = \pi$.

(i) Supposons que $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $\theta_2 \neq \pi$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$ et $\delta(Q_2,\theta) > 0$. Puisque $\cos(n\theta) > 0$, on a $\delta(Q_1,\theta) = |a_{n,1}| \cos(\theta_1 + n\theta) = -|a_{n,1}| \cos(n\theta) < 0$. D'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, (1-c)/2(1+c)\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.12) et (2.3.13).

En utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 1(b)** , on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Supposons que $\theta_1 = \theta_2$. Alors $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$. Alors $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1,\theta) = |a_{n,1}| \cos(\theta_1 + n\theta) = -|a_{n,1}| \cos(n\theta) > 0$, $\delta(Q_2,\theta) = |a_{n,2}| \cos(\theta_2 + n\theta) = -|a_{n,2}| \cos(n\theta) > 0$. Supposons que $|a_{n,1}| \leq |a_{n,2}|$. Puisque $a_{n,1} \neq a_{n,2}$ et $\theta_1 = \theta_2$, alors $|a_{n,1}| < |a_{n,2}|$. Ainsi $\delta(Q_2,\theta) > \delta(Q_1,\theta) > 0$. D'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n -$

$\rho, (|a_{n,2}| - |a_{n,1}|) / 2 (|a_{n,2}| + |a_{n,1}|)\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.13), (2.3.17) et par suite (2.3.19) est vérifiée.

Pour $j \in J$, on a $\delta(P_j, \theta) = -|b_{n,j}| \cos(n\theta) > 0$.

D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_j,\theta)r^n\},$$

$$\leq \exp\{(1+\varepsilon)br^n \cos(n\theta)\}. \tag{2.3.22}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.8), (2.3.19) et (2.3.22) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1 - o(1)) \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \exp\{\gamma r^n\}$$

$$\leq M_4 \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(Q_1,\theta)r^n\} \exp\{(1+\varepsilon)br^n \cos(n\theta)\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.3.23}$$

où $M_4 > 0$ est une constante.

D'où

$$(1 - o(1)) \exp\{dr^n\} \leq M_4 \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.3.24}$$

où

$$d = (1+\varepsilon)\left[(1-c)\delta(Q_1,\theta) - b\cos(n\theta)\right] + \gamma.$$

Comme $\gamma > 0$, $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1,\theta) = -|a_{n,1}| \cos(n\theta)$, $(1-c)\, a_{n,1} < b$ et $b < 0$, on obtient que

$$d = -(1+\varepsilon)\left[(1-c)\,|a_{n,1}| + b\right] \cos(n\theta) + \gamma$$

$$> -(1+\varepsilon)\left[|b| + b\right] \cos(n\theta) + \gamma = \gamma > 0.$$

Comme $\rho+\varepsilon<n$ et $d>0$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.3.24), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.5

En premier, montrons que toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante. Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution polynômiale ou rationnelle de l'équation (2.1.5). Alors $\sigma(f)=0$. Ecrivons l'équation (2.1.5) sous la forme (2.3.1), où $B(z)=-\left(f^{(k)}+D_0(z)\,f+\sum\limits_{j=1}^{k-1}D_j(z)\,f^{(j)}\right)$, $A_s(z)f$ $(s=1,2)$ et $B_j(z)f^{(j)}$ $(j=1,2,...,k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $A_sf\not\equiv 0$ $(s=1,2)$, $\sigma(B)<n$, $\sigma(A_sf)<n$ $(s=1,2)$ et $\sigma(B_jf^{(j)})<n$ $(j=1,...,k-1)$.

Si le **cas 1** ou le **cas 2(i)** ou le **cas 3(i)** est vérifié, il s'ensuit que $\deg(Q_2(z)-Q_1(z))=n$ et $\deg(Q_2(z)-P_j(z))=n$ $(j=1,...,k-1)$. Ainsi de (2.3.1) et d'après le Lemme 2.2.1, on a $\sigma(B)=n$. C'est une contradiction avec $\sigma(B)<n$. Alors toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante.

Si le **cas 2(ii)** ou le **cas 3(ii)** est vérifié, il s'ensuit que $\deg(Q_1(z)-Q_2(z))=n$ et $\deg(Q_1(z)-P_j(z))=n$ $(j=1,...,k-1)$. Ainsi de (2.3.1) et d'après le Lemme 2.2.1, on a $\sigma(B)=n$. C'est une contradiction avec $\sigma(B)<n$. Alors toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante.

Posons $\max\{\sigma(A_s),\sigma(B_j),\sigma(D_m)\}=\rho<n$, où $(s=1,2)$, $(j=1,...,k-1)$ et $(m=0,...,k-1)$.

Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5). D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B>0$ tels que pour tout z vérifiant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$, on ait (2.3.2). D'après le Lemme 2.2.3, pour tout ε donné $(0<\varepsilon<n-\rho)$, il existe un ensemble $E_2\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que (2.3.3) soit vérifiée pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$, $r\to+\infty$.

Cas 1. Supposons que $\theta_1\neq\pi$ et $\theta_1\neq\theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z=\theta$ tel que $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_3\cup E_4)$, où E_3 et E_4 sont définis comme dans le Lemme 2.2.4 et vérifiant

$$\delta(Q_1,\theta) > 0,\ \ \delta(Q_2,\theta) < 0 \text{ ou } \delta(Q_1,\theta) < 0,\ \ \delta(Q_2,\theta) > 0.$$

a) Quand $\delta(Q_1,\theta) > 0$, $\delta(Q_2,\theta) < 0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, (1-\alpha)/2(1+\alpha)\}$), il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.4) et (2.3.5). De (2.3.4) et (2.3.5), on a (2.3.6).

Pour $j \in I$, on a $\delta(P_j,\theta) = \alpha_j \delta(Q_1,\theta) > 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}. \tag{2.4.1}$$

Pour $j \in J$, on a $\delta(P_j,\theta) = \beta_j\delta(Q_2,\theta) < 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\beta_j\delta(Q_2,\theta)r^n\} < 1. \tag{2.4.2}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.6), (2.4.1) et (2.4.2) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.4.3}$$

où $M_1 > 0$ est une constante.

De (2.4.3) et comme $0 < 2\varepsilon < (1-\alpha)/(1+\alpha)$, il vient que

$$(1-o(1))\exp\{\frac{(1-\alpha)}{2}\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{2.4.4}$$

Comme $\delta(Q_1,\theta) > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.4), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

b) Quand $\delta(Q_1,\theta) < 0$, $\delta(Q_2,\theta) > 0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, (1-\beta)/2(1+\beta)\}$), il existe un ensemble $E_5 \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.12) et (2.3.13). De (2.3.12) et (2.3.13), on a (2.3.14).

Pour $j \in I$, on a $\delta(P_j,\theta) < 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j\delta(Q_1,\theta)r^n\} < 1. \tag{2.4.5}$$

Pour $j \in J$, on a $\delta(P_j,\theta) > 0$. D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\right\}. \tag{2.4.6}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.14), (2.4.5) et (2.4.6) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq M_2\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.4.7}$$

où $M_2 > 0$ est une constante.

De (2.4.7) et comme $0 < 2\varepsilon < (1-\beta)/2(1+\beta)$, il vient que

$$(1-o(1))\exp\{\frac{(1-\beta)}{2}\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq M_2\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{2.4.8}$$

Comme $\delta(Q_2,\theta) > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.8), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 = \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$ et $\delta(Q_1,\theta) > 0$. Comme $\theta_1 = \theta_2$, il s'ensuit que $\delta(Q_2,\theta) > 0$.

(i) Si $|a_{n,1}| < (1-\beta)|a_{n,2}|$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n - \rho, ((1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}|)/2\left[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}|\right]\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.13) et (2.3.17)
De (2.1.5), il vient que

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(|D_{k-1}(z)| + \left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| +$$

$$+ \cdots + \left(|D_1(z)| + \left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| + |D_0(z)|. \tag{2.4.9}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.13), (2.3.17), (2.4.1) et (2.4.6) dans (2.4.9), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \setminus (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}$$

$$\leq k\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}$$

$$+\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}+\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}$$

$$\leq M_3\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \quad (2.4.10)$$

où $M_3 > 0$ est une constante.

De (2.4.10), il vient que

$$\exp\{d_1 r^n\} \leq M_3\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \quad (2.4.11)$$

où

$$d_1 = (1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta) - (1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta).$$

Comme $0 < 2\varepsilon < \left[(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}|\right] / \left[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}|\right], \theta_1 = \theta_2$ et $\cos(\theta_1 + n\theta) > 0$, alors

$$d_1 = \left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)$$

$$= \left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]|a_{n,2}|\cos(\theta_1+n\theta) - (1+\varepsilon)|a_{n,1}|\cos(\theta_1+n\theta)$$

$$= \left\{(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| - \varepsilon\left[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}|\right]\right\}\cos(\theta_1+n\theta)$$

$$> \frac{(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}|}{2}\cos(\theta_1+n\theta) > 0.$$

Comme $d_1 > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.11), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $|a_{n,2}| < (1-\alpha)|a_{n,1}|$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, [(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|]/2[(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]\}$), il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.4) et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{2.4.12}$$

De (2.1.5), il vient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(|D_{k-1}(z)| + \left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| +$$

$$+ \cdots + \left(|D_1(z)| + \left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| + |D_0(z)|. \tag{2.4.13}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.4.1), (2.4.6) et (2.4.12) dans (2.4.13), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}$$

$$\leq k\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}$$

$$+\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} + \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}$$

$$\leq M_4\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.4.14}$$

où $M_4 > 0$ est une constante.

De (2.4.14), il vient que

$$\exp\{d_2r^n\} \leq M_4\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{2.4.15}$$

où

$$d_2 = (1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta).$$

Comme $0 < 2\varepsilon < [(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|] / [(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]$, $\theta_1 = \theta_2$ et $\cos(\theta_1 + n\theta) > 0$, alors

$$d_2 = \{(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| - \varepsilon[(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]\}\cos(\theta_1 + n\theta)$$

$$> \frac{(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|}{2}\cos(\theta_1 + n\theta) > 0.$$

Comme $d_2 > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.15), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Case 3. Supposons que $a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ sont des nombres réels tels que $(1-\beta)a_{n,2} < a_{n,1} < 0$ ou $(1-\alpha)a_{n,1} < a_{n,2} < 0$, c'est-à-dire que $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$. Donc $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1,\theta) = |a_{n,1}|\cos(\theta_1 + n\theta) = -|a_{n,1}|\cos(n\theta) > 0$ et $\delta(Q_2,\theta) = |a_{n,2}|\cos(\theta_2 + n\theta) = -|a_{n,2}|\cos(n\theta) > 0$.

(i) Si $(1-\beta)a_{n,2} < a_{n,1} < 0$, alors en utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 2(i)**, on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $(1-\alpha)a_{n,1} < a_{n,2} < 0$, alors en utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 2(ii)**, on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.6

En utilisant le même raisonnement que celui dans le Théorème 2.1.5, on obtient que toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.5) est transcendante.

Posons $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_m)\} = \rho < n$, où $(s = 1,2)$, $(j = 1, ..., k-1)$ et $(m = 0, ..., k-1)$.

Supposons que $f\ (\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5). D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait (2.3.2). D'après le Lemme 2.2.3, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < n - \rho)$, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que (2.3.3) soit vérifiée pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \to +\infty$.

Cas 1. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 \neq \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, où E_3 et E_4 sont définis comme dans le Lemme 2.2.4 et vérifiant

$$\delta(Q_1, \theta) > 0,\ \ \delta(Q_2, \theta) < 0 \text{ ou } \delta(Q_1, \theta) < 0,\ \ \delta(Q_2, \theta) > 0.$$

a) Quand $\delta(Q_1, \theta) > 0$, $\delta(Q_2, \theta) < 0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n - \rho, (1 - \alpha)/2(1 + \alpha)\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.4) et (2.3.5). De (2.3.4) et (2.3.5), on a (2.3.6).

Pour $j \in I$, on a

$$\delta(\alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) = \alpha_j \delta(Q_1, \theta) > 0 \quad \text{et} \quad \delta(P_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) = \beta_j \delta(Q_2, \theta) < 0.$$

D'où

$$\left|B_j(z) e^{\alpha_j a_{n,1} z^n}\right| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\alpha_j \delta(Q_1, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\alpha \delta(Q_1, \theta) r^n\} \tag{2.5.1}$$

et

$$\left|e^{P_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n}\right| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} < 1. \tag{2.5.2}$$

De (2.5.1) et (2.5.2), on obtient que

$$\left|B_j(z) e^{P_j(z)}\right| = \left|B_j(z) e^{\alpha_j a_{n,1} z^n}\right| \left|e^{P_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n}\right| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\alpha \delta(Q_1, \theta) r^n\}. \tag{2.5.3}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.6), (2.3.9) et (2.5.3) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient (2.4.3). De (2.4.3) et $0 < \varepsilon < (1 - \alpha)/(2(1 + \alpha))$, on a (2.4.4). Comme $\delta(Q_1, \theta) > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.4), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et

$\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

b) Quand $\delta(Q_1, \theta) < 0$, $\delta(Q_2, \theta) > 0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\{n - \rho, (1-\beta)/2(1+\beta)\}$), il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.12) et (2.3.13). De (2.3.12) et (2.3.13), on a (2.3.14).

Pour $j \in I$, on a

$$\delta(\beta_j a_{n,2} z^n, \theta) = \beta_j \delta(Q_2, \theta) > 0 \text{ et } \delta(P_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n, \theta) = \alpha_j \delta(Q_1, \theta) < 0.$$

D'où

$$\left|B_j(z) e^{\beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta \delta(Q_2, \theta) r^n\} \tag{2.5.4}$$

et

$$\left|e^{P_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\alpha_j \delta(Q_1, \theta) r^n\} < 1. \tag{2.5.5}$$

De (2.5.4) et (2.5.5), il vient que

$$\left|B_j(z) e^{P_j(z)}\right| = \left|B_j(z) e^{\beta_j a_{n,2} z^n}\right| \left|e^{P_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta \delta(Q_2, \theta) r^n\}. \tag{2.5.6}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.9), (2.3.14) et (2.5.6) dans (2.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient (2.4.7). De (2.4.7) et $0 < \varepsilon < (1-\beta)/2(1+\beta)$, on a (2.4.8).
Comme $\delta(Q_2, \theta) > 0$ et $\rho + \varepsilon < n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.4.8), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 = \theta_2$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$ et $\delta(Q_1, \theta) > 0$. Comme $\theta_1 = \theta_2$, il s'ensuit que $\delta(Q_2, \theta) > 0$.

