REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHMEMATIQUES

MEMOIRE

DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Option: Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Résolution d'une équation différentielle abstraite complète à coefficients opérateurs variables par l'approche des puissances fractionnaires.

Présenté par

Melle HAMMADI Khayra

Soutenu le 13/06/2013 devant le jury:

Président: **LIMAM Kheira** **MCB** **U. Mostaganem**

Examinateur: **HAOUA Rabah** **MAA** **U. Mostaganem**

Encadreur: **BOUZIANI Fatima** **MCB** **U. Mostaganem**

Remerciment

Je tiens tout d'abord à remercier « Dieu» le tout puissant de je avoir donné le courage, la force pour réaliser ce travail de fin d'étude.

Je tiens remercier mes encadreurs *Monsieur Medeghri Ahmed* et *Madame Bouziani Fatima*, pour leurs soutient constant, leurs encouragements, leur disponibilité et leurs conseils précieux tout au long de ce travail.

Je n'oublier pas de remercier également le présidant *Madame Limam Kheira* et l'examinateur *Monsieur Haoua Rabah*.

Un grand merci à tous mes professeurs qui m'ont aidé tout à long chemin pour que je sois ce que je suis aujourd'hui.

Naturellement, je tiens à remercier ma familles surtout mon père et ma mère pour leur soutient et leur courage. Je remercier aussi mes amis et toutes les personnes qui ont contribue de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

1 Rappels et définitions **4**
1.1 Les opérateurs linéaires . . . 4
1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires . . . 5
1.3 Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires . . . 6
1.4 Les espaces d'interpolation . . . 7
1.5 Intégrale de Dunford . . . 8
1.6 Les espaces de Hölder . . . 8

2 Étude d'existence et d'unicité de la solution stricte **9**
2.1 Position du problème et hypothèses . . . 9
2.2 Représentation de la solution . . . 14
2.3 Résultats de base . . . 18
2.3.1 Étude des opérateurs $\exp(xK(x)\varphi)$ . . . 20
2.3.2 Étude des opérateurs $\frac{d}{dx}(\exp xK(x)\varphi)$ . . . 22
2.3.3 Étude des opérateurs $\frac{d^2}{dx^2}(\exp(xK(x)\varphi))$ . . . 25
2.4 Régularité de la solution . . . 30
2.4.1 Régularité de l'opérateur $Op(d_0)$ . . . 30
2.4.2 Régularité de l'opérateur $Op(d_1)$ . . . 32
2.4.3 Régularité de l'opérateur $Op(m)$ . . . 33
2.4.4 Régularité de l'opérateur $Op(v)$ . . . 38
2.4.5 L'équation vérifiée par la solution et sa résolution . . . 42
2.4.6 Résultat essentiel d'existence et d'unicité de la solution stricte . . . 45

3 Exemple **49**

Introduction

Dans ce mémoire, on considère l'équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs variables suivante

$$u''(x) + B(x)u'(x) + A(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{0.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0) = \varphi \\ u(1) = \psi \end{cases}, \tag{0.2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $\theta \in]0,1[$ et X un espace de Banach, φ et ψ sont deux éléments donnés dans X, $(B(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans X.

Dans tout ce travail, on note pour tout $x \in [0,1]$

$$Q(x) = A(x) - \lambda I, \qquad K(x) = -(-Q(x))^{1/2}.$$

On suppose que la famille des opérateurs linéaires fermés $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ de domaines $D(Q(x))$ vérifie la condition d'ellipticité

$$\exists C > 0,\, \forall x \in [0,1],\, \forall z \geq 0,\, \exists (Q(x) - zI)^{-1} \in L(X) \,:\, \left\|(Q(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+z}, \tag{0.3}$$

qui reste vérifiée dans un secteur du plan complexe

$$\Gamma_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\},$$

où θ_0 et r_0 sont des nombres positifs petits.

La famille des opérateurs $B(x)_{x\in[0,1]}$ vérifie

$$\exists C > 0,\, \forall x \in [0,1],\, \|B(x)\|_{L(X)} \leq C. \tag{0.4}$$

Dans ce travail, le terme $B(x)u'(x)$ est considéré comme une "perturbation".

En plus des hypothèses $(0.3), (0.4)$, on suppose qu'il existe un second secteur

$$\Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1} = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| \leq \theta_1 + \pi/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\},$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\rho\left(-(Q(x))^{1/2}\right) \supset \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}.$$

On suppose que pour tout $z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}$, l'application $x \to (K(x) - zI)^{-1}$ défini sur $[0,1]$ est dans $C^2([0,1]; L(X))$ et il existe $C > 0$, $\upsilon \in \left]1/2, 1\right]$ et $\eta \in \left]0,1\right[$ tels que pour tout $z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}$ et tout $x \in [0,1]$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|z|^{\upsilon}}, \tag{0.5}$$

$$B(0)(X) \subset \overline{D(K(0))}, \quad B(1)(X) \subset \overline{D(K(1))}, \tag{0.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx} (K(x))^{-1} \backslash_{x=0} (D(K(0))) \subset \overline{D(K(0))} \\ \dfrac{d}{dx} (K(x))^{-1} \backslash_{x=1} (D(K(1))) \subset \overline{D(K(1))} \end{array} \right. , \tag{0.7}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (K(s) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C \frac{|x-s|^{\eta}}{|z|^{\upsilon}}, \quad \eta + \upsilon - 1 > 0, \tag{0.8}$$

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C |z|^{1-\upsilon}, \tag{0.9}$$

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} - \frac{d^2}{ds^2} (K(s))^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C |x-s|^{\eta}. \tag{0.10}$$

L'équation (0.1) a été traitée par de nombreux auteurs parmi lesquels, on cite :

1. **cas $B = 0$, A constant et $\lambda = 0$:**
   Le célèbre travail de S.G. Krein fait en 1967 où l'auteur a étudie cette équation différentielle, en se basant sur la méthode de réduction de l'ordre et les propriétés des semi groupes et de la racine carrée $(-A)^{1/2}$ (avec $D(A)$ dense dans X). Cette équation a été étudiée aussi, dans le cadre des sommes d'opérateurs par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975. Ici, les auteurs ont utilisé principalement le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation avec la restriction $f(0) = f(1) = 0$.
2. **cas $B = 0$ et A variable (A dépend de x) :**
   En 1975, l'équation différentielle (0.1) avec des conditions aux limites homogènes a été largement traitée par G. Da Prato et P. Grisvard dans un cadre plus général de sommes d'opérateurs, ils ont supposé que, pour chaque $x \in [0,1]$, $(-A(x))$ vérifie l'hypothèse d'ellipticité dite de Krein et des hypothèses de différentiabilité sur la résolvante.
   En 1985, R. Labbas et B. Terreni ont étudié l'équation différentielle (0.1) avec des conditions aux limites du type Sturn-Liouville
   $$\left\{ \begin{array}{l} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0 \\ a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0 \end{array} \right. ,$$
   où $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ et $a_i + b_i > 0$, $i = 0, 1$. Ceci, en imposant aussi la restriction $f(0) = f(1) = 0$.
   En 1987, l'équation différentielle (0.1) avec des conditions aux limites non homogènes a été traitée par R. Labbas, en utilisant l'hypothèse
   $$\exists \alpha,\ \rho,\ K > 0 \ \text{ telque } \ \left\| Q(x) (A(x) - zI)^{-1} \left((Q(x))^{-1} - (Q(s))^{-1} \right) \right\|_{L(X)} \leq \frac{K |x-s|^{\alpha}}{|z|^{\rho}},$$
   où $\alpha + 2\rho - 2 > 0$, dite de la non commutativité de Labbas-Terreni des l'hypothèses sur la diffirentiabilité des résolvantes. Ici, il n'a pas exigé que $f(0) = f(1) = 0$.
   En utilisant les techniques de calculs de Sinestrari, il a obtenu des conditions nécessaires de compatibilité entre les données et le second membre f, pour obtenir une solution stricte du problème $(0.1) - (0.2)$.Dans toutes ces études, les outils essentiels sont se le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation.

3. **cas A et B constants $(B \neq 0)$:**
   L'équation différentielle abstraite complète
   $$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)$$
   a été développée selon deux approches :
   La première s'appuie sur le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation. On cite le travail de R. Labbas, en 1994 où cette équation différentielle complète a été étudiée pour la première fois les hypothèses essentielles étaient :
   $$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur elliptique,} \\ B \text{ génère un groupe,} \\ B \text{ et } B^2 - A \text{ se commutent au sens des résolvantes.} \end{cases}$$
   La deuxième approche utilise les techniques des semi-groupes et la méthode de réduction d'ordre de S.G. Krein, basée sur les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires.
4. **Cas A et B variables (A et B dépendant de x) :**
   Les auteurs A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B.K. Sadallah en 2008, on traité l'équation différentielle (0.1) avec des conditions aux limites du type
   $$\begin{cases} u(0) = \psi_0, \\ u(\sigma) = \psi_1, \text{ où } \sigma \text{ est un petit nombre réel positif,} \end{cases}$$
   sous des hypothèses de différentiabilité des résolvantes des opérateurs $Q(x)$.
   Leurs approche était basée sur le calcul fonctionnel de Dunford, les techniques de calculs de Sinestrari et les espaces d'interpolation.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :
Au premier chapitre on rappelle quelques notions fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs linéaires, les semi-groupes, les puissances fractionnaires, les espaces d'interpolation, l'intégral de Dunford et les espaces de Hölder.
Dans le deuxième chapitre on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution stricte du problème $(0.1) - (0.2)$.
Au dernier chapitre on présente un exemple d'une équation aux dérivées partielles où on peut appliquer les résultats précédents.

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans tout ce qui suit $(X; \|.\|_X)$ est considéré comme un espace de Banach complexe.

1.1 Les opérateurs linéaires

Définition 1.1 *Un opérateur linéaire A sur X , est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$, appelé domaine de l'opérateur A, à valeurs dans X.*

Définition 1.2 *(Opérateur linéaire borné)*

On dit qu'un opérateur linéaire $A : X \to X$ est borné si pour tout $x_0 \in X$,

$$\left(\lim_{x \to x_0} \|x - x_0\|_X = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \|Ax - Ax_0\|_X = 0\right)$$

ce qui équivalent à

$$\lim_{x \to x_0} \|Ax\|_X = 0.$$

On note $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans X. Cet espace muni de la norme suivante

$$\|A\|_{L(X)} := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X\,,$$

est un espace de Banach.

