REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE l'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté par

Benkerda noureddine

Pour Obtenir

LE DIPLÔME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Intitulé:

Sur un Problème de Réalisation de Système LTI

Soutenu le 26/06 / 2012

Devant les membres du jury :

Président:	GHEZZAR MOHAMED AMINE	MA	UMAB
Encadreur:	BOUAGADA DJILALLI	MCA	UMAB
Examinateurs:	DJILLALI LAID	MA	UMAB

Année universitaire : 2011-2012

Table des Matières

Dédicaces de Noureddine

Je dédie ce modeste travail à mes très chèrs parents dont le rêve a toujours était de me voir réussir, Qu'ils sachent que leur places dans mon cœur et ma pensée, reste et demeure immense

A toute ma grande famille 'BENKERDA', et spécialement à "mon cher père, ma très chère mère , mon frère et mes soeurs".

A mon encadreur Monsieur BOUAGADA DJILALI pour son aide et comprehenssion aussi

A Tous mes amis pour les agréables moments que nous avons passés ensemble et quirestont des souvenirs inoubliables. . . .

A tous mes amis sans exception

A toute la promotion LMD de mathématiques

Remerciements

Je dois en premier lieu un énorme remerciement à mon dieu qui m'a donné la force de terminer mes études.

Je remercie tout particulièrement mes parents pour leur présence et leur soutien tout ou long de mes études.

J'addresse mes profonds et sincères remerciement à mes encadreur Monsieur BOUAGADA DJILALI qui m'a accordé son assistance absolue dés le commencement de ce humble travail tout en me dirigeant, il m'a permis ainsi de finaliser cette réalisation.

Je remercie doublement Monsieur GHEZZAR MOHAMED AMINE , d'abord car il a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur DJILLALI LAID , pour avoir acceptée d'examiner ce modeste travail.

Je tiens aussi a exprimer mes remerciements à tous mes enseignants de Mathématiques.

Je suis reconnaissant à tout le personnel du département de Mathématiques.

Merci à toutes les personnes qui ont participés de près ou de loin à l'enrichissement de la présente étude.

Introduction

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique. En grande partie, ce progrès est dû au développement qu'à connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes.

Dans notre travail, on s'intéresse à la classe des systèmes linéaires à temps continu. Notons que lorsqu'un tel système est décrit par une équation de sortie spécialement par sa fonction de transfert, l'une des questions posé est : Peut-on déterminer un modèle d'état qui génère cette fonction de transfert, dans ce cas, cette description est-elle unique. Un second problème qui attire notre attention est l'extension de ces techniques aux cas des systèmes linéaires singuliers. Dans notre étude, on s'intéresse au cas SISO (Single Input-Single Output) qui veut dire système à une seule entrée et une seule sortie. L'extension au cas des systèmes MIMO (Multi Input-Multi Output en français plusieurs entrée-plusieurs sortie) fera l'objet d'une perspective. Dans la dernière partie de ce mémoire l'accent est mis sur une nouvelle classe de systèmes qui est la classe des systèmes positifs, ce sont des systèmes dont la principale propriété est que si l'état initial est positif (ou au moins non négatif), alors la trajectoire d'état si situe dans l'orthant non négatif. Des caractérisations pour qu'une réalisation positive existe seront alors établies dans le cas SISO.

Chapitre 1

Notions de base

L'objectif de ce chapitre dans un premier temps est de mettre en évidence les bases théoriques et les principales définitions et propriétés servant à rendre service à notre étude.

Un aperçu sur la transformée de Laplace et ses propriétés sera bénéfique pour les chapitres qui vant suivre.

1.1 Transformée de Laplace

Pour les besoins de l'étude de la solvabilité des systèmes, nous rappelons dans ce qui suit un outil très puissant qui est la transformée de Laplace pour le cas des systèmes à temps continu et la Z-transformée pour le cas discret.

Définition 1.1.1 *La transformation de Laplace est une appliction qui à une fonction $f(t)$ de l'espace des temps, est associée une fonction $F(\lambda)$ de l'espace des phases telle que:*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) f(t) dt, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}$$

Si $\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace, on note $F = \mathcal{L}(f)$ et alors $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$; on utilise de même la notion suivante $F \subset f$..

On dit que F est la transformée de f et que f est l'original de F.

