UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

DE MASTER EN MATHÉMATIQUE

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ABSTRAITE COMPLÈTE DE TYPE ÉLLIPTIQUE DANS UN ESPACE UMD.

Présenté par

ASMA **HADRI**

Soutenu le 26/ 06 /2012

Devant le Jury

Mm. BOUZIANI Fatima	Président	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**
Mr. MEDEGhRI Ahmed	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
Melle. LIMAM Kheira	**Co-Encadreur**	**M.C**	**U. MOSTAGANEM**

Remerciements

En premier lieu, Je remercie le Prof. de l'université de Mostaganem **MEDEGHRI Ahmed** directeur de cette thèse, pour des consiels.

En seconde lieu,Je tiens également à remercie Prof BOUAGADA Djilali,de l'université de Mostaganem .et BENHAMITI Omar$\rightarrow\rightarrow$.Prof.de l'université de Mostaganem

qui acceptant de lire ce mémoire

je vaudrais aussi les surtout **mes parents** pour leur aide continu et n'oblier pas mes soeurs et mes frères,et mes amis

et tout les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Angelo Favini, Rabah Labbas, Stéphane Maingot, Hiroki Tanabe et Atsushi Yagi [7] concernant l'étude d'une équation différentielle abstraite complète de type elliptique posé dans un espace de Banach complexe X de type UMD.
On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in (0,1)$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0 \text{ et } u(1) = u_1$$

ici, A et B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X et u_0, u_1 sont des éléments donnés dans X, et le second membre $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$.
On s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte (i.e

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \; u' \in L^p(0,1;D(B))$$

et qui satisfait le problème précédent.) Sous l'hypothèse d'ellipticité de Krein [12].
On donne maintenant un exemple modèle justifié l'étude abstrait du problème donné. On considère dans une bande $]0,1[\times\mathbb{R}$, le problème de propagation de la chaleur u en régime stationnaire avec une source interme de chaleur $f \in L^p(]0,1[\times\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$. Ce problème est modélisé par l'équation de Laplace suivante

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R}. \tag{0.0.1}$$

Sur le bords, on impose les conditions aux limites suivantes

$$u(0,y) = u_0(y) \text{ et } u(1,y) = u_1(y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{0.0.2}$$

En utilisant les notations vectorielles usuelles

$$u(x,y) = u(x)(y), \quad f(x,y) = f(x)(y),$$

on peut écrire l'équation (0.0.1) dans $X := L^p(\mathbb{R})$ sous la forme suivante

$$u''(x) + Au(x) + Bu'(x) = f(x);\ x \in (0,1)$$

avec

$$\begin{cases} D(A) = \{u,\ u',\ u'' \in L^p(\mathbb{R})\} = W^{2,p}(\mathbb{R}). \\ Au = u'' \end{cases}$$

et $B = 0$.

De même, pour les conditions aux limite (0.0.2), on trouve

$$u(0) = u_0 \text{ et } u(1) = u_1.$$

Ainsi, le problème (0.0.1) et (0.0.2) s'écrit de la manière opérationnelle suivante

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) + Bu'(x) = f(x); \quad \text{p.p. } x \in (0,1) \\ u(0) = u_0 \quad u(1) = u_1, \end{cases}$$

c'est ce dernière problème qui sera étudié dans ce mémoir, lorsque A et B sont d'autre opérateurs.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans **le premiere chapitre** ; on expose les principales notions d'analyse fonctionnelle, les espace UMD, les espaces interpolation et la théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni.

Dans **le deuxième chapitre** ; on va étudier le problème de Dirichlet régis par une équation différentielle abstraite simple dans un espace UMD. Dans ce cas le problème précédent s'écrit

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x),\ x \in]0,1[\\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{0.0.3}$$

L'objet de ce chapitre est la recherche d'une solution stricte u du problème (0.0.3) c'est à dire une fonction

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$$

et qui satisfait (0.0.3) sous les hypothèse suivants

$$X \text{ est un espace } UMD,$$

$$\mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et } \exists c \geqslant 0 : \forall \lambda \geqslant 0,\ \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda}.$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c \geqslant 1,\ \theta \in]0,\pi[: \forall s \in \mathbb{R},\ \|(-A)^{is}\| \leqslant Ce^{\theta|s|}. \end{cases}$$

Dans **le troisième chapitre,** on étudie l'équation différentielle abstraite complète pour deux approche lorsque B génère un groupe et lorsque les opérateurs suivants

$$-B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ et } B - (B^2 - A)^{1/2}$$

génère des semi-groupes. On utilisera la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Dore-Venni.

Dans **le quatrième chapitre**, on donne quelques application des résultats obtenus à des exemples concrets.

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans ce chapitre, on donne quelques notions de base utilisée pour réaliser ce travail.

1.1 Les opérateurs fermés

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$, inclus dans un espace de Banach complexe X, à valeurs dans X.

Définition 1.1.1 *On dit que A est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_n \xrightarrow{X} x \\ Ax_n \xrightarrow{X} y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y \end{array} \right.$$

Définition 1.1.2 *On dit que A est un opérateur linéaire fermable si et seulement s'il admet une extension fermée i.e., pour tout suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que la suite x_n tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ et Ax_n tend vers y, alors $y = 0$.*

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaire

1.2.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.2.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X. On dit que cette famille forme un semi-groupe fortement continu (C_0 semi-groupe) dans X si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. $G(0) = I$.
2. $\forall s,\, t \in \mathbb{R}^+ : G(t+s) = G(t).G(s)$.
3. $\forall x \in X$
$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0$$
($G(t)x : \mathbb{R}_+ \to X$ *est fortement continue en* 0).

i) Si $t \in \mathbb{R}$, $\{G(t)\}$ est dit groupe.
ii) La condition (3) n'implique pas que

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\| = 0.$$

Exemple.
Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors $t \mapsto G(t) = e^{tA}$ est un groupe sur X.
Exemple.
Soit $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$ et $(G(t)f)(x) = f(x-t)$; alors G est un groupe appelé groupe des translations de L^p on a

$$\|f(x-s)\|_{L^p} = \|f(x)\|_{L^p} \implies \|G(t)\| = 1$$

alors $G(t) \in \mathcal{L}(X)$ et on a

$$\begin{aligned} (G(t).G(s)f)(x) &= (G(t)f)(x-s) \\ &= f(x-s-t) \\ &= (G(t+s)f)(x) \end{aligned}$$

donc

$$G(t+s) = G(t).G(s).$$

Théorème 1.2.1 *Soit G un semi-groupe, il existe deux constantes M et ω telle que*

$$\|G(t)\| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Définition 1.2.2 *On appelle l'ensemble résolvant de A l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\}$$

un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. *Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par*

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

2. *$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé spectre de A.*

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.3 *On appelle générateur infitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t>0}$, l'opérateur linéaire A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

Exemple.
Soit A un opérateur borné dans X, alors $\forall t \geqslant 0$, $G(t) = e^{tA}$ est un semi-groupe uniformément continue et le générateur infinitésimal est l'opérateur A.
En effet

$$\begin{aligned} \|G(t) - G(t+h)\| &= \|G(t) - G(t).G(h)\| \\ &\leqslant \|G(t)\| \, \|I - G(h)\| \\ &\leqslant \|G(t)\| \, (e^{h\|A\|} - 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\|G(t) - G(t+h)\| \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

D'où la continuité uniforme.
D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(G(t) - I) - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n \geq 2} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \\ &\leqslant t \, \|A\|^2 .e^{t\|A\|}. \end{aligned}$$

quand $t \to 0$, alors $A = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(G(t) - I)$ limite uniforme donc forte.

Remarque 1.2.1

$i)$ Si A est le génèrateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geqslant 0}$; alors A est fermé à domaine dense.
$ii)$ Le semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $(e^{tB})_{t \geqslant 0}$ où B est un opérateur borné dans X.
$iii)$ Si A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geqslant 0}$, $\|G(t)\| \leqslant Me^{wt}$ pour $\lambda > w$;l'opérateur

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) x dt$$

est borné et $\|((\lambda - A)^{-1}x\| \leqslant M(\lambda - w)^{-1}; \lambda \in \rho(A)$.

Théorème 1.2.2 $(de\ Hille - Yosida)$

Un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$, $t \leqslant 0$; si et seulement si
$i)$ A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.
$ii) \rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ pour tout $\lambda > 0$ avec $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.4 *Soit* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2 \text{ et } \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$.

La famille $\{T(z)\}_{z\in\Delta} \subset \mathcal{L}(X)$ construit un semi-groupe analytique dans Δ, si

1. $z \longrightarrow T(z)$ est un analytique dans Δ.
2. $T(0) = I$ et $\lim\limits_{z\to 0} T(z)x = x\,;\ \forall x \in X,\ z \in \Delta$.
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1).T(z_2)$ pour $z_1,\ z_2 \in \Delta$.

Théorème 1.2.3 (*de Kato*)

Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné vérifiant

1. A est fermé.
2. $D(A)$ dense dans X (*i.e.* $\overline{D(A)} = X$).
3. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* / \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ et

$$\exists c > 0;\ \forall \lambda \in \rho(A) : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Alors A est un générateur infinitésimale d'un semi-groupe telle que :
i) $\exists M > 0,\ \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$.
ii) $\forall t > 0,\ G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{M}{t}$.

Lemme 1.2.1 ***(de Schur)*** $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, κ *mesurable*

$\exists a > 0,\ \forall x_2 \in \Omega_2 : \displaystyle\int_{\Omega_1} |K(x_1, x_2)|\, dx_1 \leqslant a.$

$\exists b > 0,\ \forall x_1 \in \Omega_1 : \displaystyle\int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|\, dx_2 \leqslant b.$

On définit l'opérateur K par

$$(Kf)(x_2) = \int_{\Omega_1} K(x_1, x_2) f(x_1) dx_1,\ (x_2 \in \Omega_2)$$

donc $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^q(\Omega_2))$.