Définition 1.3 *(Opérateur linéaire fermé)*

Un opérateur $A : D(A) \subset X \to Y$ est fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \in X \\ Ax_n \to y \in Y \end{cases},$$

on a

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Définition 1.4 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire.*

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur A, l'ensemble ouvert $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \diagup A - \lambda I : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\right\}.$$

Si l'opérateur A est fermé, alors

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \diagup A - \lambda I : D(A) \to X \quad \text{est bijectif}\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$.

Le spectre de A, notée $\sigma(A)$, est défini par

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \diagdown \rho(A).$$

Définition 1.5 *(Opérateur sectoriel)*
Soit X un espace de Banach complexe. Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel si :

1. *$D(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont denses dans X.*
2. *$\ker(A) = \{0\}$.*
3. *$]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ et $\exists M \geq 1$ tel que*

$$\left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq M \ ,$$

pour tout $\lambda > 0$.

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

On considère $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur X, $\alpha \in]0, \pi/2]$ et le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| < \alpha\}.$$

Définition 1.6 *(Semi-groupe fortement continu)*
La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelée semi-groupe si on a :

1. *$T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.*
2. *$\forall s, t \in \mathbb{R}^+$, $T(s + t) = T(s) T(t)$.*

Si de plus, pour chaque $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t) x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue c'est à dire

$$\forall x \in X, \lim_{t \to 0^+} \| T(t) x - x \|_X = 0,$$

alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit semi-groupe fortement continu ou C_0 semi-groupe.

Si la famille $(T(t))$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et satisfait les conditions 1) et 2) alors $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est dit groupe.

Définition 1.7 *(Générateur infinitésimal d'un semi-groupe)*
On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire A, défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t) x - x}{t} \quad \text{existe dans } X \right\} \\ \forall x \in D(A), \ Ax = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t) x - x}{t} \end{cases}.$$

On dit aussi que l'opérateur A génère le C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Définition 1.8 *(Semi-groupe analytique)*

Une famille $(T(z))_{z \in \Sigma_\alpha}$ d'éléments de $L(X)$ forme un semi-groupe analytique de type α dans X si elle vérifie les conditions :

1. *$T(0) = I$,*

2. $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ *tels que* $z_{1+}z_2 \in \Sigma_\alpha$, $T(z_{1+}z_2) = T(z_1)T(z_2)$.
3. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\lim\limits_{z\to 0, x\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}} \|T(x) - x\|_X = 0$.
4. *La fonction* $z \to T(z)$ *est analytique dans* Σ_α.

Proposition 1.1 *On définit la famille d'opérateurs linéaires* $(T(t))_{t\geq 0}$, *notée* $(\exp(tA))_{t\geq 0}$ *par :*

1. $T(0) = I$.
2. $\forall t > 0$, $\forall x \in X$, $T(t)x = \exp(tA)x = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \exp(\lambda t)(A-\lambda I)^{-1} x d\lambda$,

où $\gamma \subset \rho(A)$ *est un contour non borné dans* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ *allant de* $\infty \exp(-(\alpha+\pi/2))$ *à* $\infty\exp((\alpha+\pi/2))$.
Alors $(\exp(tA))_{t\geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe de générateur infinitésimal* A.
L'opérateur $(\exp(tA))_{t\geq 0}$ *se prolonge analytiquement en un semi-groupe analytique de type* α *noté* $(\exp(tA))_{z\in\Sigma_\alpha}$ *et l'opérateur* $(-A)^{1/2}$ *est bien défini. De plus il existe un secteur* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ *avec* $\alpha \in \left]0, \pi/2\right]$ *tels que* $\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho\left(-(-A)^{1/2}\right)$ *et* $-(-A)^{1/2}$ *génère un semi-groupe analytique.*

Définition 1.9 *(Semi-groupe analytique généralisé)*

Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe analytique généralisé d'angle* α *dans* X *si :*

1. $T(\cdot)$ *est la restriction d'une fonction holomorphe* $T : \Sigma_\alpha \to L(X)$.
2. $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ *tels que* $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$.

1.3 Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires

Soit A un opérateur sectoriel et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors

$$A^\alpha := (z)^\alpha (A) = (1+A)^n \left(\frac{z^\alpha}{(1+z)^n}\right)(A), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n.$$

Proposition 1.2 *(Les puissances fractionnaires à partie réelles positives)*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta > 0$ *on a :*

1. A^α *est un opérateur linéaire fermé dans* X.
2. *Si* $A \in L(X)$ *alors* $A^\alpha \in L(X)$.
3. $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$.
4. *Si* $\operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta$ *alors* $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$.
5. *Si* A *est injectif, alors* A^α *l'est aussi et* $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$.
6. *Si* $0 \in \rho(A)$ *alors* $0 \in \rho(A^\alpha)$.
7. *Si* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{w}$, *alors* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$, *avec* $w \in \left]0, \pi\right]$.

Proposition 1.3 *(Les puissances fractionnaires à partie réelles quelconque)*
Soient α, $\beta \in \mathbb{C}$, *on suppose aussi que* A *est injectif alors*

1. A^α *est un opérateur linéaire fermé dans* X.
2. $A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$ *et* $D(A^\alpha A^\beta) = D(A^\alpha) \cap D(A^\beta)$
3. *Si* A^α *est injectif et* $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$.
4. *Si* $0 \in \rho(A)$ *alors* $0 \in \rho(A^\alpha)$.
5. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $|\alpha| < \dfrac{\pi}{w}$, *alors* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$, *avec* $w \in \left]0, \pi\right]$.

Proposition 1.4 *Si* $0 \in \rho(A)$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *alors*

1. $A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha \in L(X)$.
2. $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$.

1.4 Les espaces d'interpolation

Soient $(X_0; \|.\|_0)$, $(X_1; \|.\|_1)$ deux espaces de Banach complexes.
On munit les espaces de Banach $X_0 \cap X_1$, $X_0 + X_1$ des normes suivantes :

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, & \text{si } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\limits_{\substack{x \in X_0, x \in X_1 \\ x = x_0 + x_1}} \left(\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}\right), & \text{si } x \in X_0 + X_1 \end{cases}.$$

Définition 1.10 *Soit $p \in [1, +\infty]$, On note $L_*^p(\mathbb{R}^+; X)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^+ \to X$ telles que :*

$$\begin{cases} \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \dfrac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty \quad si\ p \in]1, +\infty[\\ \|f\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}^+; X)} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} ess \|f(t)\|_X < \infty \end{cases}.$$

On définit l'espace d'interpolation entre X_0 et X_1 noté $(X_0; X_1)_{\theta,p}$ par :

$$x \in (X_0; X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0,\ \exists u_i(t) \in X_i : x = u_0(t) + u_1(t),\ i = 0, 1 \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0),\ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1) \end{cases},$$

ou d'une manière équivalente

$$x \in (X_0; X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0,\ \exists u(t) \in X_0 \cap X_1 : x = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \dfrac{d}{dt} \\ t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0),\ t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1) \end{cases}.$$

Les espaces d'interpolation sont caractérisés par la propriété suivante :

Proposition 1.5 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. *Si on suppose que*
$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \ \ et \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda > 0, \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \dfrac{C}{\lambda}, \end{cases}$$
alors
$$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^\theta A (A - \lambda I)^{-1} x \in L_*^p\left(\mathbb{R}^+; X\right)\right\}.$$

2. *Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors*
$$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^{1-\theta} A \exp(tA) x \in L_*^p\left(\mathbb{R}^+; X\right)\right\}.$$

3. *Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X, alors*
$$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^{-\theta} (\exp(tA) - I) x \in L_*^p\left(\mathbb{R}^+; X\right)\right\}.$$

   Dans notre cas
$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{x \in X : \sup_{t > 0} \left\|\ t^\theta A (A - tI)^{-1} x\right\|_X \leq C < +\infty\right\}$$
   sachant que
$$\|x\|_{D_A(\theta, +\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t > 0} \left\|\ t^\theta A (A - tI)^{-1} x\right\|_X.$$

Les espaces d'interpolation sont des espaces de Banach.

1.5 Intégrale de Dunford

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition 1.11 *(Intégrale de Dunford-Riesz)*
Soient $A \in L(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contentant $\sigma(A)$ (spectre de A) et γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A).
Soit $f \in H(U)$, alors

$$f(A) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) (A - zI)^{-1} \, dz.$$

1.6 Les espaces de Hölder

Définition 1.12 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, $\theta \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.*
L'ensemble des fonctions holdériennes d'exposant θ de $[a,b]$ dans X noté $C^\theta([a,b], X)$ est défini par

$$C^\theta([a,b];X) := \left\{ f : [a,b] \to X, \sup_{\substack{x,s \in [a,b] \\ x-s \neq 0}} \frac{\|f(x) - f(s)\|_X}{|x-s|^\theta} < \infty \right\}.$$

Cet espace muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta([a,b];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{\substack{x,s \in [a,b] \\ x-s \neq 0}} \frac{\|f(x) - f(s)\|_X}{|x-s|^\theta},$$

est un espace de Banach.
De plus

$$C^\theta([a,b];X) \subset C([a,b];X).$$

Chapitre 2

Étude d'existence et d'unicité de la solution stricte

2.1 Position du problème et hypothèses

Ce travail est consacré à la résolution de l'équation différentielle abstraite complète de second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs variables suivante

$$u''(x) + B(x)u'(x) + A(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1) \tag{2.1}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0) = \varphi \\ u(1) = \psi \end{cases}, \tag{2.2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $\theta \in]0,1[$ et X un espace de Banach, φ et ψ sont deux éléments donnés dans X, $(B(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans X.
On pose

$$Q(x) = A(x) - \lambda I, \ \lambda > 0$$

et on considère le problème $(2.1) - (2.2)$ dans le cas elliptique.

La famille d'opérateurs linéaires fermés $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ à domaines $D(Q(x))$ vérifie l'hypothèse d'elliptécité suivante

$$\exists C > 0, \forall x \in [0,1], \forall z \geq 0, \exists (Q(x) - zI)^{-1} \in L(X) : \left\| (Q(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+z}, \tag{2.3}$$

qui reste vraie dans le secteur

$$\Gamma_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\},$$

où θ_0 et r_0 sont des nombres positifs petits.