Remarque 1 *La transformée de Laplace et son inverse sont linéaires et cette propriété de linéarisation nous permet de trouver plus facilement la transformée de Laplace d'une fonction* *en la décomposant comme une combinaison des transformées de fonctions plus simples.*

Nous rappelons cependant quelques propriétés utiles:

1- $\mathcal{L}(f\acute{}(t)) = \lambda\mathcal{L}(f(t)) - f(0);$ *pour* $\lambda > a$.

2- $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \lambda^n\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda^k f^{(n-1-k)}(0).$

1.2 Convolution

Théorème 1.2.1 *Soitent* f *et* g *deux fonctions de* $L^1(R)$*, la convolée de* f *par* g *notée* $f*g$ *est définie par :*

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx$$

1.3 Le modèle

Définition 1.3.1 *Un modèle est une déscription mathématique du comportement du système. Dans le carde des modèles linéaires nous allons rencontré essentiellement trois types de modèles:*

1. *La forme différentielle entrée-sortié*
2. *La matrice de transfert*
3. *L'équation d'état*

Chapitre 2

Représentation d'éspace d'état de système LTI standards

Une classe particulière dont l'importance pratique est remarquable est celle des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles linéaires.

On parle alors de systèmes linéaires, dans le cas contraire un processus de linéarisation est alors nécessaire.

Pour accomplir cette section, nous avons eu recours à différents ouvrage [1] , [2] , et [3] .

2.1 Représentation d'éspace d'état

Considérons dans un premier temps un système de type:

$$\dot{x} = f(t; x; u) \tag{2.1.1}$$

$$y = g(t; x; u) \tag{2.1.2}$$

avec $x \in R^n;\ y \in R^p;\ u \in R^m$ telle que la fonction f est définie de RxR^nxR^m vers R^n et la fonction g est définie de RxR^nxR^m vers R^p; t est le temps, u et y désingent l'entrée et la sortie du système respectivement.

L'equation (2.1.1) est appelée l'équation d'état et (2.1.2) est appelée l'equation de sortie.

et (2.1.1) constitue la decription de l'espace d'état à temps continu.

Si on pose

$$f(t,x,u) = F(t;X)$$

l'équation dans (2.1.1) est cependant sons la forme:

$$\dot{x} = F(t;x) \tag{4}$$

l'application du théorème d'existence et d'unicité nous assure la solution.

Cas particulier: On considère le système décrit par:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u & (2.1.3) \\ y &= C(t)x + D(t)u & (2.1.4) \end{aligned}$$

tels que: $A \in M(R, R^{n\times n}),\ B \in M(R, R^{n\times m}),\ C \in M(R, R^{p\times n}),\ D \in M(R, R^{p\times m})$.

Alors si on pose

$$f(t,x,u) = A(t)x + B(t)u$$

l'existence et l'uncite des solutions est ce pendant assuré, voir [3]

d'où, pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $u : R \to R^m$, le système (2.1.3) possède une solution unique et cette solution est donné par:

$$\phi(t, t_0, x_0) = \psi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi(t,s)B(s)u(s)ds \tag{2.1.5}$$

où $\psi(t, t_0)$ la matrice de transition d'état du système.

En utilisant (2.1.4) et (2.1.5) nous obtenons la sortie du système,

$$y(t) = c(t)\psi(t,t_0)x_0 + c(t)\int_{t_0}^{t} \psi(t,s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t) \tag{2.1.6}$$

Si maintenant on considère le cas où: $A(t) \equiv A,\ B(t) \equiv B,\ C(t) \equiv C$, et $D(t) \equiv D$, autrement dit le cas des matrices à coefficients constants, le système (2.1.3) et (2.1.4) devient

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1.7}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.1.8}$$

et alors la solution de (2.1.7) est donné par,

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{2.1.9}$$

par suite la réponse est donné par,

$$y(t) = c(t)e^{A(t-t_0)}x_0 + c(t)\int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0)}Bu(s)ds + Du(t). \tag{2.1.10}$$

Chapitre 3

Réalisation d'espace d'état d'un système LTI

Dans cette partie, l'accent est mis sur la représentation d'état d'un système LTI, et on s'intéresse à la recherche de technique pratique pour réaliser un système LTI. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes [3] , [4] , [5] .

3.1 Equation d'état - Fonction de Transfert:

On considère un système (modèle) de type:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec $x(t_0) = x_0$ (par exemple).

On s'intèresse dans notre étude au système (3.1.1) type SISO qui représente un système à une seule entrée et une seule sortie (Single Input-Single Output) et de conditions initiales nulles.