(i) Si $|a_{n,1}| < (1-\beta)|a_{n,2}|$, alors d'après le Lemma 2.2.5, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \min\{n - \rho, [(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}|]/2[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}|]\}$), il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.13) et (2.3.17).

Pour $j \in I$, on a

$$\delta(\alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) = \alpha_j \delta(Q_1, \theta) > 0 \quad \text{et} \quad \delta(P_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) = \beta_j \delta(Q_2, \theta) > 0.$$

D'où (2.5.1) est vérifiée et

$$\left| e^{P_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n} \right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta \delta(Q_2, \theta) r^n\}. \tag{2.5.7}$$

De (2.5.1) et (2.5.7), il vient que

$$\left| B_j(z) e^{P_j(z)} \right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha \delta(Q_1, \theta) r^n\} \exp\{(1+\varepsilon)\beta \delta(Q_2, \theta) r^n\}. \tag{2.5.8}$$

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.9), (2.3.13), (2.3.17) et (2.5.8) dans (2.4.9), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient (2.4.10). De (2.4.10), on a (2.4.11). En utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 2(i)** du Théorème 2.1.5, on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $|a_{n,2}| < (1-\alpha)|a_{n,1}|$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \min\{n-\rho, [(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|] / 2[(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]\})$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$, $r \to +\infty$, on ait (2.3.4) et (2.4.12).

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.3.9), (2.4.12) et (2.5.8) dans (2.4.13), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$, on obtient (2.4.14). De (2.4.14), on a (2.4.15). En utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 2(ii)** du Théorème 2.1.5, on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Cas 3. Supposons que $a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ sont des nombres réels tels que $(1-\beta)a_{n,2} - b < a_{n,1} < 0$ ou $(1-\alpha)a_{n,1} < a_{n,2} < 0$; c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 2.2.4, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$. Donc $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1, \theta) = |a_{n,1}| \cos(\theta_1 + n\theta) = -|a_{n,1}| \cos(n\theta) > 0$ et $\delta(Q_2, \theta) = |a_{n,2}| \cos(\theta_2 + n\theta) = -|a_{n,2}| \cos(n\theta) > 0$.

Pour $j \in J$, on obtient $\delta(P_j, \theta) = -|b_{n,j}| \cos(n\theta) > 0$.

(i) Si $(1-\beta)a_{n,2}-b<a_{n,1}<0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné ($0<\varepsilon<\min\{n-\rho,[(1-\beta)\left|a_{n,2}\right|-\left|a_{n,1}\right|+b]/2[(1+\beta)\left|a_{n,2}\right|+\left|a_{n,1}\right|-b]\}$), il existe un ensemble $E_5\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_5$, $r\to+\infty$, on ait (2.3.13) et (2.3.17).
En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.13), (2.3.17), (2.3.22) et (2.5.8) dans (2.4.9), pour tout z vérifiant $\arg z=\theta\in\left(\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right)\backslash(E_3\cup E_4)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_5$, $r\to+\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}$$

$$\leq M_5\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta)+\beta\delta(Q_2,\theta)+b\cos(n\theta)\right]r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1},\qquad(2.5.9)$$

où $M_5>0$ est une constante.

De (2.5.9), il vient que

$$\exp\{d_3r^n\}\leq M_5\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1},\qquad(2.5.10)$$

où

$$d_3=(1-\varepsilon)\,\delta(Q_2,\theta)-(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta)+\beta\delta(Q_2,\theta)+b\cos(n\theta)\right].$$

Comme $0<2\varepsilon<[(1-\beta)\left|a_{n,2}\right|-\left|a_{n,1}\right|+b]/[(1+\beta)\left|a_{n,2}\right|+\left|a_{n,1}\right|-b],\theta_1=\theta_2=\pi$ et $\cos(n\theta)<0$, il s'ensuit que

$$d_3=\left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]\delta(Q_2,\theta)-(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta)+b\cos(n\theta)\right]$$

$$=-\left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]\left|a_{n,2}\right|\cos(n\theta)+(1+\varepsilon)\left[\left|a_{n,1}\right|-b\right]\cos(n\theta)$$

$$=-\{(1-\beta)\left|a_{n,2}\right|-\left|a_{n,1}\right|+b-\varepsilon\left[(1+\beta)\left|a_{n,2}\right|+\left|a_{n,1}\right|-b\right]\}\cos(n\theta)$$

$$>-\frac{\left[(1-\beta)\left|a_{n,2}\right|-\left|a_{n,1}\right|+b\right]}{2}\cos(n\theta)>0.$$

Comme $d_3>0$ et $\rho+\varepsilon<n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.5.10), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

(ii) Si $(1-\alpha)a_{n,1}-b<a_{n,2}<0$, alors d'après le Lemme 2.2.5, pour tout ε donné $(0<\varepsilon<\min\{n-\rho,[(1-\alpha)\left|a_{n,1}\right|-\left|a_{n,2}\right|+b]/2\left[(1+\alpha)\left|a_{n,1}\right|+\left|a_{n,2}\right|-b\right)]\})$, il existe un ensemble $E_5\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_5$, $r\to+\infty$, on ait (2.3.4) et (2.4.12).

En substituant (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.3.22), (2.4.12) et (2.5.8) dans (2.4.13), pour tout z vérifiant $\arg z=\theta\in\left(\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right)\backslash(E_3\cup E_4)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_5$, $r\to+\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}$$

$$\leq M_6\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta)+\alpha\delta(Q_1,\theta)+b\cos(n\theta)\right]r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \quad (2.5.11)$$

où $M_6>0$ est une constante.

De (2.5.11), il vient que

$$\exp\{d_4r^n\}\leq M_6\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \quad (2.5.12)$$

où

$$d_4=(1-\varepsilon)\,\delta(Q_1,\theta)-(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta)+\alpha\delta(Q_1,\theta)+b\cos(n\theta)\right].$$

De $0<2\varepsilon<((1-\alpha)\left|a_{n,1}\right|-\left|a_{n,2}\right|+b)\,/\left[(1+\alpha)\left|a_{n,1}\right|+\left|a_{n,2}\right|-b\right],\theta_1=\theta_2=\pi$ et $\cos(n\theta)<0$, il s'ensuit que

$$d_4=\left[1-\alpha-\varepsilon(1+\alpha)\right]\delta(Q_1,\theta)-(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta)+b\cos(n\theta)\right]$$

$$=-\left[1-\alpha-\varepsilon(1+\alpha)\right]\left|a_{n,1}\right|\cos(n\theta)+(1+\varepsilon)\left[\left|a_{n,2}\right|-b\right]\cos(n\theta)$$

$$=-\{(1-\alpha)\left|a_{n,1}\right|-\left|a_{n,2}\right|+b-\varepsilon\left[(1+\alpha)\left|a_{n,1}\right|+\left|a_{n,2}\right|-b\right]\}\cos(n\theta)$$

$$>-\frac{\left[(1-\alpha)\left|a_{n,1}\right|-\left|a_{n,2}\right|+b\right]}{2}\cos(n\theta)>0.$$

Comme $d_4>0$ et $\rho+\varepsilon<n$, alors en utilisant le Lemme 2.2.6 et (2.5.12), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 2.2.7, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

2.6 Preuve du Théorème 2.1.7

Supposons que f ($\not\equiv 0$) est une solution méromorphe de l'équation (2.1.5). Posons $g = f - \varphi$. Alors on a $\sigma(g) = \sigma(f) = +\infty$. En substituant $f = g + \varphi$ dans (2.1.5), on obtient que

$$g^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1}(D_j + B_j e^{P_j(z)})g^{(j)} + \left(D_0 + A_1 e^{Q_1(z)} + A_2 e^{Q_2(z)}\right) g = H, \tag{2.6.1}$$

où

$$H = -[\varphi^{(k)} + \left(D_0 + A_1 e^{Q_1(z)} + A_2 e^{Q_2(z)}\right) \varphi + \sum_{j=1}^{k-1}(D_j + B_j e^{P_j(z)})\varphi^{(j)}].$$

Montrons maintenant que $H \not\equiv 0$.
En effet, si $H \equiv 0$, alors

$$\varphi^{(k)} + \sum_{J=1}^{k-1}(D_j + B_j e^{P_j(z)})\varphi^{(j)} + \left(D_0 + A_1 e^{Q_1(z)} + A_2 e^{Q_2(z)}\right) \varphi = 0. \tag{2.6.2}$$

Ainsi φ ($\not\equiv 0$) est une solution de l'équation (2.1.5). Donc $\sigma(\varphi) = +\infty$ et d'après les hypothèses du Théorème 2.1.7, c'est une contradiction. Ainsi $H \not\equiv 0$.

D'après le Lemme 2.2.8 et le Lemme 2.2.9, on a

$$\lambda(g) = \overline{\lambda}(g) = \sigma(g) = \sigma(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(g) = \overline{\lambda}_2(g) = \sigma_2(f) \geq n,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda(f-\varphi) = \overline{\lambda}(f-\varphi) = \sigma(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(f-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \sigma_2(f) \geq n.$$

On conclut que si $\lambda\,(1/f) < +\infty$, alors $\lambda_2(f-\varphi) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \sigma_2(f) = n$.

Chapitre 3

Sur l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

3.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{3.1.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est bien connu que toute solution de l'équation (3.1.1) est une fonction entière et la plupart des solutions de (3.1.1) ont un ordre infini. Ainsi une question naturelle est : quelles sont les conditions sur $B(z)$ qui garantissent que toute solution $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.1) soit d'ordre infini ? Ozawa [34], Gundersen [19], Amemiya et Ozawa [1] et Langley [31] ont étudié ce problème dans le cas où $B(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante avec $\sigma\,(B) \neq 1$. Dans [35], Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de l'équation (3.1.1) et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 ([35]) *Soient $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j = 1, 2)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a_1, a_2 des nombres complexes tels que $a_1 a_2 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$ (supposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou $a_1 < -1$, alors toute solution $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + \left(A_1(z) e^{a_1 z} + A_2(z) e^{a_2 z}\right) f = 0 \tag{3.1.2}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Récemment dans [21], Habib et Belaïdi ont étendu le Théorème 3.1.1 pour certanies équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suit :

Théorème 3.1.2 ([21]) *Soient* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $A_s(z)\,(\not\equiv 0)\ (s = 1, 2)$, $B_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $D_j(z)\,(\not\equiv 0)\ (j = 1, 2, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_j)\} < 1$, a_1, a_2, $d_j\ (j = 1, \ldots, k-1)$ *des nombres complexes tels que* $a_1 a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$ *et* $d_j \neq 0$, $b_j\ (j = 1, \ldots, k-1)$ *des nombres réels tels que* $b_j < 0$. *Supposons qu'il existe* α_j, $\beta_j\ (j = 1, 2, ..., k-1)$, *où* $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$ *et* $d_j = \alpha_j a_1 + \beta_j a_2$. *Posons* $\alpha = \max\{\alpha_j : j = 1, \ldots, k-1\}$, $\beta = \max\{\alpha_j : j = 1, \ldots, k-1\}$ *et* $b = \min\{b_j : j = 1, \ldots, k-1\}$.

Si l'une des conditions suivantes est vérfiée :
(1) $\arg a_1 \neq \pi$ *et* $\arg a_1 \neq \arg a_2$,
(2) $\arg a_1 \neq \pi, \arg a_1 = \arg a_2$ *et* (**i**) $|a_2| > \dfrac{|a_1|}{1-\beta}$ *ou* (**ii**) $|a_2| < (1-\alpha)\,|a_1|$,
(3) $a_1 < 0$ *et* $\arg a_1 \neq \arg a_2$,
(4) *(i)* $(1-\beta)a_2 - b < a_1 < 0$, $a_2 < \dfrac{b}{1-\beta}$ *ou* (**ii**) $a_1 < \dfrac{a_2 + b}{(1-\alpha)}$ *et* $a_2 < 0$,
alors toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j(z)e^{b_j z} + D_j(z)e^{d_j z}) f^{(j)} + (A_1(z)e^{a_1 z} + A_2(z)e^{a_2 z})\, f = 0 \tag{3.1.3}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = 1$.

Le but principal de ce chapitre est de généraliser les résultats ci-dessus pour certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. On va prouver les résultats suivants :

Théorème 3.1.3 *Soient* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $Q_s(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,s} z^i\ (s = 1, 2)$, $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j} z^i$ *et* $R_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_{i,j} z^i\ (j = 1, \ldots, k-1)$ *des polynômes non constants, où* $a_{0,s}, ..., a_{n,s}$ $(s = 1, 2), b_{0,j}, ..., b_{n,j}$, $d_{0,j}, ..., d_{n,j}\ (j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{n,1} a_{n,2} \neq 0$ *et* $a_{n,1} \neq a_{n,2}$. *Soient* $A_s(z)\ (\not\equiv 0)\ (s = 1, 2)$, $B_j(z)\ (\not\equiv 0)$, $D_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j = 1, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_j)\} < n$. *Supposons que* $b_{n,j}\ (j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres réels tels que* $b_{n,j} < 0$ *et* $d_{n,j} = \alpha_j a_{n,1} + \beta_j a_{n,2}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ $\big(0 < \beta_j < 1\big)$ $(j = 1, ..., k-1)$. *Posons* $a_{n,s} = |a_{n,s}|\, e^{i\theta_s}$, $\theta_s \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ $(s =$

$1,2)$, $\alpha = \max\{\alpha_j : j = 1, \ldots, k-1\}$, $\beta = \max\{\beta_j : j = 1, \ldots, k-1\}$ *et* $b = \min\{b_{n,j} : j = 1, \ldots, k-1\}$.

