UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Équation différentielle abstraite du second ordre à coefficients opérateurs variables vérifiant l'hypothèse du commutateur.

Présenté par

KOUIDRI BENFREDJ Khalida

Soutenu le 26/ 06 /2012 devant le Jury

M. LIMAM Kheira	**Président**	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**
M. MEDEGHRI Ahmed	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
M. BOUZIANI Fatima	**Co-Encadreur**	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadreurs Monsieur **Medeghri Ahmed** et Madame **Bouziani Fatima**, pour leurs soutient constant, leurs encouragements, leur disponibilité et leurs conseils précieux tout au long de ce travail.

Mes remerciements et toute ma graditude à Madame **Limam Kheira** d'avoir accepté d'être dans le jury de ce mémoire et d'examiner ce travail.

Un grand merci à tout mes professeurs qui m'ont aidé tout au long de mon cursus universitaire.

Naturellement, je tiens à remercier ma famille en particulier **mon père** et **ma mère** pour leurs soutiens et leurs patience. Je remercie aussi mes frères **Mohamed** et **Hamid** et toutes mes sœurs.

Évidement je n'oublie pas de citer mes amis de toujours qui m'ont encouragé et m'ont aidé.

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de l'équation différentielle abstraite du second ordre avec conditions aux limites suivante

$$(P)\begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x) \ ; \omega > 0,\ x \in \left]0,1\right[\\ u(0) = d_0 \\ u(1) = d_1 \end{cases}$$

où E est un espace de Banach complexe, $f \in C([0,1]; E)$ et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D_{A(x)}$ non nécessairement denses dans E.

On suppose que la famille $(A(x))_{x\in[0,1]}$ vérifie les deux hypothèses suivantes

(H_1) : $\exists\lambda > 0,\ \exists K > 0 : \forall x \in [0,1],\ \forall z \geq \lambda,\ (A(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et

$$\left\|(A(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{K}{|z|}.$$

(H_2) : $\exists m \in \mathbb{N}^*, K, \alpha_i, \rho_i > 0\ (i = 1, ...m) : \forall x \in [0,1],\ \forall z \geq \lambda$

$$\begin{aligned} &\left\|(A(x) - \lambda I)(A(x) - zI)^{-1}\left[(A(x) - \lambda I)^{-1} - (A(s) - \lambda I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\ \leq\ & K\sum_{i=1}^{m} \frac{|x-s|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}, \end{aligned}$$

avec $\alpha_i + 2\rho_i - 2 > 0$.

On s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte de ce problème.

Ce travail a été fait dans la thèse de Labbas [9] et a été traité dans un cadre de sommes d'opérateurs de Daprato-Grisvard [5] avec $d_0 = d_0 = 0$ et $f(0) = f(1) = 0$.

Les outils nécessaires pour réaliser ce travail sont le calcul classique de Dunford et certains espaces d'interpolation.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le chapitre 1 est consacré aux rappels et définitions de quelques notions générales sur les opérateurs linéaires fermés et les espaces d'interpolation réels du type $D_{A(\cdot)}(\alpha,\infty)$ caractérisés par la résolvante. Il contient aussi quelques lemmes techniques avec leurs preuves très utiles pour la suite de ce travail.
Au chapitre 2 on fait l'étude du problème dans un cas particulier où $A(x)$ ne dépend pas de x sous l'hypothèse (H_1).
Dans le chapitre 3, on commence par l'étude du problème (P) sous les hypothèses (H_1) et (H_2). Pour trouver l'expression de la solution on fait un raisonnement heuristique en supposant l'existence d'une solution stricte du problème donné (i.e qui vérifie $u(\cdot)\in D_{A(\cdot)}$ et $u(\cdot)\in C^2([0,1];E)\cap C\left([0,1];D_{A(\cdot)}\right)$) et on obtient sa représentation. On cherche ensuite les conditions nécessaires de compatibilité entre d_0 et f pour avoir une telle solution. On démontre à la fin que c'est la solution du problème (P) par l'étude du problème approché en utilisant les approximants de Yosida.
Les résultats essentiels de ce travail sont donnés par les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.1 *Soient $d_0\in D_{A(0)}$, $d_1\in D_{A(1)}$ et $f\in C^{\beta}([0,1];E)$. Alors sous les hypothèses (H_1) et (H_2), u est une solution stricte du problème (P) ssi*

$$\begin{cases} f(0)-A(0)\,d_0\in\overline{D_{A(0)}} \\ f(1)-A(1)\,d_1\in\overline{D_{A(1)}} \end{cases}.$$

Théorème 0.2 *Soient $d_0\in D_{A(0)}$, $d_1\in D_{A(1)},\beta$ fixé dans $]0,\min\alpha_i+2\rho_i-2]$ et $f\in C^{\beta}([0,1];E)$ tels que*

$$\begin{cases} f(0)-A(0)\,d_0\in D_{A(0)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right), \\ f(1)-A(1)\,d_1\in D_{A(1)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right). \end{cases}$$

Alors sous les hypothèses (H_1) et (H_2) le problème (P) admet une unique solution u vérifiant :

1. $u(\cdot)\in C^2([0,1];E)\cap C\left([0,1];D_{A(\cdot)}\right)$.
2. $A(\cdot)\,u(\cdot)\in C^{\beta}([0,1];E)$.
3. $u''(\cdot)\in C^{\beta}([0,1];E)$.

Le premier théorème donne des conditions de compatibilité sur les données pour avoir une solution stricte et le deuxième c'est le résultat d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution.
Finalement au chapitre 4 on donne un exemple concret pour illustrer les résultats des chapitres précédents.

Chapitre 1

Rappels et outils

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions et notions utiles par la suite.
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on définit alors les espaces suivants :

- $C(I, E)$ noté $C(E)$, l'ensemble des fonctions continues $f : I \longrightarrow E$.
- $C^\beta(I, E)$, $0 < \beta < 1$, l'ensemble des fonctions dites höldériennes tel que

$$C^\beta(I, E) = \left\{ f \in C(E) : \sup_{x,s \in I,\ x \neq s} \frac{\|f(x) - f(s)\|_E}{|x - s|^\beta} < \infty \right\}.$$

Les espaces précédents munis des normes usuelles suivantes :

$$\|f\|_{C(E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E,$$

$$\|f\|_{C^\beta(E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E + \sup_{x,s \in I,\ x \neq s} \frac{\|f(x) - f(s)\|_E}{|x - s|^\beta},$$

sont des espaces de Banach.

1.1 Les opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1 *Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$. A est dit fermé, si pour toute suite*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A),$$

telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, on a

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

A est dit fermable s'il admet une extension fermée càd

$$\left[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) : x_n \longrightarrow 0 \text{ et } Ax_n \longrightarrow y\right] \implies y = 0.$$

La plus petite extension fermée de A est notée $\overline{A}$ et s'appelle fermeture de A.

Définition 1.2 *On note $L(E)$ l'espace des applications linéaires continues sur l'espace E.*

1. *On définit l'ensemble résolvant de l'opérateur fermé A noté $\rho(A)$ par :*

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est bijective et continue de } D(A) \text{ dans } E \\ \text{et } (A - \lambda I)^{-1} \in L(E) \end{array} \right\},$$

$(A - \lambda I)^{-1}$ est alors appelée résolvante de A.

2. *On définit le spectre de A par :*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \diagup \rho(A).$$

1.2 Intégrale de Dunford

Soit A un opérateur linéaire fermé et $\sigma(A)$ son spectre.
On note $H(A)$, l'espace des fonctions à variable complexe holomorphes dans un ensemble fermé contenant $\sigma(A)$. Alors l'intégrale de Dunford est définie par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

où $f \in H(A)$ et γ une courbe fermée entourant $\sigma(A)$.

1.3 Les espaces d'interpolation

Soient $(E_0, \|\cdot\|_0)$ et $(E_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach complexes.
On munit les espaces de Banach $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ des normes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi\|_{E_0 \cap E_1} = \|\varphi\|_{E_0} + \|\varphi\|_{E_1}, \text{ si } \varphi \in E_0 \cap E_1. \\ \\ \|\varphi\|_{E_0 + E_1} = \inf\limits_{\varphi_i \in E_i} (\|\varphi_0\|_{E_0} + \|\varphi_1\|_{E_1}), \text{ si } \varphi \in E_0 + E_1. \end{array} \right.$$

Définition 1.3 *Soit $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$. On note $L_*^p(\mathbb{R}_+, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E)} = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \|u(t)\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si} \quad p \in]1, +\infty[, \\ \|u\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+, E)} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} ess \|u(t)\|_E < \infty. \end{array} \right.$$

On définit l'espace d'interpolation entre E_0 et E_1 noté $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ par :

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0, \exists u_i(t) \in E_i : \varphi = u_0(t) + u_1(t), \ i = 0, 1 \\ \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0), \ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1), \end{array} \right.$$

où d'une manière équivalente

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0, \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 : \varphi = \int_0^{+\infty} u(t) \dfrac{dt}{t}. \\ t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0), \ t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

Exemple 1.1 *Soient E un espace de Banach complexe, $\theta \in \left]0,1\right[$, $p \in [1,+\infty]$ et A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$.*

$D(A)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe suivante :

$$\forall x \in D(A), \ \|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E.$$

Si on prend $E_0 = D(A)$ et $E_1 = E$, on note

$$D_A(\theta, p) = (D(A), E)_{1-\theta,p}.$$

De plus si $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et il existe une constante $C > 0$:

$$\forall \lambda > 0, \ \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

alors l'espace $D_A(\theta, p)$ est donné par

$$D_A(\theta, p) = \left\{u \in E : t^\theta A (A - tI)^{-1} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E)\right\},$$

(voir [5]).

Dans ce cas, grâce à la propriété de réitération de Lions-Peetre [12], on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p).$$

Remarque 1.1 *Les espaces $D_A(\theta, p)$ vérifient la propriété*

$$D_A(\theta', q) \subset D_A(\theta, p), \ \theta' \in \left]0,1\right[$$

si $\theta' > \theta$ et $p, q \in [1, +\infty]$ ou $\theta' = \theta$ et $q \leq p$.

1.4 La solution stricte

On considère le problème suivant

$$(P_G) \begin{cases} u''(x) + A(x) u(x) = f(x), \ x \in \left]a,b\right[, \ b > a \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b, \end{cases}$$

où E est un espace de Banach complexe, $f \in C([a,b]; E)$, $(A(x))_{x\in[a,b]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D_{A(x)}$ non nécessairement denses dans E et u_a et u_b sont des données dans E.

1.4.1 Cas constant $A(x) = A$

Définition 1.4 *u est dite solution stricte du problème (P_G) si u vérifie (P_G) et*

$$u \in C^2([a,b];E) \cap C([a,b];D_A).$$

1.4.2 Cas variable

Définition 1.5 *u est dite solution stricte du problème (P_G) si u vérifie (P_G) et*

$$u(\cdot) \in D_{A(\cdot)},\ u \in C^2([a,b];E),\ \text{et } u(\cdot) \in C\left([a,b];D_{A(\cdot)}\right).$$

1.5 Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et $f \in L^p$, $g \in L^q$. Alors

$$fg \in L^1,$$

et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

1.6 Lemmes techniques

Dans cette section on va énoncer quelques lemmes techniques très utiles pour
la suite de ce travail.
Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$. On note Π_{θ_0} le secteur définie par

$$\Pi_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| \geq r_0 \text{ et } \theta_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \theta_0\},$$

où r_0 positif petit et $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On note aussi γ le bord de ce secteur.

Remarque 1.2 *Pour $z \in \gamma$, on a :*

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{-z}\right) = |z|^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi - \theta_0}{2}\right) = |z|^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

$\sqrt{-z}$ est la détermination principale de la racine carrée définie pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ telle que $\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$.