Moyennant la transformée de Laplace, ou trouve pour: $X(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))$

$$\lambda X(\lambda) = AX(\lambda) + BU(\lambda) \tag{3.1.2}$$

$$Y(\lambda) = CX(\lambda) + DU(\lambda) \tag{3.1.3}$$

A partir de (3.1.2), il s'ensuit $(\lambda I - A)X(\lambda) = BU(\lambda)$, le faisceau $(\lambda I - A\ )$ est réglier, alors

$$X(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}BU(\lambda) \tag{3.1.4}$$

Par suite pour (3.1.4) dans (3.1.3), nous avons,

$$Y(\lambda) = (C(\lambda I - A)^{-1}B + D)U(\lambda)$$

$$Y(\lambda) = H(\lambda)U(\lambda)$$

de cela on peut avoir $y(t)$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda)U(\lambda)) \\ &= (h * u)(t) \end{aligned}$$

la fonction matricielle est appellée fonction de transfert du système, la fonction matricielle $H(\lambda)$ est cepandant définie par

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1}B + D \\ &= C\frac{adj(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}B + D \end{aligned}$$

Si on pose $\det(\lambda I - A) = Q(\lambda)$ alors,

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= C\frac{adj(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}B + D \\ &= C\frac{adj(\lambda I - A)B + DQ(\lambda)}{Q(\lambda)} \end{aligned}$$

Notons alors:

$$H(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.1.5}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les zéros du polynôme caractéristique,

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= Q(\lambda) \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

qui sont donc les valeurs propres de la matrice A.

3.2 Fonction de transfert strictement propre $(m < n)$

Nous avons d'après (3.1.5)

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \\ &= \frac{a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m}{b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n} \qquad \text{telle que } m < n \end{aligned}$$

Sans perdre de généralité, prenons le cas où $a_m = 1$, alors,

$$H(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\Pi_{i=1}^{n}(\lambda - s_i)}$$

Nous distinguons deux catégories,

3.2.1 Pôles distincts

Dans ce cas il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples,

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &= H(\lambda)U(\lambda) \\ &\Rightarrow H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{U(\lambda)} \end{aligned}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(\lambda - s_i)} U(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i(\lambda) \end{aligned}$$

telle que:

$$\frac{\alpha_i}{(\lambda - s_i)} U(\lambda) = X_i(\lambda) \quad , \ i = 1, \ldots, n$$

ou encore

$$\alpha_i U(\lambda) = \lambda X_i(\lambda) - s_i X_i(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda X_i(\lambda) = \alpha_i u(\lambda) + s_i X_i(\lambda)$$

Par appliquation de la transformation inverse de Laplace, il vient

$$\mathcal{L}^{-1}(\lambda X_i(\lambda)) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha_i U(\lambda)) + \mathcal{L}^{-1}(s_i X_i(\lambda))$$

Par conséquent

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i u(t) + s_i x_i(t) \quad , \forall \ i = 1, \ldots, n$$

Posons : $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ dans ce cas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

une réalisation de ce type est dite diagonale car la matrice d'evolution A est diagonal.

Exemple 1 *Soit la fonction de transfert définie par,*

$$H(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)}$$

Question: Réaliser cette fonction de transfert.

Réponse à la question:

Nous avons,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)} &= \frac{A}{\lambda}+\frac{B}{\lambda+1}+\frac{C}{\lambda-1}\\ &= \frac{A(\lambda^2-1)+B\lambda(\lambda-1)+C\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)}\\ &= \frac{(A+B+C)\lambda^2+(C-B)\lambda-A}{\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)}\end{aligned}$$

soit alors;

$$\left\{\begin{array}{c} -A=1\\ C-B=0\\ A+B+C=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A=-1\\ C=B\\ -1+2B=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A=-1\\ B=\frac{1}{2}\\ C=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

d'où,

$$\frac{1}{\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{-1}{\lambda}+\frac{1}{2(\lambda+1)}+\frac{1}{2(\lambda-1)}$$

de plus,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\lambda}U(\lambda) &= X_1(\lambda) \Rightarrow -U(\lambda)=\lambda X_1(\lambda)\\ \frac{1}{2(\lambda+1)}U(\lambda) &= X_2(\lambda) \Rightarrow U(\lambda)=2\lambda X_2(\lambda)+2X_2(\lambda)\\ \frac{1}{2(\lambda-1)}U(\lambda) &= X_2(\lambda) \Rightarrow U(\lambda)=2\lambda X_2(\lambda)-2X_2(\lambda)\end{aligned}$$

et si on applique la transformée inverse de laplace ($\mathcal{L}^{-1}$), *on trouve,*

$$\begin{aligned}-\dot{x}_1(t) &= u(t)\\ 2\dot{x}_2(t)+2x_2(t) &= u(t)\\ 2\dot{x}_3(t)+2x_3(t) &= u(t)\end{aligned}$$