Si l'une des conditions suivantes est vérfiée :
(1) $\theta_1 \neq \pi$ *et* $\theta_1 \neq \theta_2$,
(2) $\theta_1 \neq \pi$, $\theta_1 = \theta_2$ *et* $[$**(i)** $|a_{n,1}| < (1-\beta)\,|a_{n,2}|$ *ou* **(ii)** $|a_{n,2}| < (1-\alpha)\,|a_{n,1}|]$.
(3) $a_{n,1}$ *et* $a_{n,2}$ *sont des nombres réels tels que* **(i)** $(1-\beta)\,a_{n,2} - b < a_{n,1} < 0$ *ou* **(ii)** $(1-\alpha)\,a_{n,1} - b < a_{n,2} < 0$, *alors toute solution méromorphe* $f\,(\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(B_j(z)e^{P_j(z)} + D_j(z)e^{R_j(z)}\right) f^{(j)} + \left(A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right) f = 0 \tag{3.1.4}$$

est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq n$. *De plus, si* $\lambda(1/f) < +\infty$, *alors* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 3.1.1 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' - \left(\frac{z}{z+2}e^{-2z} + e^z\right) f'' + \left(\frac{z}{z+2}e^{-z} - (3+z)e^z\right) f' + \left(\frac{z^2+z-1}{z}e^{2z} + \frac{z+1}{z+2}e^{-z}\right) f = 0, \tag{3.1.5}$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -z,\ P_2(z) = b_{1,2}z = -2z$$

$$R_1(z) = d_{1,1}z = z \text{ et } R_2(z) = d_{1,2}z = z.$$

On a

$$a_{1,1} = 2,\ a_{1,2} = -1,\ b_{1,1} = -1 < 0,\ b_{1,2} = -2 < 0$$

$$\text{et } d_{1,1} = d_{1,2} = 1 = \tfrac{3}{4}a_{1,1} + \tfrac{1}{2}a_{1,2}.$$

Alors d'après le Théorème 3.1.3, toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.5) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z) = ze^{e^z}$ est une solution de l'équation (3.1.5) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 3.1.2 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' - \left(\frac{z^2-3z+3}{z^2}e^{-z} + e^z\right)f'' + \left(\frac{z^2-5z+9}{z^2}e^{-z} + \frac{e^z}{z}\right)f'$$

$$-\left(2e^{2z} - \frac{z^3-3z^2+3z+6}{z^4}e^{-z}\right)f = 0, \tag{3.1.6}$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 2z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = -z,\ P_2(z) = b_{1,2}z = -z$$

$$R_1(z) = d_{1,1}z = z \text{ et } R_2(z) = d_{1,2}z = z.$$

On a

$$a_{1,1} = 2,\ a_{1,2} = -1,\ b_{1,1} = -1 < 0,\ b_{1,2} = -1 < 0$$

$$\text{et } d_{1,1} = d_{1,2} = 1 = \tfrac{3}{4}a_{1,1} + \tfrac{1}{2}a_{1,2}.$$

Alors d'après le Théorème 3.1.3 toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.6) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution de l'équation (3.1.6) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Théorème 3.1.4 *Soient $k \geq 2$ un nombre entier, $Q_s(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,s}z^i$ $(s = 1,2)$, $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j}z^i$ et $R_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_{i,j}z^i$ $(j = 1,\ldots,k-1)$ des polynômes non constants, où $a_{0,s},...,a_{n,s}$ $(s = 1,2), b_{0,j},...,b_{n,j},\ d_{0,j},...,d_{n,j}$ $(j = 1,...,k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,1}a_{n,2} \neq 0$, et $a_{n,1} \neq a_{n,2}$. Soient $A_s(z)\ (\not\equiv 0)$ $(s = 1,2)$, $B_j(z)\ (\not\equiv 0)$ et $D_j(z)\ (\not\equiv 0)$ $(j = 1,...,k-1)$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(A_s),\sigma(B_j),\sigma(D_j)\} < n$. Soient I_s et J_s $(s = 1,2)$ des ensembles vérifiant $I_s \neq \varnothing$, $J_s \neq \varnothing$, $I_s \cap J_s = \varnothing$, $I_s \cup J_s = \{1,\ldots,k-1\}$ $(s = 1,2)$ tels que $b_{n,j} = \alpha_j a_{n,1}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ $(j \in I_1)$, $b_{n,j} < 0$ $(j \in J_1)$, $d_{n,j} = \beta_j a_{n,2}$ $(0 < \beta_j < 1)$ $(j \in I_2)$ et $d_{n,j} < 0$ $(j \in J_2)$. Posons $a_{n,s} = |a_{n,s}|\, e^{i\theta_s}$, $\theta_s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ $(s = 1,2)$, $\alpha = \max\{\alpha_j : j \in I_1\}$, $\beta = \max\{\beta_j : j \in I_2\}$, $b = \min\{b_{n,j} : j \in J_1\}$ et $d = \min\{d_{n,j} : j \in J_2\}$.*

Si l'une des conditions suivantes est vérfiée :
(1) *$\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 \neq \theta_2$,*
(2) *$\theta_1 \neq \pi$, $\theta_1 = \theta_2$ et [**(i)** $|a_{n,1}| < (1-\beta)\,|a_{n,2}|$ ou **(ii)** $|a_{n,2}| < (1-\alpha)\,|a_{n,1}|$],*

(3) $a_{n,1}$ *et* $a_{n,2}$ *des nombres réels tels que* **(i)** $(1-\beta)\, a_{n,2} - b - d < a_{n,1} < 0$ *ou* **(ii)** $(1-\alpha)\, a_{n,1} - b - d < a_{n,2} < 0$, *alors toute solution méromorphe* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation* (3.1.4) *est d'ordre infini et vérifié* $\sigma_2(f) \geq n$. *De plus, si* $\lambda(1/f) < +\infty$, *alors* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 3.1.3 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f''' + \left(\frac{3-z^2}{z^2} e^{-z} + \frac{(3-z^2)(z+2)}{z^4} e^{-3z}\right) f''$$

$$-\left(\frac{3(1+z)}{z} e^{z} - \frac{(z^2-3)(z+2)}{z^3} e^{-z}\right) f' - \left(e^{3z} - \frac{(z^2-3)(z+2)^2}{z^5} e^{-2z}\right) f = 0, \quad (3.1.7)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1} z = 3z,\ Q_2(z) = a_{1,2} z = -2z,\ P_1(z) = b_{1,1} z = z,\ P_2(z) = b_{1,2} z = -z$$

$$R_1(z) = d_{1,1} z = -z \text{ et } R_2(z) = d_{1,2} z = -3z.$$

On a

$$a_{1,1} = 3,\ a_{1,2} = -2,\ b_{1,1} = 1 = \tfrac{1}{3} a_{1,1},\ b_{1,2} = -1 < 0,$$

$$d_{1,1} = -1 = \tfrac{1}{2} a_{1,2} \text{ et } d_{1,2} = -3 < 0.$$

Alors d'après le Théorème 3.1.4, toute solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.7) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z) = z e^{e^z}$ est une solution de l'équation (3.1.7) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Exemple 3.1.4 *Considérons l'équation différentiellelinéaire suivante :*

$$f''' - \left(\frac{z^2+3}{z^2} e^{-z} - \frac{6+3z-z^3}{z^3(z-1)} e^{-2z}\right) f''$$

$$+\left(\frac{3(1-z)}{z} e^{z} + \frac{z^4-4z^3+5z^2-6z-6}{z^3(z-1)} e^{-z}\right) f' - \left(e^{3z} + \frac{2(6+3z-z^3)}{z^5(z-1)} e^{-2z}\right) f = 0, \quad (3.1.8)$$

Posons

$$Q_1(z) = a_{1,1}z = 3z,\ Q_2(z) = a_{1,2}z = -2z,\ P_1(z) = b_{1,1}z = z,\ P_2(z) = b_{1,2}z = -z$$

$$R_1(z) = d_{1,1}z = -z \text{ et } R_2(z) = d_{1,2}z = -2z.$$

On a

$$a_{1,1} = 3,\ a_{1,2} = -2,\ b_{1,1} = 1 = \tfrac{1}{3}a_{1,1},\ b_{1,2} = -1 < 0,$$

$$d_{1,1} = -1 = \tfrac{1}{2}a_{1,2} \text{ et } d_{1,2} = -2 < 0.$$

Alors d'après le Théorème 3.1.4 toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.8) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution de l'équation (3.1.8) avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 ([2]) *Soient* $P_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ *des polynômes non constants avec* $\deg P_0(z) = n$ $(n \geq 1)$ *et* $\deg P_j(z) \leq n$ $(j = 1, 2, ..., k)$. *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini et* $\max\{\sigma(A_j(z)) : j = 0, 1, ..., k\} < n$ *telles que* $A_0(z) \not\equiv 0$.
Posons

$$F(z) = A_k(z)\, e^{P_k(z)} + A_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} + ... + A_1(z)\, e^{P_1(z)} + A_0(z)\, e^{P_0(z)}. \tag{3.2.1}$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ *pour tout* $j = 1, ..., k$, *alors* F *est une fonction méromorphe d'ordre fini et verifie* $\sigma(F) = n$.

Lemme 3.2.2 ([17]) *Soient* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante et* $\alpha > 1$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B > 0$ *qui dépend uniquement de* i, j $(0 \leq i < j \leq k)$ *tels que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq B \left[\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f) \right]^{j-i}. \tag{3.2.2}$$

Lemme 3.2.3 ([35]) *Supposons que* $n \geq 1$ *est un entier et* $Q_j(z) = a_{n,j}z^n + \ldots (j = 1, 2)$ *sont des polynômes non constants, où* $a_{n,q}(q = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des nombres complexes et* $a_{n,1}a_{n,2} \neq 0$. *Posons* $z = re^{i\theta}$, $a_{n,j} = |a_{n,j}|\, e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\delta(Q_j, \theta) = |a_{n,j}| \cos(\theta_j + n\theta)$.

Alors il existe un ensemble $E_2 \subset \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$ *de mesure linéaire nulle. Si* $\theta_1 \neq \theta_2$*, alors il existe une demi-droite* $\arg z = \theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) / (E_2 \cup E_3)$ *tel que*

$$\delta(Q_1, \theta) > 0,\ \delta(Q_2, \theta) < 0 \tag{3.2.3}$$

ou

$$\delta(Q_1, \theta) < 0,\ \delta(Q_2, \theta) > 0, \tag{3.2.4}$$

où $E_3 = \left\{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) : \delta(Q_j, \theta) = 0\right\}$ *est un ensemble fini ayant une mesure linéaire nulle.*

Remarque 3.2.1 ([*35*]) *Si dans le Lemme 3.2.3, on remplace* $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) / (E_3 \cup E_4)$ *par* $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) / (E_3 \cup E_4)$*, alors on obtient le même résultat.*

Lemme 3.2.4 ([*22*]) *Soient* $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + \ldots (\alpha,\ \beta$ *sont des nombres réels,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ *un polynôme de dégré* $n \geq 1$ *et* $A(z) (\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma(A) < n$*. Posons* $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos(n\theta) - \beta \sin(n\theta)$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe une ensemble* $E_4 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarthmique finie tel que pour tout* $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) / H$ *et* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, $r \to +\infty$*, on ait*

(i) *Si* $\delta(P, \theta) > 0$*, alors*

$$\exp\{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \tag{3.2.5}$$

(ii) *Si* $\delta(P, \theta) < 0$*, alors*

$$\exp\{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \tag{3.2.6}$$

où $H = \left\{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) : \delta(P, \theta) = 0\right\}$.

Lemme 3.2.5 ([*18*]) *Soient* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *et* $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones non décroissantes telles que* $\varphi(r) \leq \psi(r)$ *pour tout* $r \notin E_5 \cup [0, 1]$*, où* $E_5 \subset (1, +\infty)$ *est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit* $\alpha > 1$ *une constante donnée. Alors il existe* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *tel que* $\varphi(r) \leq \psi(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_0$*.*

Lemme 3.2.6 ([*2*]) *Soient* $k \geq 2$ *un entier et* $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Soient* $\rho = \max\{\sigma(A_j(z)) : j = 0, 1, \ldots, k - 1\}$ *et* f *une solution méromorphe transcendante avec* $\lambda(1/f) < +\infty$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \tag{3.2.7}$$

Alors $\sigma_2(f) \leq \rho$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.3

Montrons d'abord que toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.4) est transcendante. Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution polynômiale ou rationnelle de l'équation (3.1.4). Alors $\sigma\,(f) = 0$. Ecrivons l'équation (3.1.4) sous la forme :

$$(A_1(z)f)\,e^{Q_1(z)} + (A_2(z)f)\,e^{Q_2(z)} + \sum_{j=1}^{k-1}\left(B_j(z)f^{(j)}\right)e^{P_j(z)} + \sum_{j=1}^{k-1}\left(D_j(z)f^{(j)}\right)e^{R_j(z)} = -f^{(k)}, \tag{3.3.1}$$

où $A_s(z)f\ \ (s = 1, 2)$, $B_j(z)f^{(j)}$ et $D_j(z)f^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $A_sf \not\equiv 0$, $\sigma\,(A_sf) < n$ $(s = 1, 2)$, $\sigma(B_jf^{(j)}) < n$ et $\sigma(D_jf^{(j)}) < n$ $(j = 1, ..., k-1)$.

Si le **cas 1** ou le **cas 2(ii)** ou le **cas 3(ii)** est vérifié, il s'ensuit que $\deg(Q_1(z) - Q_2(z)) = n$, $\deg(Q_1(z) - P_j(z)) = n$ et $\deg(Q_1(z) - R_j(z)) = n$ $(j = 1, ..., k-1)$. Ainsi de (3.3.1) et d'après le Lemme 3.2.1, on a $\sigma(-f^{(k)}) = n$. C'est une contradiction. Donc toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.4) est transcendante.

Si le **cas 2(i)** ou le **cas 3(i)** est vérifié, il s'ensuit que $\deg(Q_2(z) - Q_1(z)) = n$, $\deg(Q_2(z) - P_j(z)) = n$ et $\deg(Q_2(z) - R_j(z)) = n$ $(j = 1, ..., k-1)$. Ainsi de (3.3.1) et d'après le Lemme 3.2.1, on a $\sigma(-f^{(k)}) = n$. C'est une contradiction. Donc toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.4) est transcendante.