Lemme 1.1 *Il existe une constante $k(\theta_0) > 0$ telle que pour tout $z \in \Pi_{\theta_0}$, on a :*

$$\left|1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right| \geq k(\theta_0).$$

Preuve :

Soit $z \in \gamma$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right| &\geq 1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \\
&\geq 1-e^{-|z|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)} \\
&\geq k\left(\theta_0\right).
\end{aligned}$$

Lemme 1.2 *Pour tout $z \in \gamma$ et $x \in [0,1]$,*

$$\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\right| \leq Ke^{-(1-x)|z|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)}$$

Preuve : Soit $z \in \gamma$ et $x \in [0,1]$. on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\right| &= \left|\frac{e^{\sqrt{-z}x}-e^{-\sqrt{-z}x}}{e^{\sqrt{-z}}-e^{-\sqrt{-z}}}\right| \\
&\leq \left|e^{\sqrt{-z}x}\right|\left|\frac{1-e^{-2\sqrt{-z}x}}{e^{\sqrt{-z}}\left(1-e^{-2\sqrt{-z}}\right)}\right| \\
&\leq Ke^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}\frac{1}{\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right|} \\
&\leq Ke^{-(1-x)|z|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)}\frac{1}{k\left(\theta_0\right)} \\
&\leq Ke^{-(1-x)|z|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)},
\end{aligned}$$

d'aprés lemme 1.1.

Lemme 1.3 *Si on pose pour tout $z \in \Pi_{\theta_0}$*

$$k_{\sqrt{-z}}\left(x,s\right) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\left(1-x\right)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & si \quad 0 \leq s \leq x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\left(1-s\right)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & si \quad x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

alors, il existe une constante $K>0$ telle que :

$$\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}\left(x,s\right)\right| ds \leq \frac{K}{|z|}.$$

Preuve :

Soit $z \in \Pi_{\theta_0}$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| ds &= \int_0^x \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| ds \\
&\quad + \int_x^1 \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-s)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| ds \\
&\le \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} ds \\
&\quad + \int_x^1 \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} ds \\
&\le \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right|}\int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s ds \\
&\quad + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\left(\sqrt{-z}\right)}\left|1-e^{-2\left(\sqrt{-z}\right)}\right|}\int_x^1 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\, ds \\
&\le \frac{k e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\left(1-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right)}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}} k_{\theta_0}\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \\
&\quad + \frac{k e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}\left(1-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}\right)}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}} k\left(\theta_0\right)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \\
&\le \frac{k}{|z|} + \frac{k}{|z|} \le \frac{k}{|z|}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.4 *Il existe une constante $k>0$, telle que pour tout $z \in \gamma$ et $f \in C(E)$, on a*

$$\left\|\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(z-A)^{-1} f(s)\, ds\right\|_E \le K\frac{\|f\|_{C(E)}}{|z|^2}.$$

Preuve :

Soient $z \in \gamma$ et $f \in C(E)$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(z-A)^{-1} f(s)\, ds\right\|_E \\
\le\ & \int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| ds \left\|(z-A)^{-1}\right\|_{L(E)} \|f\|_{C(E)} \\
\le\ & K\frac{\|f\|_{C(E)}}{|z|^2},
\end{aligned}$$

et ceci en utilisant le lemme 1.3 et l'hypothèse (H_1).

Lemme 1.5 *Il existe une constante $k>0$ telle que pour chaque $z \in \gamma$ et $\alpha \in]0,1[$, on a :*

$$\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| |x-s|^\alpha\, ds \le \frac{k}{|z|^{1+\frac{\alpha}{2}}}.$$

Preuve :

Soient $z \in \gamma$ et $\alpha \in \left]0,1\right[$. Alors :

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \left|k_{.\sqrt{-z}}(x,s)\right| |x-s|^\alpha \, ds \\
\leq \; & \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x) \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} |x-s|^\alpha \, ds \\
& + \int_x^1 \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s) \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} |s-x|^\alpha \, ds \\
\leq \; & \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}s \, |x-s|^\alpha \, ds \\
& + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \int_x^1 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s) \, |s-x|^\alpha \, ds \\
\leq \; & \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \left(\int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}sds\right)^{1-\alpha} \\
& \times \left(\int_0^x \left(\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)(x-s)\, ds\right)^\alpha \\
& + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \left(\int_x^1 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\, ds\right)^{1-\alpha} \\
& \times \left(\int_x^1 \left(\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\right)(x-s)\, ds\right)^\alpha \\
\leq \; & \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \frac{\left(\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x - 1\right)^\alpha}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{\alpha+1}\left(\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x\right)^{\alpha+1}} \\
& + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \frac{\left(\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x) - 1\right)^\alpha}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{\alpha+1}\left(\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)\right)^{\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

grâce à l'inégalité de Hölder. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \left|k_{.\sqrt{-z}}(x,s)\right| |x-s|^\alpha \, ds \\
\leq \; & \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{1-\alpha} \\
& \times \left(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x - 1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2}\right)^\alpha \\
& + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{1-\alpha} \\
& \times \left(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x) - 1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2}\right)^\alpha
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{\alpha+1}\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x} + \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{\alpha+1}\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-x)}$$

car pour $x>0$,

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} \leq 1,$$

finalement on aura

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|k_{.\sqrt{-z}}(x,s)\right| |x-s|^{\alpha}\, ds &\leq \frac{Ke^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}} k(\theta_0)\, |z|^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}} \\ &\quad + \frac{Ke^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}} k(\theta_0)\, |z|^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}} \\ &\leq \frac{K}{|z|^{1+\frac{\alpha}{2}}}.\end{aligned}$$

Lemme 1.6 *Il existe une constante $K>0$ telle que pour chaque $z\in\gamma$ et $r>0$, on a*

$$|z\pm r| \geq Kr \text{ et } |z\pm r| \geq K|z|.$$

Preuve :

Pour $z\in\gamma$ et $r>0$, on a d'après :

$$|z\pm r| \geq AB = r\sin\theta_0 \geq Kr,$$

et

$$|z\pm r| \geq CD = |z|\sin\theta_0 \geq K|z|,$$

(voir Figure 1)

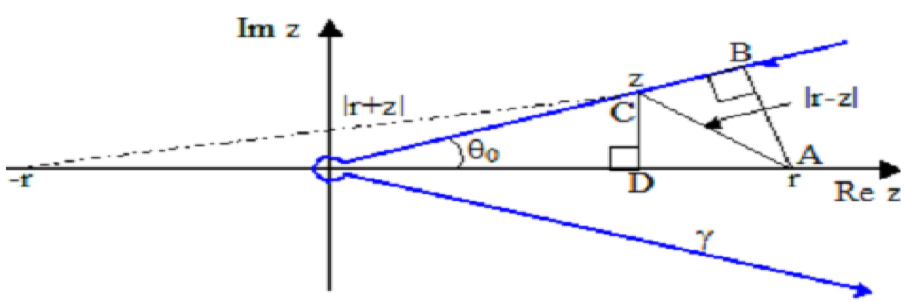

Figure 1

Lemme 1.7 *Soit $v\in\,]0,1[$. Alors il existe $K>0$ ne dépendant que de γ telle que pour chaque $r>0$, on a :*

$$\int_\gamma \frac{1}{|z\pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| \leq \frac{K}{r^{v}}.$$

Preuve :

Pour $v \in]0,1[$ et $r > 0$, on a

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| = \int_{\gamma_r} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| + \int_{\gamma\diagdown\gamma_r} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz|\,,$$

où

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_r \cup (\gamma\diagdown\gamma_r) \\ \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \leq r\} \\ \gamma\diagdown\gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \geq r\} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| &= \int_{\substack{z\in\gamma \\ |z|\leq r}} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| \leq \frac{1}{Kr}\int_0^r \frac{|dz|}{|z|^{v}} \\ &\leq \frac{1}{Kr}\left[|z|^{1-v}\right]_0^r = \frac{1}{Kr}r^{1-v} = \frac{K}{r^{v}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma\diagdown\gamma_r} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| &= \int_r^{+\infty} \frac{1}{|z \pm r|\,|z|^{v}}\,|dz| \\ &\leq \frac{1}{K}\int_r^{+\infty} \frac{1}{|z|^{1+v}}\,|dz| = \frac{1}{K}\left[\frac{|z|^{-v}}{-v}\right]_r^{+\infty} = \frac{K}{r^{v}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.
Pour plus de détails sur les lemmes précédents voir [4].

Chapitre 2

Équation du second ordre avec A constant

2.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème abstrait suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) \ ; \ x \in \left]0,1\right[\\ u(0) = d_0 \\ u(1) = d_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine D_A non nécessairement dense dans l'espace de Banach E, $d_0, d_1 \in E$ et $f \in C([0,1]; E)$.

On suppose que A vérifie l'hypothèse suivante :

(H_0) $\exists c_0 \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0 : \rho(A) \supset [-c_0^2, +\infty[$ et

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \ \forall \lambda \in \left[-c_0^2, +\infty\right[.$$

Remarque 2.1 *Dans le cas des conditions homogènes (i.e)* $d_0 = d_1 = 0$, *le problème* (2.1) *est un cas particulier de la théorie des sommes d'opérateurs développée par DaPrato-Grisvard [5].*

On se propose dans ce chapitre d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale pour la solution stricte de (2.1) lorsque le second membre f est assez régulier et d_0 et d_1 vérifient certaines conditions de compatibilité.

Remarque 2.2 *L'hypothèse* (H_0), *qui permet de définir l'opérateur* $(-A)^{1/2}$, *n'implique pas que* A *est générateur infinitésimal de semi- groupe analytique mais que* $-(-A)^{1/2}$ *l'est (voir [3]).*

Lemme 2.1 *Si l'opérateur A vérifie l'hypothèse (H_0), alors :*

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \diagup |\arg \lambda| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

où $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $r_0 > 0$ petit (voir Figure 2).

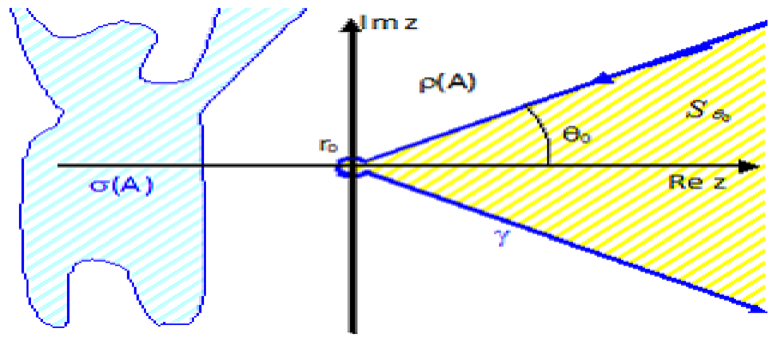

Figure 2

Preuve :

Puisque $0 \in \rho(A)$ et $\rho(A)$ est un ensemble ouvert, on a

$$\exists r_0 > 0 : B(0, r_0) \subset \rho(A).$$

Soit $x > 0$. On cherche les réels y tels que $(A - (x + iy)I)^{-1}$ existe.
En écrivant que

$$(A - (x + iy)I) = (A - xI)\left[I - iy(A - xI)^{-1}\right],$$

et en utilisant le fait que $(A - xI)^{-1}$ existe, il suffit de trouver donc les y vérifiant

$$\left\|y(A - xI)^{-1}\right\| < 1.$$

Par l'hypothèse (H_0) on a

$$\exists k > 0 : \left\|y(A - xI)^{-1}\right\| \leq k\frac{|y|}{x} < 1.$$

Si on pose $\lambda = x + iy$ et $\theta_0 = \arg \lambda$, alors on obtient que $\tan \theta_0 < \dfrac{1}{k}$ et $\theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

2.2 Construction de la solution stricte

Pour la résolution du problème (2.1), on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} v''(x) + zv(x) = f(x) \\ v(0) = d_0 \\ v(1) = d_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$.

La solution de l'équation homogène est donnée par

$$v\left(x\right) = C_1 e^{\sqrt{-z}x} + C_2 e^{\sqrt{-z}x},$$

la racine carrée de $-z$ est la détermination analytique définie par $\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$.