On suppose que les opérateurs $(B(x))_{x\in[0,1]}$ vérifient

$$\exists C > 0, \forall x \in [0,1] : \ \|B(x)\|_{L(X)} \leq C. \tag{2.4}$$

Le terme $B(x)u'(x)$ est considéré comme une "perturbation".

L'hypothèse (2.3), permet de définir les puissances fractionnaires de $(-Q(x))$. En particulier, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lambda > 0$, les racines carrées $-(-Q(x))^{1/2}$ sont bien définies et génèrent des semi-groupes analytiques

$$\left(\exp -(-Q(x))^{1/2} y\right)_{y>0} = \left(\exp\left(-(-A(x)+\lambda)^{1/2}\right) y\right)_{y>0},$$

non nécessairement fortement continus en 0.
De plus, il existe un second secteur

$$\Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1} = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| \leq \theta_1 + \pi/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\},$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\rho\left(-(Q(x))^{1/2}\right) \supset \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}.$$

On pose

$$\Gamma_0 = \{z = r\exp(\pm\theta_0) : r \geq r_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_0 \text{ et } |\arg z| \geq \theta_0\},$$

orientée de $\infty\exp(-\theta_0)$ à $\infty\exp(\theta_0)$ et

$$\Gamma_1 = \{z = r\exp \pm i(\theta_1 + \pi/2) : r \geq r_1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1 \text{et } |\arg z| \geq \theta_1 + \pi/2\},$$

$$\Gamma_2 = \{z = r\exp \pm i(\theta_1 + \pi/2) : r \geq r_1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1 \text{et } |\arg z| \leq \theta_1 + \pi/2\},$$

les courbes Γ_1, Γ_2 orientées de $\infty\exp(-i(\theta_1+\pi/2))$ à $\infty\exp(i(\theta_1+\pi/2))$, par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$, $y > 0$ et tout entier positive k, on a les représentations des semi-groups suivantes :

$$\begin{cases} \exp\left(-(-Q(x))^{1/2} y\right) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} \exp(zy)\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} dz \\ \left[-(-Q(x))^{1/2}\right]^k \exp\left(-(-Q(x))^{1/2} y\right) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} z^k \exp(zy)\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} dz \end{cases}.$$

On a aussi pour $z \geq 0$, $x \in [0,1]$

$$\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0} \frac{(Q(x)-sI)^{-1}}{(-s)^{1/2}+z} ds$$

et

$$\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s}\,(Q(x)-sI)^{-1}}{s+z^2} ds.$$

(vior [16] p.36.formule (2.29)) et [16] p. 37, relation 2.32).

Remarque 2.1 *On peut aussi représenter semi-groupe* $\exp\left(-(-Q(x))^{1/2} y\right)_{y>0}$ *sur la courbe* Γ_2 *par*

$$\exp\left(-(-Q(x))^{1/2} y\right) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_2} \exp(zy)\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} dz,$$

et tout les calculs faits pour ce semi-groupe sont valables sur Γ_0 *et* Γ_1.

Pour tout $x \in [0,1]$, on note $K(x) = -(-Q(x))^{1/2}$.

Lemme 2.1 *Sous l'hypothèse* (2.3), *il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}$,

$$\left\|(K(x)-zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|z|}. \tag{2.5}$$

En plus des hypothèses (2.3) et (2.4) , on suppose que pour tout $z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}$, l'application $x \to (K(x) - zI)^{-1}$, défini sur $[0,1]$ est dans $C^2([0,1]; L(X))$ et il existe $C > 0$, $\upsilon \in \,]1/2, 1]$ et $\eta \in \,]0,1[$ telles que pour tout $z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|z|^{\upsilon}}, \tag{2.6}$$

$$B(0)(X) \subset \overline{D(K(0))}, \quad B(1)(X) \subset \overline{D(K(1))}, \tag{2.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx} (K(x))^{-1} \setminus_{x=0} (D(K(0))) \subset \overline{D(K(0))} \\ \dfrac{d}{dx} (K(x))^{-1} \setminus_{x=1} (D(K(1))) \subset \overline{D(K(1))} \end{array} \right. , \tag{2.8}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (K(s) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C \frac{|x-s|^{\eta}}{|z|^{\upsilon}} \quad , \eta + \upsilon - 1 > 0, \tag{2.9}$$

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C |z|^{1-\upsilon} \tag{2.10}$$

et

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} - \frac{d^2}{ds^2} (K(s))^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C |x-s|^{\eta}. \tag{2.11}$$

Remarque 2.2 *Toutes les constantes précédentes C, υ et η sont indépendantes de x et on a toujours*

$$\eta + \upsilon - 1 < \upsilon \text{ et } \eta + \upsilon - 1 \leq \eta.$$

On peut remplacer z par $\sqrt{\lambda} + z$ dans les hypothèses (2.6), (2.9) *et* (2.10).

Conséquences des hypothèses

1. On peut aussi résoudre ce problème en utilisant l'hypothèse de type [18] suivante

$$\left\| K(x) (K(x) - zI)^{-1} \frac{d}{dx} (K(x))^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|z|^{\upsilon}}. \tag{2.12}$$

L'hypothèse (2.6) est plus faible par rapport à (2.12).

En effet (2.12) conduit à (2.6) en utilisant la formule

$$\frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} = K(x) (K(x) - zI)^{-1} \frac{d}{dx} (K(x))^{-1} K(x) (K(x) - zI)^{-1}, \tag{2.13}$$

déduite des expressions :

$$\frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} = \lim_{s \to x} \left[\frac{(K(s) - zI)^{-1} - (K(x) - zI)^{-1}}{s - x} \right].$$

En utilisant l'identité de la résolvante suivante, pour ϕ quelconque dans X, $x > 0$ et $z > 0$,

$$(K(x) - zI)^{-1} \phi = \left(\frac{K(x) (K(x) - zI)^{-1}}{z} - \frac{I}{z} \right) \phi.$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
& (K(s)-zI)^{-1}-(K(x)-zI)^{-1} \\
= \; & \frac{1}{z}\left[K(s)(K(s)-zI)^{-1}-K(x)(K(x)-zI)^{-1}\right] \\
= \; & \frac{1}{z}K(s)(K(s)-zI)^{-1}\left[I-(K(s)-zI)(K(s))^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1}\right] \\
= \; & \frac{1}{z}K(s)(K(s)-zI)^{-1}\left[(K(x)-zI)(K(x))^{-1}-(K(s)-zI)(K(s))^{-1}\right]K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
= \; & K(s)(K(s)-zI)^{-1}\left[-(K(x))^{-1}+(K(s))^{-1}\right]K(x)(K(x)-zI)^{-1}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} &= \lim_{s\to x}\left[\frac{(K(s)-zI)^{-1}-(K(x)-zI)^{-1}}{s-x}\right] \\
&= \lim_{s\to x}K(s)(K(s)-zI)^{-1}\left[\frac{-(K(x))^{-1}+(K(s))^{-1}}{s-x}\right]K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
&= K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on obtient (2.6).

2. L'inégalité

$$
\left\|K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C|x-s|^{\eta}}{|z|^{\upsilon}}, \quad (2.14)
$$

implique (2.9) et

$$
\left\|\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right\|_{L(X)} \leq C|x-s|^{\eta}. \quad (2.15)
$$

En effet, et d'après (2.13), on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial}{\partial s}(K(s)-zI)^{-1} &= K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
&\quad -K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
&\quad +K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
&\quad -K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}K(s)(K(s)-zI)^{-1} \\
&= (\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_3-\alpha_4).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|(\alpha_1-\alpha_2)\|_{L(X)} \leq \frac{C|x-s|^{\eta}}{|z|^{\upsilon}},
$$

en vertu de (2.14).

D'autre part, on a

$$
K(x)(K(x)-zI)^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}=z\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(s)-zI)^{-1}\right).
$$

D'après (2.12) et (2.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha_3-\alpha_4)\|_{L(X)} &\leq |z|\left\|K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right\|_{L(X)}\left\|\int_s^x\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right\| \\
&\leq C\frac{|x-s|}{|z|^{2\upsilon-1}} \leq C\frac{|x-s|}{|z|^{\upsilon}}.
\end{aligned}
$$

De plus

$$\begin{aligned}
& K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1} \\
= \; & K(x)(K(x)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right) \\
& + \left(K(x)(K(x)-zI)^{-1} - K(s)(K(s)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{ds}(K(s))^{-1} \\
= \; & K(x)(K(x)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right) \\
& + z\left(\int_s^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\frac{d}{ds}(K(s))^{-1},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1} \\
= \; & (K(x)-zI)(K(x))^{-1}\left[K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right] \\
& -z(K(x)-zI)(K(x))^{-1}\left(\int_s^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour $z=1$,on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1} \\
= \; & (K(x)-I)(K(x))^{-1}\left[K(x)(K(x)-I)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - K(s)(K(s)-I)^{-1}\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right] \\
& -(K(x)-I)(K(x))^{-1}\left(\int_s^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-I)^{-1}\,dr\right)\frac{d}{ds}(K(s))^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right\|_{L(X)} & \leq C\left(|x-s|^{\eta} + |x-s|\right) \\
& \leq C|x-s|^{\eta}.
\end{aligned}$$

3. L'hypothèse (2.6) permet de dériver la formule (2.13) , on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} = \; & K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d^2(K(x))^{-1}}{dx^2}K(x)(K(x)-zI)^{-1} \\
& +2zK(x)(K(x)-zI)^{-1}\left(\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}K(x)(K(x)-zI)^{-1}\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

En effet, de l'identité de la résolvante, on écrit (2.13) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} = \left(I + z(K(x)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(I + z(K(x)-zI)^{-1}\right).$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} = z\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(I + z(K(x)-zI)^{-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(I+z\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right)\frac{d^{2}}{dx^{2}}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\left(I+z\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right)\\
&+\left(I+z\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\ z\ \frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\\
=\ & z\frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\left(K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-I\right)^{-1}\right)\\
&+\left(K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-I\right)^{-1}\right)\frac{d^{2}}{dx^{2}}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\left(K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-I\right)^{-1}\right)\\
&+\left(K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-I\right)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\ z\ \frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Finalement, en utilisant la formule (2.13), on obtient (2.16).