1.3 Les espace UMD

Définition 1.3.1 *un espace de Banach X possède la propriété UMD (Unconditional Martingale Difference property) si seulement si* $\exists p \in]1, \infty[$ *et* $C(p)$ *tell que*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k\right\|_{L^p(\mathbb{R},X)} \leqslant C(p) \left\|\sum_{k=1}^{n} d_k\right\|_{L^p(\mathbb{R},X)},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=1,\dots,n}$ *et pour toute suite* $(\varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Transformation de Hilbert
Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $p \in]1,\infty[$

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}) : Hf = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} H_\varepsilon(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Définition 1.3.2 *un espace de Banach X est dit $\zeta-$convexe s'il existe une fonction $\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. *ζ est symétrique et biconvexe.*
2. *$\zeta(0,0) > 0$.*
3. *$\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$.$\forall x,\ y \in X$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Proposition 1.3.1 *Soit X un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

$i)$ X est UMD.
$ii)$ Il existe une fonction ζ symétrique et biconvexe vérifie $\zeta(0,0) > 0$ et $\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$, tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|$, $\forall x,\ y \in X$.
Exemples

1. Les espace de Hilbert sont des espaces UMD.
2. Tout sous espace fermé d'un UMD est UMD.
3. Les espaces construit sur $L^p(\mathbb{R}, X)$ avec $1 < p < \infty$, tel que X est UMD, sont des espaces UMD.

Remarque

Les espaces C^α définis par

$$C^\alpha([0,1]\,; X) = \left\{ f \in C([0,1]\,; X) : [f]_{C^\alpha(0,1;X)} = \sup_{\substack{t,s\in[0,1] \\ t\neq s}} \frac{\|f(s)-f(t)\|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}$$

munis de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + [f]_{C^\alpha([0,1];X)} \text{ ne sont pas } UMD.$$

1.4 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$

On donne, ici, la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel.
Si $A : E \to E$ est un opérateur borné positif, la puissance complexe de l'opérateur A est définie par

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma t^z (tI - A)^{-1} x dt,$$

tel que z est un nombre complexe arbitraire.

Si A est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance complexe de partie réelle positive (pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation suivante de Balakrishnan

$$A^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - A)^{-1} Axdt,$$

pour tout $x \in D(A)$, quelques propriétés essentielles de l'opérateur A^z sont citées dans Dore-Venni et Haase.

Définition 1.4.1 *On note $Bip(\theta; E)$ (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E qui admettent des puissances imaginaires bornée.*

1.5 Les espaces d'interpolation

1.5.1 Définitions

Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé $\mathcal{F}$. Les espaces $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$, munis des normes suvantes

$$\|\varphi\|_{X_0 \cap X_1} = \|\varphi\|_{X_0} + \|\varphi\|_{X_1} \text{ si } \varphi \in X_0 \cap X_1$$

$$\|\varphi\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \\ \varphi_i \in X_i}} (\|\varphi_0\|_{X_0} + \|\varphi_1\|_{X_1}) \text{ si } \varphi \in X_0 + X_1.$$

sont des espaces de Banach.

Définition 1.5.1 *Pour $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1[$, on définit l'espace intermédiaire entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$, noté $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ par*

$$\varphi \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ \forall t > 0, \exists (u_0(t), u_1(t)) \in X_0 \times X_1 : \varphi = u_0(t) + u_1(t). \\ ii) \ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_0), t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_1). \end{cases}$$

où $L^p_*(\mathbb{R}_+, X)$ est l'espace des fonctions fortements mesurables $f : \mathbb{R}_+ \to X$ telles que

$$\|f\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X)} = \left(\int_0^\infty \|f(x)\|_X^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ pour } p \in [1, +\infty],$$

et

$$\|f\|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X)} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \|f(x)\|_{X_i}, \text{ pour } p = \infty.$$

Définition 1.5.2 (dixrète) *On dit que $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i) \ \forall n \in \mathbb{Z} : x = u_0 + u_1, \ u_i \in X_i; \ i = 0, \ 1 \\ ii) \ \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left\| e^{-\theta} u_0 \right\|_{X_0}^p < +\infty \ (i.e) \ e^{-\theta} u_0 \in l^p(X_0) \\ iii) \ \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left\| e^{(1-\theta)} u_1 \right\|_{X_1}^p < +\infty \ (i.e) \ e^{(1-\theta)} u_1 \in l^p(X_1) \end{cases}$$

Cas particulier : Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans espace de Banach complexe X. On note, pour $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1[$,

$$D_A(\theta; p) := (D(A); X)_{1-\theta,p}.$$

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut donner des caractéristique explicites de $D_A(\theta; p)$, par exemple :
<u>1^{er} cas :</u> Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{ \varphi \in X : t^\theta A(A - \lambda I)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

ce résultat est démontré dans [8].
<u>$2^{ème}$ cas:</u> Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{ \varphi \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)\varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

ceci est démontré dans [9].
<u>$3^{ème}$ cas:</u> Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{ \varphi \in X; \ t^{1-\theta} A e^{tA} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

voir [4].

Théorème 1.5.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Pour $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1/2[$, on a*

$$D_{A^2}(\theta, p) = D_A(2\theta, p).$$

Dans le cas général, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 1/m[$ on a

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p).$$

1.5.2 Espace de traces

Définition 1.5.3 *Soient α_0, α_1 deux nombres réels. On désigne par $V_m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ l'espace des fonctions u telles que*

$$t^{\alpha_0} u, \ t^{\alpha_1} u^{(m)} \in L^p(\mathbb{R}_+, X_0) := L_+^p(X_1),$$

où $u^{(m)} = \dfrac{d^m u}{dt^m}$. Cet espace muni de la norme suivante

$$\|u\|_{V_m} = \max(\|t^{\alpha_0} u\|_{L_+^p(X_0)}; \left\| t^{\alpha_1} u^{(m)} \right\|_{L_+^p(X_0)})$$

est un espace de Banach.

Définition 1.5.4 *On dit que $u^{(j)}$ admet une trace à l'origine si $u^{(j)}(t)$ converge lorsque $t \longrightarrow 0$, alors la traces de $u^{(j)}$ est $\lim_{t \longrightarrow 0} u^{(j)}(t) = u^{(j)}(0)$.*

Remarque 1.5.1 *Si $\dfrac{1}{p_1} + \alpha_1 < m - j$, $1 < j < m - 1$; alors les traces $u^{(k)}(0)$ existent pour $0 < k < j$.*

Définition 1.5.5 *On définit l'espace $T_j^m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ décrit par $u^{(j)}(0)$ tel que $u \in V_m$, muni de la norme*

$$\|a\|_{T_j^m} = \inf_{u^{(j)}(0)=a} \|u\|_{V_m}.$$

Les espaces T_j^m sont appelés des espaces de trace.

Définition 1.5.6 *On désigne par $W(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ l'espace des fonctions u telles que*

$$e^{\alpha_0 x} u \in L^{p_0}(X_0), \;\; e^{\alpha_1 x} u \in L^{p_1}(X_1)$$

où α_0, α_1 sont deux paramètres réels et p_0 et p_1 sont deux paramètres supposés quelconques dans $[1, +\infty]$

L'espace $W(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ muni de la norme

$$\max(\|e^{\alpha_0 x} u\|_{L^{p_0}(X_0)} ; \|e^{\alpha_1 x} u\|_{L^{p_1}(X_1)}) = \|u\|_{W(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)}$$

est un espase de Banach.

Définition 1.5.7 *On définit l'espace $S(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ décrit par $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx$ lorsque $u \in W(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$, en supposant :*

$$1 \leqslant p_i \leqslant \infty, \;\; \alpha_0, \;\; \alpha_1 < 0,$$

muni de la norme

$$\|a\|_{S(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)} = \inf\{\max(\|e^{\alpha_0 x} u\|_{L^{p_0}(X_0)} ; \|e^{\alpha_1 x} u\|_{L^{p_1}(X_1)})\},$$

avec $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx$.

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \subset S(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1) \subset X_0 + X_1.$$

Les espaces $S(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ sont appelés des espaces intermédiaires (espace de moyenne) entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$.

1.5.3 Les espaces de Sobolev et de Besev

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:
On note $W^{m,p}(\Omega, X)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \longrightarrow E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$
Pour tout $|\alpha| \leqslant m$,c'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,X)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,X)}\right)^{1/2} \text{ si } 1 \leqslant P \leqslant \infty \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,X)} \text{ si } p = \infty. \end{array} \right\}$$

Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:
On définit l'espace fractionnaire de sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, X) = \left\{ f \in L^p(\Omega, X) : \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_X}{|x - y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définit les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, X)$. Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, on définit

$$B^m_{p,q}(\Omega, X) = \left\{ f \in L^p(\Omega, X) : \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_X}{|x - y|^{sp+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\},$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.
Dans le cas où $p = q$ on a

$$B^s_{p,q}(\Omega, X) = W^{s,p}(\Omega, X).$$

1.6 Somme des opérateurs de DORE-VENNI

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ denses dans un espace de Banach X de type UMD c'est à dire

$$\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = X.$$

Dore et Venni ont montré que sous certaines hypothèses sur les opérateurs A et B, le problème abstrait suivant

$$Au + Bu = f$$

posé dans un espace UMD, admet une unique solution stricte.
On suppose que A et B vérifiants les hypothèses suivantes

$$(D.V.1) \left\{ \begin{array}{l} i)\ \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 \\ \forall\lambda \geqslant 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M_A}{1 + \lambda}. \\ \\ ii)\ \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 \\ \forall\lambda \geqslant 0 : \|(B + \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M_B}{1 + \lambda}. \end{array} \right.$$

$$(D.V.2)\begin{cases} \forall\lambda \in \rho(-A),\ \forall\mu \in \rho(-B) \\ (A+\lambda I)^{-1}(B+\mu I)^{-1} = (B+\mu I)^{-1}(A+\lambda I)^{-1}. \end{cases}$$

$$(D.V.3)\begin{cases} iv)\ \forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in L(X), \\ \exists\zeta_0 > 0, \exists\theta_A \in [0,\pi[:\ \|A^{is}\|_{L(X)} \leqslant \zeta_0 e^{|s|\theta_A}. \\ \\ v)\ \forall s \in \mathbb{R},\ B^{is} \in L(X), \\ \exists\zeta_1 > 0, \exists\theta_B \in [0,\pi[:\ \|B^{is}\|_{L(X)} \leqslant \zeta_1 e^{|s|\theta_B}. \\ \\ vi)\ \theta_A + \theta_B < \pi. \end{cases}$$