Supposons que $f\ (\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.4). D'après le Lemme 3.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\,[T(2r, f)]^{j+1}\ \ (j = 1, ..., k). \tag{3.3.2}$$

Cas 1. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 \neq \theta_2$. D'après le Lemme 3.2.3, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, où E_2 et E_3 sont définis dans le Lemme 3.2.3 et vérifiant

$$\delta(Q_1, \theta) > 0,\ \delta(Q_2, \theta) < 0 \text{ or } \delta(Q_1, \theta) < 0,\ \delta(Q_2, \theta) > 0. \tag{3.3.3}$$

a) Quand $\delta(Q_1,\theta) > 0$, $\delta(Q_2,\theta) < 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < (1-\alpha)/(2(1+\alpha)))$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \tag{3.3.4}$$

et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} < 1. \tag{3.3.5}$$

De (3.3.4) et (3.3.5), il vient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \geq \left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| - \left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right|$$

$$\geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} - 1$$

$$= (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}. \tag{3.3.6}$$

D (3.1.4), on trouve que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\left(\left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right| + \left|D_{k-1}(z)\, e^{R_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\cdots+\left(\left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right| + \left|D_1(z)\, e^{R_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.3.7}$$

Pour $j = 1,...,k-1$, on a $\delta(P_j,\theta) = -\left|b_{n,j}\right|\cos(n\theta) < 0, \delta(\alpha_j a_{n,1}z^n,\theta) = \alpha_j\delta(Q_1,\theta) > 0$ et $(R_j(z) - \alpha_j a_{n,1}z^n,\theta) = \beta_j\delta(Q_2,\theta) < 0$.

D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta)r^n\} < 1, \tag{3.3.8}$$

$$\left|D_j(z)e^{\alpha_j a_{n,1}z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\} \tag{3.3.9}$$

et

$$\left|e^{R_j(z)-\alpha_j a_{n,1}z^n}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2,\theta)r^n\} < 1. \tag{3.3.10}$$

De (3.3.9) et (3.3.10), on a

$$\left|D_j(z)e^{R_j(z)}\right| = \left|D_j(z)e^{\alpha_j a_{n,1}z^n}\right| \left|e^{R_j(z)-\alpha_j a_{n,1}z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}. \tag{3.3.11}$$

En substituant (3.3.2), (3.3.6), (3.3.8) et (3.3.11) dans (3.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1 \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.12}$$

où M_1 (> 0) est une constante.

D'après (3.3.12) et comme $0 < 2\varepsilon < (1-\alpha)/(1+\alpha)$, alors on a

$$(1-o(1))\exp\{\frac{(1-\alpha)}{2}\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_1 \left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{3.3.13}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.13), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

b) Quand $\delta(Q_1,\theta) < 0, \delta(Q_2,\theta) > 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (1-\beta)/(1+\beta))$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} < 1 \tag{3.3.14}$$

et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{3.3.15}$$

De (3.3.14) et (3.3.15), on a

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)} + A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \geq (1-o(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{3.3.16}$$

Pour $j = 1, ..., k-1$, on a $\delta(\beta_j a_{n,2}z^n, \theta) = \beta_j \delta(Q_2,\theta) > 0$

et $\delta(R_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n, \theta) = \alpha_j \delta(Q_1, \theta) < 0.$

D'où

$$\left|D_j(z)e^{\beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\} \tag{3.3.17}$$

et

$$\left|e^{R_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\alpha_j \delta(Q_1, \theta) r^n\} < 1. \tag{3.3.18}$$

De (3.3.17) et (3.3.18), on a

$$\left|D_j(z)e^{R_j(z)}\right| = \left|D_j(z)e^{\beta_j a_{n,2} z^n}\right| \left|e^{R_j(z) - \beta_j a_{n,2} z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\}. \tag{3.3.19}$$

En substituant (3.3.2), (3.3.8), (3.3.16) et (3.3.19) dans (3.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$(1 - o(1)) \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq M_2 \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\} \left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.20}$$

où M_2 (> 0) est une constante.

D'après (3.3.20) et comme $0 < 2\varepsilon < (1-\beta)/(1+\beta)$, il vient que

$$(1 - o(1)) \exp\{\frac{(1-\beta)}{2}\delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq M_2 \left[T(2r, f)\right]^{k+1}. \tag{3.3.21}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.21), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Case 2. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 = \theta_2$. D' après le Lemme 3.2.3, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_3 \cup E_4)$ et $\delta(Q_1, \theta) > 0$. Comme $\theta_1 = \theta_2$, il s'ensuit que $\delta(Q_2, \theta) > 0$.

(i) Si $|a_{n,1}| < (1-\beta)|a_{n,2}|$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}|] / [(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}|])$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait (3.3.15) et

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1, \theta) r^n\}. \tag{3.3.22}$$

De (3.1.4), on trouve que

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(\left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right| + \left|D_{k-1}\left(z\right)e^{R_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\cdots+\left(\left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right| + \left|D_1\left(z\right)e^{R_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right|. \qquad (3.3.23)$$

Pour $j = 1, ..., k-1$, on a $\delta(\alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) > 0$ et $\delta(R_j(z) - \alpha_j a_{n,1} z^n, \theta) > 0$.

Ainsi (3.3.9) est vérifiée et on a

$$\left|e^{R_j(z)-\alpha_j a_{n,1} z^n}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\}. \qquad (3.3.24)$$

De (3.3.9) et (3.3.24) , on trouve que

$$\left|D_j(z)e^{R_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1, \theta) r^n\} \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\}. \qquad (3.3.25)$$

En substituant (3.3.2), (3.3.8), (3.3.15), (3.3.22) et (3.3.25) dans (3.3.23), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2, \theta) r^n\} \leq M_3 \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_1, \theta) r^n\} \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta) r^n\} \left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \qquad (3.3.26)$$

où M_3 (> 0) est une constante.

De (3.3.26), on a

$$\exp\{\gamma_1 r^n\} \leq M_3 \left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \qquad (3.3.27)$$

où

$$\gamma_1 = (1-\varepsilon)\delta(Q_2, \theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_1, \theta) - (1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2, \theta). \qquad (3.3.28)$$

Comme $0 < 2\varepsilon < \left[(1-\beta)\left|a_{n,2}\right| - \left|a_{n,1}\right|\right] / \left[(1+\beta)\left|a_{n,2}\right| + \left|a_{n,1}\right|\right]$, $\theta_1 = \theta_2$ et $\cos(\theta_1 + n\theta) > 0$, alors on a

$$\gamma_1 = [1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)$$

$$= [1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,|a_{n,2}|\cos(\theta_1+n\theta) - (1+\varepsilon)\,|a_{n,1}|\cos(\theta_1+n\theta)$$

$$= \{(1-\beta)\,|a_{n,2}| - |a_{n,1}| - \varepsilon\,[(1+\beta)\,|a_{n,2}| + |a_{n,1}|]\}\cos(\theta_1+n\theta)$$

$$> \frac{(1-\beta)\,|a_{n,2}| - |a_{n,1}|}{2}\cos(\theta_1+n\theta) > 0. \tag{3.3.29}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.27), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $|a_{n,2}| < (1-\alpha)\,|a_{n,1}|$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < [(1-\alpha)\,|a_{n,1}| - |a_{n,2}|)]\,/[(1+\alpha)\,|a_{n,1}|+|a_{n,2}|])$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1]\cup E_4$, $r\to+\infty$, on ait (3.3.4) et

$$\left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}. \tag{3.3.30}$$

De (3.1.4), il vient que

$$\left|A_1(z)e^{Q_1(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left(\left|B_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right| + \left|D_{k-1}(z)\,e^{R_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\cdots+\left(\left|B_1(z)e^{P_1(z)}\right| + \left|D_1(z)\,e^{R_1(z)}\right|\right)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|A_2(z)e^{Q_2(z)}\right|. \tag{3.3.31}$$

En substituant (3.3.2), (3.3.4), (3.3.8), (3.3.25) et (3.3.30) dans (3.3.31), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_2\cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1]\cup E_1\cup E_4$, $r\to+\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_4\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta)r^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}\,[T(2r,f)]^{k+1}, \tag{3.3.32}$$

où M_4 (>0) est une constante.

De (3.3.32), on a

$$\exp\{\gamma_2 r^n\} \leq M_4\,[T(2r,f)]^{k+1}, \tag{3.3.33}$$

où

$$\gamma_2 = (1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\alpha\delta(Q_1,\theta). \tag{3.3.34}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < ((1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|) / [(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]$, $\theta_1 = \theta_2$ et $\cos(\theta_1 + n\theta) > 0$, alors on a

$$\gamma_2 = \{(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| - \varepsilon[(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}|]\}\cos(\theta_1 + n\theta)$$

$$> \frac{(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}|}{2}\cos(\theta_1 + n\theta) > 0. \tag{3.3.35}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.33), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Case 3. Supposons que $a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ sont des nombres réels tels que $(1-\beta)a_{n,2} - b < a_{n,1} < 0$ ou $(1-\alpha)a_{n,1} < a_{n,2} < 0$, c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2 = \pi$**.** D'après le Lemme 3.2.3, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$. Alors $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1,\theta) = -|a_{n,1}|\cos(n\theta) > 0$ et $\delta(Q_2,\theta) = |a_{n,2}|\cos(n\theta) > 0$.

Pour $j = 1, ..., k-1$, on a $\delta(P_j,\theta) = -|b_{n,j}|\cos(n\theta) > 0$.

D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_j,\theta)r^n\}$$

$$\leq \exp\{(1+\varepsilon)br^n\cos(n\theta)\}. \tag{3.3.36}$$

(i) Si $(1-\beta)a_{n,2} - b < a_{n,1} < 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné ($0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b] / ((1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}| - b)$), il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait (3.3.15) et (3.3.22).

En substituant (3.3.2), (3.3.15), (3.3.22), (3.3.25) et (3.3.36) dans (3.3.23), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \setminus (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq M_5 \exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta) + \beta\delta(Q_2,\theta) + b\cos(n\theta)\right] r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.37}$$

où $M_5 > 0$ est une constante.

De (3.3.37), il vient que

$$\exp\{\gamma_3 r^n\} \leq M_5 \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.38}$$

où

$$\gamma_3 = (1-\varepsilon)\,\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta) + \beta\delta(Q_2,\theta) + b\cos(n\theta)\right]. \tag{3.3.39}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < ((1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b) / \left[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}| - b\right], \theta_1 = \theta_2 = \pi$ et $\cos(n\theta) < 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta) + b\cos(n\theta)\right] \\
&= -\left[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)\right]|a_{n,2}|\cos(n\theta) + (1+\varepsilon)\left[|a_{n,1}| - b\right]\cos(n\theta) \\
&= -\{(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b - \varepsilon\left[(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}| - b\right]\}\cos(n\theta) \\
&> -\frac{\left[(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b\right]}{2}\cos(n\theta) > 0.
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.38), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $(1-\alpha)a_{n,1} - b < a_{n,2} < 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné ($0 < 2\varepsilon < \left[(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b\right] / \left[(1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}| - b)\right]$), il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$

de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait (3.3.4) et (3.3.30).

En substituant (3.3.2), (3.3.4), (3.3.25), (3.3.30) et (3.3.36) dans (3.3.31), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_6 \exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta) + \alpha\delta(Q_1,\theta) + b\cos(n\theta)\right] r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.41}$$

où $M_6 > 0$ est une constante.

De (3.3.41), on a

$$\exp\{\gamma_4 r^n\} \leq M_6 \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.3.42}$$

où

$$\gamma_4 = (1-\varepsilon)\,\delta(Q_1,\theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta) + \alpha\delta(Q_1,\theta) + b\cos(n\theta)\right]. \tag{3.3.43}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < \left((1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b\right) / \left((1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}| - b\right)$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et $\cos(n\theta) < 0$, alors on a

$$\gamma_4 > -\frac{\left[(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b\right]}{2}\cos(n\theta) > 0. \tag{3.3.44}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.42), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.4

En utilisant le même raisonnement que celui dans la preuve du Théorème 3.1.3, on obtient que toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.1.4) est transcendante.

Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.4). D'après le Lemme 3.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on ait (3.3.2).

Cas1. Supposons que $\theta_1 \neq \pi$ et $\theta_1 \neq \theta_2$. D'après le Lemme 3.2.3, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, où E_2 et E_3 sont définis dans le Lemme 3.2.3 et vérifiant $(3.3.3)$.

a) Quand $\delta(Q_1, \theta) > 0$, $\delta(Q_2, \theta) < 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (1-\alpha)/(1+\alpha))$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait $(3.3.4)$ et $(3.3.5)$. De $(3.3.4)$ et $(3.3.5)$, on a $(3.3.6)$.

On a $\delta(P_j, \theta) = \alpha_j \delta(Q_1, \theta) > 0 \;\; (j \in I_1)$, $\delta(P_j, \theta) = -|b_{n,j}| \cos(n\theta) < 0 \;\; (j \in J_1)$,
et $\delta(R_j, \theta) = \beta_j \delta(Q_2, \theta) < 0 \;\; (j \in I_2)$ et $\delta(R_j, \theta) = -|d_{n,j}| \cos(n\theta) < 0 \;\; (j \in J_1)$.

D'où

$$\left|B_j(z) e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j \delta(Q_1, \theta) r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha \delta(Q_1, \theta) r^n\} \;\; (j \in I_1), \tag{3.4.1}$$

$$\left|B_j(z) e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j, \theta) r^n\} < 1 \;\; (j \in J_1), \tag{3.4.2}$$

$$\left|D_j(z) e^{R_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j \delta(Q_2, \theta) r^n\} < 1 \;\; (j \in I_2) \tag{3.4.3}$$

et

$$\left|D_j(z) e^{R_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(R_j, \theta) r^n\} < 1 \;\; (j \in J_2). \tag{3.4.4}$$

En substituant $(3.3.2)$, $(3.3.6)$, $(3.4.1) - (3.4.4)$ dans $(3.3.7)$, pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que $(3.3.12)$.

En utilisant le Lemme 3.2.5 et $(3.3.13)$, on obtient $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

b) Quand $\delta(Q_1, \theta) < 0, \delta(Q_2, \theta) > 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (1-\beta)/(1+\beta))$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait $(3.3.14)$ et $(3.3.15)$. De $(3.3.14)$ et $(3.3.15)$, on a $(3.3.16)$.