4. Pour $|z|$ assez grand, la formule (2.16) conduit à (2.10), étant donné que

$$\left\|\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right\|_{L(X)}=O\left(1\right)+O\left(\left|z\right|^{1-v}\right)=O\left(\left|z\right|^{1-v}\right).$$

De plus, d'après ([11] p. 113), on a

$$\left\|\frac{d^{2}}{dx^{2}}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}-\frac{d^{2}}{ds^{2}}\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\leq C\left[\left|x-s\right|^{\eta}+\left(\left|x-s\right|+\left|x-s\right|^{\eta}\right)\left|z\right|^{1-v}+\left|x-s\right|\left|z\right|^{2-2v}\right], \tag{2.17}$$

on obtient alors (2.11) pour $z=0$.

2.2 Représentation de la solution

Tout d'abord on considéré le cas où $B\left(x\right)=0$ et $Q\left(x\right)=Q$ est un opérateur constant vérifiant l'hypothèse d'ellipticité (2.3).

$$\left\{\begin{array}{ll}u''\left(x\right)+Qu\left(x\right)=f\left(x\right), & x\in\left(0,1\right)\\ u\left(0\right)=\varphi & \\ u\left(1\right)=\psi & \end{array}\right. . \tag{2.18}$$

(on pose $K=\left(-\left(-Q\right)^{1/2}\right)$.

Dans ce cas, on considère le problème auxilliaire

$$\left\{\begin{array}{l}v''\left(x\right)+zv\left(x\right)=f\left(x\right)\\ v\left(0\right)=\varphi\\ v\left(1\right)=\psi\end{array}\right. ,$$

où $\varphi,\psi\in X,\ f\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)$.

On résoud l'équation homogène suivante

$$v''\left(x\right)+zv\left(x\right)=0.$$

Ici la détermination analytique de la racine carrée de $-z$ est choisie de telle sorte que

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z}>0.$$

Il est connu que la solution de l'équation homogène est de la forme

$$v\left(x\right)=c_{1}\exp\left(-\sqrt{-z}x\right)+c_{2}\exp\left(\sqrt{-z}x\right).$$

On cherche la solution de l'équation non homogène en utilisant la méthode de la variation des constantes i .e : en posant

$$v\left(x\right)=c_{1}\left(x\right)\exp\left(-\sqrt{-z}x\right)+c_{2}\left(x\right)\exp\left(\sqrt{-z}x\right), \tag{2.19}$$

telles que c_1 et c_2 sont deux fonctions à déterminer vérifiant le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x)\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) + c_2'(x)\exp\left(\sqrt{-z}x\right) = 0 \\ -\sqrt{-z}c_1'(x)\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) + \sqrt{-z}c_2'(x)\exp\left(\sqrt{-z}x\right) = f(x) \end{array} \right. .$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \left| \begin{array}{cc} \exp\left(-\sqrt{-z}x\right) & \exp\left(\sqrt{-z}x\right) \\ -\sqrt{-z}\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) & \sqrt{-z}\exp\left(\sqrt{-z}x\right) \end{array} \right| = 2\sqrt{-z}.$$

On pose

$$D_1 = \left| \begin{array}{cc} 0 & \exp\left(\sqrt{-z}x\right) \\ f(x) & \sqrt{-z}\exp\left(\sqrt{-z}x\right) \end{array} \right| = -f(x)\exp\left(\sqrt{-z}x\right),$$

$$D_2 = \left| \begin{array}{cc} \exp\left(-\sqrt{-z}x\right) & 0 \\ -\sqrt{-z}\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) & f(x) \end{array} \right| = f(x)\exp\left(-\sqrt{-z}x\right).$$

Donc les coefficients $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x) = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-z}}f(x)\exp\left(\sqrt{-z}x\right) \\ c_2'(x) = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{2\sqrt{-z}}f(x)\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) \end{array} \right. ,$$

en intégrant, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-z}}\displaystyle\int_0^x f(s)\exp\left(\sqrt{-z}s\right)ds + k_1 \\ c_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-z}}\displaystyle\int_x^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}s\right)ds + k_2 \end{array} \right. ,$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes, donc en remplaçant dans (2.19), on trouve que

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_0^x f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}(x-s)\right)ds + k_1\exp\left(-\sqrt{-z}x\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_x^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}(s-x)\right)ds + k_2\exp\left(\sqrt{-z}(1-x)\right). \end{aligned}$$

Les conditions aux limites $v(0) = \varphi$ et $v(1) = \psi$ donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = \varphi \\ v(1) = \psi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_2\exp\left(-\sqrt{-z}\right) = \varphi + \displaystyle\int_0^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}s\right)ds = \varphi + I_1 \\ k_1\exp\left(-\sqrt{-z}\right) + k_2 = \psi + \displaystyle\int_0^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}(1-s)\right)ds = \psi + I_2 \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}s\right) \\ I_2 = \displaystyle\int_0^1 f(s)\exp\left(-\sqrt{-z}(1-s)\right)ds \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} 1 & \exp\left(-\sqrt{-z}\right) \\ \exp\left(-\sqrt{-z}\right) & 1 \end{vmatrix} = 1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right),$$

donc

$$k_1 = \frac{1}{1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)} \begin{vmatrix} \varphi + I_1 & \exp\left(-\sqrt{-z}\right) \\ \psi + I_2 & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$k_2 = \frac{1}{1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)} \begin{vmatrix} 1 & \varphi + I_1 \\ \exp\left(-\sqrt{-z}\right) & \psi + I_2 \end{vmatrix}$$

En reportant ces deux expressions dans $v(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} v(x) &= \exp\left(-\sqrt{-z}x\right)\xi_0 + \exp(-\sqrt{-z}(1-x))\,\xi_1 \\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_0^x \exp(-\sqrt{-z}(x-s))\,f(s)\,ds - \frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_x^1 \exp(-\sqrt{-z}(s-x))\,f(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\left(\varphi - \exp\left(-\sqrt{-z}\right)\psi\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{-z}\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\int_0^1 \exp(-\sqrt{-z}(1-s))f(s)\,ds \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\int_0^1 \exp(-\sqrt{-z}(2-s))f(s)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\left(\psi - \exp\left(-\sqrt{-z}\right)\varphi\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{-z}\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\int_0^1 \exp(-\sqrt{-z}s)f(s)\,ds \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}\left(1-\exp\left(-2\sqrt{-z}\right)\right)}\int_0^1 \exp(-\sqrt{-z}(1+s))f(s)\,ds \end{aligned}$$

d'après le calcul fonctionnel de Dunford ainsi la solution du problème (2.18) est donnée

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(xK)\,\xi_0 + \exp((1-x)K)\,\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^x \exp((x-s)K)\,K^{-1}f(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_x^1 \exp((s-x)K)\,K^{-1}f(s)\,ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (I-Z)^{-1}(\varphi - \exp(K)\,\psi) \\ &\quad - \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 \exp(sK)K^{-1}f(s)\,ds + \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((2-s)K)K^{-1}f(s)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (I-Z)^{-1}(\psi - \exp(K)\varphi) \\ &\quad -\frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((1-s)K)K^{-1}f(s)\,ds + \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((1+s)K)K^{-1}f(s)\,ds\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} Z = \exp(2K) \\ (I-Z)^{-1} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\exp(2z)}{1-\exp(2z)}(K-zI)^{-1}\,dz + I \end{cases}$$

(pour l'inversibilité de $(I-Z)$, voir [13] p. 60).

Pour la résolution du problème $(2.1)-(2.2)$ dans le cas variable, on cherche une solution sous la forme

$$\begin{aligned}u(x) &= \exp(xK(x))\,\xi_0^*(x) + \exp((1-x)K(x))\,\xi_1^*(x) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^x \exp((x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_x^1 \exp((s-x)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\end{aligned} \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned}\xi_0^*(x) &= (I-Z(x))^{-1}(\varphi^* - \exp(K(x))\psi^*) - \frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 \exp(sK(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ &\quad +\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((2-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1^*(x) &= (I-Z(x))^{-1}(\psi^* - \exp(K(x))\varphi^*) - \frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((1-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ &\quad +\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 \exp((1+s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} Z(x) = \exp(2K(x)) \\ (I-Z(x))^{-1} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\exp(2z)}{1-\exp(2z)}(K(x)-zI)^{-1}\,dz + I \end{cases},$$

tels que φ^*, ψ^* et f^* sont des fonctions inconnues à déterminer dans un espace adéquat $(f^* \in C^\beta([0,1];X)$, $0<\beta<1)$, afin d'obtenir une solution strict u du problème $(2.1)-(2.2)$.
La solution stricte est une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1];X),\ u(x) \in D(Q(x)) \text{ pour chaque } x \in [0,1] \\ x \to Q(x)u(x) \in C([0,1];X) \end{cases}$$

et satisfait le problème $(2.1)-(2.2)$.

D'autre part, par un calcul formel, on obtient

$$\begin{cases} u(0) = \varphi^* = \varphi \\ u(1) = \psi^* = \psi \end{cases}.$$

Par conséquent, il suffit de chercher f^* dans un espace approprié telle que la représentation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & u(x) \qquad (2.21) \\ = \; & Y(x)\left(\exp(xK(x)) - \exp(2-x)K(x))\right)\varphi \\ & +Y(x)\left(\exp((1-x)K(x)) - \exp((1+x)K(x))\right)\psi \\ & -\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2+x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ & -\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x+s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ & +\frac{1}{2}\left(\int_0^x \exp((x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \int_x^1 \exp((s-x)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\right) \\ = \; & d_0(x)\,\varphi + d_1(x)\,\psi + m(x,f^*) + v(x,f^*), \end{aligned}$$

avec

$$Y(x) = (I - Z(x))^{-1}$$

et $v(x,f^*)$ est défini par les deux dernières intégrales, soit une solution stricte du problème $(2.1)-(2.2)$.

2.3 Résultats de base

Pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution stricte u, on aura besoin d'étudier le comportement des opérateurs

$$\exp(xK(x))\,\varphi,\ \frac{d}{dx}\left(\exp(xK(x))\,\varphi\right) \text{ et } \frac{d^2}{dx^2}\left(\exp(xK(x))\,\varphi\right)$$

proche de 0, où $\varphi \in D(K(0))$. Sachant que des résultats similaires peuvent être obtenus proche de 1, les opérateurs

$$\exp((1-x)K(x))\,\psi,\ \frac{d}{dx}\left(\exp((1-x)K(x))\,\psi\right) \text{ et } \frac{d^2}{dx^2}\left(\exp((1-x)K(x))\,\psi\right),$$

où $\psi \in D\left((K(1))^2\right) = D(A(1))$.