Le résultat principal de Dore et Venni est donné par le théorème suivant

Théorème 1.6.1 *On Suppose que*

$$X \text{ est } UMD$$

sous les hypothèses $(D.V.1)$, $(D.V.2)$ *et* $(D.V.3)$, *l'opérateur* $(A+B)$ *est fermé et sa résolvante est bornée dans* X *et son inverse est défini par*

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin \pi z}dz$$

où γ *est une courbe verticale contenue dans la bande* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ *et orientée de* $\infty e^{-i\pi/2}$ *vers* $\infty e^{i\pi/2}$.

Théorème 1.6.2 (de Mikhlin) *Soit* X *un espace* UMD, $p \in (1,\infty)$, $m(\zeta) \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ *et*

$$\gamma(m) := \sup_{\zeta\in\mathbb{R}} \max\{|m(\zeta)|\,,\ \ |\zeta m'(\zeta)|\} < \infty$$

Alors la transformation $(Tu)(t) = (m(\zeta)\widehat{u}(\zeta))^\vee(t)$ *vérifie*

$$\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R},X)} \leqslant C\gamma(m)\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R},X)}\,,\ \ \forall u \in D(\mathbb{R},X)$$

où C *dépend seulement de* p *et de* X.

Chapitre 2

Problème de Dirichlet pour une équation différentielles abstraite simple dans un espace UMD

2.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème abstrait suivant

$$u''(x) + Au(x) = f(x) \qquad p.p.\ x \in (0,1) \tag{2.1.1}$$

posé dans un espace de Banach complexe X. Ici, A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, et $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$.
On impose sur les bords les conditions aux limites de type Dirichlet suivantes

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

telles que u_0 et u_1 sont deux constantes de X.

On s'intéresse à l'existence et la régularité optimale de la solution stricte du problème (2.1.1) et (2.1.2) On dit que la solution est stricte si

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)).$$

On suppose que

$$X \text{ est } UMD \tag{H.0}$$

et A vérifie l'hypothèse principale d'éllipticité c'est a dire

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X\,; \\ \mathbb{R}_+ \supset \rho(A),\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \geqslant 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{H.1}$$

cette hypothèse permet de définir les puissances complexes, d'un opérateur linéaire, mais ne sont pas necéssairement bornées. Pour cela on ajoute la condition suivant

$$\exists C \geqslant 1,\ \theta \in]0,\pi[; \forall s \in \mathbb{R} : \left\|(-A)^{is}\right\| \leqslant Ce^{\theta|s|}. \tag{H.3}$$

Ce qui signifie que $-A \in Bip(\theta, X)$.

2.2 Conséquences des hypothèses

1. L'hypothèse $(H.0)$ entraine la réflexivité de X, cependant l'opérateur A est sectoriel (selon l'hypthèse $(H.1)$), donc le domaine de A est dense dans X (pour plus de détails voir Haase [11] Proposition (2.1.1) pages 18-19).
2. L'hypothèse $(H.1)$ n'implique pas que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, on cite le contre exemple de Balakrishnan.

Exemple. Soit $X = \ell_2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < +\infty \right\}$. On définit l'opérateur T par

$$\begin{cases} D_T = \left\{ (x_n) \in X : \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |x_n|^2 < +\infty \right\} \\ T(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (n(1+i)x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

– La résolvante de l'opérateur T :
Pour trouver la résolvante de T, on résout l'équation spéctrale suivante

$$(\lambda I - T)(y_n) = x_n,$$

c'est à dire on va chercher une suite $y_n = (\lambda I - T)^{-1} x_n$ telle que

$$\lambda y_n - n(1+i) y_n = x_n,$$

donc

$$(\lambda I - T)^{-1}(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\frac{x_n}{\lambda - n(1+i)} \right)_{n\in\mathbb{Z}},$$

par conséquent

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq n(1+i);\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

– Calculons la norme de $(\lambda I - T)^{-1}$:
On a, pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda I - T)^{-1}(x_n) \right\|_{\ell_2(\mathbb{R})} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{x_n}{\lambda - n(1+i)} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n|^2}{|\lambda - n(1+i)|^2} \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\max_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda - n(1+i)|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

de plus

$$\max_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda - n(1+i)|^2} = \max_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\lambda - n)^2 + n^2} = g(\frac{\lambda}{2})$$

et

$$g(\frac{\lambda}{2}) = \frac{1}{(\lambda - \frac{\lambda}{2})^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{2}{\lambda^2},$$

alors

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}(x_n)\right\|_{\ell_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left\|x_n\right\|_{\ell_2(\mathbb{R})}.$$

Donc

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Mais $\rho(T)$ ne peut contenir des demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_0$ car tout demi plan de cette forme contient des points de $\sigma(T)$, par conséquent T ne peut être générateur d'un semi-groupe.
3. Mais l'hypothèse $(H.1)$ implique que $-\sqrt{-A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\left(e^{-t\sqrt{-A}}\right)_{t\geqslant 0}$.
4. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, selon Haase [11], Proposition (2.18), formule e) page 64), on a

$$((-A)^{\frac{1}{2}})^{\beta} = (-A)^{\frac{\beta}{2}},$$

on peut donc déduire que l'opérateur $\sqrt{-A} \in Bip(\frac{\theta}{2}, X)$ i.e.,

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ (\sqrt{-A})^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C \geqslant 0,\ \theta \in]0,\pi[\ : \forall s \in \mathbb{R},\ \left\|(\sqrt{-A})^{is}\right\| \leqslant Ce^{\frac{\theta}{2}|s|}. \end{cases}$$

2.3 Lemmes techniques

Par la suite, on a besoin des lemmes suivants

Lemme 2.3.1 *Supposons* $(H.0)$, $(H.1)$ *et* $(H.3)$. *Soit* $g \in L^p(0,1;X)$, *alors on a*

i) $x \mapsto L(x,g) := \sqrt{-A}\displaystyle\int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A}}g(s)ds \in L^p(0,1;X)$,

ii) $x \mapsto \sqrt{-A}\displaystyle\int_x^1 e^{-(s-x)\sqrt{-A}}g(s)ds \in L^p(0,1;X)$,

iii) $x \mapsto \mathcal{L}(x,g) := \sqrt{-A}\displaystyle\int_0^1 e^{-(x+s)\sqrt{-A}}g(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

Preuve.
i) Le premier point est un résultat de Dore-Venni (on applique la théorie des sommes de Dore et Venni pour étudier le problème de Cauchy suivant

$$(PC) \quad \begin{cases} u'(x) + Bu(x) = g(x) \in L^p(0,1;X) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

avec $B := \sqrt{-A}$, cet opérateur vérifiées les hypothèses suivants

$$\begin{cases} \exists C > 0;\ \forall \lambda \geqslant 0 : \|(B+\lambda I)^{-1}\| \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \\ B^{is} \in \mathcal{L}(X) : \theta_B \in [0, \dfrac{\pi}{2}[,\ \ \|B^{is}\| \leqslant Ce^{\theta_B |s|}. \end{cases}$$

Puisque X est UMD, alors le problème (PC) admet une unique solution stricte donné par

$$u(x) = \int_0^x e^{-(x-s)B} g(s) ds,$$

donc

$$x \longmapsto Bu(x) = B \int_0^x e^{-(x-s)B} g(s) ds \in L^p(0,1;X),$$

par conséquent

$$x \longmapsto \sqrt{-A} \int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g(s) ds \in L^p(0,1;X).$$

$ii)$ On utilise le changement de variable suivant

$$t = 1 - s,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{-A} \int_x^1 e^{-(s-x)\sqrt{-A}} g(s) ds &= -\sqrt{-A} \int_{1-x}^0 e^{-((1-t)-x)\sqrt{-A}} g(1-t) dt \\ &= \sqrt{-A} \int_0^{1-x} e^{-((1-x)-t)\sqrt{-A}} g(1-t) dt \\ &= L(1-x, g(1-.)), \end{aligned}$$

et on applique le premièr point de ce Lemme.
$iii)$ en effet

$$\begin{aligned} B \int_0^1 e^{-(x+s)B} g(s) ds &= B \int_0^x e^{-(x+s)B} g(s) ds + B \int_x^1 e^{-(x+s)B} g(s) ds \\ &= B \int_0^x e^{-(x-s)B} e^{-2Bs} g(s) ds + e^{-2Bx} B \int_x^1 e^{-(s-x)B} g(s) ds \\ &= L(x, e^{-2.B} g(.)) + e^{-2Bx} L(1-x, g(1-.)). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}(x,g) \in L^p(0,1;X)$ car $e^{-2B.} \in \mathcal{L}(X)$ et $s \longmapsto e^{-2sB} g(s) \in L^p(0,1;X)$.
Nous avons aussi le lemme suivant