Par la méthode de la variation de la constante on obtient :

$$v\left(x\right) = C_1(x) e^{\sqrt{-z}x} + C_2(x) e^{\sqrt{-z}x},$$

avec

$$\begin{cases} C_1\left(x\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{-z}} \displaystyle\int_0^x e^{-\sqrt{-z}s} f\left(s\right) ds + k_1 \\ C_2\left(x\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-z}} \displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{-z}s} f\left(s\right) ds + k_2 \end{cases},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes, donc

$$v\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_0^x \sinh\sqrt{-z}\left(x-s\right) f\left(s\right) ds + k_1 e^{\sqrt{-z}x} + k_2 e^{-\sqrt{-z}x}.$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = d_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-z}} \displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-z}\left(1-s\right) f\left(s\right) ds + k_1 e^{\sqrt{-z}} + k_2 e^{-\sqrt{-z}} = d_1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{-e^{-\sqrt{-z}}}{2\sinh\sqrt{-z}} d_0 + \dfrac{1}{2\sinh\sqrt{-z}} d_1 - \dfrac{1}{\sqrt{-z}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\left(1-s\right)}{2\sinh\sqrt{-z}} f\left(s\right) ds \\ k_2 = \dfrac{e^{\sqrt{-z}}}{2\sinh\sqrt{-z}} d_0 - \dfrac{1}{2\sinh\sqrt{-z}} d_1 + \dfrac{1}{\sqrt{-z}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\left(1-s\right)}{2\sinh\sqrt{-z}} f\left(s\right) ds \end{cases}$$

par conséquent la solution du problème (2.2) s'écrit :

$$v\left(x\right) = \frac{\sinh\sqrt{-z}\left(1-x\right)}{\sinh\sqrt{-z}} d_0 + \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}} d_1 - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}\left(x,s\right) f\left(s\right) ds,$$

où le noyau $k_{\sqrt{-z}}(x,s)$ est donné par

$$k_{\sqrt{-z}}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si} \quad 0\leq s\leq x\\[2ex] \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si} \quad x\leq s\leq 1\end{cases}.$$

La solution du problème abstrait (2.1) est alors donnée par :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma v(x)\,(A-zI)^{-1}\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_1dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma\int\limits_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(A-zI)^{-1}\,f(s)\,dsdz. \end{aligned} \tag{2.3}$$

où γ est le bord du secteur S_{θ_0}.

Remarque 2.3 *La deuxième intégrale se déduit de la première en remplaçant x par $1-x$, on peut donc supposer que $d_1=0$ dans la suite de ce travail..*

Toutes les intégrales de (2.3) sont absolument convergentes pour chaque $x\in\,]0,1[$ grâce aux lemmes 1.2 et 1.3.

Pour le terme qui contient d_0, on pose

$$S(x,A)\,d_0=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz,$$

et on a le lemme suivant :

Lemme 2.2

1. Il existe une constante $k>0$ ne dépendant que γ tel que pour tout $d_0\in E$ et $x>0$,

$$\|S(x,A)\|_E\leq k(\theta)\,\|d_0\|_E\,.$$

2. $S(\cdot,A)\,d_0\in C([0,1];E)$ si et seulement si $d_0\in\overline{D_A}$.
3. $S(\cdot,A)\,d_0\in C^{2\theta}([0,1];E)$ si et seulement si $d_0\in D_A(\theta,+\infty)$.

Preuve :

Pour la preuve on utilise l'écriture de $S(x,A)\,d_0$ pour $x>0$ sous la forme

$$\begin{aligned} S(x,A)\,d_0 &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_+}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz \end{aligned} \tag{2.4}$$

où

$$\gamma_+=\left\{z\in\gamma;|z|\geq\frac{1}{x^2}\right\},\quad \gamma_-=\left\{z\in\gamma;|z|\leq\frac{1}{x^2}\right\},$$

et les résultats de Sinestrari [13].

2.3 Conditions nécessaires

On rappelle que $u\in C([0,1];E)$ est une solution stricte du problème (2.1) si :

$$u\in C^2(E)\cap C(D_A)$$

et vérifie l'équation (2.1).

Lemme 2.3 *Si u est une solution stricte du problème* (2.1), *alors :*

$$\begin{cases} f\in C([0,1];E), \\ f(0)-Ad_0,\ f(1)\in\overline{D_A}. \end{cases}$$

Preuve :

Il suffit d'écrire que

$$u''(0)=f(0)-Ad_0=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{u(2x)-2u(x)+u(0)}{x^2}\in\overline{D_A}.$$

De même pour $u''(1)$.

On va étudier maintenant la régularité de la solution u donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(A-zI)^{-1}\,d_0dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(A-zI)^{-1}\,f(s)\,dsdz. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.4 Régularité de la solution

Proposition 2.1 *On suppose que $f \in C^{2\theta}([0,1];E)$, $0 < 2\theta < 1$ et $d_0 \in D_A$. Alors*

1. $u \in D_A$.
2. $Au(\cdot) \in C([0,1];E)$ *ssi* $f(0) - Ad_0$ *et* $f(1) \in \overline{D_A}$.
3. $Au(\cdot) \in C^{2\theta}([0,1];E)$ *ssi* $f(0) - Ad_0$ *et* $f(1) \in D_A(\theta, +\infty)$.

On montre maintenant que (2.5) est une solution stricte du problème (2.1).

Proposition 2.2 *On suppose que $f \in C^{2\theta}([0,1];E)$, $d_0 \in D_A$, $f(0) - Ad_0$ et $f(1) \in \overline{D_A}$. Alors u donnée par la formule (2.5) est une solution stricte du problème (2.1).*

Preuve :

Puisque $k_{\sqrt{-z}}(0,s) = 0$, on a pour le premier terme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}(A - zI)^{-1} d_0 dz \\ = &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{(A - zI)^{-1} Ad_0}{z} dz. \end{aligned}$$

car $d_0 \in D_A$, ce qui implique que $u(0) = d_0$ et $u(1) = 0$.
La contnuité de $Au(\cdot)$ se déduit du lemme 2.2 et donc aussi celle de $u''(\cdot)$.
Pour montrer que $u''(\cdot) + Au(\cdot) = f(\cdot)$, on utilise le calcul de Dunford et on fait l'étude de la fonction

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) = &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}(A - zI)^{-1} d_0 dz \\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{x-\varepsilon} k_{\sqrt{-z}}(x,s)(A - zI)^{-1} f(s)\, ds dz \\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{x+\varepsilon}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)(A - zI)^{-1} f(s)\, ds dz. \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ petit.
On calculera ensuite $u'_\varepsilon(x)$ et $u''_\varepsilon(x)$ et on passera à la limite en utilisant la régularité de f.

Chapitre 3

Equation du Second ordre avec opérateur variable

3.1 Problème et Hypothèses

Soient E un espace de Banach complexe et $\{A(x)\}_{x\in[0,1]}$ une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D_{A(x)}$ non nécessairement denses dans E.
On considère alors le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x) \ ; \omega > 0,\ x \in [0,1] \\ u(0) = d_0 \\ u(1) = d_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f \in C([0,1], E)$; d_0, d_1 des données dans E et ω un paramètre spectral positif.
On suppose que la famille des opérateurs $\{A(x)\}_{x\in[0,1]}$ vérifie les deux hypothèses suivantes :

$(H_1) : \exists\lambda > 0,\ \exists k > 0 : \forall x \in [0,1],\ \forall z \geq \lambda,\ (A(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et

$$\left\|(A(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{K}{|z|}.$$

$(H_2) : \exists m \in \mathbb{N}^*, K, \alpha_i, \rho_i > 0\ (i = 1, ...m) : \forall x \in [0,1],\ \forall z \geq \lambda$

$$\begin{aligned} &\left\|(A(x) - \lambda I)(A(x) - zI)^{-1}\left[(A(x) - \lambda I)^{-1} - (A(s) - \lambda I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\ \leq\ & K \sum_{i=1}^{m} \frac{|x-s|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}, \end{aligned}$$

avec $\alpha_i + 2\rho_i - 2 > 0$.

Les deux hypothèses précédentes restent valables dans un petit secteur du plan complexe $S_{\theta_0} \subset \rho(A(x) - wI)$ de la forme

$$S_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \diagup |\arg\lambda| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)}\ ,$$

où $\theta_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $r_0 > 0$ petit (voir lemme 2.1).

Le problème (3.1) a été traité dans un cadre de sommes d'opérateurs par Daprato-Grisvard [5] avec $d_0 = 0$ et $f(0) = f(1) = 0$.

Les hypothèses (H_1) et (H_2) ont été utilisées dans Labbas-Terreni [10] avec $d_0 = 0$ et $f(0) = f(1) = 0$.

On se base sur ces deux études et sur les techniques utilisées pour l'équation parabolique du premier ordre dans [**?**] pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème (3.1) lorsque f est assez régulier et d_0, $f(0)$ et $f(1)$ vérifient certaines conditions de compatibilité.

On utilisera essentiellement le calcul classique de Dunford et les espaces d'interpolation et leurs caractérisation par la résolvante faite par Grisvard [6].

3.2 Construction de la solution stricte

On pose $Q(x) = (A(x) - wI)$ pour $\omega \geq \lambda$ et on suppose que $d_0 \in D_{A(0)}$, $d_1 = 0$ et l'existence d'une solution stricte u du problème (3.1), i.e

$$u(\cdot) \in D_{A(\cdot)}, u \in C^2([0,1]; E), \quad u(\cdot) \in C\left([0,1]; D_{A(\cdot)}\right).$$

On considère alors le problème auxiliaire

$$\begin{cases} v''(x) + zv(x) = f(x), \ z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+ \\ v(0) = d_0 \\ v(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.2}$$

la solution de ce problème s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} d_0 - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s) f(s)\,ds \\ &= L_z(d_0, f)(x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

où le noyau $k_{\sqrt{-z}}(x,s)$ est donné par

$$k_{\sqrt{-z}}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & 0 \leq s \leq x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & x \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Ici la racine carrée de $-z$ est la détermination analytique définie par $\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$.
Pour passer au cas abstrait on écrit que

$$L_z(d_0, f)(x) = L_z\left(d_0, u^{"}(\cdot) + Q(\cdot)u(\cdot)\right)(x),$$

donc on aura

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}d_0 - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\left(u"(s)+Q(s)u(s)\right)ds \\ &= \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}d_0 - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)u"(s)\,ds \\ &\quad -\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)Q(s)u(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)u"(s)\,ds = -\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}d_0 + z\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)u(s)\,ds + u(x),$$

et ceci en faisant une double intégration par parties.
En remplaçant cette valeur dans l'expression de $v(x)$ on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} u(x) + z\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)u(s)\,ds - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)Q(s)u(s)\,ds \\ = \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}d_0 - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)f(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En appliquent $(Q(x)-zI)^{-1}$ aux deux membres de (3.4), en utilisant le calcul classique de Dunford et l'identité algébrique suivante

$$\begin{aligned} &\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} - (Q(x)-zI)^{-1}Q(s)\right]u(s) \\ =\ &\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}Q(s)Q(s)^{-1} - Q(x)Q(x)^{-1}(Q(x)-zI)^{-1}Q(s)\right]u(s) \\ =\ &Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1}Q(s)\right]u(s) \\ =\ &Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1}\right]Q(s)u(s), \end{aligned}$$

on en déduit l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} u(x)(Q(x)-zI)^{-1}\,dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,z\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(s)\,u(s)\,dsdz \\
&=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}(Q(x)-zI)^{-1}\,d_0dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)(Q(x)-zI)^{-1}f(s)\,dsdz.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour tout $x\in[0,1]$, $u(x)\in D_{A(x)}$ on a

$$(Q(x)-zI)^{-1}u(x)=\frac{(Q(x)-zI)^{-1}Q(x)\,u(x)-u(x)}{z}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} u(x)(Q(x)-zI)^{-1}\,dz &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{(Q(x)-zI)^{-1}Q(x)\,u(x)-u(x)}{z}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(2i\pi\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{(Q(x)-zI)^{-1}Q(x)\,u(x)}{z},0\right]\right) \\
&= \lim_{z\longrightarrow 0} z\frac{(Q(x)-zI)^{-1}Q(x)\,u(x)}{z} \\
&= u(x),
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
u(x)&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,z\,(Q(x)-z)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(s)\,u(s)\,dsdz \\
&=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}(Q(x)-z)^{-1}\,d_0dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)(Q(x)-z)^{-1}f(s)\,dsdz,
\end{aligned}\tag{3.5}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$u(x)+I_1=I_2+I_3.$$

Les intégrales écrites dans (3.5) sont absolument convergentes. En effet grâce à hypothèse (H_2) , on a

$$\begin{aligned}\|I_1\|_E &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,Q(x)\,(Q(x)-z)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(s)\,u(s)\,dsdz\right\|_E \\ &\leq \int_\gamma \sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right|\sum_{i=1}^m \frac{|x-s|^{\alpha_i}}{|z+\omega|^{\rho_i}}ds\,|dz|\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)}\end{aligned}$$

ensuite en utilisant les lemmes 1.5 et 1.6, on obtient

$$\begin{aligned}\|I_1\|_E &\leq K\int_\gamma\sum_{i=1}^m\frac{1}{|z|^{\rho_i}}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1\left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right||x-s|^{\alpha_i}\,ds\right)|dz|\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)} \\ &\leq K\sum_{i=1}^m\int_\gamma\frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\alpha_i}{2}}\,|z|^{\rho_i}}\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)} \\ &\leq K\sum_{i=1}^m\int_\gamma\frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\alpha_i}{2}+\rho_i}}\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)} \\ &\leq K\int_\gamma\frac{|dz|}{|z|^2}\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)}\leq k\,\|Q(\cdot)\,u(\cdot)\|_{C([0,1],E)}\,,\end{aligned}$$

puisque $\alpha_i+2\rho_i-2>0$.