Soient $\xi > 0$ et $x \in [0,1]$. Grâce à la représentation

$$\exp(\xi K(x)) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \exp(\xi z)\,(K(x) - zI)^{-1}\,dz,$$

les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp(\xi K(x)) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \exp(\xi z)\,\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1}\,dz,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\exp(\xi K(x)) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \exp(\xi z)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - zI)^{-1}\,dz$$

sont bien définis.
De plus, on a les estimations suivantes,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(\xi K(x)\right) \right\|_X \leq \frac{C}{\xi^{1-\upsilon}} \tag{2.22}$$

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left(\xi K(x)\right) \right\|_X \leq \frac{C}{\xi^{2-\upsilon}}, \tag{2.23}$$

et l'estimation par rapport au paramètre λ :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(\xi K(x)\right) \right\|_X \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{(1-\eta)}{2}} \xi^{1-(\eta+\upsilon-1)}}. \tag{2.24}$$

Pour l'estimation (2.24), on utilise la remarque (2.2) et la propriété suivante

$$\begin{cases} \exists C > 0,\ \forall \lambda > 0,\ \forall z \in \Gamma_1 \\ \left| z + \sqrt{\lambda} \right| \geq C\,|z|, \quad \left| z + \sqrt{\lambda} \right| \geq C\sqrt{\lambda} \end{cases} \tag{2.25}$$

Par la suite, on aura besoin d'utiliser la formule suivante, pour tout $\varphi \in D\left(K(0)\right)$,

$$\begin{aligned} (K(x) - I)^{-1} \varphi &= \frac{K(x)\,(K(x) - I)^{-1}}{z} - \frac{\varphi}{z} \\ &= \frac{1}{z}\left[(K(0))^{-1} - (K(x))^{-1} + x\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} \right] K(0)\,\varphi - \frac{\varphi}{z} \\ &\quad + (K(x) - I)^{-1} \left[(K(0))^{-1} - (K(x))^{-1} + x\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} \right] K(0)\,\varphi \\ &\quad + \frac{(K(x) - I)^{-1}}{z} K(0)\,\varphi - \frac{x}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi \\ &\quad - x\,(K(x) - I)^{-1} \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - I)^{-1} \varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(K(x) - I)^{-1} \left[(K(0))^{-1} - (K(x))^{-1} + x\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} \right] K(0)\,\varphi \\ &\quad - (K(x) - I)^{-1} \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi + \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - I)^{-1} K(0)\,\varphi \\ &\quad - \frac{1}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi - x\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - I)^{-1} \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi \end{aligned} \tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - I)^{-1} \varphi &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - I)^{-1} \left[(K(0))^{-1} - (K(x))^{-1} + x\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} \right] K(0)\,\varphi \\ &\quad - (K(x) - I)^{-1} \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi - 2\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - I)^{-1} \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi \\ &\quad + \frac{1}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - I)^{-1} K(0)\,\varphi - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - I)^{-1} \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} K(0)\,\varphi. \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.3.1 Étude des opérateurs $\exp\left(xK\left(x\right)\varphi\right)$

Lemme 2.2 *Il existe $C>0$ telle que*

1. Pour tout $x>0$ et $\varphi\in D\left(K\left(0\right)\right)$ on a
$$\left\|\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\ x\left\|K\left(0\right)\varphi\right\|_X.$$
2. Pour tout $x>0$ et $\varphi\in D\left(\left(K\left(0\right)\right)^2\right)$ on a
$$\left\|\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\ x^2\left\|\left(K\left(0\right)\right)^2\varphi\right\|_X.$$

Preuve.
Soient $x>0$ et $\varepsilon>0$ avec $x>\varepsilon$, alors
$$\exp\left(\varepsilon K\left(0\right)\right)\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(-\exp\left(\varepsilon z\right)+\exp\left(xz\right)\right)\left(\frac{K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}}{z}\varphi\right)dz.$$

1. Si $\varphi\in D\left(K\left(0\right)\right)$, alors
$$\begin{aligned}\exp\left(\varepsilon K\left(0\right)\right)\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi &= \int_{\varepsilon}^{x}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2i\pi}\exp\left(\xi z\right)\left(K(0)-zI\right)^{-1}K\left(0\right)\varphi dz\right)d\xi\\ &= -\int_{\varepsilon}^{x}\exp\left(\xi K\left(0\right)\right)K\left(0\right)\varphi d\xi\end{aligned}$$
d'où
$$\left\|\exp\left(\varepsilon K\left(0\right)\right)\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\ \left(x-\varepsilon\right)\left\|K\left(0\right)\varphi\right\|_X.$$
2. Si $\varphi\in D\left(\left(K\left(0\right)\right)^2\right)$, on a
$$\left\|\exp\left(\varepsilon K\left(0\right)\right)\varphi-\exp\left(xK\left(0\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\left(x^2-\varepsilon^2\right)\left\|\left(K\left(0\right)\right)^2\varphi\right\|_X.$$

Pour obtenir les estimations d'émondeés, il suffit de faire tendre ε vers 0.
On obtient un lemme similaire pour $\psi\in D\left(K\left(1\right)\right)$.

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses* (2.3), (2.4), (2.6) *et* (2.9), *il existe une constante $C>0$ telle que*

1. *Pour tout $\varphi\in X$ et $x>0$ on a*
$$\left\|\exp\left(xK\left(x\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\left\|\varphi\right\|_X.$$
2. *Pour tout $\varphi\in X$, $x>0$ et $s\geq 0$ on a*
$$\left\|K\left(s\right)\exp\left(xK\left(s\right)\right)\varphi\right\|_X\leq\frac{C}{x}\left\|\varphi\right\|_X.$$
3. *En particulier, si $\varphi\in D\left(K\left(0\right)\right)$, $x>0$ et $s\in[0,x]$ alors*
$$\left\|K\left(s\right)\exp\left(xK\left(s\right)\right)\varphi\right\|_X\leq C\left\|K\left(0\right)\varphi\right\|_X.$$
4. *L'application $x\mapsto\exp\left(xK\left(x\right)\right)\varphi$ appartient à l'espace $C\left([0,1];X\right)$ si et seulement si $\varphi\in\overline{D\left(K\left(0\right)\right)}=\overline{D\left(A\left(0\right)\right)}$, dans ce cas*
$$\lim_{x\to 0}\exp\left(xK\left(x\right)\right)\varphi=\varphi.$$

5. *L'application* $x \mapsto \exp(xK(x))\varphi$ *appartient à l'espace* $C^\theta([0,1];X)$ *si et seulement si* $\varphi \in D_{K(0)}(\theta,+\infty)$.

Preuve.

1. Soient $\varphi \in X$, $x > 0$ et on pose $xz = \xi$, alors

$$\|\exp(xK(x))\varphi\|_X \leq C\|\varphi\|_X.$$

2. De la même manière, on obtient

$$\|K(s)\exp(xK(s))\varphi\|_X \leq \frac{C}{x}\|\varphi\|_X.$$

3. Soient $\varphi \in D(K(0))$, $x > 0$ et $s \in [0,x]$, alors

$$\begin{aligned} K(s)\exp(xK(s))\varphi &= K(s)\exp(xK(s))\left[(K(0))^{-1} - (K(s))^{-1}\right]K(0)\varphi + \exp(xK(s))K(0)\varphi \\ &= K(s)\exp(xK(s))\left[(K(0))^{-1} - (K(s))^{-1} + s\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\backslash_{s=0}\right]K(0)\varphi \\ &\quad -sK(s)\exp(xK(s))\left[\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\backslash_{s=0} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right]K(0)\varphi \\ &\quad -sK(s)\exp(xK(s))\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}K(0)\varphi + \exp(xK(s))K(0)\varphi \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \end{aligned}$$

En écrivant le premier terme sous la forme

$$a_1 = -K(s)\exp(xK(s))\int_0^s\left(\frac{d}{d\xi}(K(\xi))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\backslash_{s=0}\right)d\xi K(0)\varphi,$$

et d'après le théorème de la moyenne, on obtient

$$\|a_1\|_X \leq C\ x\|K(0)\varphi\|_X.$$

De la même manière, on obtient

$$\|a_2\|_X \leq C\ x\|K(0)\varphi\|_X.$$

$$\|a_3\|_X \leq C\ \frac{s}{x}\|K(0)\varphi\|_X$$

$$\|a_4\|_X \leq C\|K(0)\varphi\|_X.$$

4. On écrit que

$$\exp(xK(x))\varphi = \exp(xK(0))\varphi + [\exp(xK(x)) - \exp(xK(0))]\varphi. \tag{2.28}$$

Grâce à [9] et [15], on a $x \mapsto \exp(xK(0))\varphi \in C([0,1];X)$ si et seulement si $\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}$.
De plus, on a (par la formule (2.22))

$$\|\exp(xK(x))\varphi - \exp(xK(0))\varphi\|_X \leq C\ x^\upsilon\|\varphi\|_X.$$

5. On utilise aussi la formule (2.28) et le résultat dans [15] :

$$x \mapsto \exp(xK(0))\varphi \in C^\theta([0,1];X)$$

si et seulement si $\varphi \in D_{K(0)}(\theta,+\infty) = D_{A(0)}(\theta/2,+\infty)$.
Par la propriété de réitération

$$\|\exp(xK(x))\varphi - \exp(\varepsilon K(\varepsilon))\|_X \leq (x-\varepsilon)^\theta.$$

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses* $(2.3), (2.4), (2.6)$ *et* (2.9), *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

1. *Pour tout* $\psi \in X$ *et* $0 \leq x < 1$ *on a*
$$\left\| \exp\left((1-x)K(x)\right)\psi \right\|_X \leq C\left\|\psi\right\|_X .$$
2. *Pour tout* $\psi \in X$, $0 \leq x < 1$ *et* $s \geq 0$ *on a*
$$\left\| K(s)\exp\left((1-x)K(s)\right)\psi \right\|_X \leq \frac{C}{1-x}\left\|\psi\right\|_X .$$
3. *En particulier, si* $\psi \in D(K(1))$, $0 \leq x < 1$ *et* $s \in [x,1]$ *alors,*
$$\left\| K(s)\exp\left((1-x)K(s)\right)\psi \right\|_X \leq C\left\|K(1)\psi\right\|_X .$$
4. *L'application* $x \mapsto \exp\left((1-x)K(x)\right)\psi$ *appartient à l'espace* $C([0,1];X)$ *si et seulement si* $\psi \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(A(1))}$, *dans ce cas*
$$\lim_{x\to 1}\exp\left((1-x)K(x)\right)\psi = \psi.$$
5. *L'application* $x \mapsto \exp\left((1-x)K(x)\right)\psi$ *appartient à l'espace* $C^{\theta}([0,1];X)$ *si et seulement si* $\psi \in D_{K(1)}(\theta,+\infty) = D_{A(1)}(\theta/2,+\infty)$.