Lemme 2.3.2 *Sous l'hypothèse* $(H.1)$ *et pour* $1 < p < +\infty$, *on a* $w \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$ *si et seulement si*

$$x \longmapsto M(x, w) = Ae^{-x\sqrt{-A}}w \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve.
Comme $(-\sqrt{-A})$ génère un semi-groupe analytique, alors

$$\begin{aligned}
(D(A), X)_{1/2p,p} &= (D((-\sqrt{-A})^2), X)_{1/2p,p} \\
&= \left\{ w \in X : \int_0^{+\infty} \left\| t^{2\cdot\frac{1}{2p}p} (-\sqrt{-A})^2 e^{-t\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\} \\
&= \left\{ w \in X : \int_0^{+\infty} \left\| t^{1/p} A e^{-t\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\}
\end{aligned}$$

muni de la norme

$$\|w\|_{(D(A),X)_{1/2p,p}} = \|w\|_X + [w]_{1/2p,p}, \text{ avec } [w]_{1/2p,p} = \int_0^{+\infty} \left\| t^{1/p} A e^{-t\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dt}{t}.$$

Soit $w \in (D(A), X)_{1/2p,p}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p dx &= \int_0^1 x \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^1 \left\| x^{1/p} Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left\| x^{1/p} Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leqslant \|w\|_{(D(A),X)_{1/2p,p}}.
\end{aligned}$$

Pour la réciproque soit

$$x \longmapsto Ae^{-x\sqrt{-A}} w \in L^p(0, 1; X)$$

on a

$$\int_0^{+\infty} \left\| x^{1/p} Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p \frac{dx}{x} = \int_0^1 \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p dx + \int_1^{+\infty} \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p dx,$$

la première intégrale est finie et pour la deuxième on utilise la propriété des semi-groupes analytiques, i.e.il existent deux constantes $c > 0$ et $a > 0$ telles que

$$\left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} \right\| \leqslant \frac{C}{x^2} e^{-xa},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}} w \right\|^p dx &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{C^p}{x^{2p}} e^{-xap} \|w\|_X^p \, dx \\ &\leqslant (C^p \int_1^{+\infty} e^{-xap} dx) \|w\|_X^p < \infty. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.3 *Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Il existe une constante*

$$K_{\theta_0} = \min(1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0}, 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}) > 0$$

telle que

$$\left|1 - e^{-z}\right| \geqslant K_{\theta_0}$$

pour tout

$$z \in S_{\theta_0, \varepsilon_0} := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leqslant \theta_0\} \cup \overline{B(0, \varepsilon_0)}.$$

Preuve.
L'idée de la preuve est inspirée du travail [3]. Soit $z \in \partial S_{\theta_0,\varepsilon_0}$ (où $\partial S_{\theta_0,\varepsilon_0}$ est la frontière de $S_{\theta_0,\varepsilon_0}$).
Pour $|z| = \varepsilon_0$, on a

$$\left|1 - e^{-z}\right| \geqslant \left|1 - e^{-\operatorname{Re} z}\right| \geqslant 1 - e^{-\varepsilon_0 \cos(\arg z)} \geqslant 1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0},$$

car

$$\arg z \in] - \theta_0, \theta_0[.$$

Pour $|z| \geqslant \varepsilon_0$ et $\arg z = \theta_0$, on a

$$\left|1 - e^{-z}\right|^2 = 1 + e^{-2\operatorname{Re} z} - 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z).$$

Si $\operatorname{Re} z \leqslant \pi/2 \tan \theta_0$, on trouve

$$|\operatorname{Im} z| = \operatorname{Re} z \tan \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2},$$

alors

$$0 \leqslant \cos(\operatorname{Im} z) \leqslant 1,$$

et

$$\left|1 - e^{-z}\right|^2 \geqslant 1 + e^{-2\operatorname{Re} z} - 2e^{-\operatorname{Re} z} = (1 - e^{-\operatorname{Re} z})^2,$$

donc

$$\left|1 - e^{-z}\right| \geqslant 1 - e^{-\operatorname{Re} z} \geqslant 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}.$$

Si $\operatorname{Re} z \geqslant \pi/2 \tan\theta_0$, il vient

$$\left|1-e^{-z}\right|^2 = 1 + e^{-2\operatorname{Re} z} - 2e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z) \geqslant 1,$$

ainsi

$$\left|1-e^{-z}\right| \geqslant 1 \geqslant 1 - e^{-\pi/2\tan\theta_0}.$$

On déduit donc

$$\left|1-e^{-z}\right| \geqslant \min(1-e^{-\varepsilon_0\cos\theta_0}, 1-e^{-\pi/2\tan\theta_0}),$$

pour tout $z \in \partial S_{\theta_0,\varepsilon_0}$.

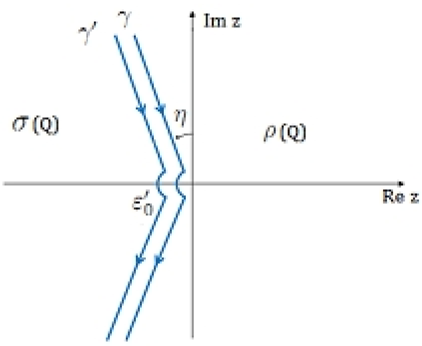
Lemme 2.3.4 *Sous l'hypothèse (H.1), l'opérateur $I - e^{2Q}$ est inversible et son inverse est donné par*

$$\left(I + e^{2Q}\right)^{-1} = I + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}(zI-Q)^{-1}dz.$$

Preuve. Ce Lemme est démontré par Lunardi (Voir [16], page 59). Posons $Z := e^{2Q}$ et

$$U := \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}(zI-Q)^{-1}dz$$

avec γ est la courbe représentée par la figure



Cette intégrale est absolument convergente grâce au Lemme précédent. D'autre part, Grâce au calcul fonctionnel de Dunford on peut écrire

$$Z = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'} e^{2\lambda}(zI-Q)^{-1}d\lambda,$$

où γ' est la frontière de $S_{\pi/2+\eta',\varepsilon'_0}$ orientée comme γ avec $\eta' < 0$ et $\varepsilon'_0 < \varepsilon_0$. Donc

$$ZU = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int\limits_{\gamma'}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{2z}e^{2\lambda}}{1-e^{2z}}(\lambda I-Q)^{-1}(zI-Q)^{-1}dzd\lambda.$$

En utilisant l'identité de la résolvante

$$(\lambda I - Q)^{-1}(zI - Q)^{-1} = \frac{(\lambda I - Q)^{-1} - (zI - Q)^{-1}}{z - \lambda}$$

par le Théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} ZU &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma'} (\lambda I - Q)^{-1} e^{2\lambda} \left(\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(1 - e^{2z})(z - \lambda)} dz \right) d\lambda \\ &\quad - \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{1 - e^{2z}} \left(\int_{\gamma'} \frac{e^{2\lambda}}{z - \lambda} d\lambda \right) (zI - Q)^{-1} dz. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(1 - e^{2z})(z - \lambda)} dz = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2z}}{(1 - e^{2z})(z - \lambda)} dz,$$

et

$$\int_{\gamma'} \frac{e^{2\lambda}}{z - \lambda} d\lambda = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\gamma'_R} \frac{e^{2\lambda}}{z - \lambda} d\lambda,$$

avec

$$\gamma_R = \{z \in \gamma_R : |z| \leqslant R\} \text{ et } \gamma'_R = \{z \in \gamma'_R : |z| \leqslant R\}.$$

En fermant ces courbes par des arcs et en appliquant le Théorème de Cauchy et le lemme de Jordan, on obtient

$$ZU = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_R} \frac{e^{4\lambda}}{1 - e^{2z}} (\lambda I - \phi)^{-1} d\lambda.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_R} e^{2\lambda} (\lambda I - \phi)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_R} e^{2\lambda} \frac{1 - e^{2\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (\lambda I - \phi)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_R} \frac{e^{2\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (\lambda I - \phi)^{-1} d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_R} \frac{e^{4\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (\lambda I - \phi)^{-1} d\lambda \\ &= U - ZU, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$ZU = U - Z$$

Similairement, on trouve

$$UZ = U - Z$$

d'où $(I - Z)^{-1} = I + U$.

2.4 Représentation de la solution

On sait que la solution de l'équation (2.1.1) non homogène est donnée sous la forme

$$u(x) = c_1(x)e^{-(1-x)\sqrt{-A}} + c_2(x)e^{-x\sqrt{-A}}.$$

telle que c_1 et c_2 deux fonctions vérifiant le système suivante

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-(1-x)\sqrt{-A}} + c_2'(x)e^{-x\sqrt{-A}} = 0 \\ \sqrt{-A}c_1'(x)e^{-(1-x)\sqrt{-A}} - \sqrt{-A}c_2'(x)e^{-x\sqrt{-A}} = f(x), \end{cases}$$

son déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} e^{-(1-x)\sqrt{-A}} & e^{-x\sqrt{-A}} \\ \sqrt{-A}e^{-(1-x)\sqrt{-A}} & -\sqrt{-A}e^{-x\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{-A}e^{-\sqrt{-A}},$$

et

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x\sqrt{-A}} \\ f(x) & -\sqrt{-A}e^{-x\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -e^{-x\sqrt{-A}}f(x),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} e^{-(1-x)\sqrt{-A}} & 0 \\ \sqrt{-A}e^{-(1-x)\sqrt{-A}} & f(x) \end{vmatrix} = e^{-(1-x)\sqrt{-A}}f(x).$$

Donc

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{-A})^{-1}e^{(1-x)\sqrt{-A}}f(x) \\ c_2'(x) = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{-A})^{-1}e^{x\sqrt{-A}}f(x). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} c_1(x) = -\frac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds + \xi_0 \\ c_2(x) = -\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (\sqrt{-A})^{-1}e^{s\sqrt{-A}}f(s)ds + \xi_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_0 + e^{-x\sqrt{-A}}\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^x (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(x-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(s-x)\sqrt{-A}}f(s)ds, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

les condition aux limites

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases}$$

nous donnent

$$\begin{cases} u_0 = e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ u_1 = \zeta_0 + e^{-\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \zeta_1 = u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ u_1 = \zeta_0 + e^{-\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds, ...(*) \end{cases}$$