Pour I_2 on utilise l'hypothèse (H_1) et les lemmes 1.1 et 1.2 pour avoir

$$\begin{aligned}\|I_2\|_E &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\,(Q(x)-z)^{-1}\,d_0dz\right\|_E \\ &\leq \int_\gamma\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\right|\left\|(Q(x)-zI)^{-1}\right\|_{L(E)}|dz|\,\|d_0\|_E \\ &\leq K\int_\gamma\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right|}\frac{|dz|}{|z|}\,\|d_0\|_E \\ &\leq K\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|\,k(\theta_0)}\,|dz|\,\|d_0\|_E \\ &\leq \frac{K}{|z|}\,\|d_0\|_E\,.\end{aligned}$$

Pour I_3, le lemme 1.4 donne

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(Q(x)-z)^{-1} f(s)\,dsdz \right\|_E \\
&\leq \int_\gamma \int_0^1 \left| k_{\sqrt{-z}}(x,s) \right| |ds|\,|dz| \left\| (Q(x)-z)^{-1} \right\|_{L(E)} \|f\|_{C([0,1],E)} \\
&\leq K \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|\,|z|} \|f\|_{C([0,1],E)} \\
&\leq \frac{K}{|z|^2} \|f\|_{C([0,1],E)}.
\end{aligned}$$

En appliquant formellement et pour tout $x \in \,]0,1[$ l'opérateur $Q(x)$ aux deux membres de (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
& Q(x)\,u(x) + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1} \left[Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1} \right] Q(s)\,u(s)\,dsdz \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh \sqrt{-z}} Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1} d_0 dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, Q(x)\,(Q(x)-zi)^{-1} f(s)\,dsdz,
\end{aligned}$$

qui s'écrit sous la forme

$$w + P_\omega w = F(d_0, f) \tag{3.6}$$

où

$$w(\cdot) = Q(\cdot)\,u(\cdot),$$

$$P_\omega w(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1} \left[Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1} \right] w(s)\,dsdz,$$

et

$$\begin{aligned}
F(d_0,f)(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh \sqrt{-z}} Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1} d_0 dz \\
& \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1} f(s)\,dsdz.
\end{aligned}$$

Tout revient donc à inverser l'équation (3.6). On prend la norme de maximum pour P_ω et on utilise l'hypothèse (H_2) et le lemme 1.5, pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\|P_\omega w(x)\|_E &\leq K\int_\gamma |z| \sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| \sum_{i=1}^m \frac{|x-s|^{\alpha_i}}{|z+\omega|^{\rho_i}} ds\,|dz|\,\|w\|_{C(E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\alpha_i}{2}}|z+\omega|^{\rho_i}}\|w\|_{C(E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\alpha_i}{2}}|z+\omega|\,|z+\omega|^{\rho_i-1}}\|w\|_{C(E)} \\
&\leq \sum_{i=1}^m \frac{K}{\omega^{\frac{\alpha_i}{2}+\rho_i-1}}\|w\|_{C(E)},
\end{aligned}$$

d'aprés le lemme 1.7. Finalement si on pose

$$\sigma = \min_{i=1,\quad,m} \alpha_i + 2\rho_i - 2,$$

on aura

$$\|P_\omega w(x)\|_E \leq \frac{K}{\omega^{\frac{\sigma}{2}}}\|w\|_{C(E)}.$$

On en déduit la proposition :

Proposition 3.1 *On suppose que $F(d_0, f) \in C([0,1];E)$ et que les hypothèses*

(H_1) et (H_2) sont vérifiées alors $\exists\omega^* > 0$ tel que :

$$\forall\omega \geq \omega^*, \|P_\omega\|_{L(C(E))} \leq \frac{1}{2},$$

d'où l'inversibilité de l'opérateur $(I + p_\omega)$.

3.3 Conditions nécessaires

On va chercher les conditions nécessaires sur f et d_0 pour avoir une solution stricte du problème

$$\begin{cases} u''(x) + Q(x)u(x) = f(x)\ ;\ x \in [0,1] \\ u(0) = d_0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Proposition 3.2 *Soient $d_0 \in D_{Q(0)} = D_{A(0)}$ et $f \in C([0,1];E)$. Alors sous les hypothèses (H_1) et (H_2), u est une solution stricte du problème (3.7) ssi*

$$\begin{cases} f(0) - Q(0)d_0 \in \overline{D_{A(0)}} \\ f(1) \in \overline{D_{A(0)}} \end{cases}.$$

Preuve :
Il est immédiat que $d_0 \in D_{A(0)}$ et $f \in C([0,1]; E)$. D'autre part on a :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{u(2x) - 2u(x) + d_0}{x^2} = u''(0) = f(0) - Q(0) d_0$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{u(2x) - 2u(x) + d_0}{x^2} &= -\left[\frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1} - \frac{1}{x^2}(Q(0) - \frac{1}{x^2})^{-1}\right] \\
&\quad \times \frac{u(2x) - 2u(x) + d_0}{x^2} \\
&\quad - \frac{1}{x^2}(Q(0) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[\frac{u(2x) - 2u(x) + d_0}{x^2} - (f(0) - Q(0) d_0)\right] \\
&\quad - \frac{1}{x^2}(Q(0) - \frac{1}{x^2})^{-1}(f(0) - Q(0) d_0) \\
&\quad + \left\{\frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[\frac{d_0 - u(x)}{x^2}\right] + \frac{d_0 - u(x)}{x^2}\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[\frac{u(2x) - u(x)}{x^2}\right] + \frac{u(2x) - u(x)}{x^2}\right\} \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left\{\frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[\frac{d_0 - u(x)}{x^2}\right] + \frac{d_0 - u(x)}{x^2}\right\} \\
&= \frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left\{Q(0) d_0 - Q(x) u(x)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{x^2} Q(x) (Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left\{Q(x)^{-1} - Q(0)^{-1}\right\} Q(0) d_0 \\
&= a_4 + a_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left\{\frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[\frac{u(2x) - u(x)}{x^2}\right] + \frac{u(2x) - u(x)}{x^2}\right\} \\
&= \frac{1}{x^2}(Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left\{Q(2x) u(2x) - Q(x) u(x)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{x^2} Q(x) (Q(x) - \frac{1}{x^2})^{-1}\left[Q(2x)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] Q(2x) u(2x) \\
&= a_6 + a_7.
\end{aligned}$$

On peut écrire que

$$\frac{u(2x) - 2u(x) + d_0}{x^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{7} a_i = a_3 \in D_{A(0)}.$$

Alors pour $x \longrightarrow 0^+$, $a_i (i \neq 3) \longrightarrow 0$, et ceci grâce à l'hypothèse (H_2). En effet on a par exemple pour a_7

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{x^2} Q(x) \left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} \left[Q(2x)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] \right\|_{L(E)} \\ \leq & \frac{K}{x^2} \sum_{i=1}^{m} \frac{x^{\alpha_i}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\rho_i}} \\ \leq & K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i + 2\rho_i - 2} \longrightarrow 0, \quad \left(x \longrightarrow 0^+\right). \end{aligned}$$

Donc par passage à la limite on en déduit que

$$f(0) - A(0) d_0 \in \overline{D_{Q(0)}} = \overline{D_{A(0)}}.$$

On fait de même pour la condition sur $f(1)$ au voisinage de $x = 1$.

Maintenant pour inverser l'opérateur $(I + P_\omega)$ dans l'espace $L(C([0,1], E))$, on doit étudier la contnuité du second membre $F(d_0, f)$ et on donne aussi le résultat de sa régularité maximale.

3.4 Régularité du second membre $F(d_0, f)$

Proposition 3.3 *Soit β fixé dans $]0, \sigma]$ où $\sigma = \min_{i=1, \quad ,m} \alpha_i + 2\rho_i - 2$. Soient aussi $d_0 \in D_{A(0)}$ et $f \in C^\beta([0,1]; E)$. Alors sous les hypothèses (H_1) et (H_2), on a*

1. *$F(d_0, f) \in C([0,1]; E)$ ssi $f(0) - A(0) d_0 \in \overline{D_{A(0)}}$ et $f(1) \in \overline{D_{A(1)}}$.*
2. *$F(d_0, f) \in C^\beta([0,1]; E)$ ssi $f(0) - A(0) d_0 \in D_{A(0)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)$ et $f(1) \in D_{A(1)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)$.*

Preuve :

On Rappelle que

$$\begin{aligned} F(d_0, f)(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(1-x)}{\sinh \sqrt{-z}} Q(x) (Q(x) - zI)^{-1} d_0 dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x, s) Q(x) (Q(x) - zI)^{-1} f(s) ds dz. \end{aligned}$$

Pour le premier terme on écrit que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\,d_0dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right] \\
& \times Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}\,Q(0)\,d_0dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,d_0dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}}{z}Q(0)\,d_0dz \\
= \; & I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

et ceci en utilisant l'identité algèbrique suivante

$$
\begin{aligned}
& Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1} \\
= \; & Q(x-z+z)\,(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0-z+z)\,(Q(0)-zI)^{-1} \\
= \; & I+z\,(Q(x)-zI)^{-1}-I-z\,(Q(0)-zI)^{-1} \\
= \; & z\left[(Q(x)-zI)^{-1}-(Q(0)-zI)^{-1}\right] \\
= \; & zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-(Q(x)-z)\,Q(x)^{-1}\,(Q(0)-zI)^{-1}\right] \\
= \; & zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1},
\end{aligned}
$$

et le fait que $d_0 \in D_{A(0)}$ donc

$$
(Q(0)-zI)^{-1}\,d_0=\frac{(Q(0)-zI)^{-1}\,Q(0)\,d_0-d_0}{z}.
$$

Pour la deuxième intégrale dans l'expression de $F(d_0, f)$, On écrit que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(Q(x)-zI)^{-1}\,f(s)\,dsdz \qquad (3.8) \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(Q(x)-zI)^{-1}\,[f(s)-f(x)]\,dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,(Q(x)-zI)^{-1}\,f(x)\,dsdz.
\end{aligned}
$$

De plus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\,dsdz \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,dsdz,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,ds \\
=\ &\int_{0}^{x}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}ds+\int_{x}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}ds \\
=\ &\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_{0}^{x}\sinh\sqrt{-z}sds+\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_{x}^{1}\sinh\sqrt{-z}xds \\
=\ &\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\cosh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}}\right]_{0}^{x}-\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1-s)}{\sqrt{-z}}\right]_{x}^{1} \\
=\ &\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}+\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}-\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\cosh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}} \\
&-\frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,dsdz \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}+\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}\right]\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\,dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\cosh\sqrt{-z}x+\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}\right] \\
&\times\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\,dz \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\,dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}\left(Q(x)-zI\right)^{-1} f(x)\,dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}}{z\sinh\sqrt{-z}}\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(x)\,dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(x)\,dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(x)\,dz\\
&-Q(x)^{-1}f(x)\,.
\end{aligned}$$

En appliquant $Q(x)$ aux deux membres de (3.8) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(s)\,dsdz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(x)\,dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}f(x)\,dz-f(x)\,.
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
&F(d_0,f)(x)\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]\\
&\times Q(0)\left(Q(0)-zI\right)^{-1}Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{z\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(x)-f(0)\right]dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]f(0)\,dz\\
&\times Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}}{z}\left[f(0)-Q(0)\,d_0\right]dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{z\sinh\sqrt{-z}}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f(x)\,dz-f(x)\\
=\ &\sum_{i=1}^{7}I_i
\end{aligned}
$$

Pour I_1 et I_2 on intégre sur γ_+ et γ_- et on utilise l'hypothèse (H_2).
Soient $0\leq\tau<x\leq 1$. Alors on a

$$
F(d_0,f)(x)-F(d_0,f)(\tau)=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+f(x)-f(\tau),
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 =\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}f(\tau)\,dz,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 =\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}f(\tau)\,dz
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 = &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\,Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz.
\end{aligned}
$$