On a $\delta(P_j,\theta)<0$ $(j\in I_1)$ et $\delta(R_j,\theta)>0$ $(j\in I_2)$.

D'où

$$\left|B_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j\delta(Q_1,\theta)r^n\} < 1 \ \ (j\in I_1) \tag{3.4.5}$$

et

$$\left|D_j(z)e^{R_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta_j\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_2,\theta)r^n\right\} \ \ (j\in I_2). \tag{3.4.6}$$

En substituant (3.3.2), (3.3.16), (3.4.2), (3.4.4) (3.4.5) et (3.4.6) dans (3.3.7), pour tout z vérifiant $\arg z=\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_2\cup E_3)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_4$, $r\to+\infty$, on obtient (3.3.20).

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.21), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$

Cas 2. Supposons que $\theta_1\neq\pi$ et $\theta_1=\theta_2$. D'après le Lemme 3.2.3, il existe une demi-droite $\arg z=\theta$ tel que $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_2\cup E_3)$ et $\delta(Q_1,\theta)>0$.

Comme $\theta_1=\theta_2$, alors $\delta(Q_2,\theta)>0$.

(i) Si $|a_{n,1}|<(1-\beta)|a_{n,2}|$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<[(1-\beta)|a_{n,2}|-|a_{n,1}|]/[(1+\beta)|a_{n,2}|+|a_{n,1}|])$, il existe un ensemble $E_4\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$, $r\to+\infty$, on ait (3.3.15) et (3.3.22).

En substituant (3.3.2), (3.3.15), (3.3.22), (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4) et (3.4.6) dans (3.3.23), pour tout z vérifiant $\arg z=\theta\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)\backslash(E_2\cup E_3)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_4$, $r\to+\infty$, on obtient (3.3.26).

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.27), on obtient que $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)\geq n$. De plus, si $\lambda(1/f)<+\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f)\leq n$. D'où $\sigma_2(f)=n$.

(ii) Si $|a_{n,2}|<(1-\alpha)|a_{n,1}|$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<[(1-\alpha)|a_{n,1}|-|a_{n,2}|]/[(1+\alpha)|a_{n,1}|+|a_{n,2}|])$, il existe un ensemble $E_4\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$, $r\to+\infty$, on ait (3.3.4) et (3.3.30).

En substituant (3.3.2), (3.3.4), (3.3.30) , (3.4.1) , (3.4.2), (3.4.4) et (3.4.6) dans (3.3.31), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient (3.3.32) .

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.3.33), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Cas 3. Supposons que $a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ sont des nombres réels tels que $(1-\beta)a_{n,2}-b-d < a_{n,1} < 0$ ou $(1-\alpha)a_{n,1} - b - d < a_{n,2} < 0$, c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. D'après le Lemme 3.2.2, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$. Alors $\cos(n\theta) < 0$, $\delta(Q_1, \theta) = -|a_{n,1}| \cos(n\theta) > 0$ et $\delta(Q_2, \theta) = -|a_{n,2}| \cos(n\theta) > 0$.

On a $\delta(P_j, \theta) > 0 \ (j \in J_1)$ et $\delta(R_j, \theta) > 0 \ (j \in J_2)$.

Ainsi pour $j \in J_1$, on a (3.3.36) et pour $j \in J_2$, on a

$$\left|D_j(z)e^{R_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)dr^n \cos(n\theta)\}. \tag{3.4.7}$$

(i) Si $(1-\beta)a_{n,2} - b - d < a_{n,1} < 0$, alors d'après le Lemme 3.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b + d] / [(1+\beta)|a_{n,2}| + |a_{n,1}| - b - d])$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait (3.3.15) et (3.3.22) .

En substituant (3.3.2), (3.3.15), (3.3.22), (3.3.36) , (3.4.1), (3.4.6) et (3.4.7) dans (3.3.23), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\} \leq M_7 \exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta) + \beta\delta(Q_2,\theta) + (b+d)\cos(n\theta)\right] r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.4.8}$$

où $M_7 > 0$ est une constante.

De (3.4.8), il vient que

$$\exp\{\gamma_5 r^n\} \leq M_7 \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.4.9}$$

où

$$\gamma_5 = (1-\varepsilon)\,\delta(Q_2,\theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(Q_1,\theta) + \beta\delta(Q_2,\theta) + (b+d)\cos(n\theta)\right]. \tag{3.4.10}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < \left[(1-\beta)\,|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b + d\right] / \left[(1+\beta)\,|a_{n,2}| + |a_{n,1}| - b - d\right]$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et $\cos(n\theta) < 0$, on obtient que

$$\gamma_5 > -\frac{\left[(1-\beta)\,|a_{n,2}| - |a_{n,1}| + b + d\right]}{2}\cos(n\theta) > 0. \tag{3.4.11}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.4.9), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $(1-\alpha)a_{n,1} - b - d < a_{n,2} < 0$, alors d'après le Lemme 2.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \left[(1-\alpha)\,|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b + d\right] / \left((1+\alpha)\,|a_{n,1}| + |a_{n,2}| - b - d\right))$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$, $r \to +\infty$, on ait (3.3.4) et (3.3.30).

En substituant (3.3.2), (3.3.4), (3.3.30), (3.3.36), (3.4.1), (3.4.6) et (3.4.7) dans (3.3.31), pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right) \backslash (E_2 \cup E_3)$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_4$, $r \to +\infty$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\} \leq M_8 \exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta) + \alpha\delta(Q_1,\theta) + (b+d)\cos(n\theta)\right] r^n\} \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.4.12}$$

où $M_8 > 0$ est une constante.

De (3.4.12), il vient que

$$\exp\{\gamma_6 r^n\} \leq M_8 \left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \tag{3.4.13}$$

où

$$\gamma_6 = (1-\varepsilon)\,\delta(Q_1,\theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(Q_2,\theta) + \alpha\delta(Q_1,\theta) + (b+d)\cos(n\theta)\right]. \tag{3.4.14}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < ((1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b + d) / ((1+\alpha)|a_{n,1}| + |a_{n,2}| - b - d))$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ et $\cos(n\theta) < 0$, on obtient que

$$\gamma_6 > -\frac{[(1-\alpha)|a_{n,1}| - |a_{n,2}| + b + d]}{2} \cos(n\theta) > 0. \tag{3.4.15}$$

En utilisant le Lemme 3.2.5 et (3.4.13), on obtient que $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) \geq n$. De plus, si $\lambda(1/f) < +\infty$, alors d'après le Lemme 3.2.6, on a $\sigma_2(f) \leq n$. D'où $\sigma_2(f) = n$.

Chapitre 4

Sur l'hyper-ordre des solutions méromorphes transcendantes de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

4.1 Introduction et résultats

Plusieurs mathématiciens ([1] , [14] , [17] , [29] , [32]) se sont intéressés à l'étude des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{4.1.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. Il ont démontré que si $B(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(B) \neq 1$, alors toute solution non nulle de l'équetion (4.1.1) est d'ordre infini.

Dans [35], Peng et Chen ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de l'équation (4.1.1) et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 4.1.1 ([35]) *Soient $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, 2)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a_1, a_2 des nombres complexes tels que $a_1 a_2 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$ (supposons que $|a_1| \leq |a_2|$). Si $\arg a_1 \neq \pi$ ou $a_1 < -1$, alors toute solution f $(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + \left(A_1(z) e^{a_1 z} + A_2(z) e^{a_2 z}\right) f = 0 \tag{4.1.2}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Récemment dans [21], Habib et Belaïdi ont généralisé le Théorème 4.1.1 pour certanies équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suit :

Théorème 4.1.2 ([21]) *Soient* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $A_s(z)\,(\not\equiv 0)$ $(s = 1, 2)$, $B_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $D_j(z)\,(\not\equiv 0)$ $(j = 1, 2, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\max\{\sigma(A_s), \sigma(B_j), \sigma(D_j)\} < 1$, a_1, a_2, d_j $(j = 1, \dots, k-1)$ *des nombres complexes tels que* $a_1 a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$ *et* $d_j \neq 0$, b_j $(j = 1, \dots, k-1)$ *des nombres réels tels que* $b_j < 0$. *Supposons qu'ils existes* α_j, β_j $(j = 1, 2, ..., k-1)$, *où* $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$ *et* $d_j = \alpha_j a_1 + \beta_j a_2$. *Posons* $\alpha = \max\{\alpha_j : j = 1, \dots, k-1\}$, $\beta = \max\{\alpha_j : j = 1, \dots, k-1\}$ *et* $b = \min\{b_j : j = 1, \dots, k-1\}$.

Si l'une des conditions suivantes est vérfiée :

(1) $\arg a_1 \neq \pi$ *et* $\arg a_1 \neq \arg a_2$,

(2) $\arg a_1 \neq \pi$, $\arg a_1 = \arg a_2$ *et* $\left[\textbf{(i)}\ |a_2| > \dfrac{|a_1|}{1-\beta} \text{ ou } \textbf{(ii)}\ |a_2| < (1-\alpha)\,|a_1| \right]$,

(3) $a_1 < 0$ *et* $\arg a_1 \neq \arg a_2$,

(4) **(i)** $(1-\beta)a_2 - b < a_1 < 0$, $a_2 < \dfrac{b}{1-\beta}$ *ou* **(ii)** $a_1 < \dfrac{a_2 + b}{(1-\alpha)}$ *et* $a_2 < 0$,

alors toute solution $f\,(\not\equiv 0)$ *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j(z) e^{b_j z} + D_j(z) e^{d_j z}) f^{(j)} + (A_1(z) e^{a_1 z} + A_2(z) e^{a_2 z})\, f = 0 \tag{4.1.3}$$

vérifie $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = 1$.

Le but principal de ce chapitre est d'étendre les résultats ci-dessus pour certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. On va prouver les résultats suivants :

Théorème 4.1.3 *Soient* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ *et* $Q_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j} z^i$ $(j = 0, \dots, k-1)$ *des polynômes non constants, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}, b_{0,j}, ..., b_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Soient* $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$ *et* $B_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$. *Supposons qu'il existe* $s \in \{1, ..., k-1\}$ *tel que* $a_{n,s} b_{n,s} \neq 0$, $a_{n,s} \neq b_{n,s}$ *et pour* $j \neq s$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ *et* $b_{n,j} = \beta_j b_{n,s}$ $(0 < \beta_j < 1)$. *Posons* $a_{n,s} = |a_{n,s}|\, e^{i\theta_s}$, $b_{n,s} = |b_{n,s}|\, e^{i\phi_s}$, $\theta_s, \phi_s \in [0, 2\pi)$, $\alpha = \max\{\alpha_j : j \neq s\}$ *et* $\beta = \max\{\beta_j : j \neq s\}$.

Si $(\theta_s \neq \phi_s)$ *ou* $(\theta_s = \phi_s$ *et* $[$**(i)** $|a_{n,s}| < (1-\beta)|b_{n,s}|$ *ou* **(ii)** $|b_{n,s}| < (1-\alpha)|a_{n,s}|])$, *alors toute solution méromorphe transcendante* f *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_j(z)e^{P_j(z)} + B_j(z)e^{Q_j(z)}\right) f^{(j)} = 0, \tag{4.1.4}$$

est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 4.1.1 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f^{(4)} - \left(\frac{5}{2}e^{z} + \frac{e^{-z}}{z}\right) f''' + \left(\frac{3}{2}e^{2z} - \frac{e^{-2z}}{z}\right) f''$$

$$+ \left(\frac{2-9z}{2z}e^{z} + \frac{2}{z}e^{-z}\right) f' + \left(\frac{3-z}{z}e^{z} + \frac{e^{-z}}{z}\right) f = 0, \tag{4.1.5}$$

Posons

$P_0(z) = a_{1,0}z = z,\ P_1(z) = a_{1,1}z = z,\ P_2(z) = a_{1,2}z = 2z,\ P_3(z) = a_{1,3}z = z,$

$Q_0(z) = b_{1,0}z = -z,\ Q_1(z) = b_{1,1}z = -z,\ Q_2(z) = b_{1,2}z = -2z$ et $Q_3(z) = b_{1,3}z = -z.$

On a

$a_{1,2} = 2,\ a_{1,0} = a_{1,1} = a_{1,3} = 1 = \frac{1}{2}a_{1,2}$

$b_{1,2} = -2$ et $b_{1,0} = b_{1,1} = b_{1,3} = -1 = \frac{1}{2}b_{1,2}.$

Alors d'après le Théorème 4.1.3, toute solution méromorphe transcendante f dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.5) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f) \geq 1$.

Théorème 4.1.4 *Soit* $k \geq 2$ *un nombre entier,* $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,j}z^i$ *et* $Q_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j}z^i$ $(j = 0, \ldots, k-1)$ *des polynômes non constants, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}, b_{0,j}, ..., b_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Soient* $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$ *et* $B_j(z)\,(\not\equiv 0)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma(A_j), \sigma(B_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$. *Supposons qu'il existe* $s \in \{1, ..., k-1\}$ *tel que* $a_{n,s}b_{n,s} \neq 0$, $a_{n,s} \neq b_{n,s}$ *et pour* $j \neq s$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ *et* $b_{n,j}$ *sont des nombres réels vérifiant* $b_{n,j} < 0$.

Si $a_{n,s}$ *est un nombre réel tel que* $(1-\alpha)\,a_{n,s} < b$, *où* $\alpha = \max\{\alpha_j : j \neq s\}$ *et* $b = \min\{b_{n,j} : j \neq s\}$, *alors toute solution méromorphe transcendante* f *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation* (4.1.4) *est d'ordre infini et vérifie* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 4.1.2 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f^{(4)}+\left(\frac{z-2}{z}e^{-z}-\frac{e^{-3z}}{z}\right)f'''-\left(\frac{2\,(3z+1)}{z}e^{-z}+\frac{3}{z}e^{-3z}\right)f''$$

$$+\left(\frac{e^{-5z}}{z}+\frac{4}{z}e^{-2z}\right)f'-\left(e^{-z}-3e^{-3z}\right)f=0, \tag{4.1.6}$$

Posons

$P_0(z)=a_{1,0}z=-z,\ P_1(z)=a_{1,1}z=-5z,\ P_2(z)=a_{1,2}z=-z,\ P_3(z)=a_{1,3}z=-1$

$Q_0(z)=b_{1,0}z=-3z,\ Q_1(z)=b_{1,1}z=-2z,\ Q_2(z)=b_{1,2}z=-3z$ et $Q_3(z)=b_{1,3}z=-3z.$

On a

$a_{1,1}=-5,\ a_{1,0}=a_{1,2}=a_{1,3}=-1=\frac{1}{5}a_{1,1}$

$b_{1,1}=-2<0,\ b_{1,0}=b_{1,2}=b_{1,3}=-3<0$ et $\left(1-\frac{1}{5}\right)a_{1,1}<-3.$

Alors d'après le Théorème 4.1.4, toute solution méromorphe transcendante f dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.6) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f)\geq 1$.