En remplaçant ζ_1 dans l'équation $(*)$ on obtient

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}\{u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds, \\ &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 + e^{-2\sqrt{-A}}\zeta_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds, \\ &= (1 - e^{-2\sqrt{-A}})^{-1}[u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds]; \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1 - e^{-2\sqrt{-A}})^{-1}[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds]. \end{aligned}$$

On vérifie maintenant que u est une solution de l'équation (2.1.1), on calcule la deuxième dérivée

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_0 - Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_1 + \frac{1}{2}f(x) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A}}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_x^1 \sqrt{-A}e^{-(s-x)\sqrt{-A}}f(s)ds + \frac{1}{2}f(x) \\
&= -A[e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_0 + e^{-x\sqrt{-A}}\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^x (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(x-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(s-x)\sqrt{-A}}f(s)ds] + f(x) \\
&= -Au(x) + f(x),
\end{aligned}$$

alors

$$u''(x) + Au(x) = f(x).$$

Remarque 2.4.1 *Posons dans la suite*

$$Z = e^{-2\sqrt{-A}}, \text{ et } Q = -\sqrt{-A}.$$

alors la solution u est

$$u(x) = e^{(1-x)Q}\xi_0 + e^{xQ}\xi_1 - \frac{Q^{-1}}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds - \frac{Q^{-1}}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds, \tag{2.4.2}$$

tels que

$$\zeta_0 = (1-Z)^{-1}\left(u_1 - e^Q u_0 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 \left(e^{(1-s)Q} - e^{(1+s)Q}\right)f(s)ds\right),$$

et

$$\zeta_1 = (1-Z)^{-1}\left(u_0 - e^Q u_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right)f(s)ds\right).$$

Le résultats obtenu dans ce chapitre est

Théorème 2.4.1 *Soit X un espace UMD. On suppose les hypothèses $(H.1)$ et $(H.3)$. Si $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$, alors le problème (2.1.1) admet une unique solution stricte si et seulement si*

$$u_0, u_1 \in (D(A), X)_{1/2p,p}.$$

Preuve. On suppose qu'il existe une solution stricte u c'est à dire

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$$

Posons

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

alors

$$v \in W^{2,p}(0,\infty;X) \cap L^p(0,\infty;D(A)).$$

En utilisant les notations de Lions-Peetre [15] Chapitre VI, on obtient

$$W^{2,p}(0,\infty;X) \cap L^p(0,\infty;D(A)) = V_2(p,0,(DA),p,0,X).$$

D'aprés la définition (1.1) dans [15] page 40, on obtient

$$v(0) \in T_0^2(p,0,(DA),p,0,X),$$

et grâce aux Théorème (2.1) page 43 et Théorème (5.2) dans [15], il vient

$$\begin{aligned} T_0^2(p,0,(DA),p,0,X) &= S(p,\frac{1}{p},D(A);p,\frac{1}{p}-2,X) \\ &= S(p,\frac{1}{2p},D(A);p,\frac{1}{2p}-1,X) \\ &= T_0^1(p,-\frac{1}{2p},D(A);p,-\frac{1}{2p},X) \\ &= \left\{u(0);\ u \in V_1(p,-\frac{1}{2p},D(A);p,-\frac{1}{2p},X)\right\} \\ &= \left\{u(0);\ t^{1/2p}u \in L_*^P(D(A)),\ t^{1/2p}u' \in L_*^P(X)\right\} \\ &= (D(A),X)_{1/2p,p}. \end{aligned}$$

ce qui donne

$$v(0) \in (D(A),X)_{1/2p,p}).$$

De plus

$$v \in C\left([0,\infty[;(D(A),X)_{1/2p,p})\right)$$

alors

$$v(0) = u_0 \text{ et } v(1) = u_1 \in (D(A),X)_{1/2p,p}).$$

Soit $u_0, u_1 \in (D(A),X)_{1/2p,p.}$ montrons que u, u'' et Au sont $L^p(0,1;D(A))$.
On écrit la solutions u en fonction de L et M, on trouve

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-x\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}(\sqrt{-A})^{-2}L(x,f) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\sqrt{-A})^{-2}L(1-x,f(1-.)), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\zeta_0 &= -(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}M(1-x,u_1) \\ &\quad +(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}e^{-\sqrt{-A}}M(1-x,u_0) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}\mathcal{L}(1-x,f(1-.)) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(1-x,f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-x\sqrt{-A}}\zeta_1 &= -(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}M(x,u_0) \\ &\quad +(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}e^{-\sqrt{-A}}M(x,u_1) \\ &\quad +\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}\mathcal{L}(x,f) \\ &\quad +\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}(\sqrt{-A})^{-2}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(1-x,f). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Au(x) &= -\left(\sqrt{-A}\right)^2 u(x) \\ &= -\left(\sqrt{-A}\right)^2 e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\zeta_0 - \left(\sqrt{-A}\right)^2 e^{-x\sqrt{-A}}\zeta_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}L(x,f)+\frac{1}{2}L(1-x,f(1-.)), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & -\left(\sqrt{-A}\right)^2 e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\zeta_0 \\ = \; & (1-Z)^{-1}M(1-x,u_1)-(1-Z)^{-1}e^{-\sqrt{-A}}M(1-x,u_0) \\ & +\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}\mathcal{L}(1-x,f(1-.))+\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(1-x,f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left(\sqrt{-A}\right)^2 e^{-x\sqrt{-A}}\zeta_1 \\ = \; & (1-Z)^{-1}M(x,u_0)-(1-Z)^{-1}e^{-\sqrt{-A}}M(x,u_1) \\ & -\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}\mathcal{L}(x,f)-\frac{1}{2}(1-Z)^{-1}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(1-x,f). \end{aligned}$$

d'aprés les lemmes (2.1.1) et (2.1.2) on trouve que $u, Au \in L^p(0,1;X)$. Et en déduit

$$u'' \in L^p(0,1;X).$$

Remarque 2.4.2 *Si on note $(T(x))_{x\geq 0}$ le semi-groupe analytique généré par $-\sqrt{-A}$. Alors, la solution du problème* (2.1.1) *et* (2.1.2) *est réprésentée par*

$$\begin{aligned} u(x) &= T(1-x)\xi_0+T(x)\xi_1-\frac{1}{2}\int_0^x(\sqrt{-A})^{-1}T(x-s)f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_x^1(\sqrt{-A})^{-1}T(s-x)f(s)ds, \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in]0,1[$, *et*

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (1-Z)^{-1}(u_1 - T(1)u_0) - \frac{1}{2}(1-Z)^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s)f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-Z)^{-1}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(1-s)f(s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1-Z)^{-1}(u_0 - T(1)u_1) - \frac{1}{2}(1-Z)^{-1}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s)f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-Z)^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(1-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Problème de Dirichlet pour une équation différentielles abstraite complète dans un espace UMD

3.1 Position du problème

Considérons dans l'espace de Banach complexe X, l'équation différentielle abstrait de deuxième ordre définie par

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in (0,1), \tag{3.1.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

telle que A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement, $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$ et u_0, u_1 des éléments donnés dans X. On cherche une solution stricte de (3.1.1)-(3.1.2) c'est à dire une fonction

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \; u' \in L^p(0,1;D(B)),$$

vérifiant (3.1.1) et (3.1.2).
On suppose toujours que l'espace

$$X \text{ est } UMD,$$

et que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé,} \\ \mathbb{R}_- \subset \rho(B^2 - A) \text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geqslant 0, \\ \|(\lambda I + (B^2 - A))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{H.3}$$

$$D(A) \subseteq D(B^2), \tag{H.4}$$

$$B(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)^{-1}By, \ \forall y \in D(B), \tag{H.5}$$

$$D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(B). \tag{H.6}$$

Remarques
1. Le domaine $(A - B^2)$ est donse dans X.
2. $-\sqrt{B^2 - A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

3.2 Première approche

Dans un premier temps on suppose que

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } (e^{xB})_{x\in\mathbb{R}} \text{ dans } X, \tag{H.7}$$

et que

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \ (B^2 - A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C \geqslant 1, \ \theta \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \ \ \|(B^2 - A)^{is}\| \leqslant Ce^{\theta|s|}, \end{cases} \tag{H.8}$$

ce qui signifie que $B^2 - A \in BIP(\theta, X)$.
On pose

$$u(x) = e^{-xB}v(x),$$

donc

$$u'(x) = -Be^{-xB}v(x) + e^{-xB}v'(x),$$

et

$$\begin{aligned} u''(x) &= (-B)^2e^{-xB}v(x) - Be^{-xB}v'(x) - Be^{-xB}v'(x) + e^{-xB}v''(x) \\ &= B^2e^{-xB}v(x) - 2Be^{-xB}v'(x) + e^{-xB}v''(x). \end{aligned}$$

En remplaçant u, u' et u'' dans l'équation (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & B^2e^{-xB}v(x) - 2Be^{-xB}v'(x) + e^{-xB}v''(x) \\ & -2B^2e^{-xB}v(x) + 2Be^{-xB}v'(x) + Ae^{-xB}v(x) \\ = \ & -B^2e^{-xB}v(x) + e^{-xB}v''(x) + Ae^{-xB}v(x) \\ = \ & f(x) \end{aligned}$$

alors

$$v''(x) + (A - B^2)v(x) = e^{xB}f(x)$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = u_0, \ v(1) = e^Bu_1$$

où $g(x) = e^{xB}f(x)$
En remplaçant A par $A - B^2$ dans le théorème (2.2.1), on obtient