On explicite chaque terme Δ_i dans le but d'utiliser l'hypothèse (H_2), alors on a

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} - Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\right] d_0 dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x) - \sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right] Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1} d_0 dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}}{z}\left[f(x)-f(\tau)\right] dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x) - \sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right] \frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}}{z} f(\tau)\, dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} - Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}\right] f(\tau)\, dz.
\end{aligned}$$

En utilisant encore l'identité algébrique

$$\begin{aligned}
& Q(x)(Q(x)-z)^{-1} - Q(\tau)(Q(\tau)-z)^{-1} \\
= \;& zQ(x)(Q(x)-z)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(\tau)^{-1}\right] Q(\tau)(Q(\tau)-z)^{-1},
\end{aligned}$$

donc Δ_1 s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
&\times \left[Q(x)^{-1} - Q(\tau)^{-1}\right] Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1} d_0 dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x) - \sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right] \\
&\times \left[Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1} - Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right] d_0 dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x) - \sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right] Q(0)(Q(0)-zI)^{-1} d_0 dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}}{z}\left[f(x)-f(\tau)\right] dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x) - \sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right] \\
&\times \left[\frac{Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1} - Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}}{z}\right] f(\tau)\, dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]\frac{Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}}{z}f(\tau)\,dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]\\
&\times Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}f(\tau)\,dz
\end{aligned}
$$

En ajoutant et en retranchant le terme $Q(0)\,(Q(0)-z)^{-1}$ dans les intégrales où il ya le terme $Q(\tau)\,(Q(\tau)-z)^{-1}$ alors on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\\
&\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]\\
&\times Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}Q(0)\,d_0dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\\
&\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\\
&\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(x)\,(Q(x)-z)^{-1}}{z}\left[f(x)-f(\tau)\right]dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}d_0dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\\
&\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}f(\tau)\,dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]\frac{Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}}{z}f(\tau)\,dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}zQ(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]\\
&\times Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}f(\tau)\,dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]\\
&\times Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}f(\tau)\,dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]Q(0)\,d_0dz\\
=\;&\sum_{i=1}^{11}I_i
\end{aligned}
$$

Les intégrales de Δ_1 sont toutes régulières et en $O\left(|x-\tau|^{\beta}\right)$ grâce à l'hypothèse (H_2). Pour I_1 on a

$$
\begin{aligned}
&\|I_1\|_E\\
\leq\;& K\int_{|z|\geq\frac{1}{x^2}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\,|z|\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\,|dz|\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&+K\int_{|z|\leq\frac{1}{x^2}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\,|z|\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\,|dz|\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
=\;& a+b
\end{aligned}
$$

où

$$
\gamma_+=\left\{z\in\gamma;|z|\geq\frac{1}{x^2}\right\}\text{ et }\gamma_-=\left\{z\in\gamma;|z|\leq\frac{1}{x^2}\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
a\;\leq\;& K\int_{\gamma_+}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\,|z|\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\,|dz|\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
\leq\;& K\sum_{i,j=1}^{m}|x-\tau|^{\alpha_i}\tau^{\alpha j}\int_{\gamma_+}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\rho_i+\rho j-1}}\,|dz|\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
\leq\;& K\sum_{i,j=1}^{m}|x-\tau|^{\alpha_i}\tau^{\alpha j}\int_{\gamma_+}\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}x}}{|z|^{\rho_i+\rho j-1}}\,|dz|\,\|Q(0)\,d_0\|_E\,,
\end{aligned}
$$

on pose $\sigma = |z|^{\frac{1}{2}} x$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
a &\leq K \sum_{i,j=1}^{m} |x-\tau|^{\alpha_i} \tau^{\alpha j} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma} 2\sigma}{x^2 \left(\frac{\sigma^2}{x^2}\right)^{\rho_i+\rho j-1}} d\sigma \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i,j=1}^{m} |x-\tau|^{\alpha_i} \tau^{\alpha j} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma} 2\sigma x^{2\rho_i+2\rho j-4}}{\sigma^{2\rho_i+2\rho j-2}} d\sigma \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i,j=1}^{m} |x-\tau|^{\alpha_i} \tau^{\alpha j} x^{2\rho_i+2\rho j-4} \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i,j=1}^{m} (x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2+\alpha j+2\rho j-2} \left[(x-\tau)^{-2\rho_i+2-\alpha j-2\rho j+2} \tau^{\alpha j} x^{2\rho_i+2\rho j-4}\right] \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i,j=1}^{m} (x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2+\alpha j+2\rho j-2} \left[x^{-\alpha j} \tau^{\alpha j}\right] \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i,j=1}^{m} (x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2+\alpha j+2\rho j-2} \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \left(\sum_{i=1}^{m} (x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2}\right)^2 \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} (x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2} \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K (x-\tau)^{\sigma} \left\|Q(0) d_0\right\|_E
\end{aligned}$$

avec

$$\sigma = \min \alpha_i + 2\rho_i - 2$$

On fait le même pour b et I_9.
Pour I_2 on a

$$\begin{aligned}
&\left\|I_2\right\|_E \\
&\leq K \left(\int_{\gamma_+} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \sum_{i=1}^{m} \frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}} |dz| + \int_{\gamma_-} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \sum_{i=1}^{m} \frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}} |dz| \right) \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&= c + d,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
c &\leq K \sum_{i=1}^{m} |x-\tau|^{\alpha_i} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma} 2\sigma}{x^2 \left(\frac{\sigma^2}{x^2}\right)^{\rho_i}} d\sigma \left\|Q(0) d_0\right\|_E \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} |x-\tau|^{\alpha_i} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma} 2\sigma x^{2\rho_i-2}}{\sigma^{2\rho_i}} d\sigma \left\|Q(0) d_0\right\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i=1}^{m}|x-\tau|^{\alpha_i}\,x^{2\rho_i-2}\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2}\left[(x-\tau)^{-2\rho_i+2}\,x^{2\rho_i-2}\right]\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2}\left[x^{-2\rho_i+2}x^{2\rho_i-2}\right]\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K(x-\tau)^{\sigma}\,\|Q(0)\,d_0\|_E
\end{aligned}$$

On fait le même pour d et I_{10}.
Pour I_3 on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
&I_3\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]\\
&\times Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}\,Q(0)\,d_0dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{\tau}^{x}\frac{-\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\,(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}dsQ(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(0)^{-1}\right]\\
&\times Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}\,Q(0)\,d_0dz
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\|I_3\|_E\\
\leq\;&k\left(\int_{\tau}^{x}\int_{|z|\geq\frac{1}{s^2}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}\,|z|^{\frac12}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}ds\,|dz|+\int_{\tau}^{x}\int_{|z|\leq\frac{1}{s^2}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}\,|z|^{\frac12}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}ds\,|dz|\right)\\
&\times\|Q(0)\,d_0\|_E\\
=\;&e+f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e\;&\leq K\int_{\tau}^{x}\int_{|z|\geq\frac{1}{s^2}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}\,|z|^{\frac12}\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\,|dz|\,ds\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K\int_{\tau}^{x}\sum_{i=1}^{m}\tau^{\alpha_i}\left(\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sigma}2\sigma}{s^3\left(\frac{\sigma^2}{s^2}\right)^{\rho_i}}d\sigma\right)ds\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau}^{x}\tau^{\alpha_i}s^{2\rho_i-3}ds\,\|Q(0)\,d_0\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau}^{x}s^{\alpha_i+2\rho_i-2-1}ds\,\|Q(0)\,d_0\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k\sum_{i=1}^{m}\left(x^{\alpha_i+2\rho_i-2}-\tau^{\alpha_i+2\rho_i-2}\right)\|Q(0)\,d_0\|_E \\
&\leq k\sum_{i=1}^{m}(x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2}\|Q(0)\,d_0\|_E \\
&\leq K(x-\tau)^{\sigma}\|Q(0)\,d_0\|_E .
\end{aligned}$$

On traite f et I_7 par la même manière.
On peut écrire I_6 et I_8 sous la forme

$$\begin{aligned}
& I_6+I_8 \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]\frac{Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}}{z}\left[(Q(0)\,d_0-f(0))\right]dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]\frac{Q(0)\,(Q(0)-zI)^{-1}}{z}f(\tau)\,dz,
\end{aligned}$$

alors le premier terme est dans $C([0,1];E)$ ssi $(Q(0)\,d_0-f(0))\in\overline{D_{A(0)}}$ et est dans $C^{\beta}([0,1];E)$ ssi $(Q(0)\,d_0-f(0))\in D_{A(0)}\left(\frac{\beta}{2},\infty\right)$ (voir lemme 2.2, cas constant). Le deuxième terme est dans $C^{\beta}([0,1];E)$ car $f\in C^{\beta}([0,1];E)$.
Les intégrales restantes se traitent de la même façon et la proposition est démontrée pour Δ_1.

Pour Δ_2 on fait le partage que celui fait pour Δ_1. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \; = \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}\left[f(\tau)-f(x)\right]dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}\left[f(\tau)-f(x)\right]dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x-\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{Q(\tau)\,(Q(\tau)-zI)^{-1}-Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}}{z}\right]f(x)\,dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}\left[f(\tau)-f(x)\right]dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau-\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(1)(Q(1)-zI)^{-1}}{z}\right]f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau-\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(1)(Q(1)-zI)^{-1}}{z}f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] \\
& \times Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f(x)\,dz \\
= \quad & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}}{z}\left[f(\tau)-f(x)\right]dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau-\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(1)^{-1}\right] \\
& \times Q(1)(Q(1)-zI)^{-1}f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau-\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(1)(Q(1)-zI)^{-1}}{z}\left[f(x)-f(1)\right]dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] \\
& \times Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f(x)\,dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau-\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{Q(1)(Q(1)-zI)^{-1}}{z}f(1)\,dz \\
= \quad & \sum_{i=1}^{5} I_i.
\end{aligned}
$$

Les quatres premières intégrales sont en $O\left(|x-\tau|^\beta\right)$ grâce aux mêmes techniques que précedemment. Par exemple pour I_1 on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq K \int\limits_{|z|\geq\frac{1}{(1-x)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \, \|f(\tau) - f(x)\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\quad + K \int\limits_{|z|\leq\frac{1}{(1-x)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \, \|f(\tau) - f(x)\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&= g + h,
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \left\{ z \in \gamma; |z| \geq \frac{1}{(1-x)^2} \right\} \cup \left\{ z \in \gamma; |z| \leq \frac{1}{(1-x)^2} \right\},$$

pour g on a :

$$\begin{aligned}
g &\leq K \int\limits_{|z|\geq\frac{1}{(1-x)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \, \|f(\tau) - f(x)\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K \int\limits_{|z|\geq\frac{1}{(1-x)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \, |x-\tau|^\beta \, \|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K |x-\tau|^\beta \, \|f\|_{C^\beta([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour h.
L'intégrale I_5 est dans l'espace $C([0,1]; E)$ ssi $f(1) \in \overline{D_{A(0)}}$ et est dans $C^\beta([0,1]; E)$ ssi $f(1) \in D_{A(1)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)$ (voir lemme 2.2, cas constant).
Il reste à regarder Δ_3. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma \int\limits_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s) \, Q(x) \left(Q(x) - zI\right)^{-1} [f(s) - f(x)] \, ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma \int\limits_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s) \, Q(\tau) \left(Q(\tau) - zI\right)^{-1} [f(s) - f(\tau)] \, ds dz \\
&= I_1 - I_2 \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma \int\limits_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(x) \left(Q(x) - zI\right)^{-1} [f(s) - f(x)] \, ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma \int\limits_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(\tau) \left(Q(\tau) - zI\right)^{-1} [f(s) - f(\tau)] \, ds dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2i\pi}\int_x^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\tau^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-s)\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
= \;& c_1-c_2+c_3-c_4,
\end{aligned}
$$

il suffit de traiter c_1-c_2.

$$
\begin{aligned}
& c_1-c_2 \\
= \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
= \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]dsdz \\
& \times Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right]\sinh\sqrt{-z}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(\tau)-f(x)\right]dsdz \\
&\quad \times Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(\tau)-f(x)\right]dsdz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}Q(x)\left(Q(x)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(x)\right]dsdz \\
&= j+l+m+n.
\end{aligned}
$$