Ramarquons que la fonction $f(z)=e^{e^{-z}}$ est une solution de l'équation (4.1.6) avec $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)=1$.

Théorème 4.1.5 *Soit $k\geq 2$ un nombre entier, $P_j(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{i,j}z^i$ et $Q_j(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_{i,j}z^i$ $(j=0,\ldots,k-1)$ des polynômes non constants, où $a_{0,j},...,a_{n,j},b_{0,j},...,b_{n,j}$ $(j=1,...,k-1)$ sont des nombres complexes. Soient $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$ et $B_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $(j=0,...,k-1)$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(A_j),\sigma(B_j):j=0,...,k-1\}<n$. Supposons qu'il existe $s\in\{1,...,k-1\}$ tel que $a_{n,s}b_{n,s}\neq 0, a_{n,s}\neq b_{n,s}$ et pour $j\neq s$, $a_{n,j}=\alpha_j a_{n,s}+\beta_j b_{n,s}$ $(0<\alpha_j<1)$ $\left(0<\beta_j<1\right)$ et $b_{n,j}$ sont des nombres réels vérifiant $b_{n,j}<0$. Posons $\alpha=\max\{\alpha_j:j\neq s\}$, $\beta=\max\{\beta_j:j\neq s\}$ et $b=\min\{b_{n,j}:j\neq s\}$.*

Si $a_{n,s}$ et $b_{n,s}$ sont des nombres réels tels que **(i)** $(1-\beta)\,b_{n,s}-b<a_{n,s}<0$ *ou* **(ii)** $(1-\alpha)\,a_{n,s}-b<b_{n,s}<0$, *alors toute solution méromorphe transcendante f dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.4) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f)=n$.*

Exemple 4.1.3 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$f^{(4)}+\left(\frac{e^{-3z}}{z}-e^{-z}\right)f'''+3\left(\frac{e^{-3z}}{z}-3e^{-z}\right)f''$$
$$-\left(\frac{e^{-5z}}{z}-\frac{2\,(z+1)}{z}e^{-3z}\right)f'+\left(e^{-2z}-e^{-z}\right)f=0, \qquad (4.1.7)$$

Posons

$$P_0(z)=a_{1,0}z=-2z,\ P_1(z)=a_{1,1}z=-5z,\ P_2(z)=a_{1,2}z=-3z,\ P_3(z)=a_{1,3}z=-3z$$

$$Q_0(z)=b_{1,0}z=-z,\ Q_1(z)=b_{1,1}z=-3z,\ Q_2(z)=b_{1,2}z=-z \text{ et } Q_3(z)=b_{1,3}z=-z.$$

On a

$$a_{1,1}=-5,\ b_{1,1}=-3<0,\ a_{1,0}=-2=\tfrac{1}{6}a_{1,1}+\tfrac{7}{18}b_{1,1}$$

$$a_{1,2}=a_{1,3}=-3=\tfrac{1}{6}a_{1,1}+\tfrac{13}{18}b_{1,1},\ b_{1,0}=b_{1,2}=b_{1,3}=-1<0 \text{ et } \left(1-\tfrac{1}{6}\right)a_{1,1}+1<b_{1,1}<0.$$

Alors d'après le Théorème 4.1.5, toute solution méromorphe transcendante f dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.7) est d'ordre infini et vérifie $\sigma_2(f)\geq 1$.
Ramarquons que la fonction $f(z)=e^{e^{-z}}$ est une solution de l'équation (4.1.7) avec $\sigma(f)=+\infty$ et $\sigma_2(f)=1$.

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.2.1 ([2]) *Soient $P_j(z)$ $(j=0,1,...,k)$ des polynômes non constants avec* $\deg P_0(z)=n$ $(n\geq 1)$ *et* $\deg P_j(z)\leq n$ $(j=1,2,...,k)$*. Soient $A_j(z)$ $(j=0,1,...,k)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini et* $\max\{\sigma(A_j(z)):j=0,1,...,k\}<n$ *telles que $A_0(z)\not\equiv 0$.*
Posons

$$F(z)=A_k(z)\,e^{P_k(z)}+A_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}+...+A_1(z)\,e^{P_1(z)}+A_0(z)\,e^{P_0(z)}. \qquad (4.2.1)$$

Si $\deg(P_0(z)-P_j(z))=n$ pour tout $j=1,...,k$, alors F est une fonction méromorphe d'ordre fini et verifie $\sigma(F)=n$.

Lemme 4.2.2 ([17]) *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $\alpha>1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_1\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie* *et une constante $B>0$ qui dépend uniquement et i, j ($0\leq i<j\leq k$) tels que pour tout z vérifiant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\leq B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}\left(\log^{\alpha}r\right)\log T(\alpha r,f)\right]^{j-i}. \tag{4.2.2}$$

Lemme 4.2.3 ([23]) *Soit $f(z)=g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe avec $\sigma(f)=\sigma\leq+\infty$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières vérifiant l'une des conditions suivantes*

(i) *$g(z)$ est transcendante et d est un polynôme,*
(ii) *$g(z),d(z)$ sont transcendantes et $\lambda(d)=\sigma(d)=\rho<\sigma(g)=\sigma$.*
Pour tout $|z|=r$ suffisamment grand, soit *$z_r=re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|g(z_r)|=M(r,g)$. Alors il existe une constante δ_r (>0), une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $r_m\to+\infty$ et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que l'estimation*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\leq r_m^{2i}\ (i\geq 1\ \textit{un nombre entier}) \tag{4.2.3}$$

soit vérifiée *pour tout z vérifiant $|z|=r_m\notin E_2, r_m\to+\infty$ et* $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\theta_r+\delta_r]$.

Lemme 4.2.4 ([22]) *Soient $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+...(\alpha,\ \beta$ sont des nombres réels, $|\alpha|+|\beta|\neq 0)$ un polynôme de dégré $n\geq 1$ et $A(z)\,(\not\equiv 0)$ une fonction méromorphe avec $\sigma(A)<n$. Posons $f(z)=A(z)e^{P(z)}$, $z=re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta)=\alpha\cos(n\theta)-\beta\sin(n\theta)$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble $E_3\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\backslash H$ et $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$, $r\to+\infty$, on ait*

(i) *Si $\delta(P,\theta)>0$, alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}\leq\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \tag{4.2.4}$$

(ii) *Si $\delta(P,\theta)<0$, alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}\leq\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \tag{4.2.5}$$

où $H=\left\{\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right):\delta(P,\theta)=0\right\}$.

Lemme 4.2.5 ([18]) *Soient $\varphi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ et $\psi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ des fonctions monotones non décroissantes telles que $\varphi(r)\leq\psi(r)$ pour tout $r\notin E_4\cup[0,1]$, où $E_4\subset(1,+\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\alpha>1$ une constante donnée. Alors il existe $r_0=r_0(\alpha)>0$ tel que $\varphi(r)\leq\psi(\alpha r)$ pour tout $r>r_0$.*

Lemme 4.2.6 ([15]) *Soient $k \geq 2$ un entier et $A_0(z)$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Soient $\rho = \max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}$ et f une solution méromorphe dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \tag{4.2.6}$$

Alors $\sigma_2(f) \leq \rho$.

4.3 Preuve du Théorème 4.1.3

Montrons d'abord que toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.1.4) est d'ordre $\sigma(f) \geq n$.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.1.4) d'ordre $\sigma(f) < n$. Ecrivons l'équation (4.1.4) sous la forme :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(A_j(z) e^{P_j(z)} + B_j(z) e^{Q_j(z)}\right) f^{(j)} = -f^{(k)}, \tag{4.3.1}$$

où $A_j(z) f^{(j)}, B_j(z) f^{(j)}$, $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\sigma\left(A_j f^{(j)}\right) < n$, et $\sigma\left(B_j f^{(j)}\right) < n$, $A_s f^{(s)} \not\equiv 0$ et $B_s f^{(s)} \not\equiv 0$. En effet, si $A_s f^{(s)} \equiv 0$, ou $B_s f^{(s)} \equiv 0$, alors $f^{(s)} \equiv 0$ et donc f doit être un polynôme de degré inférieur à s. C'est une contradiction.

Si$(\theta_s \neq \phi_s)$ ou $(\theta_s = \phi_s$ et **(i)** $|a_{n,s}| < (1-\beta)|b_{n,s}|)$, alors $\deg(Q_s(z) - P_s(z)) = n$, $\deg(Q_s(z) - Q_j(z)) = n$ et $\deg(Q_s(z) - P_j(z)) = n$. D'où d'après (4.3.1) et le Lemme 4.2.1, on obtient que $\sigma(-f^{(k)}) = n$ et donc $\sigma(f) = n$. C'est une contradiction.

Si $\theta_s = \phi_s$ et **(ii)** $|b_{n,s}| < (1-\alpha)|a_{n,s}|$, alors $\deg(P_s(z) - Q_s(z)) = n$, $\deg(P_s(z) - P_j(z)) = n$ et $\deg(P_s(z) - Q_j(z)) = n$. D'où d'après (4.3.1) et le Lemme 4.2.1, on obtient que $\sigma(-f^{(k)}) = n$ et donc $\sigma(f) = n$. C'est une contradiction. Donc toute solution méromorphe transcendante f est d'ordre $\sigma(f) \geq n$.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.4). D'après le Lemme 4.2.2, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq B\,[T(2r,f)]^{j+1} \;\; (0 \leq i < j \leq k) \tag{4.3.2}$$

D'après (4.1.4), les pôles de f peuvent se produire seulement par les pôles de $A_j(z), B_j(z)$, $(j = 0, ..., k-1)$. Remarquons que les pôles de f sont de multiplicité uniformément bornée. Alors $\lambda(1/f) \leqslant \max\{\sigma(A_j), \sigma(B_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$. D'après le Théorème de Factorisation de Hadamard, f peut s'écrire sous la forme : $f(z) = g(z)/d(z)$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières avec $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda(1/f) < n \leq \sigma(f) = \sigma(g)$. Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, soit $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|g(z_r)| = M(r,g)$. D'après le Lemme 4.2.3, il existe une constante $\delta_r\,(>0)$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}, r_m \to +\infty$ et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq r_m^{2i} \;\; (i = s, k) \tag{4.3.3}$$

soit vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin E_2, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$.

Cas 1. Supposons que $\theta_s \neq \phi_s$. Pour tout $\theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]/H_1 \cup H_2$, on a

$$\delta(P_s,\theta) \neq 0,\;\; \delta(Q_s,\theta) \neq 0 \text{ et } \delta(P_s,\theta) > \delta(Q_s,\theta) \text{ ou } \delta(P_s,\theta) < \delta(Q_s,\theta),$$

où $H_1 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_s,\theta) \text{ ou } \delta(Q_s,\theta) = 0\}$ et $H_2 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_s,\theta) = \delta(Q_s,\theta)\}$. Posons $\delta_1 = \delta(P_s,\theta)$ et $\delta_2 = \delta(Q_s,\theta)$.

Cas 1.1. $\delta_1 > \delta_2$. Divisons aussi notre preuve en trois cas :

(a) $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Posons $\delta_3 = \max\{\delta_2, \delta(P_j,\theta) : j \neq s\}$. Alors $0 < \delta_3 < \delta_1$. D'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (\delta_1 - \delta_3)/(\delta_1 + \delta_3))$ et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]/H_1 \cup H_2$, on a

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\}, \tag{4.3.4}$$

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r^n\} \;\; (j \neq s) \tag{4.3.5}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r^n\}\,(j = 0, 1, ..., k-1). \tag{4.3.6}$$

De (4.1.4), il vient que

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| + \left(\left|A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right| + \left|B_{k-1}(z)\, e^{Q_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+ ... + \left(\left|A_{s+1}(z)e^{P_{s+1}(z)}\right| + \left|B_{s+1}(z)\, e^{Q_{s+1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+ \left(\left|A_{s-1}(z)e^{P_{s-1}(z)}\right| + \left|B_{s-1}(z)\, e^{Q_{s-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+ ... + \left(\left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right| + \left|B_0(z)\, e^{Q_0(z)}\right|\right)\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| + \left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right|. \tag{4.3.7}$$

En substituant (4.3.2) $-$ (4.3.6) dans (4.3.7), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus (H_1 \cup H_2)$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \leq M_1 r_m^{2s} \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta_3 r_m^n\}\,[T(2r_m, f)]^{k+1}, \tag{4.3.8}$$

où $M_1\,(> 0)$ est une constante.

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.3.8), on obtient que $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

(b) $\delta_1 > 0 > \delta_2$. D'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (1-\alpha)/(1+\alpha))$ et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1 \cup H_2$, on a (4.3.4),

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha_j\delta_1 r^n\} \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta_1 r^n\} \;\; (j \neq s) \tag{4.3.9}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_j,\theta)r^n\} < 1 \;\; (j = 0, 1, ..., k-1). \tag{4.3.10}$$

En substituant (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4), (4.3.9) et (4.3.10) dans (4.3.7), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus (H_1 \cup H_2)$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \leq M_2 r_m^{2s} \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta_1 r_m^n\}\,[T(2r_m, f)]^{k+1}, \tag{4.3.11}$$

où $M_2\,(> 0)$ est une constante.