Théorème 3.2.1 *Si* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < +\infty$, *et* u_0, $u_1 \in (D(A),X)_{1/2p,p}$, *alors le problème* $(3.1.1)-(3.1.2)$ *admet une unique solution stricte* u *tel que*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),\ u' \in L^p(0,1;D(B)),$$

vérifiant $(3.1.1)-(3.1.2)$.
Preuve.
La représentation de la solution du problème (3.1.1)-(3.1.2) est donné par

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-(1-x)(B^2-A)^{1/2}}\zeta_0 + e^{-x(B^2-A)^{1/2}}\zeta_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^x e^{-(x-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_x^1 e^{-(s-x)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= (I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(e^B u_1 - e^{-(B^2-A)^{1/2}}u_0) \\ &\quad -\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}\int_0^1 (B^2-A)^{-1/2}e^{-(s+1)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}\int_0^1 (B^2-A)^{-1/2}e^{(1-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(u_0 - e^{-(B^2-A)^{1/2}}e^B u_1) \\ &\quad +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}\int_0^1 (B^2-A)^{-1/2}e^{-s(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}\int_0^1 (B^2-A)^{-1/2}e^{-(2-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds. \end{aligned}$$

d'où

$$u_0 \in (D(A-B^2),X)_{1/2p,p} \text{ et } e^B u_1 \in (D(A-B^2),X)_{1/2p,p}$$

On déduit alors que

$$u_0, u_1 \in (D(A-B^2),X)_{1/2p,p}.$$

De l'hypothèse $(H.4)$, on trouve que

$$(D(A-B^2),X)_{1/2p,p} = (D(A)\cap D(B^2),X)_{1/2p,p} = (D(A),X)_{1/2p,p},$$

d'où

$$u_0, u_1 \in (D(A), X)_{1/2p,p}.$$

De plus $g \in L^p(0,1;X)$, alors d'aprés le théorème (2.2.1), on obtient

$$v \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A-B^2)).$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
Bv'(x) &= B(B^2-A)^{1/2}e^{-(1-x)(B^2-A)^{1/2}}\zeta_0 - B(B^2-A)^{1/2}e^{-x(B^2-A)^{1/2}}\zeta_1 \\
&\quad +\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^x e^{-(x-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}\int_x^1 e^{-(s-x)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\
&= B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)e^{-(1-x)(B^2-A)^{1/2}}\zeta_0 \\
&\quad -B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)e^{-x(B^2-A)^{1/2}}\zeta_1 \\
&\quad +\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^x e^{-(x-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}\int_x^1 e^{-(s-x)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\
&= B(B^2-A)^{-1/2}\varphi(x).
\end{aligned}$$

telle que $\varphi \in L^P(0,1;X)$ et on utilise le même raisonement que le théorème (2.2.1), on obtient

$$Bv' \in L^P(0,1;X).$$

En utilisant les hypothèses $(H.4)$, $(H.5)$ et le fait que

$$v \in L^p(0,1;D(A)),$$

on obtient, pour presque partout $x \in (0,1)$

$$u(x) = e^{-xB}v(x), \ \ Au(x) = e^{-xB}Av(x),$$

et

$$u'(x) = e^{-xB}(-Bv(x) + v'(x)).$$

Puisque $v' \in L^p(0,1;D(B))$, alors

$$x \longmapsto u''(x) = e^{-xB}(B^2v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)) \in L^P(0,1;X),$$

et pour presque partout $x \in (0,1)$

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = e^{-xB}(v''(x) + (A-B^2)v(x)) = f(x),$$

alors u vérifiée les propriétés désirés.

3.3 Deuxième approche

On suppose, ici, que les hypothèses suivante $(H.0)$ et $(H.3) \sim (H.6)$ sont vérifiées, et on ajoute les hypothèses suivantes

$$A \text{ est inversible,} \tag{H.9}$$

$$D(BA) \subset D(B^3), \tag{H.10}$$

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ génère des semi-groupes analytique dans } X, \tag{H.11}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ (\pm B + (B^2 - A)^{1/2})^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C \geqslant 1,\ \theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[: \forall s \in \mathbb{R},\ \left\|(\pm B + (B^2 - A)^{1/2})^{is}\right\| \leqslant Ce^{\theta|s|}, \end{cases} \tag{H.12}$$

Posons $(T_0(x))_{x \geqslant 0}$ et $(T_1(x))_{x \geqslant 0}$ des semi-groupes analytique génerer par les opérateurs suivants

$$-B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ et } B - (B^2 - A)^{1/2}.$$

Soit $g \in L^p(0,1;X)$, $x \in (0,1)$ on notes

$$\begin{aligned} L_0(x,g) &= (B + (B^2 - A)^{1/2}) \int_0^x T_0(x-s)g(s)ds \\ L_1(x,g) &= (B - (B^2 - A)^{1/2}) \int_0^x T_1(x-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

et pour $i,\ j \in \{0,1\}$

$$L_{0,0}(x,g) = (B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{-1/2}(B - (B^2 - A)^{1/2})T_0(x) \int_0^1 T_0(s)g(s)ds.$$

$$L_{1,0}(x,g) = (B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{-1/2}(B - (B^2 - A)^{1/2})T_1(x) \int_0^1 T_0(s)g(s)ds.$$

$$L_{0,1}(x,g) = (B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{-1/2}(B - (B^2 - A)^{1/2})T_0(x) \int_0^1 T_1(s)g(s)ds.$$

$$L_{1,1}(x,g) = (B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{-1/2}(B - (B^2 - A)^{1/2})T_1(x) \int_0^1 T_1(s)g(s)ds.$$

En appliquant le théorème de Dore-Venni (comme le chapitre 2), on obtient

$$L_0(.,g),\ L_1(.,g) \in L^p(0,1;X),$$

par conséquant, les applications suivantes

$$\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & L_0(1-x,g(1-.)) = (B+(B^2-A)^{1/2})\displaystyle\int_x^1 T_0(s-x)g(s)ds \\ x & \longmapsto & L_1(1-x,g(1-.)) = (B-(B^2-A)^{1/2})\displaystyle\int_x^1 T_1(s-x)g(s)ds \end{array}$$

sont $L^p(0,1;X)$.
On a aussi

$$\forall i,j \in \{0,1\} \quad L_{i,j}(.,g) \in L^p(0,1;X).$$

Par exemple

$$\begin{array}{rl} & L_{0,1}(x,g) \\ = & (B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})T_0(x)\displaystyle\int_0^1 T_1(s)g(s)ds \\ = & (B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})\displaystyle\int_0^x T_0(x-s)(T_0(s)T_1(s)g(s))ds \\ & +(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}T_0(x)T_1(x)(B-(B^2-A)^{1/2})\displaystyle\int_x^1 T_1(s-x)g(s)ds \\ = & (B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}L_0(x,\ T_0(.)T_1(.)g(.)) \\ & +(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}T_0(x)T_1(x)L_1(1-x,\ g(1-.)). \end{array}$$

En remplaçant $\sqrt{-A}$ par $\pm B-(B^2-A)^{1/2}$ dans le lemme (2.3.2) on obtient

$$M_0(.,w_0) = (B+(B^2-A)^{1/2})^2 T_0(.)w_0 \in L^p(0,1;X)$$
$$M_1(.,w_1) = (B-(B^2-A)^{1/2})^2 T_1(.)w_1 \in L^p(0,1;X)$$

D'autre part, grâce au théorème de réitération

$$\begin{array}{rcl} (D((B+(B^2-A)^{1/2})^2),X)_{1/2p,p} & = & (D(B+(B^2-A)^{1/2}),X)_{1/2p,p} \\ & = & (D((B^2-A)^{1/2}),X)_{1/2p,p} \\ & = & (D(B^2-A),X)_{1/2p,p} \end{array}$$

et comme

$$(D(B^2-A),X)_{1/2p,p} = (D(A),X)_{1/2p,p}.$$

Le résultat le plus important dans cette partie est donné par le théorème suivant

Théorème 3.3.1 *Supposons* $(H.0)$ *et* $(H.3) \sim (H.6)$ *et* $(H.9) \sim (H.12)$. *Si* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < \infty$ *et*

$$u_0 \in (D(A),X)_{1/2p,p}$$

avec $u_1 = 0$.

Alors le problème $(3.1.1)-(3.1.2)$ admet une unique solution stricte u tel que

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),\ u' \in L^p(0,1;D(B)),$$

vérifiées $(3.1.1)-(3.1.2)$.

Preuve.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} v''(x) + 2Bv'(x) + Av(x) = f(x),\ x \in]0,\ 1[\\ v(0) = u_0, \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

et w est une solution stricte du problème

$$\begin{cases} w''(x) - 2Bw'(x) + Aw(x) = 0,\ x \in]0,\ 1[\\ w(0) = u_1, \quad w(1) = 0 \end{cases}$$

Remarquons, alors

$$u = v(.) + w(1-.),$$

donc, il suffit de trouver la solution lorsque $u_1 = 0$.