Pour j on a :

$$
\begin{aligned}
\|j\|_E &\leq K\int_0^\tau\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}|z|\sum_{i=1}^m \frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}|dz|\,ds\,\|f(s)-f(\tau)\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K\int_0^\tau \sum_{i=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\rho_i-\frac{1}{2}}}|dz|\,|\tau-s|^\beta\,ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}\int_0^\tau (x-s)^{2\rho_i-3}|\tau-s|^\beta\,ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}\int_0^\tau (x-s)^{2\rho_i-3}(x-s)^\beta\,ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}(x-\tau)^{\beta+2\rho_i-2}\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x-\tau)^{\alpha_i+\beta+2\rho_i-3}\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
&\leq K(x-\tau)^\beta\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\,.
\end{aligned}
$$

De la même manière on traite m et n.
Pour l on a

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\tau}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right]\sinh\sqrt{-z}s \\
&\quad \times Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1}\left[f(s)-f(\tau)\right]dsdz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\frac{-\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\,(1-\xi)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}Q(\tau)\left(Q(\tau)-zI\right)^{-1} \\
&\quad \times\left[f(s)-f(\tau)\right]d\xi dsdz.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|l\|_E &\leq K\int_{\gamma}\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1-\xi)\sinh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}\right|\|f(s)-f(\tau)\|\,d\xi dsdz \\
&\leq K\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\xi-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\|f(s)-f(\tau)\|_{C^{\beta}([0,1];E)}|dz|\,d\xi ds \\
&\leq K\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}(\xi-s)^{-2}|\tau-s|^{\beta}\,d\xi ds\,\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
&\leq K\int_{0}^{\tau}|\tau-s|^{\beta}\int_{\tau}^{x}\frac{d\xi}{(\xi-s)^{2}}ds\,\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
&\leq K\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{\beta}\frac{(\tau-x)}{(x-s)(\tau-s)}ds\,\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
&\leq K(\tau-x)\int_{0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\beta-1}}{(x-s)}ds\,\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)},
\end{aligned}
$$

si on pose

$$
y=\frac{x-s}{\tau-s},
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\|l\|_E &\leq K(\tau-x)\int_{\frac{\tau}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y(y-1)^{\beta}}\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
&\leq K(\tau-x)^{\beta}\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}.
\end{aligned}
$$

La continuité de second membre $F(d_0, f)$ permet d'énoncer le théorème suivant

Théorème 3.1 *On suppose* (H_1) *et* (H_2). *Soient* $d_0 \in D_{A(0)}$, $f \in C^\beta([0,1]; E)$ *tels que*

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\, d_0 \in \overline{D_{A(0)}} \\ f(1) \in \overline{D_{A(0)}} \end{cases}.$$

Alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $\omega \geq \omega^*$, *la solution* u *du problème* (3.7) *donnée pour tout* $x \in [0,1]$ *par*

$$\begin{aligned} u(x) &= Q(x)^{-1}(I + p_\omega)^{-1} F(d_0, f)(x) \\ &= (A(x) - \omega)^{-1}(I + p_\omega)^{-1} F(d_0, f)(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

est stricte.

Preuve :
On a

$$w = (I + p_\omega)^{-1} F(d_0, f),$$

où

$$w(\cdot) = Q(\cdot)\, u(\cdot).$$

D'après le premier point de la proposition 3.3 et la continuité de l'opérateur $(I + p_\omega)^{-1}$, on obtient

$$w \in C([0,1]; E),$$

de plus

$$u''(\cdot) = f(\cdot) - w(\cdot) \in C([0,1]; E),$$

donc

$$u \in C^2([0,1]; E),$$

d'où le résultat.

3.5 Régularité de l'opérateur intégrale P_ω

On rappelle que

$$p_\omega w(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ(x)(Q(x) - zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] w(s)\, ds dz,$$

on a la proposition suivante :

Proposition 3.4 *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *on a*

$$P_\omega \in L(C(E), C^\sigma(E))$$

où

$$\sigma = \min_{i=1,\quad,m} \alpha_i + 2\rho_i - 2.$$

Preuve :

Soient $0 \leq \tau < x \leq 1$. On a

$$\begin{aligned}
& p_\omega w(x) - p_\omega w(\tau) \\
= {} & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\, zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
= {} & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_x^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\tau^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
= {} & A - B + C - D,
\end{aligned}$$

toutes ces intégrales sont absolument convergentes grâce a l'hypothèse (H_2).
On va majorer maintenant $A - B$

$$\begin{aligned}
& A - B \\
= {} & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right] w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right] w(s)\,dsdz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} z^2Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]dsdz \\
&\times Q(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)-\sinh\sqrt{-z}\,(1-\tau)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right]\sinh\sqrt{-z}s \\
&\times zQ(\tau)(Q(\tau)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(s)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]w(s)\,dsdz \\
&= a_1+a_2+a_3+a_4.
\end{aligned}$$

Ces intégrales se traitent de la même manière que celle dans l'étude de la régularité de $F(d_0, f)$ pour Δ_3. Par exemple pour a_1, on a

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^\tau \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}|z|^2\sum_{i=1}^m \frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}\sum_{i=1}^m\frac{|\tau-s|^{\alpha_i}}{|z|^{\rho_i}}|dz|\,\|w\|_{C(E)} \\
&\leq K\sum_{i,j=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}|\tau-s|^{\alpha_j}\int_\gamma \frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(x-s)}}{|z|^{\rho_i+\rho_j-\frac{3}{2}}}|dz|\,ds\,\|w\|_{C(E)} \\
&\leq K\sum_{i,j=1}^m |x-\tau|^{\alpha_i}\int_0^\tau |\tau-s|^{\alpha_j}(x-s)^{2\rho_i+2\rho_j-5}ds\,\|w\|_{C(E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}|x-\tau|^{\alpha_i}\int_0^\tau |x-s|^{\alpha_i}(x-s)^{2\rho_i+2\rho_j-5}ds\,\|w\|_{C(E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}|x-\tau|^{\alpha_i}(x-\tau)^{\alpha_j+2\rho_i+2\rho_j-4}\|w\|_{C(E)}\\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{m}(x-\tau)^{2\alpha_i+4\rho_i-2}\right)^2\|w\|_{C(E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\tau)^{\alpha_i+2\rho_i-2}\|w\|_{C(E)}\\
&\leq K(x-\tau)^{\sigma}\|w\|_{C(E)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 3.1 *Pour tout* $\beta\in\,]0,\sigma]$

$$P_\omega\in L\left(C(E),C^\beta(E)\right).$$

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_1) *et pour tout* $\omega\geq\omega^*$, *on a*

1. $(I+p_\omega)^{-1}\in L(C(E))$.
2. $(I+p_\omega)^{-1}\in L\left(C^\beta(E)\right),\ \forall\beta\in\,]0,\sigma]$.

Preuve :

1. C'est une conséquence de la proposition 3.1.
2. Soit $v\in C^\beta(E)$. On pose $h=(I+p_\omega)^{-1}v$, donc $h+p_\omega h=v$ et $h=v-p_\omega h\in C^\beta(E)$, par la proposition 3.4.

A partir des résultats précédents on peut énoncer le théorème suivant concernant la régularité maximale de la solution de l'équation intégrale

$$w+p_\omega w=F(d_0,f)\ \text{ où } w(\cdot)=(A(\cdot)-\omega)u(\cdot)=Q(\cdot)u(\cdot). \tag{3.10}$$

Théorème 3.2 *Soient* $d_0\in D_{A(0)}$, β *fixé dans* $]0,\sigma]$ *où* $\sigma=\min\limits_{i=1,\quad,m}\alpha_i+2\rho_i-2$ *et* $f\in C^\beta([0,1];E)$ *tels que*

$$\begin{cases} f(0)-A(0)d_0\in D_{A(0)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right),\\ f(1)\in D_{A(1)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right).\end{cases}$$

Alors sous les hypothèses (H_1) *et* (H_2), *il existe* $\omega^*>0$ *tel que pour tout* $\omega\geq\omega^*$ *l'équation* (3.10) *admet une unique solution* $u(\cdot)$ *donnée par* (3.9) *vérifiant :*

1. $u(\cdot)\in C^2([0,1];E)\cap C\left([0,1];D_{A(\cdot)}\right)$.
2. $A(\cdot)u(\cdot)\in C^\beta([0,1];E)$.
3. $u''(\cdot)\in C^\beta([0,1];E)$.

Preuve :

La démonstration se fait de la même manière que pour le théorème 3.1, en utilisant le deuxième point de la proposition 3.3 et la proposition 3.4.

3.6 Problème Approché

On doit démontrer maintenant que la représentation de $u(\cdot)$ donnée par (3.9) est l'unique solution du problème (3.7).
On considère alors le problème approché suivant :

$$\begin{cases} u_n''(x) + (A_n(x) - \omega)u_n(x) = f(x) & \omega > 0,\ x \in [0,1] \\ u_n(0) = d_0 & , \\ u_n(1) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

où $(A_n(x))_{x\in[0,1]}$ est la famille des approchants de Yosida de $(A(x))_{x\in[0,1]}$ défini pour tout $n > 0$ par :

$$A_n(x) = -nA(x)(A(x) - nI)^{-1}.$$

On a les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
(A_n(x) - \omega) &= -nA(x)(A(x) - nI)^{-1} - \omega \\
&= -nA(x)(A(x) - nI)^{-1} - \omega(A(x) - nI)^{-1}(A(x) - n) \\
&= [-nA(x) - \omega(A(x) - n)](A(x) - nI)^{-1} \\
&= [-(n+\omega)A(x) + \omega n](A(x) - nI)^{-1} \\
&= -(n+\omega)\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}\right)(A(x) - nI)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_n(x) - \omega I)^{-1} &= \left(-(n+\omega)\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}\right)(A(x) - nI)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{-1}{n+\omega}(A(x) - n)\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1} \\
&= \frac{-1}{n+\omega}\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega} + \frac{\omega n}{n+\omega} - n\right)\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}\right)^{-1} \\
&= \frac{-1}{n+\omega} + \frac{1}{n+\omega}\left(n - \frac{\omega n}{n+\omega}\right)\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1} \\
&= \frac{n^2}{(n+\omega)^2}\left(A(x) - \frac{\omega n}{n+\omega}\right)^{-1} - \frac{1}{n+\omega}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(A_n(x) - zI)^{-1} &= \left(-(n+z)\left(A(x) - \frac{zn}{n+z}\right)(A(x) - nI)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{-1}{n+z}(A(x) - n)\left(A(x) - \frac{zn}{n+z}I\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

D'aprés les identités précédentes on peut écrire que :

$$
\begin{aligned}
& \left(A_n(x)-\omega I\right)\left(A_n(x)-zI\right)^{-1}\left[\left(A_n(x)-\omega I\right)^{-1}-\left(A_n(s)-\omega I\right)^{-1}\right] \\
= \; & (n+\omega)\left(A(x)-\frac{\omega n}{n+\omega}\right)(A(x)-nI)^{-1}\frac{1}{n+z}(A(x)-nI)\left(A(x)-\frac{zn}{n+z}I\right)^{-1} \\
& \times\left[\frac{n^2}{(n+\omega)^2}\left(A(x)-\frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1}-\frac{I}{n+\omega}-\frac{n^2}{(n+\omega)^2}\left(A(s)-\frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1}+\frac{I}{n+\omega}\right] \\
= \; & \frac{n^2}{(n+w)(n+z)}\left(A(x)-\frac{\omega n}{n+\omega}I\right)\left(A(x)-\frac{zn}{n+z}I\right)^{-1} \\
& \times\left[\left(A(x)-\frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1}-\left(A(s)-\frac{\omega n}{n+\omega}I\right)^{-1}\right],
\end{aligned}
$$

ainsi, par l'hypothèse (H_2) sur la famille $(A_n(x))_{x\in[0,1]}$ on a

$$
\begin{aligned}
& \left\|\left(A_n(x)-\omega\right)\left(A_n(x)-z\right)^{-1}\left[\left(A_n(x)-\omega I\right)^{-1}-\left(A_n(s)-\omega I\right)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\
\leq \; & k\frac{n^2}{(n+w)(n+z)}\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-s|^{\alpha_i}}{\left(\dfrac{nz}{n+z}\right)^{\rho_i}} \qquad (3.12) \\
\leq \; & k\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-s|^{\alpha_i}}{z^{\rho_i}}.
\end{aligned}
$$