2.3.2 Étude des opérateurs $\frac{d}{dx}\left(\exp xK(x)\varphi\right)$

Lemme 2.4 *Soit* $\varphi \in D\left((K(0))^2\right) = D(A(0))$. *Alors sous les hypothèses* $(2.3), (2.6)$ *et* (2.9), *l'application* $x \longmapsto \dfrac{d}{dx}\left(\exp(xK(x))\varphi\right)$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$ *et*
$$\frac{d}{dx}\left(\exp(xK(x))\varphi\right) \longrightarrow K(0)\varphi, \text{ quand } x \longrightarrow 0.$$

Preuve.
Soient $x > 0$, $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$. On a
$$\exp(xK(x))\varphi = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz$$
et
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\exp(xK(x))\varphi\right) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}z\exp(xz)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\ &= -U(x)\varphi - V(x)\varphi.\end{aligned}$$

Pour $U(x)\varphi$, on utilise la remarque (2.1) et la décomposition suivante (voir [1] p. 25),
$$\begin{aligned}U(x)\varphi &= U(x)\left[\varphi - \exp(xK(0))\varphi\right] + U(x)\left((K(0))^{-1} - (K(x))^{-1}\right)K(0)\exp(xK(0))\varphi \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_2}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}(K(x))^{-1}K(0)\exp(xK(0))\varphi dz,\end{aligned}$$

et le calcul de

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma 2}\exp\left(xz\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi dz$$
$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\exp\left(xz\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi dz$$

On utilise ensuite (2.13) et on écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\\
=\;&\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\frac{1}{z}\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}K\left(x\right)\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\\
=\;&-\frac{1}{z}\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K\left(x\right)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\exp\left(xz\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\exp\left(xz\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi dz\\
&-\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi+\exp\left(xK\left(x\right)\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
U\left(x\right)\varphi &= U\left(x\right)\left[\varphi-\exp(xK\left(0\right))\varphi\right]+U\left(x\right)\left[\left(K(0)\right)^{-1}-\left(K(x)\right)^{-1}\right]K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi\\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\exp\left(xz\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)\exp(xK\left(0\right))\varphi dz\\
&\quad+\left(\exp\left(xK\left(x\right)\right)-I\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(0)\right)\exp(xK\left(0\right))\varphi\\
&= U_1\left(x\right)\varphi+U_2\left(x\right)\varphi+U_3\left(x\right)\varphi+U_4\left(x\right)\varphi.
\end{aligned}$$

On a par l'estimation (2.6), le lemme (2.2) et pour $xz=\sigma$

$$\left\|U_1\left(x\right)\varphi\right\|_X\leq C\;x^{\upsilon+1}\left\|\left(K\left(0\right)\right)^2\varphi\right\|_X.$$

De la même manière, on obtient

$$\left\|U_2\left(x\right)\varphi\right\|_X\leq C\;x^{\upsilon+1}\left\|\left(K\left(0\right)\right)^2\varphi\right\|_X,$$

$$\left\|U_3\left(x\right)\varphi\right\|_X\leq C\;x^{\upsilon+1}\left\|\left(K\left(0\right)\right)^2\varphi\right\|_X.$$

Pour tout $x>0$, on a

$$\begin{aligned}
U_4\left(x\right)\varphi &= \left(\exp\left(xK\left(x\right)\right)-I\right)\left[\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\backslash_{x=0}\right]\exp(xK\left(0\right))K(0)\varphi\\
&\quad+\left(\exp\left(xK\left(x\right)\right)-I\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\backslash_{x=0}\left[\exp(xK\left(0\right))K\left(0\right)\varphi-K\left(0\right)\varphi\right]\\
&\quad+\left(\exp\left(xK\left(x\right)\right)-I\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\backslash_{x=0}K\left(0\right)\varphi\\
&= U_{41}\left(x\right)\varphi+U_{42}\left(x\right)\varphi+U_{43}\left(x\right)\varphi,
\end{aligned}$$

et d'après (2.15)

$$\|U_{41}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\eta}\ \|K(0)\varphi\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

En vertu de lemme (2.3) assertion 4, on obtient

$$\|U_{42}(x)\varphi\|_X \leq c\,\|\exp(xK(0))\varphi - K(0)\varphi\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

puisque $K(0)\varphi \in D(K(0)) \subset \overline{D(K(0))}$.

Finalement, pour $U_{43}(x)$ on utilise l'hypothèse (2.8) pour montrer que

$$U_{43}(x)\varphi \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Pour $V(x)\varphi$, on écrit

$$\begin{aligned} V(x)\varphi &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(xz)\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(xz)(K(0)-zI)^{-1}\varphi dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(xz)\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} \exp(xz)\frac{(K(0)-zI)^{-1}}{z}(K(0))^2\varphi dz \\ &= V_1(x)\varphi + V_2(x)\varphi. \end{aligned}$$

Le théorème des résidus donne

$$V_2(x)\varphi \longrightarrow -K(0)\varphi,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Pour $V_1(x)\varphi$, on a

$$\begin{aligned} V_1(x)\varphi &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(xz)\left(\int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial\sigma}(K(\sigma)-zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial\sigma}(K(\sigma)-zI)^{-1}\backslash_{\sigma=0}d\sigma\right)\varphi dz \\ &\quad + \frac{x}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(xz)\frac{\partial}{\partial\sigma}(K(\sigma)-zI)^{-1}\backslash_{\sigma=0}\varphi dz \\ &= b_1 + b_2. \end{aligned}$$

Comme

$$\varphi = (I - \exp(xK(0)))\varphi + \exp(xK(0))\varphi$$

et d'après le lemme (2.2) et l'hypothèse (2.9), on obtient

$$\|b_1\|_X \leq C\ x^{\eta+\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0$$

$$\|b_2\|_X \leq C\ x^{\upsilon+1}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0$$

d'où

$$V_1(x)\varphi \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

D'où

$$\frac{d}{dx}(\exp(xK(x)))\varphi \longrightarrow K(0)\varphi,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

De la même manière, on trouve le résultat pour $\psi \in D((K(1))^2) = D(A(1))$.

2.3.3 Étude des opérateurs $\frac{d^2}{dx^2}(\exp(xK(x)\varphi))$

On écrit

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}(\exp(xK(x))\varphi) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2\exp(xz)(K(x)-zI)^{-1}\varphi dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\varphi dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\varphi dz \\ &= S_1(x)\varphi+S_2(x)\varphi+S_3(x)\varphi.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Étude de l'opérateur S_1 :

Lemme 2.5 *Soit $\varphi\in D(K(0))^2=D(A(0))$ et on suppose les hypothèses $(2.3),(2.6)$ et (2.9), alors pour tout $x\in\,]0,1]$, on a*

$$S_1(x)\varphi=\exp(xK(0))(K(0))^2\varphi+F_1(x)\varphi$$

où la fonction $x\longmapsto F_1(x)\varphi$ appartient à l'espace $C([0,1];X)$. De plus

$$S_1(x)\varphi\longrightarrow(K(0))^2\varphi,\ \text{quand } x\longrightarrow 0$$

si et seulement si

$$(K(0))^2\varphi\in\overline{D(K(0))}=\overline{D(A(0))}.$$

Preuve.
On pose

$$\begin{aligned}S_1(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2\exp(xz)\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2\exp(xz)(K(0)-zI)^{-1}dz \\ &= S_{11}(x)+S_{12}(x)\end{aligned}$$

pour $x>0$ et $xz=\sigma$, on obtient

$$\|S_{11}(x)\|_{L(X)}\leq C\ x^{\upsilon-2}.$$

Maintenant, on écrit

$$S_{11}(x)\varphi=S_{11}(x)[\varphi-\exp(xK(0)\varphi]+S_{11}(x)\exp(xK(0))\varphi.$$

Grâce au lemme (2.2), on obtient

$$\|S_{11}(x)(\varphi-\exp(xK(0))\varphi)\|_X\leq C\ x^{\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X\longrightarrow 0,\ \text{quand } x\longrightarrow 0.$$

De l'estimation

$$\|\exp(xK(0))\varphi\|_X\leq C\ x^2\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X\longrightarrow 0,\ \text{quand } x\longrightarrow 0.$$

Par conséquent

$$S_{11}(x)\varphi\longrightarrow 0,\ \text{quand } x\longrightarrow 0.$$

Pour $S_{12}(x)\varphi$, on écrit

$$S_{12}(x)\varphi = \exp(xK(0))(K(0))^2\varphi$$

d'après le lemme (2.3), assersion 4, on obtient

$$\exp(xK(0))(K(0))^2\varphi \longrightarrow (K(0))^2\varphi, \text{ quand } x \longrightarrow 0,$$

si et seulement si

$$(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

Par conséquent

$$S_1(x)\varphi \longrightarrow (K(0))^2\varphi, \text{ quand } x \longrightarrow 0,$$

si et seulement si

$$(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

Étude l'opérateur S_2 :