Par conséqent,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= [-1\ 1\ 2]
\end{aligned}$$

tel que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad C = [-1\ 1\ 2]$$

3.2.2 Pôles multiples

Pour le cas où la fonction de transfert possède un pôle d'ordre de multiplicité supérieur à 1, nous allons considérer dans toute la suite le cas d'un pôle λ de multiplicité n, cela pour mieux comprendre la situation alors pour,

$$Y(\lambda) = H(\lambda)U(\lambda)$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
Y(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(\lambda - s)^i} U(\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_{n+1-i}(\lambda)
\end{aligned}$$

pour $i = 1$, nous avons cependant la premier terme qui est:

$$\frac{\alpha_1}{(\lambda - s)} U(\lambda) = X_n.$$

Les autres termes sont tels que:

$$\begin{aligned} X_{j-1}(\lambda) &= \frac{U(\lambda)}{(\lambda - s)^j} \\ &= \frac{X_j(\lambda)}{\lambda - s} \end{aligned}$$

et si on applique la transformée inverse de laplace $\left(\mathcal{L}^{-1}\right)$, on trouve,

$$\dot{x}_{j-1} = sx_{j-1} + x_j \quad , \quad j \in \{2, \ldots, n\}$$

Ce qui conduit à la réalisation suivante:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = [\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1]$$

Remarque 2 *Dans la cas où la fonction H possède des pôles d'ordre de multiplicités diverses, il suffit d'associer les deux cas vus précedemment.*

3.3 Réalisations de formes compagnes

Dans le cas du système (3.1.1) avec $a_m = 1$, les deux formes dites "compagnes" les plus remarquables sont:

3.3.1 Cas de la Forme horizontale:

Une réalisation de forme horizontale a la forme,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= [b_0, \dots, b_m, 0, \dots, 0] \; x.
\end{aligned}
$$

3.3.2 Cas de la Forme verticale:

Nous avons la même forme où les coefficients $a_i \;\; i = 0, ..., n-1$ se logent veticalement

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \\
y &= [1 \; 0 \; \dots 0] \; x \; .
\end{aligned}
$$

3.4 Des fonctions de transfert non strictement propre:

Dans le cas où $m = n$, il est impossible d'appliquer directement les techniques ci-dessus, pour obtenir une réalistaion du système mais l'on peut se ramener au cas d'une fonction de transfert strictement propre en opérant une division polynômiale de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
H(\lambda) &= \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \\
&= \frac{R(\lambda)}{D(\lambda)} + Q \\
&= H_{p_r}(\lambda) + Q
\end{aligned}
$$

pour $m = n,\ Q = cst$,

$R(\lambda)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur $D(\lambda)$.

$H_{p_r}(\lambda)$ est une fonction de transfert strictement propre.

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
Y(\lambda) &= H(\lambda)U(\lambda) \\
&= \frac{R(\lambda)\ U(\lambda)}{D(\lambda)} + Q\ U(\lambda) \\
&= H_{p_r}(\lambda)\ U(\lambda) + Q\ U(\lambda) \\
&= Y_{p_r}(\lambda)\ + Q\ U(\lambda)
\end{aligned}$$

En posant $D = Q$ est en réalisant le changement de variables (dans le domaine temporel): $Y = Y_{p_r} + Du$ il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du,
\end{aligned}$$

qui est la réalisation recherchée et qu'on peut la représenter par $[A,\ B,\ C,\ D]$.

Chapitre 4

Systèmes Positifs

Dans cette partie, l'accent est mis sur une nouvelle classe de systèmes qui est celle des systèmes positifs. La principale propriété de ces modèles est que si d'état initial est positif (ou au moins non négatif), alors la trajectoire d'état si situe dans l'athant non négatif.

Une vue d'ensemble de ces systèmes est donnée dans [8] *et* [9] .

L'objectif de cette section est de rappeler certains concepts élémentaires pour la classe des systèmes positifs.