Dans ce cas la solution est donné par

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-(1-x)(-B-(B^2-A)^{1/2})}\zeta_0 + e^{-x(B-(B^2-A)^{1/2})}\zeta_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^x e^{-(x-s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_x^1 e^{-(s-x)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= -(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}e^{-(B+(B^2-A)^{1/2})}u_0 - \frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1} \\ &\quad .(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-(s+1)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{(1-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}u_0 + \frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-s(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-(2-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds. \end{aligned}$$

on applique A, on obtient

$$\begin{aligned} Au(x) &= AT_0(1-x)\zeta_0 + AT_1(x)\zeta_1 - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^x T_0(x-s)f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}\int_x^1 T_1(s-x)f(s)ds \end{aligned}$$

on écrit Au en fonction de L_0 et L_1, on obtient

$$\begin{aligned} Au(x) &= AT_0(1-x)\zeta_0 + AT_1(x)\zeta_1 - \frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}L_0(x,f) \\ &\quad -\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}L_1(1-x,f(1-.)). \end{aligned}$$

pour $x \in (0,1)$, avec

$$\begin{aligned} & AT_0(1-x)\zeta_0 \\ = \; & -(B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}T_0(1-x)e^{-(B+(B^2-A)^{1/2})}u_0 \\ & +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2} \\ & .(B-(B^2-A)^{1/2})T_0(1-x)\int_0^1 e^{-(1-s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\ & -\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2}) \\ & .T_0(1-x)\int_0^1 e^{(1+s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\ = \; & -(B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}T_0(1)M_0(1-x,u_0) \\ & +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}\left[L_{0,1}(1-x,f(1-.)) - T_0(1)L_{0,0}(1-x,f)\right] \end{aligned}$$

par conséquent

$$AT_0(1-.)\zeta_0 \in L^p(0,1;X),$$

de la même façon on montre que $AT_1(.)\zeta_1 \in L^p(0,1;X)$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} & AT_1(x)\zeta_1 \\ = \; & (B+(B^2-A)^{1/2})(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}M_1(x,u_0) \\ & +\frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}L_{1,0}(x,f) - \frac{1}{2}(I-e^{-2(B^2-A)^{1/2}})^{-1}T_1(1)L_{1,1}(x,f(1-.)). \end{aligned}$$

Ainsi $Au \in L^p(0,1;X)$.

On étudie maintenant Bu'. On a

$$\begin{aligned} Bu'(x) &= B(B+(B^2-A)^{1/2})T_0(1-x)\zeta_0 - B(B-(B^2-A)^{1/2})T_1(x)\zeta_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^x T_0(x-s)f(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})\int_x^1 T_1(s-x)f(s)ds, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} Bu'(x) &= B(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}AT_0(1-x)\zeta_0 - B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}T_1(x)\zeta_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}L_0(x,f) + \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}L_1(1-x,f(1-.)). \end{aligned}$$

D'où $Bu' \in L^p(0,1;X)$.

Chapitre 4

Exemples d'applications

Dans ce chapitre, on donne quelques exemples d'applications.

4.1 Exemple 1

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ \psi(0,y) = \psi_0(y),\ \psi(1,y) = \psi_1(y) \qquad y \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi(x,1) = 0 \qquad x \in (0,1) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $g \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$, X est un espace de Banach, ψ_0, ψ_1 deux éléments dans X.
Formulation abstraite : On écrit le problème (4.1.1) sous forme abstraite

$$\begin{cases} \psi''(x) + A\psi(x) = g(x),\ x \in (0,1) \\ \psi(0) = \psi_0, \quad \psi(1) = \psi_1 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

avec

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in W^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ A\psi = \psi''. \end{cases}$$

La résolvante de A donné par

$$(A-\lambda)^{-1}g = \int_0^1 K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)g(s)ds,$$

où

$$K_{\sqrt{\lambda}}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}(1-x)\sinh s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}(1-s)\sinh x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } x \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

avec $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} > 0$,
Vérification de l'hypothèse $(H.0)$: On a grâce au lemme de Schur et la symétrie du noyau

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}g\right\| \leqslant \left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 \left|K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)\right| ds\right)\|g\|.$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)\right| ds\\
\leqslant\ & \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}(1-x)}{|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\int_0^x \cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}s ds\\
&+\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}{|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\int_x^1 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}(1-s)ds\\
\leqslant\ & \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}(1-x)\sinh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x+\cosh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x\sinh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}(1-x)}{|\lambda|^{1/2}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\\
\leqslant\ & \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}{|\lambda|^{1/2}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\leqslant\frac{1}{|\lambda|\left|1-e^{-2\sqrt{\lambda}}\right|}\leqslant\frac{C}{|\lambda|}.
\end{aligned}$$

D'autre part, l'opérateur A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1}g=\int_0^x (x-s)g(s)ds - x\int_0^1(1-s)g(s)ds.$$

on trouve ainsi que $\rho(A)\supset[0,+\infty[$ et $\exists C>0$

$$\forall\lambda\in[0,+\infty[: \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant\frac{C}{1+\lambda}.$$

Vérification de l'hypothèse $(H.1)$: On adapte la preuve faite par Labbas et Moussaoui, Proposition (3.1), page 191. On écrit

$$\frac{\sinh\sqrt{\lambda}(1-x)\sinh s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}}=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{e^{-2\sqrt{\lambda}}-e^{-2\sqrt{\lambda}(1-x)}-e^{-2\sqrt{\lambda}s}+e^{-2\sqrt{\lambda}(1-x+s)}}{1-e^{-2\sqrt{\lambda}}}\right)$$

et on utilise la représentation intégrale des puissances complexes d'un opérateur séctoriel pour $0<\operatorname{Re}z<1$. Il vient que

$$\left[(-A)^{-z}g\right](x)=\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^\infty \lambda^{-z}\left[(\lambda I-A)^{-1}g\right](x)d\lambda=\sum_{j=1}^4 I_j(x).$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^\infty \lambda^{-z} \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2\sqrt{\lambda}} g(s)dsd\lambda \\ &= \frac{-1}{2\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x \int_0^\infty \lambda^{-z} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{\sqrt{\lambda}} g(s)d\lambda ds \end{aligned}$$

on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}(x-s)$ on trouve

$$I_1(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x \left(\int_0^\infty \sigma^{-2z} e^{-\sigma} d\sigma \right) (x-s)^{2z-1} g(s)ds$$

et comme

$$\int_0^\infty \sigma^{-2z} e^{-\sigma} d\sigma = \Gamma(1-2z)$$

alors

$$I_1(x) = \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x (x-s)^{2z-1} g(s)ds.$$

On pose

$$\phi_z(y) = \chi_{[0,+\infty[}.y^{2z-1} \text{ et } G(s) = \begin{cases} g(s) \text{ si } s \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

avec $\chi_{[0,+\infty[}$ est la fonction caractéristique. Donc on peut écrire

$$I_1(x) = \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} (\phi_z * G)(x).$$

on utilise les propriété de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\zeta t} f(t)dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(\frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} (\phi_z * G)) \right) (x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \mathcal{F}(\phi_z).\mathcal{F}(G) \right) (x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(m_z.\mathcal{F}(G))(x), . \end{aligned}$$

Avec

$$m_z(\zeta) = \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \mathcal{F}(\phi_z)(\zeta).$$

D'autre part, on sait que

$$\mathcal{F}(\phi_z)(\zeta) = \Gamma(2z)(2i\pi\zeta)^{-2z} = \Gamma(2z)\,|2\pi\zeta|^{-2z}\,(h(\zeta)e^{i\pi z} + h(-\zeta)e^{-i\pi z}),$$

où

$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 \text{ si } \zeta < 0 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

alors

$$m_z(\zeta) = \frac{-\Gamma(1-2z)\Gamma(2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\,|2\pi\zeta|^{-2z}\,(h(\zeta)e^{i\pi z} + h(-\zeta)e^{-i\pi z}),$$

et comme

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

il vient

$$m_z(\zeta) = \frac{-\sin(\pi z)}{\sin(2\pi z)}\,|2\pi\zeta|^{-2z}\,(h(\zeta)e^{i\pi z} + h(-\zeta)e^{-i\pi z}).$$

D'autre part, on a

$$\sup|m_z(\zeta)| \leqslant \left|\frac{1}{2\cos(\pi z)}\frac{1}{(2\pi\zeta)^{2z}}\right| e^{\pi|\operatorname{Im} z|}$$

et

$$\sup|\zeta m_z'(\zeta)| \leqslant |2z|\left|\frac{1}{2\cos(\pi z)}\frac{1}{(2\pi\zeta)^{2z}}\right| e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.$$

On raisonne de la même manière pour les autres termes $I_j(x)$ avec $j = 1,\,2,\,3$.
En suite on applique le Théorème de Mikhlin, on trouve qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\left\|(-A)^{-z}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leqslant K(1+|z|)\frac{1}{|\cos(\pi z)|}e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.$$

Posons maintenant $z = \eta - is$ et en passant à la limite quand $\eta \longrightarrow 0$ on obtient

$$\left\|(-A)^{-z}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leqslant K(1+|s|)\frac{1}{|\cosh\pi\,|s||}e^{\pi|s|} \leqslant Ke^{\epsilon_1|s|}.$$

D'autre part, d'aprés Grisvard [10], on a

$$\begin{aligned}(D(A),X)_{1/2p,p} &= (W_0^{2,p}(0,1);L^p(0,1))_{1/2p,p} \\ &= \left\{u \in B_p^{2(1-1/2p)}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\right\} \\ :&= B_{p,0}^{2-1/p}(0,1)\end{aligned}$$

Théorème 4.1.1 *Soit $f \in L^p(0,1;L^p(0,1))$. Le problème* (4.1.2) *admet une unique solution stricte u si seulement si*

$$u_0, u_1 \in B_{p,0}^{2-1/p}(0,1).$$

Remarque Dans le cas général, lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, on définit l'opérateur A, dans $X = L^q(\Omega)$ avec $1 < q < \infty$, comme suit

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega), \\ A = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{jk}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) - \delta, \ \delta \geqslant 0, \end{cases}$$

où $a = (a_{jk})$ est une matrice carrée. On pose $b_k = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \partial a_{jk}/\partial y_j$, $k = 1, 2, ..., n$, vérifient les conditions citées dans Prüss-Sohr [18], i.e.,
$(A.1)$ $a(x) = (a_{jk}(x))$ est un matrixe symétrique pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et il y a $a_0 > 0$ avec $a_0 \leqslant a(x)\zeta.\zeta \leqslant a_0^{-1}$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = 1$;
$(A.2)$ $a_{jk} \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour $\alpha \in (0,1)$ et, lorsque Ω est sans borné, $a_{jk}^\infty = \lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} a_{jk}(x)$ existe, et $\forall C > 0$ un constante avec

$$\left|a_{jk}(x) - a_{jk}^\infty\right| \leqslant C\,|x|^{-\alpha} \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ avec } |x| \geqslant 1, \ j,k = 1, ..., n;$$