Lemme 2.6 *Soit $\varphi \in D(K(0))^2 = D(A(0))$ et on suppose que les hypothèses $(2.3), (2.6)$ et (2.9) sont vérifiées. Alors la fonction $x \longmapsto S_2(x)\varphi$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$, et*

$$S_2(x)\varphi \longrightarrow 0, \text{ quand } x \longrightarrow 0.$$

Preuve.
Pour $x > 0$, $\varphi \in X$ et $xz = \sigma$, on obtient

$$\|S_2(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon-2}\|\varphi\|_X,$$

alors, on écrit que

$$\begin{aligned}
S_2(x)\varphi &= S_2(x)(\varphi - \exp(xK(0))\varphi) + S_2(x)\left[(K(0))^{-1} - (K(x))^{-1}\right]K(0)\exp(xK(0))\varphi \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}K(0)\exp(xK(0)\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(0)\exp(xK(0)\varphi dz \\
&= S_{21}(x)\varphi + S_{22}(x)\varphi + S_{23}(x)\varphi + S_{24}(x)\varphi.
\end{aligned}$$

En effet, il suffit de prouver que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1}dz + \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}dz \\
&-\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}dz = 0.
\end{aligned}$$

D'après les calculs donnés dans la preuve du lemme (2.4), on a

$$-z\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1} + \frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} - z(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} = \frac{d}{dx}(K(x))^{-1},$$

en intégrant à gauche de Γ_1, on obtient

$$\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}dz = 0.$$

Maintenant, on utilise le lemme (2.2) et on pose $xz = \sigma$, on obtient

$$\|S_{21}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0$$

de même, on obtient

$$\|S_{22}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0$$

$$\|S_{23}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Pour $S_{24}(x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
S_{24}(x)\varphi &= \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)\left[(K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right]\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(0)\exp(xK(0))\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)(K(0)-zI)^{-1}\left[\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0}\right]K(0)\exp(xK(0))\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)(K(0)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0}\right)K(0)\exp(xK(0))\varphi dz \\
&= a+b+c.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|a\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0$$

$$\|b\|_X \leq C\ x^{\eta} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Pour le terme (c), on écrit

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} \exp(xz)K(0)(K(0)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(0)(K(0)-zI)^{-1}(K(0)-zI)\exp(xK(0))\varphi dz \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} \exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\setminus_{x=0}\exp(xK(0))K(0)\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\setminus_{x=0}\exp(xK(0))\varphi dz \\
&= c_1+c_2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|c_1\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X,$$

$$\|c_2\|_X \leq C\ x^{\upsilon} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X,$$

par conséquent

$$S_2(x)\varphi \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Étude l'opérateur S_3 :

Lemme 2.7 *Soit $\varphi \in D(K(0))^2 = D(A(0))$ et on suppose que les hypothèses $(2.3), (2.6)$ et (2.9) sont vérifiées. Alors pour tout $x \in]0,1]$, on a*

$$S_3(x)\varphi = \exp(xK(0))\left[-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0}(K(0))\varphi\right]+F_3(x)\varphi,$$

où la fonction $x \longmapsto F_3(x)\varphi$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$. *De plus*

$$S_3(x)\varphi \longrightarrow -\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}(K(0))\varphi, \text{ quand } x \longrightarrow 0$$

si et seulement si

$$-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}(K(0))\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

Preuve.
De la formule (2.27), on écrit

$$\begin{aligned}
S_3(x)\varphi &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\left[(K(0))^{-1}-(K(x))^{-1}+x\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\right]K(0)\varphi dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad+\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\exp(xz)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\ x\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(0)\varphi dz \\
&= S_{31}(x)\varphi+S_{32}(x)\varphi+S_{33}(x)\varphi+S_{34}(x)\varphi+S_{35}(x)\varphi.
\end{aligned}$$

On traite maintenant le comportement des opérateurs S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34} et S_{35} au voisinage de 0.

Pour cela, on utilise l'estimation.

$$\|(I-\exp(xK(0)))K(0)\varphi\|_X \leq C\ x\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \tag{2.30}$$

Pour les termes $S_{31}(x)\varphi$, $S_{33}(x)\varphi$, $S_{34}(x)\varphi$ et $S_{35}(x)\varphi$, on écrit

$$K(0)\varphi = [K(0)\varphi - \exp(xK(0))K(0)\varphi] + \exp(xK(0))K(0)\varphi$$

et on utilise la formule (2.30), alors on obtient

$$\|S_{31}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\eta+\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0, \text{ quand } x \longrightarrow 0,$$

et

$$\begin{aligned}
S_{32}(x)\varphi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)(K(x)-zI)^{-1}\left[\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}\right]K(0)\varphi dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\left[(K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right]\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}K(0)\varphi dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)(K(0)-zI)^{-1})\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}K(0)\varphi dz \\
&= a_1+a_2+a_3.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|a_1\|_X \leq C\ x^{\eta}\ \|K(0)\varphi\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

$$\|a_2\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\ \|K(0)\varphi\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quant } x \longrightarrow 0$$

et on a pour a_3

$$a_3 = \exp(xK(0))\left[-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}K(0)\varphi\right] \longrightarrow -\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}K(0)\varphi$$

si et seulement si

$$-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

On a

$$\begin{aligned}
S_{33}(x) &= \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}(K(x)-zI)(K(x)-zI)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp(xz)\left[K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\right]\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}z\exp(xz)\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}(K(x)-zI)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&= b_1 + b_2.
\end{aligned}$$

avec

$$\|b_1\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

$$\|b_2\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

De même manière, on obtient

$$\|S_{34}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

$$\|S_{35}(x)\varphi\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

D'après les lemmes (2.5), (2.6) et $(\mathbf{??})$, on obtient,

$$\frac{d^2}{dx^2}(\exp(xK(x))\varphi) = \exp(xK(0))\left[(K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi\right] + F(x)\varphi$$

où la fonction

$$x \longmapsto F(x)\varphi = F_1(x)\varphi + S_2(x)\varphi + F_3(x)\varphi$$

appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$.
De plus

$$\frac{d^2}{dx^2}(\exp(xK(x))\varphi) \longrightarrow (K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi,$$

si et seulement si

$$(K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\backslash_{x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

D'une manière analogue, on trouve le résultat pour $\psi \in D(K(1))^2 = D(A(1))$.

2.4 Régularité de la solution

On va étudier la régularité de la solution u du problème $(2.1)-(2.2)$ représentée par (2.21) , pour simplifier les calculs on va calculer le terme

$$Op\,(u)\,(x) = u''\,(x) + B\,(x)\,u'\,(x) + Q\,(x)\,u\,(x)$$

pour tout $x \in \left]0,1\right[$ et on analyse son comportement au voisinage de 0 et 1.

2.4.1 Régularité de l'opérateur $Op\,(d_0)$

On rappelle que l'application

$$x \longmapsto Y\,(x) = (I - \exp\,(2K\,(x)))^{-1} \in C^2\,([0,1]\,; L(X))\,,$$

On a pour tout $x \in \left]0,1\right]$

$$Q\,(x)\,d_0(x)\varphi = -(K\,(x))^2 U_0\,(x)\,Y\,(x)\exp\,(xK\,(x))\,\varphi,$$

$$d_0'(x)\varphi = [U_0\,(x)\,Y'\,(x) + U_0'\,(x)\,Y\,(x)]\exp\,(xK\,(x))\,\varphi + U_0\,(x)\,Y\,(x)\,\frac{d}{dx}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi),$$

donc

$$\begin{aligned} B\,(x)\,d_0'(x)\varphi &= B\,(x)\,[U_0\,(x)\,Y'\,(x) + U_0'\,(x)\,Y\,(x)]\exp\,(xK\,(x))\,\varphi \\ &\quad + B\,(x)\,U_0\,(x)\,Y\,(x)\,\frac{d}{dx}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi) \\ :&= G_\lambda\,(x)\,\varphi \end{aligned} \tag{2.31}$$

et

$$\begin{aligned} d_0''(x)\varphi &= [U_0\,(x)\,Y''\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y'\,(x) + U_0''\,(x)\,Y\,(x)]\exp\,(xK\,(x))\,\varphi \\ &\quad + [2U_0\,(x)\,Y'\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y\,(x)]\,\frac{d}{dx}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi) + U_0\,(x)\,Y\,(x)\,\frac{d^2}{dx^2}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi) \\ &= [U_0\,(x)\,Y''\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y'\,(x) + U_0''\,(x)\,Y\,(x)]\exp\,(xK\,(x))\,\varphi \\ &\quad + [2U_0\,(x)\,Y'\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y\,(x)]\,\frac{d}{dx}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi) + U_0\,(x)\,Y\,(x)\,[S_1\,(x)\,\varphi + S_2\,(x)\,\varphi + S_3\,(x)\,\varphi]\,, \end{aligned}$$

(pour les opérateurs $S_i\,(x)\,, i = 1,2,3,$ voir la formule (2.29))
Soit

$$Op\,(d_0\,(.)\,\varphi)\,(x) = d_0''(x)\varphi + Q\,(x)\,d_0(x)\varphi + B\,(x)\,d_0'(x)\varphi. \tag{2.32}$$

En utilisant le fait que $Q\,(x)\,d_0(x)\varphi + S_1\,(x)\,\varphi = 0$, alors

$$Op\,(d_0\,(.)\,\varphi)\,(x) = F_\lambda\,(x)\,\varphi + G_\lambda\,(x)\,\varphi,$$

avec

$$\begin{aligned} F_\lambda\,(x)\,\varphi &= [U_0\,(x)\,Y''\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y'\,(x) + U_0''\,(x)\,Y\,(x)]\exp\,(xK\,(x))\,\varphi \\ &\quad + [2U_0\,(x)\,Y'\,(x) + 2U_0'\,(x)\,Y\,(x)]\,\frac{d}{dx}(\exp\,(xK\,(x))\,\varphi) \\ &\quad + U_0\,(x)\,Y\,(x)\,[S_2\,(x)\,\varphi + S_3\,(x)\,\varphi]\,. \end{aligned}$$

Puisque

$$U_0'\,(x) = -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp\,((2-2x)z)\,(K\,(x) - zI)^{-1}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\exp\,((2-2x)z)\,\frac{\partial}{\partial x}\,(K\,(x) - zI)^{-1}\,dz,$$

et

$$\begin{aligned} U_0''(x) &= \frac{2}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2\exp((2-2x)z)\,(K(x)-zI)^{-1}\,dz - \frac{2}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp((2-2x)z)\,\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\,dz \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\exp((2-2x)z)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\,dz, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} x\longmapsto U_0'(x)\in C([0,1];L(X))\in[0,1[\\ x\longmapsto U_0''(x)\in C([0,1];L(X))\in[0,1[\end{cases}.$$