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.3.11), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

(c) $0 > \delta_1 > \delta_2$. Posons $\gamma = \min\left\{\alpha_j, \beta_j : j \neq s\right\}$. Alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < 1)$ et tout z vérifiant $|z| = r \in [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1 \cup H_2$, on a

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\gamma\delta_1 r^n\} \tag{4.3.12}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\gamma\delta_1 r^n\}\,(j = 0, 1, ..., k-1)\,. \tag{4.3.13}$$

De (4.1.4), il vient que

$$\begin{aligned} -1 = &\left(A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)} + B_{k-1}(z)\,e^{Q_{k-1}(z)}\right)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} \\ &+ ... + \left(A_0(z)e^{P_0(z)} + B_0(z)\,e^{Q_0(z)}\right)\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

En substituant (4.3.1), (4.3.2), (4.3.12) et (4.3.13) dans (4.3.14), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus (H_1 \cup H_2)$, on obtient que

$$1 \leq M_3 r_m^{2k} \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\gamma\delta_1 r_m^n\right\}\left[T(2r_m, f)\right]^{k+1}, \tag{4.3.15}$$

où $M_3\,(> 0)$ est une constante.

Alors en utilisant le Lemme 4.2.5 et (4.3.15), on obtient que $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

Cas 1.2. $\delta_1 < \delta_2$. En utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas 1.1,** on obtient que $\sigma(f) = n$.

Cas 2. Supposons que $\theta_s = \phi_s$. Pour tout $\theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, où H_1 est défini ci-dessus, on a

$$\delta(P_s, \theta) > 0 \quad \text{ou} \quad \delta(P_s, \theta) < 0.$$

Cas 2.1. $\delta(P_s,\theta)>0$.

(i) Si $|a_{n,s}|<(1-\beta)|b_{n,s}|$, alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<[(1-\beta)|b_{n,s}|-|a_{n,s}|]/[(1+\beta)|b_{n,s}|+|a_{n,s}|])$ et tout z vérifiant $|z|=r\in[0,1]\cup E_3$, $r\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\theta_r+\delta_r]/H_1$, on a

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right|\leq\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r^n\},\tag{4.3.16}$$

$$\left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right|\geq\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_s,\theta)r^n\},\tag{4.3.17}$$

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right|\leq\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta)r^n\}\tag{4.3.18}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right|\leq\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_s,\theta)r^n\}.\tag{4.3.19}$$

De (4.1.4), il vient que

$$\begin{aligned}\left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right|\leq&\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left(A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}+\left|B_{k-1}(z)e^{Q_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\\&+...+\left(A_{s+1}(z)e^{P_{s+1}(z)}+\left|B_{s+1}(z)e^{Q_{s+1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\\&+\left(A_{s-1}(z)e^{P_{s-1}(z)}+\left|B_{s-1}(z)e^{Q_{s-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\\&+\left(\left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right|+\left|B_0(z)e^{Q_0(z)}\right|\right)\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right|.\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

En substituant $(4.3.1)$, $(4.3.2)$ et $(4.3.16)-(4.3.19)$ dans $(4.3.20)$, tout z vérifiant $|z|=r_m\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_3$, $r_m\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\theta_r+\delta_r]\setminus H_1$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_s,\theta)r_m^n\}$$

$$\leq M_4r_m^{2s}\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r_m^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_s,\theta)r_m^n\}\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1},\tag{4.3.21}$$

où $M_4\,(>0)$ est une constante.

De (4.3.21), il vient que

$$\exp\{\gamma_1 r_m^n\} \leq M_4 r_m^{2s+1} \left[T(2r_m, f)\right]^{k+1}, \tag{4.3.22}$$

où

$$\gamma_1 = (1-\varepsilon)\delta(Q_s,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta) - (1+\varepsilon)\beta\delta(Q_s,\theta). \tag{4.3.23}$$

Comme $0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|b_{n,s}| - |a_{n,s}|] / [(1+\beta)|b_{n,s}| + |a_{n,s}|], \theta_s = \phi_s$ et $\cos(\theta_s + n\theta) > 0$, alors

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= [1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,\delta(Q_s,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta)\\ &= [1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,|b_{n,s}|\cos(\theta_s+n\theta) - (1+\varepsilon)\,|a_{n,s}|\cos(\theta_s+n\theta)\\ &> \frac{(1-\beta)|b_{n,s}| - |a_{n,s}|}{2}\cos(\theta_s+n\theta) > 0. \end{aligned}\tag{4.3.24}$$

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.3.24), on obtient que $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si $|b_{n,s}| < (1-\alpha)|a_{n,s}|$, alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné ($0 < 2\varepsilon < [(1-\alpha)|a_{n,s}| - |b_{n,s}|] / [(1+\alpha)|a_{n,s}| + |b_{n,s}|]$) et z vérifiant $|z| = r \in [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on a

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta)\, r^n\} \tag{4.3.25}$$

et

$$\left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_s,\theta) r^n\}, \tag{4.3.26}$$

En substituant (4.3.1), (4.3.2), (4.3.19), (4.3.20), (4.3.25), et (4.3.26) dans (4.3.20), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus H_1$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r_m^n\}$$

$$\leq M_5 r_m^{2s}\exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta)r_m^n\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_s,\theta)r_m^n\}\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}, \qquad (4.3.27)$$

où $M_5\,(>0)$ est une constante.

De (4.3.27), il vient que

$$\exp\{\gamma_2 r_m^n\}\leq M_5 r^{2s+1}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}, \qquad (4.3.28)$$

où

$$\gamma_2=(1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta)-(1+\varepsilon)\delta(Q_s,\theta)-(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta). \qquad (4.3.29)$$

Comme $0<2\varepsilon<((1-\alpha)\,|a_{n,s}|-|b_{n,s}|)\,/\,[(1+\alpha)\,|a_{n,s}|+|b_{n,s}|]\,,\theta_s=\phi_s$ et $\cos(\theta_s+n\theta)>0$, alors

$$\gamma_2=\{(1-\alpha)\,|a_{n,s}|-|b_{n,s}|-\varepsilon\left[(1+\alpha)\,|a_{n,s}|+|b_{n,s}|\right]\}\cos(\theta_s+n\theta)$$

$$>\frac{(1-\alpha)\,|a_{n,s}|-|b_{n,s}|}{2}\cos(\theta_s+n\theta)>0. \qquad (4.3.30)$$

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.3.28), on obtient que $\sigma_2\,(f)\geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2\,(f)=n$.

Cas 2.2. $\delta\,(P_s,\theta)<0$. Comme $\theta_s=\phi_s$ alors $\delta\,(Q_s,\theta)<0$. En utilisant le même raisonnement que celui dans le **cas1.1(c)**, on obtient que $\sigma\,(f)=n$.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.4

En utilisant des arguments similaires à la démonstration du Théorème 4.1.3, nous pouvons montrer que toute solution méromorphe transcendante f de léquation (4.1.4) est d'ordre $\sigma\,(f)\geq n$.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.4). D'après le Lemme 4.2.2, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on a (4.3.2). D'après (4.1.4), les pôles de f peuvent se produire seulement par les pôles de $A_j(z), B_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$**.** Remarquons que les pôles de f sont de multiplicité uniformément bornée**.** Donc $\lambda(1/f) \leqslant \max\{\sigma(A_j), \sigma(B_j) : j = 0, \cdots, k-1\} < n$. D'après le Théorème de Factorisation de Hadamard, on peut écrire f sous la forme $f(z) = g(z)/d(z)$**,** où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières avec $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda(1/f) < n \leq \sigma(f) = \sigma(g)$. Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, soit $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|g(z_r)| = M(r, g)$. D'après le Lemme 4.2.3, il existe une constante $\delta_r (> 0)$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}, r_m \to +\infty$ et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation (4.3.3) soit vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin E_2, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$.

Posons $a_{n,s} = \left|a_{n,s}\right| e^{i\theta_s}$, $b_{n,s} = |b_{n,s}| e^{i\phi_s}$, θ_s, $\phi_s \in [0, 2\pi)$.

Supposons que $a_{n,s}$ est un nombre réel tel que $(1-c)a_{n,s} < b$; c'est à dire que $\theta_s = \pi$.

Cas 1. Supposons que $\theta_s \neq \phi_s$. Posons $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(Q_s, \theta) = 0\}$ et $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = \delta(Q_s, \theta)\}$. Pour tout $\theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1 \cup H_2$, on a

$$\delta(P_s, \theta) \neq 0, \ \delta(Q_s, \theta) \neq 0 \text{ et } \delta(P_s, \theta) > \delta(Q_s, \theta) \text{ ou } \delta(P_s, \theta) < \delta(Q_s, \theta),$$

Posons $\delta_1 = \delta(P_s, \theta)$ et $\delta_2 = \delta(Q_s, \theta)$. Comme $(1-\alpha)a_{n,s} < b$, on a $\left|b_{n,j}\right| < \left|a_{n,s}\right| (j \neq s)$.

Cas 1.1. $\delta_1 > \delta_2$**.**
Si **(a)** $\delta_1 > \delta_2 > 0$ ou **(b)** $\delta_1 > 0 > \delta_2$, il s'ensuit que $0 < \delta(Q_j, \theta) < \delta_1$ $(j \neq s)$. En utilisant le même raisonnement que celui dans la démonstration du **cas 1.1(a)** du Théorème 4.1.3, on obtient que $\sigma_2(f) = n$.

Si **(c)** $0 > \delta_1 > \delta_2$, alors en utilisant le même raisonnement que celui dans la démonstration du **cas 1.1(c)** du Théorème 4.1.3, on obtient que $\sigma_2(f) = n$.

Cas 1.2. $\delta_2 > \delta_1$**.** Divisons aussi notre preuve en trois cas :
(a). $\delta_2 > \delta_1 > 0$, on a $0 < \delta(Q_j, \theta) < \delta_1 (j \neq s)$. Alors d'après le Lemme 2.2.4, pour tout

ε donné $(0 < 2\varepsilon < (\delta_2 - \delta_1) / (\delta_2 + \delta_1))$ et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on a

$$\left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_2 r^n\}, \tag{4.4.1}$$

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\} \;\; (j = 0, 1, ..., k-1) \tag{4.4.2}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\} \;\; (j \neq s) \,. \tag{4.4.3}$$

En substituant (4.3.2), (4.3.3), (4.4.1) , (4.4.2) et (4.4.3) dans (4.3.20), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1 \cup H_2$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_2 r_m^n\} \leq M_1 r_m^{2s} \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \left[T(2r_m, f)\right]^{k+1}, \tag{4.4.4}$$

où $M_1\,(> 0)$ est une constante.

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.4.4), on obtient que $\sigma_2\,(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2\,(f) = n$.

(b). $\delta_2 > 0 > \delta_1$, on a $\delta(P_j, \theta) < 0$ et $\delta(Q_j, \theta) < 0\,(j \neq s)$. Alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < 1)$ et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on a (4.4.1)

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta) r^n\} < 1 \;\; (j = 0, 1, ..., k-1) \tag{4.4.5}$$

et

$$\left|B_j(z)e^{Q_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_j,\theta) r^n\} < 1 \;\; (j \neq s) \,. \tag{4.4.6}$$

En substituant (4.3.2), (4.3.3) , (4.4.1), (4.4.5) et (4.4.6) dans (4.3.20), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1 \cup H_2,$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_2 r_m^n\} \leq M_2 r_m^{2s} \left[T(2r_m, f)\right]^{k}, \tag{4.4.7}$$

où $M_2\,(>0)$ est une constante.

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.4.7), on obtient $\sigma_2\,(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2\,(f) = n$.

(c). $0 > \delta_2 > \delta_1$. En utilisant le même raisonnement que celui dans la démonstration du **cas 1.1(c)** du Théorème 4.1.3, on obtient que $\sigma_2\,(f) = n$.

Cas 2. Supposons que $\theta_s = \phi_s$, alors $\theta_s = \phi_s = \pi$. Pour tout $\theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]\,/H_1$, où H_1 est défini ci-dessus, on a

$$\delta\,(P_s, \theta) > 0 \text{ or } \delta\,(P_s, \theta) < 0.$$

Cas 2.1. $\delta\,(P_s, \theta) > 0$**.** On a $\delta\,(Q_s, \theta) = -\,|b_{n,s}|\cos\,(n\theta) > 0,\ \delta(P_j, \theta) > 0$ et $\delta(Q_j, \theta) > 0\,(j \neq s)$. Supposons que $|a_{n,s}| \leq |b_{n,s}|$. Alors comme $a_{n,s} \neq b_{n,s}$ et $\theta_s = \phi_s$, il s'ensuit que $|a_{n,s}| < |b_{n,s}|$. D'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < (|b_{n,s}| - |a_{n,s}|)\,/\,(|b_{n,s}| + |a_{n,s}|))$ et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]\,/H_1$, on a (4.3.18),

$$\left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta\,(Q_s, \theta)\,r^n\}, \tag{4.4.8}$$

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta\,(P_s, \theta)\,r^n\} \tag{4.4.9}$$

et

$$\begin{aligned}\left|B_j\,(z)\,e^{Q_j(z)}\right| &\leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q_j, \theta)r^n\} \qquad (4.4.10)\\ &\leq \exp\{(1+\varepsilon)br^n\cos\,(n\theta)\}\,(j \neq s)\end{aligned}$$

De (4.4.8) et (4.4.9), il vient que

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)} + B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \geq \left|B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| - \left|A_s(z)e^{P_s(z)}\right|$$

$$\geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_s, \theta)r^n\} - \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_s, \theta)r^n\}$$

$$\geq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_s, \theta)r^n\}\,[\exp\{\gamma_1 r^n\} - 1]\,, \tag{4.4.11}$$

où

$$\gamma_1 = (1-\varepsilon)\delta(Q_s,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta).$$

Comme

$$0 < \varepsilon < \left(|b_{n,s}| - |a_{n,s}|\right)/2\left(|b_{n,s}| + |a_{n,s}|\right),$$

alors

$$\gamma_1 = -(1-\varepsilon)\,|b_{n,s}|\cos(n\theta) + (1+\varepsilon)\,|a_{n,s}|\cos(n\theta)$$

$$= -\left(|b_{n,s}| - |a_{n,s}| - \varepsilon\left(|b_{n,s}| + |a_{n,s}|\right)\right)\cos(n\theta)$$

$$> -\frac{|b_{n,s}| - |a_{n,s}|}{2}\cos(n\theta) > 0.$$

Comme $\gamma_1 > 0$ et d'après (4.4.11), alors on a

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)} + B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \geq (1-o(1))\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r^n\}\exp\{\gamma_1 r^n\}. \tag{4.4.12}$$

De (4.1.4), il vient que

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)} + B_s(z)e^{Q_s(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| + \left(\left|A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right| + \left|B_{k-1}(z)e^{Q_{k-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+ ... + \left(\left|A_{s+1}(z)e^{P_{s+1}(z)}\right| + \left|B_{s+1}(z)\,e^{Q_{s+1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+\left(\left|A_{s-1}(z)e^{P_{s-1}(z)}\right| + \left|B_{s-1}(z)\,e^{Q_{s-1}(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+ ... + \left(\left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right| + \left|B_0(z)\,e^{Q_0(z)}\right|\right)\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|. \tag{4.4.13}$$

En substituant (4.3.2), (4.3.3), (4.3.18), (4.4.10) et (4.4.12) dans (4.4.13), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]/H_1 \cup H_2$, on obtient que

$$(1-o(1))\exp\{\gamma_2 r_m^n\} \leq M_3 r_m^{2s}\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}, \tag{4.4.14}$$

où $M_3\,(>0)$ est une constante et

$$\gamma_2 = -(1+\varepsilon)\left[(1-\alpha)\,|a_{n,s}| + b\right]\cos(n\theta) + \gamma_1.$$

Comme

$$\gamma_1 > 0, \cos(n\theta) < 0, \delta(P_s, \theta) = -|a_{n,s}|\cos(n\theta), (1-\alpha)\, a_{n,s} < b \quad \text{et} \quad b < 0,$$

alors

$$\gamma_2 > -(1+\varepsilon)\,[|b| + b]\cos(n\theta) + \gamma_1 = \gamma_1 > 0.$$

Alors en utilisant le Lemme 4.2.5 et (4.4.14), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2.2. $\delta(P_s, \theta) < 0$**.** En utilisant le même raisonnement que celui dans la démonstration du **cas 1.1(c)** du Théorème 4.1.3, on obtient que $\sigma_2(f) = n$.