Proposition 3.6 *Soient $f\in C(E)$ et $d_0\in D_{A(0)}$. Alors il existe $\omega(n)>0$ tel que pour tout $\omega>\omega(n)$ le problème* (3.11) *admet une solution unique $u_n\in C^2([0,1];E)$.*

Preuve :

On écrit le problème (3.11) sous la forme

$$
\begin{cases}
u_n''(x)-\omega u_n(x)=f(x)-A_n(x)u_n(x) \\
u_n(0)=d_0 \\
u_n(1)=0
\end{cases}
$$

et on utilise la solution du problème (3.7) dans le cas scalaire (voir la formule 3.3) pour déduire que u_n vérifie l'équation intégrale suivante

$$
u_n(x)=\frac{\sinh\sqrt{\omega}(1-x)}{\sinh\sqrt{\omega}}d_0-\int_0^1 k_{\sqrt{\omega}}(x,s)\left(f(s)-A_n(s)u_n(s)\right)ds,
$$

ou bien

$$\begin{aligned} & u_n(x) - \int_0^1 k_{\sqrt{\omega}}(x,s) A_n(s) u_n(s)\, ds \\ = & \frac{\sinh \sqrt{\omega}(1-x)}{\sinh \sqrt{\omega}} d_0 - \int_0^1 k_{\sqrt{\omega}}(x,s) f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'inverser car

$$\begin{aligned} \|A_n(s)\|_{L(E)} &= \left\| -nA(x)(A(x)-nI)^{-1} \right\| \\ &= \left\| -n(A(x)-n+n)(A(x)-nI)^{-1} \right\| \\ &= \left\| -n-n^2(A(x)-nI)^{-1} \right\| \\ &\leq n+Kn \\ &\leq n(1+K) \leq Kn, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 k_{\sqrt{\omega}}(x,s) A_n(s) u_n(s)\, ds \right\|_E \\ \leq\ & Kn \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \left| k_{\sqrt{-z}}(x,s) \right| ds \right) \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E \\ \leq\ & K\frac{n}{\omega} \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E . \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $\omega(n)$ tel que $\dfrac{Kn}{\omega(n)} < 1$.

Proposition 3.7 *Il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ et $n > 0$, $\exists M(n)$ tel que*

$$\|u_n\|_{C(E)} \leq \frac{M(n)}{\omega\left(\|f\|_{C(E)} + \|d_0\|_E \right)}, \ \forall u_n \in C^2(E) \ \text{ avec } u_n(0) = d_0.$$

Preuve :

Par le même raisonnement qu'au paragraphe précèdent, u_n vérifie l'équation intégrale

$$w_n + p_{\omega,n} w_n = F_n(d_0, f), \tag{3.13}$$

où

$$w = Q_n(\cdot)\, u_n(\cdot)$$

et

$$\begin{aligned} p_{\omega,n}w(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1} \\ &\quad \times \left[Q_n(s)^{-1}-Q_n(x)^{-1}\right] Q_n(s)\, u_n(s)\, ds dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n(d_0,f)(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1} d_0 dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1} k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1} f(s)\, ds dz. \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer l'existence d'un $\omega^* > 0$ tel que

$$\|p_{\omega,n}\|_{L(C(E))} \leq \frac{1}{2}, \forall\omega \geq \omega^*.$$

On vérifie que $\exists M(n) > 0$:

$$\|F_n(d_0,f)(x)\|_{C(E)} \leq M(n)\left(\|f\|_{C(E)} + \|d_0\|_E\right),$$

dans ce cas la solution u_n donnée par

$$u_n(x) = (A_n(x)-\omega I)^{-1}(1+p_{\omega,n})^{-1} F_n(d_0,f)(x),$$

vérifie

$$\|u_n\|_{C(E)} \leq \frac{M(n)}{\omega\left(\|f\|_{C(E)} + \|d_0\|_E\right)},$$

grâce à l'hypothèse (H_1), d'où le résultat.

Proposition 3.8 *$\exists\omega^* > 0$ tel que $\forall\omega \geq \omega^*$et $\forall n > 0$, il existe une unique solution du problème approché* (3.11) *donnée pour tout $x \in [0,1]$ par*

$$u_n(x) = (A_n(x)-\omega I)^{-1}(1+p_{\omega,n})^{-1} F_n(d_0,f)(x).$$

Proposition 3.9 *Soient $d_0 \in D_{A(0)}$ et $f \in C^\beta(E)$ tels que*

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\, d_0 \in \overline{D_{A(0)}} \\ f(1) \in \overline{D_{A(1)}} \end{cases}.$$

Alors

$$F_n(d_0, f) \longrightarrow F(d_0, f) \text{ dans } C(E).$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}
& F_n(d_0, f)(x) - F(d_0, f)(x) \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} d_0 dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} d_0 dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s) Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1}[f(s) - f(x)] ds dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}[f(s) - f(x)] ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1}}{z} f(x) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-x)}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}}{z} f(x) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1}}{z} f(x) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}}{z} f(x) dz \\
= \; & \sum_{i=1}^{8} I_i.
\end{aligned}$$

D'autre part en utilisant l'identité suivante

$$\begin{aligned}
& Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} - Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} \\
= \; & \frac{-z}{n+z} Q(x)\left(Q(x) - \frac{zn}{n+z}\right)^{-1} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1},
\end{aligned}$$

où $(Q_n(x))_{x\in[0,1]}$ est la famille des approchants de yosida de $(Q(x))_{x\in[0,1]}$.
on aura par exemple pour $I_3 - I_4$ que

$$\begin{aligned}
& I_3 - I_4 \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\,\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x) - \frac{zn}{n+z}I\right)^{-1} Q(x)\left(Q(x) - zI\right)^{-1}\left[f(s) - f(x)\right] dsdz.
\end{aligned}$$

par les lemmes 1.5 et 1.7 on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| I_3 - I_4 \right\|_E & \leq K\int_\gamma \frac{|z|}{|n+z|}\frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\beta}{2}}}\left\| f\right\|_{C^\beta(E)} \\
& \leq \frac{K}{n^{\frac{\beta}{2}}}\left\| f\right\|_{C^\beta(E)} \longrightarrow 0, .n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Pour les autres intégrales on utilise le même découpage que pour le second membre $F(d_0, f)$ et le résultat de sa continuité (voir proposition 3.3).

Proposition 3.10 *Pour tout* $\omega \geq \omega^*$, *on a :*

1. Pour tout $v \in C(E)$, $P_{\omega,n}v \longrightarrow P_\omega v$, quand $n \longrightarrow \infty$.
2. Pour tout $n > 0$ et $v \in C(E)$, $(I + P_{\omega,n})^{-1} v \longrightarrow (I + P_\omega)^{-1} v$, $\forall v \in C(E)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Preuve :

1. Pour tout $x \in [0,1]$, $w \in C([0,1]; E)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(x,s)\, zQ_n(x)\left(Q_n(x) - zI\right)^{-1} \times \left[Q_n(s)^{-1} - Q_n(x)^{-1}\right] Q_n(s)\, u_n(s)\, dsdz \right\|_E \\
\leq \; & K\sum_{i=1}^m \int_\gamma |z| \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \left| k_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| |x-s|^{\alpha_i} ds \right) \frac{1}{|z+\omega|^{\rho_i}} \left\| w\right\|_{C(E)} \\
\leq \; & K\sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\rho_i}} \left\| w\right\|_{C(E)} \\
\leq \; & K\left\| w\right\|_{C(E)},
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de la convergence dominée et le fait que

$$\begin{aligned}
& Q_n(x)\left(Q_n(x) - zI\right)^{-1}\left[Q_n(s)^{-1} - Q_n(x)^{-1}\right] \\
\longrightarrow \; & Q(x)\left(Q(x) - zI\right)^{-1}\left[Q(s)^{-1} - Q(x)^{-1}\right], \; n \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

on obtient le résultat.

2. On écrit pour tout $v \in C(E)$

$$\begin{aligned} & (I+P_{\omega,n})^{-1} v - (I+P_\omega)^{-1} v \\ = \;& (I+P_{\omega,n})^{-1} \left[v - (I+P_{\omega,n})(I+P_\omega)^{-1} v \right] \\ = \;& (I+P_{\omega,n})^{-1} \left[P_\omega v - P_{\omega,n} v \right] (I+P_\omega)^{-1} v \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

d'après le premier point.

Théorème 3.3 *On suppose* (H_1) *et* (H_2). *Soient* $f \in C(E)$ *et* $d_0 \in D_{A(0)}$ *tels que*

$$\begin{cases} f(0) - A(0) d_0 \in \overline{D_{A(0)}} \\ f(1) \in \overline{D_{A(1)}} \end{cases}.$$

Alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $\omega \geq \omega^*$, u *donnée par*

$$u(x) = (A(x) - \omega I)^{-1} (1+P_\omega)^{-1} F(d_0, f)(x),$$

est l'unique solution stricte du problème (3.7).

Preuve :
Soit $\omega^* > 0$ défini dans la proposition 3.7. On pose pour $\omega \geq \omega^*$

$$u(x) = (A(x) - \omega I)^{-1} (1+P_\omega)^{-1} F(d_0, f)(x),$$

et soit

$$u_n(x) = (A_n(x) - \omega I)^{-1} (1+P_{\omega,n})^{-1} F_n(d_0, f)(x).$$

Alors u_n est solution du problème approché (3.11) d'après la proposition 3.8 et de plus u_n est dans l'espace $C^2(E)$, de plus d'après la proposition 3.9 et le deuxième point de la proposition 3.10 et puisque

$$(A_n(x) - \omega I)^{-1} \longrightarrow (A(x) - \omega I)^{-1},\ n \longrightarrow \infty,$$

on aura

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } C(E),\ n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} u_n''(x) &= f(x) - (A_n(x) - \omega) u_n(x) \\ &= f(x) - (1+P_{\omega,n})^{-1} F_n(d_0, f)(x), \end{aligned}$$

donc par passage à la limite on obtient que

$$\begin{aligned} u_n''(x) &\longrightarrow f(x) - (1+P_\omega)^{-1} F(d_0, f)(x) \\ &= f(x) - (A(x) - \omega) u(x), \end{aligned}$$

d'où

$$u_n''(x) = f(x) - (A(x) - \omega) u(x).$$

Chapitre 4

Exemple concret

On considère le problème concret suivant

$$(P_C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)-\omega u(x,y)=f(x,y) \\ u(0,y)=d_0,\ y\in\left]0,1\right[\\ u(1,y)=d_1,\ y\in\left]0,1\right[\\ u(x,0)=0,\ x\in\left]0,1\right[\\ a(x)\,u(x,1)+b(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1)=0, \end{cases}$$

où ω est un paramètre spectrale positif, $f\in C([0,1]\times[0,1])$, d_0, d_1 données, a et b étant deux fonctions réelles positives dans $C^{1+\nu}[0,1]$ $(0<\nu<1)$ vérifiant

$$\inf_{x\in[0,1]}(a(x)+b(x))>0,\ x\in[0,1].$$

On rappelle que

$$g\in C^{1+\nu}[0,1]\Longleftrightarrow g\in C^1[0,1]\ \text{ et } g'\in C^{\nu}[0,1].$$

Soit $E=C([0,1])=C([0,1];\mathbb{C})$. On définit la famille $(A(x))_{x\in[0,1]}$ par

$$\begin{cases} D_{A(x)}=\{u\in C^2[0,1]\diagup u(0)=0,\ a(x)\,u(1)+b(x)\,u'(1)=0\} \\ A(x)\,u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y). \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\begin{cases} \overline{D_{A(x)}}=\{u\in C[0,1]\diagup u(0)=u(1)=0,\ \text{si } b(x)=0\}\neq D_{A(x)} \\ \overline{D_{A(x)}}=\{u\in C[0,1]\diagup u(0)=0,\ \text{si } b(x)\neq 0\}\neq D_{A(x)}. \end{cases}$$

En utilisant la notation vectorielle usuelle suivante

$$\begin{cases} u\left(x,y\right) = u\left(x,\cdot\right)\left(y\right) = u\left(x\right)\left(y\right) \\ f\left(x,y\right) = f\left(x,\cdot\right)\left(y\right) = f\left(x\right)\left(y\right) \end{cases},$$

alors le problème (P_C) s'écrit sous la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + A\left(x\right)u\left(x\right) - \omega u\left(x\right) = f\left(x\right) \\ u\left(0\right) = d_0 \\ u\left(1\right) = d_1. \end{cases}$$

On a le théorème suivant

Théorème 4.1 $\left(A\left(x\right)\right)_{x\in[0,1]}$ *est une famille d'opérateurs linéaires fermés vérifiant les deux hypothèses* (H_1) *et* (H_2).