Nous présentons dans ce qui suit , quelques définitions et propriétés et intéressants des matrices particulières que nous utiliserons lors de notre étude.

Il existe un grand nombre de références sur cette classe de matrices; nous nous basons principalement sur les références suivantes: [2] , [10] etc .....

4.1 Matrices non négatives

Définition 4.1.1 *$A = (a_{ij})_{i,j}$ est une matrice non négative si pour tout $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$; $a_{ij} \geq 0$ autrement dit toues les entrées sont non négatives.*

Nous noterons de telles matrices par: $A \geq 0$ ou encore $A \in \mathbb{R}_+^{nxm}$.

Définition 4.1.2 *A est une matrice positive si A est non négative et s'il existe un $k = 1, ..., n$ et un $l = 1, ..., m$ tel que $a_{kl} > 0$.*

i,e toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive nous noterons une telle matrice par $A >> 0$.

Remarque 3 *Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimensions* n.

Nous caractérisons un système positif par:

Théorème 4.1.1 *Le système (3.1.1) est positif si les matrices* A, B, C *et* D *sont positifs.*

Preuve. Voir [5]. ■

4.2 Réalisations positives de formes compagnes

4.2.1 Cas de la Forme horizontale:

Théorème 4.2.1 *Une réalisation de forme compagne horizontale est une réalisation positive si*

1. $a_i \leq 0 \quad \forall i = 0, ..., n-1$
2. $b_i \geq 0 \quad \forall i = 0, ..., m$

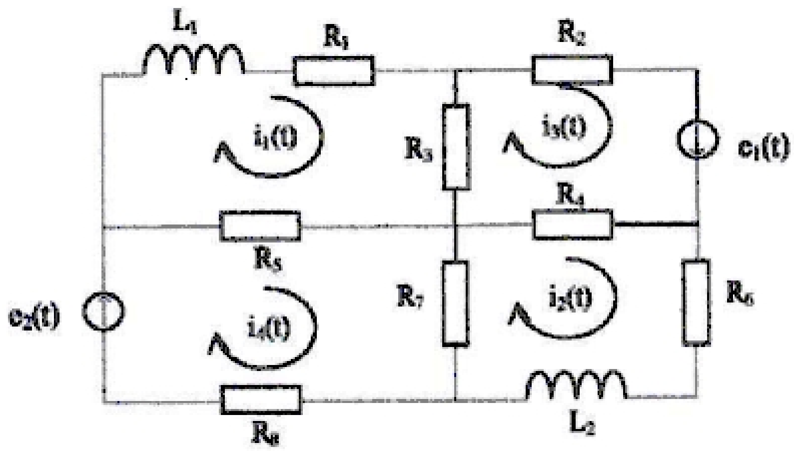
4.2.2 Cas de la Forme verticale:

On a le même résultat que théorème 4.2.1

4.3 Solution des systèmes linéaires singuliers à temps continu

Nous allons dans ce qui suit, nous intéressé à la recherche de la solution de systèmes linéaires singuliers en temps continu moyennant la transformée de Laplace pour enfin adapter les résultats pour les systèmes à temps discrets.

Exemple 2 *Considérons le circuit à quatre mailles représenté par la figure , ci-dessous,*



circuits RL

où les $R_i,\ i = 1, 2, ..., 8$ *sont les résistances données,* L_1, L_2 *les inductances et* e_1, e_2 *les sources de voltages. On note par* $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4$ *les intensités du courant dans les quatre mailles.*

En appliquant la lois des mailles, on obtient alors:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} &= -(R_1 + R_3 + R_5)i_1(t) + R_3 i_3(t) + R_5 i_4(t), \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} &= -(R_4 + R_6 + R_7)i_2(t) + R_4 i_3(t) + R_7 i_4(t), \\ 0 &= R_3 i_1(t) + R_4 i_2(t) - (R_2 + R_3 + R_4)i_3(t) + e_1, \\ 0 &= R_5 i_1(t) + R_7 i_2(t) - (R_5 + R_7 + R_8)i_4(t) + e_2. \end{aligned}$$

et si on pose $x_1 = i_1(t),\ x_2 = i_2(t),\ x_3 = i_3(t),\ x_4 = i_4(t)$, *on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante :*

$$E\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & \frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{24}}{L_2} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & -R_{44} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_3 + R_5, R_{22} = R_4 + R_6 + R_7, R_{24} = R_{42} = R_7 \\ R_{13} &= R_{31} = R_3, R_{14} = R_{41} = R_5, R_{23} = R_{32} = R_4 \\ R_{33} &= R_2 + R_3 + R_4, R_{44} = R_5 + R_7 + R_8 \end{aligned}$$

Nous avons donc un système linéaire singulier.