$(A.3)$ $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \in L^{r_k}(\Omega)$, $p \leqslant r_k \leqslant \infty$, $r_k > n$, $j,k = 1, ..., n$.
On suppose aussi que la matrice a vérifie les hypothèses cité dans Prüss-Sohr [18], lorsque $\delta > 0$ et Ω borné.
Alors, d'aprés le Théorème C, dans [18], l'opérateur $-A$ est de classe Bip. Par conséquent, on peut appliquer le Théorème (2.2.1), à cet exemple et le résultat donné par

Proposition 4.1.1 *Soit* p, $q \in]1, \infty[$, $f \in L^p(0,1; L^q(\Omega))$ *et*

$$u_0, u_1 \in (W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega), L^q(\Omega))_{1/2p,p}.$$

donc le problème donné s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)(x,y) - \delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in (0,1) \times \Omega, \\ u(0,y) = u_0(y), \ u(1,y) = u_1(y), \ y \in \Omega, \\ u(x,\sigma) = 0, \ (x,\sigma) \in (0,1) \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Admet une unique solution stricte u.

l'espace d'interpolation $(W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega), L^q(\Omega))_{1/2p,p}$, lorsque Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, est

$$B_{q,p,0}^{2-1/p}(\Omega) := \left\{u \in B_{q,p}^{2-1/p}(\Omega) : u/_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

4.2 Exemple 2

Soit $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs A et B comme

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \ Au = au'' - cu \\ D(B) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \ Bu = bu', \end{cases}$$

où $a - b^2 > 0$ et $c > 0$. Alors

$$D(B^2 - A) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \text{ et } (B^2 - A)u = -(a - b^2)u'' + cu$$

$$\begin{aligned} D((B^2 - A)^{1/2}) &= [L^p(\mathbb{R}), W^{2,p}(\mathbb{R})]_{1/2,p} \\ &= B_{p,p}^{2(1-1/2)}(\mathbb{R}) \\ &= W^{1,p}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Si $p = q$. Alors

$$B_{p,p}^{\theta}(\Omega) = W^{\theta,p}(\Omega)$$

Donc, d'aprés [18], Théorème C, page 167, et H.8, $(B^2 - A)$ est un opérateur de classe Bip. En appliquant le Théorème (3.0.2), on obtient

Proposition 4.2.1 *Soit* $p \in]1, \infty[$, $f \in L^p(0, 1; X)$ *et*

$$u_0, u_1 \in (W^{2,p}(0, 1); L^p(\mathbb{R}))_{1/2p,p} = B_p^{2-1/p}(\mathbb{R}).$$

Alors le problème suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - cu(x, y) = f(x, y), \ (x, y) \in]0, 1[\times\mathbb{R}, \\ u(0, y) = u_0(y), \ u(1, y) = u_1(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

admet une unique solution stricte.

4.3 Exemple 3

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, avec $\partial\Omega$ est la frontière de Ω et $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. On définit les deux opérateurs suivants

$$\begin{cases} D(A) = \left\{u \in W^{4,p}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega}\right\}, \\ Au = b\Delta^2 u, \end{cases}$$

avec $b < 0$, et

$$\begin{cases} D(B) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \\ Bu = \Delta u. \end{cases}$$

Alors

1. B génère un semi-groupe analytique et borné et $0 \in \rho(B)$.
2. $(B^2)^{1/2} = -B$ et

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} = \pm B + (1-b)^{1/2} B = ((1-b)^{1/2} \pm 1)B,$$

génère des semi-groupe analytique.
D'autre part, l'hypothèse H.12 est vérifiée selon Seeley [19].
Le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\Delta \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in (0,1) \times \Omega, \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in \Omega, \\ u(1,y) = u_1(y), \ y \in \Omega, \\ u(x,\zeta) = \Delta_y u(x,y) = 0, \ u(x,\zeta) \in (0,1) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une unique solution stricte lorsque $f \in L^p(0,1; L^p(\Omega))$ et $u_0,\ u_1 \in (D(A), L^p(\Omega))_{1/2p,p}$.

4.4 Exemple 4

Soient $X = L^2(0,1)$ et T un opérateur linéaire défini par

$$\begin{cases} D(T) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1)\} \\ Tf = if'. \end{cases}$$

Il est clair que l'opérateur T est auto-adjoint et que $\sigma(T) = 2\pi Z$, (voir Miklavčič [17], page 75).
Alors

$$\begin{cases} D(T^2) = \{f \in H^2(0,1) : f(0) = f(1), \ f'(0) = f'(1)\} \\ T^2 f = -f'', \end{cases}$$

de plus T^2 est positif et auto-adjoint.
On prend $B = -iT$, cet opérateur génère un groupe fortement continu, et

$$\begin{cases} D(A) = D(T^2) \\ Af = (-2T^2 - aI)f = 2f'' - af, \end{cases}$$

avec $a > 0$.
Dans ce cas les opérateurs
1. B génère un groupe fortement continu,
2. $B^2 - A := T^2 + aI$, de domaine $D(T^2)$, est un opérateur auto-adjoint positif.
3. Le domaine de l'opérateur T coincide avec l'espace d'interpolation complexe

$$\left[X, D(T^2)\right]_{1/2},$$

voir Triebel [20] page 143
4. $(T^2 + aI)^{1/2}$ est positif auto-adjoint.

Ainsi le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - au(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(0,y) = u_0(y),\ u(1,y) = u_1(y),\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1),\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

lorsque

$$f \in L^p(0,1;L^2(0,1)) \text{ et } u_0,\ \ u_1 \in (D(A), L^2(0,1))_{1/2p,p} = (D(A),X)_{1/2p,p}.$$

admet une unique solution stricte selon le Théorème (3.0.2).

4.5 Exemple 5

Soit H un espace de Hilbert. B est un opérateur strictement positif et auto-adjoint dans l'espace X. On prend $A = -B^2$, alors $B^2 - A$ est auto-adjoint strictement positif, de plus

$$D((B^2 - A)^{1/2}) = D(B^{3/2}).$$

et $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ génère des semi-groupes analytique dans X et on a aussi $D(A) \subsetneq D(B^2)$ (voir Exemple 3 dans [7]). Donc $\pm B + (B^2 - A)^{1/2}$ sont des opérateurs positifs.
Comme exemple, on introduit les opérateurs A, B défini, dans $X = L^2(\Omega)$, par

$$D(B) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \qquad B = -\Delta,$$

$$D(A) = \left\{u \in H^6(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = \Delta^2 u_{|\partial\Omega} = 0\right\}, \quad A = \Delta^3,$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^q$, $q \geqslant 1$. Le problème suavant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 2\Delta\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \Delta^3 u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in (0,1)\times\Omega, \\ u(0,y) = u_0(y),\ u(1,y) = u_1(y),\ y \in \Omega, \\ u(x,\sigma) = \Delta u(x,\sigma) = \Delta^2 u(x,\sigma) = 0,\ (x,\sigma) \in (0,1)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

admet une unique solution stricte, on a utilisé les propriétés des opérateurs auto-adjoint et le résultat de Prüce et Sohr[18]

Bibliographie

[1] Balakrishnan A.V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*. Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] Belhamiti O. ; Labbas R. ; Lemrabet K.and Medeghri A. : Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces. Appl. Math. Comput 202 (2008),p.608-617.

[3] Belhamiti. O. : Etude dans les espace Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couch mince, p.49. (2008).

[4] Butzer-Bérens "Semi-groups of operators and approximation" 1967

[5] Da Prato. G et Grisvard. P. :Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles, J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54(1975), 305-387.

[6] Dore. G and Venni A. : On the Closedness of the Sum of two Closed Operators, Mathematische Zeitschrift, 196(1987), 270-286.

[7] Favini A, Labbas R, Maingot S, Tanabe H and Yagi A. : On the solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic type, Funkcial. Ekvac, 47 (2004), 423-452.

[8] Grisvard P. : "commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications" 1966.

[9] Grisvard P. : "Théorème de trace et d'interpolation" 1960.

[10] Grisvard P. : Spazi di Tracce e Applicazioni, Rendiconti di Matematica (4), 5, série VI (1972), 657-729.

[11] Haase M. : The functional calculus for sectorial operators and similarity methods. Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[12] Krien S. G. : Linear Differentail Equations in Banach Spaces, Moscou, 1967.

[13] Labbas R. and Moussaoui M. : On the resolution of the heat equation with discontinous coefficients. Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 187-201.

[14] Limam K. : Étude de Problèmes de Transmission Régis par des Équations Différentielles Abstraites de Type Elliptique. p 17 $\sim$ 20. 2012.

[15] Lions J. L. et Peetre. J. : Sur une classe d'espace d'interpolation. Publ. Math de l'I.H.È.S, 19(1964), 5-68.

[16] Lunardi A. : Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Birkhäuser, (1995).

[17] Miklavčič M. : Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations, Word Scientific, Singapore, 1998.

[18] Prüss, J. and Sorh, H., Boundedness of Imaginary Powers of Second-order Elliptic Differential Operators in L^p, Hiroshima Math. J., 23 (1993), 161-192.

[19] Seeley R. : Norms and Domains of the Complexe Powers $(A_B)^z$, Amer. J. Math, 93, (1971), 299-309.

[20] Triebel H. : Interpolation Theory, Function Spaces, Differentail Operators, Ann. Math., 33(1932), 643-648.