Preuve :

Il est clair que la famille $\left(A\left(x\right)\right)_{x\in[0,1]}$ est linéaire fermé.

– Vérification de l'hypothèse (H_1) :

Si $\lambda \in S_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg\lambda| \leq \theta_0\}$ avec $0 < \theta_0 < \pi$, alors la solution du problème

$$\begin{cases} u''(y) - \lambda u(y) = g(y),\ y \in [0,1] \\ u\left(0\right) = 0 \\ a\left(x\right)u\left(1\right) + b\left(x\right)u'\left(1\right) = 0,\ x \in [0,1] \end{cases}$$

s'écrit sous la forme

$$u\left(y\right) = \int_0^1 k_\lambda^x\left(y,s\right)g\left(s\right)ds,$$

où

$$k_\lambda^x\left(y,s\right) = \begin{cases} \dfrac{\left[a\left(x\right)\sinh\sqrt{\lambda}\left(1-y\right) + b\left(x\right)\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}\left(1-y\right)\right]\sinh\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}\left[a\left(x\right)\sinh\sqrt{\lambda} + b\left(x\right)\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}\right]} & \text{si } s \leq x \\ \dfrac{\left[a\left(x\right)\sinh\sqrt{\lambda}\left(1-s\right) + b\left(x\right)\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}\left(1-s\right)\right]\sinh\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}\left[a\left(x\right)\sinh\sqrt{\lambda} + b\left(x\right)\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}\right]} & \text{si } x \leq s \end{cases}.$$

Donc pour tout $f \in C\left([0,1]\right)$

$$\left\|\left(A\left(x\right) - \lambda I\right)^{-1}g\right\|_E \leq \|g\|_E \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 \left|k_\lambda^x\left(y,s\right)\right| ds.$$

En posant $\mu = \operatorname{Re}\sqrt{\lambda}$, $\psi = \operatorname{Im}\sqrt{\lambda}$ on a $\mu > 0$ et

$$\begin{aligned}
&\left|k_\lambda^x(y,s)\right| \\
\leq\ & \begin{cases} \dfrac{\cosh \mu s}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \cosh \mu (1-y) \dfrac{a(x) + \left|\sqrt{\lambda}\right| b(x)}{\left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b(x) \cosh\sqrt{\lambda}\right|} & \text{si } s \leq y \\ \dfrac{\cosh \mu x}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \cosh \mu (1-s) \dfrac{a(x) + \left|\sqrt{\lambda}\right| b(x)}{\left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b(x) \cosh\sqrt{\lambda}\right|} & \text{si } s \geq y \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|k_\lambda^x(y,s)\right| ds \quad &\leq \quad \left[\sinh \mu y \cosh \mu(1-y) + \cosh \mu y \sinh \mu (1-y)\right] \\
&\quad \times \frac{a(x) + \left|\sqrt{\lambda}\right| b(x)}{\mu \left|\sqrt{\lambda}\right| \left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b(x) \cosh\sqrt{\lambda}\right|} \\
&= \quad \frac{\sinh \mu}{\mu\left|\sqrt{\lambda}\right|} \frac{a(x) + \left|\sqrt{\lambda}\right| b(x)}{\left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b(x) \cosh\sqrt{\lambda}\right|}.
\end{aligned}$$

D'autre part, un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
& \left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b(x) \cosh\sqrt{\lambda}\right| \\
= \ & \left| \frac{\exp\mu}{2} \left[(a(x) + \mu b(x)) \cos\psi - \psi b(x) \sin\psi\right] \right. \\
& + i \frac{\exp\mu}{2} \left[(a(x) + \mu b(x)) \sin\psi - \psi b(x) \cos\psi\right] \\
& + \frac{\exp(-\mu)}{2} \left[(\mu b(x) - a(x)) \cos\psi + \psi b(x) \sin\psi\right] \\
& \left. + i \frac{\exp(-\mu)}{2} \left[(a(x) - \mu b(x)) \sin\psi + \psi b(x) \cos\psi\right] \right| \\
\geq \ & \left| \frac{\exp\mu}{2} \left[(a(x) + \mu b(x)) \cos\psi - \psi b(x) \sin\psi\right] \right. \\
& \left. + i \frac{\exp\mu}{2} \left[(a(x) + \mu b(x)) \sin\psi - \psi b(x) \cos\psi\right] \right| \\
& - \left| \frac{\exp(-\mu)}{2} \left[(\mu b(x) - a(x)) \cos\psi + \psi b(x) \sin\psi\right] \right. \\
& \left. + i \frac{\exp(-\mu)}{2} \left[(a(x) - \mu b(x)) \sin\psi + \psi b(x) \cos\psi\right] \right| \\
= \ & \frac{\exp\mu}{2} \left[(a(x) + \mu b(x))^2 - \psi^2 (b(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
& - \frac{\exp(-\mu)}{2} \left[(a(x) - \mu b(x))^2 - \psi^2 (b(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
\geq \ & \sinh\mu \left[a(x)^2 + \mu^2 (b(x))^2 + 2\mu a(x) b(x)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Alors
$$\left|a(x)\sinh\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}b(x)\cosh\sqrt{\lambda}\right|\geq\sinh\left[a(x)+\mu b(x)\right],$$
et par conséquent
$$\begin{aligned}\int_0^1\left|k_\lambda^x(y,s)\right|ds &\leq \frac{\sinh\mu}{\mu\left|\sqrt{\lambda}\right|}\frac{a(x)+\left|\sqrt{\lambda}\right|b(x)}{\sinh\mu\left[a(x)+\mu b(x)\right]}\\ &\leq \frac{1}{\mu\left|\sqrt{\lambda}\right|}=\frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\left|\lambda\right|^{\frac{1}{2}}}\\ &\leq k\frac{1}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

– Vérification de l'hypothèse (H_2) :
Pour la vérification de l'hypothèse (H_2) on prend le cas particulier
$$a(x)=1,\ b(x)=1+x^{1+\nu},\ 0<\nu<1,$$
et on utilise le lemme suivant

Lemme 4.1 *Soient $z\in\mathbb{C}$ et $g\in C([0,1];\mathbb{C})$. Alors pour tout $x\in[0,1]$, $\lambda\in S_{\theta_0}$, il existe une solution unique $u\in C^2([0,1],\mathbb{C})$ du problème*
$$\begin{cases}u''(x)-\lambda u(x)=g(x),\ x\in[0,1]\\ u(0)=0\\ u(1)+b(x)u'(1)=z,\end{cases}\tag{4.1}$$
de plus on a pour tout $\lambda\in S_{\theta_0}$
$$\begin{aligned}&\left[1+|\lambda|\right]\|u\|_\infty+\left[1+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right]\|u'\|_\infty+\|u''\|_\infty\\ \leq\ & C\left\{\|g\|_\infty+\left[1+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right]|z|\right\},\end{aligned}$$
où C dépend que de θ_0.

(pour ce lemme voir [2], proposition 3.1)
Soient $0\leq s<x\leq 1$ et $f\in E$.
On pose
$$\begin{cases}v=A(s)^{-1}f\\ u=(A(x)-z)^{-1}\left[A(s)-z\right]v.\end{cases}$$
Alors v et u sont les solutions respectives des problèmes
$$\begin{cases}v''=f & \text{dans }[0,1]\\ v(0)=0\\ v(1)+b(s)v'(1)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}u''-zu=v''-zv & \text{dans }[0,1]\\ u(0)=0\\ u(1)+b(x)u'(1)=0.\end{cases}$$

De plus on peut écrire que

$$\begin{aligned}
& A\left(x\right)\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\left[A\left(x\right)^{-1}-A\left(s\right)^{-1}\right]f \\
= \;& A\left(x\right)\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\left[A\left(x\right)^{-1}A\left(s\right)-I\right]A\left(s\right)^{-1}f \\
= \;& A\left(x\right)\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}A\left(x\right)^{-1}A\left(s\right)A\left(s\right)^{-1}f-A\left(x\right)\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}A\left(s\right)^{-1}f \\
= \;& \left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\left(A\left(s\right)-z+z\right)A\left(s\right)^{-1}f-\left(A\left(x\right)-z+z\right)\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}A\left(s\right)^{-1}f \\
= \;& \left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\left(A(s)-z\right)A\left(s\right)^{-1}f+z\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}A\left(s\right)^{-1}f \\
& -\left(I+z\left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\right)^{-1}A\left(s\right)^{-1}f \\
= \;& \left(A\left(x\right)-z\right)^{-1}\left(A(s)-z\right)A\left(s\right)^{-1}f-A\left(s\right)^{-1}f \\
= \;& u-v=w.
\end{aligned}$$

On vérifie que w est solution du problème

$$\begin{cases} w''-zw=0 & \text{dans } [0,1] \\ w\left(0\right)=0 \\ w\left(1\right)+b\left(x\right)w'\left(1\right)=\left[b\left(s\right)-b\left(x\right)\right]v'\left(1\right). \end{cases}$$

En appliquant le lemme 4.1, on déduit que

$$\begin{aligned}
\left[1+|z|\right]\|w\|_{C(E)} &\leq C\left[1+|z|^{\frac{1}{2}}\right]\left|b\left(s\right)-b\left(x\right)\right|\left|v'\left(1\right)\right| \\
&\leq C\left[1+|z|^{\frac{1}{2}}\right]\left(x-s\right)^{1+\nu}\|f\|_{C(E)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|w\|_{C(E)} &\leq C\frac{1+|z|^{\frac{1}{2}}}{1+|z|}\left(x-s\right)^{1+\nu}\|f\|_{C(E)} \\
&\leq C\frac{1+|z|^{\frac{1}{2}}}{|z|}\left(x-s\right)^{1+\nu}\|f\|_{C(E)} \\
&\leq C\left[\frac{1}{|z|}+\frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}}\right]\left(x-s\right)^{1+\nu}\|f\|_{C(E)} \\
&\leq C\frac{\left(x-s\right)^{1+\nu}}{|z|}\|f\|_{C(E)}+C\frac{\left(x-s\right)^{1+\nu}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{C(E)},
\end{aligned}$$

alors l'hypothèse (H_2) est vérifiée avec ($\alpha_1=1+\nu$ et $\rho_1=1$, $\alpha_2=1+\nu$ et $\rho_2=\frac{1}{2}$). Ainsi tout les résultats précédents peuvent s'appliquer.

Bibliographie

[1] **Acquistapace P., Terreni B. :** *Some Existence and Regularity Results for Abstract Non-Autonomous Parabolic Equations,* J. Math. Anal., Vol. 99, No 1, (1984), pp. 9-64.

[2] **Acquistapace P., Terreni B. :** *A unified approach to abstract linear non autonomous parabolic equations,* Rend. Sem. Math. Univ. Padova., Vol. 78, (1987), pp. 47-107.

[3] **Balakrishnan A.V.** : *Fractional powers of closd operators and the semigroups genrated by them*, Pacif. J. Math. 10, pp 419-437 , 1960.

[4] **Belhamiti, O. :** *Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince.* Thèse de Doctorat, Université du Havre (2008).

[5] **Da Prato G. et Grisvard P. :** *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser., 54, (1975), pp. 305-387.

[6] **Grisvard P. :** *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications.*j.Math.pures et appli.45 (1966) 144-290.

[7] **Haase M. :** *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods,* Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.

[8] **Krein S.G. :** *Linear Differential Equations in Banach Spaces.* Moscou, *1967.*

[9] **Labbas R. :** *Problèmes aux Limites pour Une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[10] **Labbas R., Terreni B. :** *Sommes d'Opérateurs de Type Elliptique et Parabolique*, 1ère Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7), (1987), pp. 545-569.

[11] **Labbas R., Terreni B. :** *Sommes d'Opérateurs Linéaires de Type Elliptique et Parabolique*, 2ème Partie. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7), (1988), pp. 141-162.

[12] **Lion J.L., Peetre J. :** *Sur une classe d'espaces d'interpolation,* Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math. vol. 19. pp 5-86. (1964).

[13] **Sinestrari E. :** *On the abstract cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions.* J. Math. Anal. 66, 16-66 (1985).