On considère le système linéaire à temps continu suivant,

$$\begin{cases} E\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où $\dot{x}(t) = \dfrac{\partial x(t)}{\partial t}$ est un vecteur d'état de dimension (n x1)

$u(t)$: est un vecteur d'entrée de dimension (m x1).

$y(t)$: est un vecteur de sortie de dimension (p x1).

A: la matrice d'état de dimension (n x n).

B: la matriced'entrée de dimension (n x m).

C: la matrice de sortie de dimension (n x n).

D: la matrice de couplage de dimension (p x m).

E: la matrice de dimension (n x n).

où E est généralement non inversible.

Définition 4.3.1 *- Le système (4.3.1) est dit singulier si* $\det E = 0$.

- Dans le cas contraire, c'est à dire si : $\det E \neq 0$*, il est dit standard.*

Si $E = I_n$*, le système est aussi appelé standard (ou explicite) Le système (4.3.1) est régulier si seulement si* $\det(\lambda E - A) \neq 0$*, pour un certain nombre* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dans le cas contraire, il est dit singulier.

Remarque 4 *Si* $\det E \neq 0$*, alors en multipliant (4.3.1) par* E^{-1}*, on obtient le système suivant,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

qui est un système explicite.

De même si $E = I_n$ *alors le système (4.3.1) devient:*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

Si on applique la transformée de la Laplace, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E\ \dot{x}) &= \mathcal{L}(Ax) + \mathcal{L}(Bu) \\ E\mathcal{L}(\dot{x}) &= A\mathcal{L}(x) + B\mathcal{L}(u) \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(x(t)) = X(\lambda)$, il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned} E\lambda X(\lambda) &= AX(\lambda) + BU(\lambda) \\ \lambda EX(\lambda) &= AX(\lambda) + BU(\lambda) \\ \lambda EX(\lambda) - AX(\lambda) &= BU(\lambda) \\ X(\lambda)(\lambda E - A) &= BU(\lambda) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Admettons que notre faisceau est régulier et que $x_0 = 0$ donc,

$$X(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1} BU(\lambda) \tag{4.3.3}$$

et même par rapport à l'équation $y(t)$ ou applique la transformé de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(t)) &= \mathcal{L}(Cx(t)) + \mathcal{L}(Du(t)) \\
\mathcal{L}(y(t)) &= C\mathcal{L}(x(t)) + D\mathcal{L}(u(t)) \\
Y(\lambda) &= CX(\lambda) + DU(\lambda) \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

et si on remplace la solution (4.3.3) dans (4.3.4) on trouve;

$$\begin{aligned}
Y(\lambda) &= C(\lambda E - A)^{-1} BU(\lambda) + DU(\lambda) \\
&= (C(\lambda E - A)^{-1} B + D)U(\lambda) \\
&= H(\lambda)U(\lambda)
\end{aligned}$$

telle que

$$H(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1} B + D \tag{4.3.5}$$

La fonction matricielle est appelée fonction de transfert du système (4.3.1).

Autre écriture de $H(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= C(\lambda E - A)^{-1} B + D \\
&= C\frac{adj((\lambda E - A)}{\det(\lambda E - A)} B + D
\end{aligned}$$

si on pose $\det(\lambda E - A) = G(\lambda)$ alors;

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= C\frac{adj((\lambda E - A)}{G(\lambda)} B + D \\
&= \frac{Cadj((\lambda E - A)B + DG(\lambda)}{G(\lambda)}
\end{aligned}$$

En notant;

$$H(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{G(\lambda)}$$

Les pôles de la fonctions de transfert sont les zéros du polynôme caractéristique:

$$D(\lambda) = G(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

qui sont donc les valeurs propres de (E, A).

4.4 Réalisations positives des matrices de transfert d'un système linéaire discret

un système linéaire positif est un système dynamique dont l'espace d'état, l'éspace d'entrée et l'éspace de sortie repose dans l'éspace des nombres réels non négatifs.

Ces systèmes sont utilisés en biomathématiques, sciences économiques, et les systèmes à compartiments.