4.5 Preuve du Théorème 4.1.5

En utilisant des arguments similaires de la démonstration du Théorème 4.1.3, nous pouvons montrer que toute solution méromorphe transcendante f de léquation (4.1.4) est d'ordre $\sigma(f) \geq n$.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (4.1.4).
D'après le Lemme 4.2.2, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on ait (4.3.2). D'après (4.1.4), les pôles de f peuvent seulement produire que par les pôles de $A_j(z)$, $B_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$**.** Remarquons que les pôles de f sont de multiplicité uniformément bornée**.** Donc $\lambda(1/f) \leqslant \max\{\sigma(A_j), \sigma(B_j) : j = 0, \cdots, k-1\} < n$. D'après le Théorème de Factorisation de Hadamard, on peut écrire f sous la forme : $f(z) = g(z)/d(z)$**,** où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières avec $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda(1/f) < n \leq \sigma(f) = \sigma(g)$. Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, soit $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|g(z_r)| = M(r, g)$. D'après le Lemme 4.2.3, il existe une constante $\delta_r (> 0)$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}, r_m \to +\infty$ et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation (4.3.3) soit vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin E_2, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$.

Posons $a_{n,s} = |a_{n,s}|\, e^{i\theta_s}$, $b_{n,s} = |b_{n,s}|\, e^{i\phi_s}$, θ_s, $\phi_s \in [0, 2\pi)$.
Supposons que $a_{n,s}$ et $b_{n,s}$ sont des nombres réels tels que $(1-\beta)\, b_{n,s} - b < a_{n,s} < 0$ ou $(1-\alpha)\, a_{n,s} - b < b_{n,s} < 0$; c'est à dire que $\phi_s = \theta_s = \pi$.

Pour tout $\theta \in [0, 2\pi)$, on a $\delta(P_s, \theta) = -\left|a_{n,s}\right| \cos(n\theta), \delta(Q_s, \theta) = -\left|b_{n,s}\right| \cos(n\theta)$, $\delta(P_j, \theta) = \alpha_j \delta(P_s, \theta) + \beta_j \delta(Q_s, \theta)$ et $\delta(Q_j, \theta) = -\left|b_{n,j}\right| \cos(n\theta)\ (j \neq s)$.
Pour tout $\theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on a

$$\delta(P_s, \theta) > 0 \text{ ou } \delta(P_s, \theta) < 0,$$

où $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(Q_s, \theta) = 0\}$.

Cas 1. $\delta(P_s, \theta) > 0$.
(i) Si $(1-\beta) b_{n,s} - b < a_{n,s} < 0$, alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné ($0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|b_{n,s}| - |a_{n,s}| + b] / [(1+\beta)|b_{n,s}| + |a_{n,s}| - b]$) et tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on a (4.4.8) $-$ (4.4.10) et

$$\left|A_j(z) e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s, \theta) r^n\} \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta(Q_s, \theta) r^n\}. \tag{4.5.1}$$

En substituant (4.3.2), (4.3.3), (4.4.8)$-$(4.4.10) et (4.5.1) dans (4.3.20), pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3, r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] / H_1$, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_s, \theta) r_m^n\}$$

$$\leq M_1 r_m^{2s} \exp\{(1+\varepsilon)\left[\delta(P_s, \theta) + \beta\delta(Q_s, \theta) + b\cos(n\theta)\right] r_m^n\} \left[T(2r_m, f)\right]^{k+1}, \tag{4.5.2}$$

où $M_1\ (> 0)$ est une constante.

De (4.5.2), il vient que

$$\exp\{\gamma_3 r_m^n\} \leq M_1 r_m^{2s} \left[T(2r_m, f)\right]^{k+1}, \tag{4.5.3}$$

où

$$\gamma_3 = (1-\varepsilon)\delta(Q_s, \theta) - (1+\varepsilon)\left[\delta(P_s, \theta) + \beta\delta(Q_s, \theta) + b\cos(n\theta)\right].$$

Comme $\cos(n\theta) < 0$ et $0 < 2\varepsilon < [(1-\beta)|b_{n,s}| - |a_{n,s}| + b] / [(1+\beta)|b_{n,s}| + |a_{n,s}| - b]$, alors on a

$$\gamma_3 = [1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,\delta(Q_s,\theta)-(1+\varepsilon)\,[\delta(P_s,\theta)+b\cos(n\theta)]$$

$$= -\,[1-\beta-\varepsilon(1+\beta)]\,|b_{n,s}|\cos(n\theta)+(1+\varepsilon)\,[|a_{n,s}|-b]\cos(n\theta)$$

$$= -\{(1-\beta)\,|b_{n,s}|-|a_{n,s}|+b-\varepsilon\,[(1+\beta)\,|b_{n,s}|+|a_{n,s}|-b]\}\cos(n\theta)$$

$$> -\frac{[(1-\beta)\,|b_{n,s}|-|a_{n,s}|+b]}{2}\cos(n\theta)>0. \tag{4.5.4}$$

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.5.3), on obtient que $\sigma_2(f)\geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f)=n$.

(ii) Si $(1-\alpha)a_{n,s}-b<b_{n,s}<0$, alors d'après le Lemme 4.2.4, pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<[(1-\alpha)\,|a_{n,s}|-|b_{n,s}|+b]\,/\,[(1+\alpha)\,|a_{n,s}|+|b_{n,s}|-b])$ et tout z vérifiant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$, $r\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\theta_r+\delta_r]\,/H_1$, on a (4.3.25) et (4.3.26).
En substituant (4.3.2), (4.3.3) et (4.4.8) − (4.4.10) dans (4.3.20), pour tout z vérifiant $|z|=r_m\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_3, r_m\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\theta_r+\delta_r]\,/H_1$,, on obtient que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r_m^n\}$$

$$\leq M_2r_m^{2s}\exp\{(1+\varepsilon)\,[\delta(Q_s,\theta)+\alpha\delta(P_s,\theta)+b\cos(n\theta)]\,r_m^n\}\,[T(2r_m,f)]^{k+1}, \tag{4.5.5}$$

où $M_2\,(>0)$ est une constante.

De (4.5.5), il vient que

$$\exp\{\gamma_4r_m^n\}\leq M_2r_m^{2s}\,[T(2r,f)]^{k+1}, \tag{4.5.6}$$

où

$$\gamma_4=(1-\varepsilon)\,\delta(P_s,\theta)-(1+\varepsilon)\,[\delta Q_s,\theta)+\alpha\delta\,(P_s,\theta)+b\cos(n\theta)] \tag{4.5.7}$$

Comme $\cos(n\theta)<0$ et $0<2\varepsilon<[(1-\alpha)\,|a_{n,s}|-|b_{n,s}|+b]\,/\,[(1+\alpha)\,|a_{n,s}|+|b_{n,s}|-b]$, alors on a

$$\gamma_4 = -\{(1-\alpha)|a_{n,s}| - |b_{n,s}| + b - \varepsilon[(1+\alpha)|a_{n,s}| + |b_{n,s}| - b]\}\cos(n\theta)$$

$$> -\frac{[(1-\alpha)|a_{n,s}| - |b_{n,s}| + b]}{2}\cos(n\theta) > 0. \tag{4.5.8}$$

Alors d'après le Lemme 4.2.5 et (4.5.6), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$. En utilisant le Lemme 4.2.6, on déduit que $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. $\delta(P_s, \theta) < 0$**.** En utilisant le même raisonnement que celui dans la démonstration du **cas 1.1(a)** du Théorème 4.1.3, on obtient que $\sigma_2(f) = n$.

Conclusion

Plusieurs chercheurs([1], [7] , [9], [10], [16], [19], [31], [35], [34]) se sont intéressés à l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre dont les coefficients sont des fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini.
Certains de ces résultats ont été plus tard génériisés pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur ([11] , [20], [21]) . D'autres résultats ([2] , [5] , [22]) ont été réalisés conçernant les équations différentielles linéaires avec des coefficients méromorphes.

Dans cette thèse, on a démontré quelques résultats concernant les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions méromorphes. On a étudié l'hyper-ordre des solutions méromorphes d'ordre infini de ces équations.

Récemment, les auteurs dans ([36]) ont aussi étudié la croissance et l'oscillation des solutions méromorphes de ces équations différentielles mais en considérant le cas non homogène.

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J., 10 (1981), Special Issue, 1–17.

[2] M. Andasmas and B. Belaïdi, *On the order and hyper-order of meromorphic solutions to higher order linear differential equations*, Hokkaido Math. J., 42 (2013), 357-383.

[3] H. Beddani and K. Hamani, Growth of meromorphic solutions of some linear differential equations, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 46 (2017) p. 487–512

[4] B. Belaïdi, *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations*, Mat. Vesnik, 60 (2008), no. 4, 233-246.

[5] B. Belaïdi, *On the meromorphic solutions of linear differential equations*, Jrl Syst Sci & Complexity.20, 41-46 (2007).

[6] B. Belaïdi, H Habib Relations between mermorphic solutions and their derivatives of differential equations and small functions. Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. 6(LXIV)(2015), no. 1, 35-57

[7] B. Belaïdi, Fonctions entières et théorie de Nevanlinna, Editions AL Djazair, 2017.

[8] Z. X. Chen, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Analysis, 14 (1994), no. 4, 425-438.

[9] Z.-X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci. China Ser., A 45 (2002), no. 3, 290-300.

[10] Z. X. Chen, *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta. Math. Sinica Engl. Ser., 18 (1) (2002), 79-88.

[11] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class oh higher order differential equations*, Acta Mathematica Scientia, 24B (1)(2004), 52-60.

[12] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *The growth of solutions of higher order differential equations*, Southeast Asian Bull. Math., 27 (2004), 995-1004.

[13] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and a fixed points of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Acta. Mathematica Sinica, Engl Ser., 21 (4), 753-764 (2005).

[14] Z. X. Chen, *The zero, pole and orders of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients*, Kodai Math. J., 19 (1996), 341-354.

[15] W. J. Chen and J. F. Xu, *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, E.J. Qualitative Theory of Diff. Equ., (2009),no. 1, 1-13.

[16] M. Frei, *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, Comment. Math. Helv. 35 (1961), 201-222.

[17] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc., 37 (1988), no. 1, 88–104.

[18] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 305 (1988), no. 1, 415–429.

[19] G. G. Gundersen, *On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \not\equiv 0$ of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., A 102 (1986), no. 1-2, 9–17.

[20] H. Habib and B. Belaïdi, *On the growth of solutions of some higher-order linear differential equations with entire coeffcients*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., (2011), no. 93, 1-13.

[21] H. Habib and B. Belaïdi, *Growth of solutions to higher-order linear differential equations with entire coeffcients*, Electron. J. Differ. Equ., 2014 (2014), No. 114, 1-17.

[22] K. Hamani and B. Belaïdi, *On the hyper-order of solutions of a class of higher order linear differential equations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20 (2013), 27-39.

[23] K. Hamani and B. Belaïdi, *On the hyper-order of Transcendental Meromorphic solutions of Certain Higher Order Linear Differential Equations,* Opuscula Math. 37, no. 6 (2017), 853–874

[24] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[25] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman–Valiron method.*, Canad. Math. Bull., 17 (1974), 317–358.

[26] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Willey, New-York, 1976.

[27] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differential gleichungen,* Birkhäuser, Basel-Boston,1985

[28] K. H. Kwon, *Nonexistence of finite order solutions of certain second linear differential equations*, Kodai. Math. J., 19 (1996), 378-387.

[29] K. H. Kwon, *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equation*, Bull. Korean. Math. Soc., 3, 1996, 487-496.

[30] I. Laine and S. B. Bank, *On the oxillation theory of* $f'' + Af = 0$, *where* A *is entire,* Tran. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 351-363.

[31] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa,* Kodai Math. J., 9 (1986), no. 3, 430-439.

[32] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* W. de Gruyter, New York, 1993.

[33] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974,* Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46.

[34] M. Ozawa, *On a solution of* $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$, Kodai. Math. J., 3 (1980), no. 2, 295-309.

[35] F. Peng and Z. X. Chen, *On the growth of solutions of some second-order linear differential equations,* J. Inequal. Appl., (2011), Art. ID 635604, 1-9.

[36] M. Saidani and B. Belaïdi, On The Growth of Solutions of Some Higher Order Linear Differential EquationsWith Meromorphic Coefficients, UFA Mathematical Journal, 10(2018), no.1, 115-134.

[37] J. Tu and C. F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340(1) (2008), 487-497