Considérons le système singulier linéaire à temps discret suivant:

$$\begin{cases} Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \\ y_i = Cx_i + Du_i, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_i \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y_i \in \mathbb{R}$ est le vecteur de ou de sortie et $E,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

On suppose que $\det E = 0$, avec:

$$\det[Ez - A] \neq 0 \quad \textit{pour certains} \ \ z \in \mathbb{C} \ \ (\textit{le champ des nombres complexe}) \tag{4.4.2}$$

Définition 4.4.1 *Le système* (4.4.1) *est positif si :*

$$E,\ A \in \mathbb{R}_+^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}_+^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}_+^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}. \tag{4.4.3}$$

La matrice de transfert de (4.4.1) est donnée par,

$$T(z) = C\,[Ez - A]^{-1}\,B + D \tag{4.4.4}$$

Définition 4.4.2 *Les matrices (4.4.3) s'appellent une réalisation positive de* $T(z) \in \mathbb{R}^{p\times m}(z)$ *si elles satisfont (4.4.4).*

Une réalisation positive (4.4.3) s'appelle minimale si les matrices E *et* A *ont les plus petites dimensions parmi toutes les réalisations de* $T(z)$*.*

Il est bien connu que si la condition (4.4.2) est vérifiée, alors le système (4.4.1) pour $D = 0$ *puisse être décomposé en un sous système standard de type,*

$$\begin{aligned} x^1_{i+1} &= A_1 x^1_i + B_1 u^1_i, \qquad\qquad i \in Z_+, \\ y^1_i &= C_1 x^1_i, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

et un sous système complètement singulier de la forme,

$$\begin{aligned} N x^2_{i+1} &= x^2_i + B_2 u_i\ , \qquad\qquad i \in Z_+\ , \\ y^2 i &= C_2 x^2_i, \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

où $x^1_i \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^2_i \in \mathbb{R}^{n_2}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ *est une matrice nilpotente d'index;* $(N^q = 0)$, n_1 *est le degré de* $\det [Ez - A]$, *et* $n_2 = n - n_1$.

La matrice de transfert de (4.4.1) peut être écrite comme somme,

$$T(z) = T_{sp}(z) - P(z), \tag{4.4.7}$$

où

$$T_{sp}(z) = C_1\,[Iz - A_1]^{-1}\,B_1 \tag{4.4.8}$$

est une fonction strictement propre de la matrice de transfert de (4.4.5), et la partie polynômiale,

$$P(z) = C_2\,[I - Nz]^{-1}\,B_2 \tag{4.4.9}$$

est la matrice de transfert de (4.4.6).

Définition 4.4.3 *Les matrices*

$$\begin{aligned} A_1 &\in \mathbb{R}^{n\times n_1},\ B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}, \\ C_1 &\in \mathbb{R}^{p\times n_1},\ C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2},\ N \in \mathbb{R}^{n_2 n_2} \end{aligned}$$

s'appellent une réalisation positive sous la forme canonique de Weierstrass (WCF) pour $T(z) \in \mathbb{R}^{p\times m}(z)$ *si elles satisfont l'équation*

$$T(z) = C_1\left[Iz - A_1\right]^{-1} B_1 - C_2\left[I - Nz\right]^{-1} B_2$$

4.5 Problème d'existence d'une réalisation: Approche WCF

Sachant que toute matrice non strictement propre peut se décomposer sons la forme (4.4.7), nous allons dans cette partie, étudier comment peut-on réaliser de telle fonction.

Soit $T(z) \in \mathbb{R}^{p\times m}(z)$ décomposable en une partie strictement propre T_{sp} et une partie polynômiale $P(z)$ telle que:

$$T(z) = \frac{N(z)}{d(z)} - P(z) \qquad (4.5.1)$$

où

$$\begin{aligned} N(z) &= \begin{bmatrix} n_{11}(z), ...,\ n_{1m}(z) \\ .... \\ n_{p1}(z), ...,\ n_{pm}(z) \end{bmatrix} \qquad (4.5.2) \\ &= N_{n_1-1}z^{n_1-1} + N_{n_1-2}z^{n_1-2} + ... + N_1 z + N_0 \in \mathbb{R}^{p\times m}\left[z\right], \end{aligned}$$

et

$$P(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z), ...,\ p_{1m}(z) \\ .... \\ p_{p1}(z), ...,\ p_{pm}(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pxm}\left[z\right], \qquad (4.5.3)$$

avec

$$
\begin{aligned}
n_{ij}(z) &= a^{ij}_{m_{ij}} z^{m_{ij}} + a^{ij}_{m_{ij}-1} z^{m_{ij}-1} + ... + a^{ij}_1 z + a^{ij}_0, \\
p_{ij}(z) &= b^{ij}_{t_{ij}} z^{t_{ij}} + b_{t_{ij}-1} z^{t_{ij}-1} + ... + b^{ij}_1 z + b^{ij}_0, \\
pour\ i &= 1, ..., p \quad et \quad j = 1, ..., m,
\end{aligned}
$$

et

$$d(z) = z^{n_1} + d_{n_1-1} z^{n_1-1} + ... + d_1 z + z_0 \tag{4.5.4}$$

est le plus petit dénominateur de tous les coefficientes de $T_{sp}(z)$.

Nons caratérisons cela par le théorème suivant:

Théorème 4.5.1 *Il existe une réalisation WCF pour la fonction*

1. Tous les coefficients de (4.5.4) sont non positifs,

$$d_k \leq 0 \quad pour\ k = 0, 1, ..., n_1 - 1,$$

2. Tous les coefficients des matrices de polynômes (4.5.2) sont non négatifs,

$$a^{i,j}_k \geq 0 \quad pour \quad \begin{cases} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., m, \\ k = 1, ..., m_{ij}, \end{cases}$$

et

$$b^{i,j}_k \geq 0 \quad pour \quad \begin{cases} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., m, \\ k = 1, ..., t_{ij}. \end{cases}$$

D'ailleurs une réalisation positive WCF de T(z) est donnée par

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & -d_0 I_p \\ I_p & 0 \ldots 0 & -d_1 I_p \\ 0 & I_p \ldots 0 & -d_2 I_p \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 \ldots 0 & -d_{n_1-2} I_p \\ 0 & 0 \ldots I_p & -d_{n_1-1} I_p \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{n_1-1} \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \ldots 0 \;\; I_p],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} b_0^{11} \; b_1^{11} \ldots b_{t_1}^{11} \ldots b_0^{1m} \; b_1^{1m} \ldots b_{t_m}^{1m} \\ b_0^{21} \; b_1^{21} \ldots b_{t_1}^{21} \ldots b_0^{2m} \; b_1^{2m} \ldots b_{t_m}^{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0^{p1} \; b_1^{p1} \ldots b_{t_1}^{p1} \ldots b_0^{pm} \; b_1^{pm} \ldots b_{t_m}^{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\mathrm{x}t},\; t_j = \max_i t_{ij},\; t = \sum_{j=1}^{m} t_j + m,\; N = diag\,[N_1, N_2, \ldots, N$$

$$N_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_j+1)\mathrm{x}(t_j+1)}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$B_2 = diag\,[b_1, b_2, \ldots, b_m], \quad b_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_j+1)} \;.$$

4.6 Conclusion générale

Il faut noter que notre intérêt majeur dans ce mémoire était de faire un tour d'horizon sur la notion de représentation d'état et réalisation positive de système linéaire. Comme premier objectif, c'était de rappeler les quelques principaux outils avec lequel le travail devient facile en se basant sur plusieurs références de base. Quelques caractérisations et critères ont été établis tout en s'intéresser à la dite réalisation. Le chapitre dernier est consacré au problème d'existence d'une réalisation par l'approche WCF..

Bibliographie

[1] F. M. Callier - C. A. Deoer."Linear System Theory".

[2] F. R. Gantmacher. "Théorie Des Matrices".Tome1 et 2. Traduit par Ch. Sarthou Paris 1966.

[3] J. Lygeros. "Lectures Notes ou Linear System Theory". Automatic Control 2009.

[4] J. Panos. Antsklis - Anthony N. Michel. "A Linear System Primer 2007".

[5] Dj. Bouagada. Thèse de Doctorat d'état. "Systèmes Différentiels Positifs et LMIs" 2007.

[6] Dj. Bouagada. " Théorie de contrôle ". Cours de master (2) 2012. Modéisation, contrôle et optimisation.

[7] Dj. Bouagada. " Système et Représentation ". Cours de master (1) 2011. Modéisation, contrôle et optimisation.

[8] T.Kaczorek."Positive Realisations of Improper Transfer Matrices of Discrete-time Linear Systems".

[9] L. Farina. "Positive linear systems : Theory and Applications". Wiley, NewYork, 2000.

[10] H. Mink."Nonnegative matrices". Wiley Interscience Series in Discrete Time Mathematics and Optimization. John Wiley and Sons, 1986. 20 pages