On calcule maintenant la limite du terme

$$[U_0(x)\,Y''(x)+2U_0'(x)\,Y'(x)+U_0''(x)\,Y(x)]\exp(xK(x))\,\varphi$$

quand $x\longrightarrow 0$ ce qui sera important par la suite.
D'après le lemme (2.3), assertion 4, on a

$$(\exp(xK(x))\,\varphi)\setminus_{x=0}=\varphi$$

et pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$Y'(x)=Y(x)\left(\frac{d}{dx}\exp(2K(x))\right)Y(x),$$

$$Y''(x)=2Y(x)\left(\frac{d}{dx}\exp(2K(x))\right)Y(x)\left(\frac{d}{dx}\exp(2K(x))\right)Y(x)+Y(x)\left(\frac{d^2}{dx2}\exp(2K(x))\right)Y(x).$$

En vertu de lemme (2.4) et comme $U_0(0)\,Y(0)=I$, on obtient

$$\begin{aligned} &[U_0(x)\,Y''(x)+2U_0'(x)\,Y'(x)+U_0''(x)\,Y(x)]\,\varphi \\ &+[2U_0(0)\,Y'(0)+2U_0'(0)\,Y(0)]\left(\frac{d}{dx}(\exp(xK(x))\,\varphi)\right)\setminus_{x=0} \\ =\;& 4K(0)\exp(2K(0))\,Y(0)\left(\frac{d}{dx}\exp(2K(x))\right)\setminus_{x=0}Y(0)\,\varphi \\ &-\frac{4}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(2z)\,\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\setminus_{x=0}Y(0)\,\varphi dz \\ =\;& 4(a+b). \end{aligned}$$

On remarque que le terme a est dans $D((K(0))^n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour le terme b, on a

$$\begin{aligned} b &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z\exp(2z)\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\right)\setminus_{x=0}K(0)\,(K(0)-zI)^{-1}\,Y(0)\,\varphi dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2\exp(2z)\,(K(0)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\right)\setminus_{x=0}K(0)\,(K(0)-zI)^{-1}\,Y(0)\,\varphi dz \\ &= b_1+b_2 \end{aligned}$$

avec $b_2\in D(K(0))$.
Pour b_1,on écrit

$$b_1=\left(\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\right)\setminus_{x=0}\left(-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z\exp(2z)\,(K(0)-zI)^{-1}\,Y(0)\,K(0)\,\varphi dz\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} (K(x))^{-1} \right) \backslash_{x=0} \left(K(0) \exp(2K(0)) Y(0) K(0) \varphi \right),$$

où $K(0) \exp(2K(0)) Y(0) K(0) \varphi \in D(K(0))$ et par l'hypothèse (2.8), on obtient $b_1 \in \overline{D(K(0))}$.
D'autre part, par les lemmes (2.6) et $(\textbf{??})$, on aura que

$$U_0(x) Y(x) [S_2(x) \varphi + S_3(x) \varphi] \longrightarrow \left(-\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0) \varphi \right)$$

si et seulement si

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0) \varphi \right) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}.$$

Par conséquent

$$F_\lambda(0) \varphi = \Psi_0(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0) \varphi$$

où $\Psi_0(\varphi) \in \overline{D(K(0))}$.
Grâce à la formule (2.31), on obtient

$$G_\lambda(0) \varphi = B(0) [2 \exp(2K(0)) Y(0) (K(0)) \varphi + (K(0)) \varphi] = \Psi_0^*(\varphi),$$

où $\Psi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(A(0))}$ par hypothèse (2.7).
Donc

$$F_\lambda(0) \varphi + G_\lambda(0) \varphi = \Phi_0^*(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} \backslash_{x=0} (K(0))^{-1} (K(0))^2 \varphi$$

où $\Phi_0^*(\varphi) = \Psi_0(\varphi) + \Psi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))}$.
Finalement, on aura la proposition suivante pour la régularité de l'opérateur $Op(d_0)$.

Proposition 2.1 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$ et on suppose que les hypothèses $(2.3), (2.4), (2.6)$ et (2.11) sont vérifier. Alors la fonction $x \longmapsto Op(d_0(.) \varphi)(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1]; X)$.*

2.4.2 Régularité de l'opérateur $Op(d_1)$

On écrit, pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned} d_1(x)\psi &= (I - \exp(2x)K(x))) Y(x) \exp((1-x)K(x)) \psi \\ &: = U_1(x) Y(x) \exp((1-x)K(x)) \psi \end{aligned}$$

et on pose

$$\begin{aligned} Op(d_1(.)\psi)(x) &= [d_1''(x)\psi + Q(x) d_1(x)\psi] + B(x) d_1'(x)\psi \\ &= S_\lambda(x) \psi + T_\lambda(x) \psi, \end{aligned} \tag{2.33}$$

tels que

$$\begin{aligned} S_\lambda(x) \psi &= [U_1(x) Y''(x) + 2U_1'(x) Y'(x) + U_1''(x) Y(x)] \exp((1-x)K(x)) \psi \\ &+ [2U_1(x) Y'(x) + 2U_1'(x) Y(x)] \frac{d}{dx} (\exp((1-x)K(x)) \psi) \\ &+ \frac{U_1(x) Y(x)}{i\pi} \int_{\Gamma_1} z \exp((1-x)z) \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \psi dz \\ &- \frac{U_1(x) Y(x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \exp((1-x)z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} \psi dz \end{aligned}$$

et

$$T_\lambda(x) \psi = B(x) [U_1(x) Y'(x) + U_1'(x) Y(x)] \exp((1-x)K(x)) \psi + B(x) U_1(x) Y(x) \frac{d}{dx} (\exp((1-x)K(x)) \psi).$$

Alors on aura une proposition similaire à la proposition (2.1).

Proposition 2.2 *Soit $\psi \in D((K(1))^2)$ et on suppose que les hypothèses $(2.3), (2.4), (2.6)$ et (2.11), sont vérifiées. Alors la fonction $x \longmapsto Op(d_1(.)\psi)(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$.*

2.4.3 Régularité de l'opérateur $Op(m)$

On rappelle que, pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
& m(x,f^*) \\
= \; & \frac{-Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2+x-s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x-s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
= \; & \sum_{i=1}^{4} m_i(x,f^*).
\end{aligned}$$

On pose

$$Op(m(.,f^*))(x) = m''(x,f^*) + Q(x)\,m(x,f^*) + B(x)\,m'(x,f^*). \tag{2.34}$$

Proposition 2.3 *On suppose que les hypothèses (2.3), (2.4), (2.6) et (2.11) sont vérifiées. Alors la fonction $x \longmapsto Op(m(.)f^*)(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\upsilon)}([0,1];X)$.*

Preuve.
Pour tout $x, s \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
& [\exp((x+s)K(x)) - \exp((2-x+s)K(x))] \\
= \; & (I - \exp((2-2x)K(x)))\exp((x+s)K(x)) \\
= \; & U_0(x)\exp((x+s)K(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\exp((2-x-s)K(x)) - \exp((2+x-s)K(x))] \\
= \; & (I - \exp(2xK(x))\exp((1-x)K(x))\exp((1-s)K(x)) \\
= \; & U_1(x)\exp(2-(x+s)K(x)).
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}
m(x,f^*) &= [m_1(x,f^*) + m_4(x,f^*)] + [m_2(x,f^*) + m_3(x,f^*)] \\
&= -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
&\quad -\frac{U_1(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-(x+s))\,K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le calcul fonctionnel de Dunford et la formule suivante

$$(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1} = \frac{1}{z}\left[(K(x)-zI)^{-1} - (K(x))^{-1}\right],$$

on obtient, pour tout $x \in]0,1[$ et $f^* \in C^{\beta}([0,1;X])$

$$m'(x,f^*) = -\frac{1}{2}\left[U_0'(x)\,Y(x) + U_0(x)\,Y'(x)\right]\int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds$$

$$+\frac{U_0(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma 1}\frac{\exp((x+s)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,ds$$
$$-\frac{1}{2}\left[U_1'(x)\,Y(x)+U_1(x)\,Y'(x)\right]\int_0^1\exp((2-(x+s))\,K(x))\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds$$
$$-\frac{U_1(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\exp((2-(x+s))\,K(x))f^*(s)\,ds$$
$$+\frac{U_1(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma 1}\frac{\exp((2-(x+s))\,z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,ds$$

et

$$\begin{aligned}
B(x)\,m'(x,f^*) &= -\frac{B(x)}{2}\left[U_0'(x)\,Y(x)+U_0(x)\,Y'(x)\right]\int_0^1\exp((x+s)K(x))\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds \qquad (2.35)\\
&\quad -\frac{B(x)\,U_0(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\exp((x+s)K(x))f^*(s)\,ds\\
&\quad +\frac{B(x)\,U_0(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma 1}\frac{\exp((x+s)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,ds\\
&\quad -\frac{B(x)}{2}\left[U_1'(x)\,Y(x)+U_1(x)\,Y'(x)\right]\int_0^1\exp((2-(x+s))\,K(x))\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds\\
&\quad -\frac{B(x)\,U_1(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\exp((2-(x+s))\,K(x))f^*(s)\,ds\\
&\quad +\frac{B(x)\,U_1(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma 1}\frac{\exp((2-(x+s))\,z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,ds\\
&= N_\lambda(f^*)(x):=\sum_{i=1}^{6}N_{\lambda i}(f^*)(x).
\end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses (2.4) et (2.6) toutes les intégrales précédentes sont absolument convergentes. Par exemple, concernant le terme $N_{\lambda 1}(f^*)(x)$, on a

$$\|N_{\lambda 1}(f^*)(x)\|_X\le C\;x\,\|f^*\|_{C(X)}\,.$$

On note que tous ces termes sont régulier en 1.
Maintenant on calcule le terme $Q(x)\,m(x,f^*)$ pour $x\in\,]0,1[$

$$\begin{aligned}
Q(x)\,m(x,f^*) &= Q(x)\left[m_1(x,f^*)+m_4(x,f^*)\right]+Q(x)\left[m_2(x,f^*)+m_3(x,f^*)\right]\\
&= (K(x))^2\,\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\exp((x+s)K(x))\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds\\
&\quad +(K(x))^2\,\frac{U_1(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\exp(2-(x+s)K(x))\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds.
\end{aligned}$$

D'après les propriétés des semi-groupes analytiques et l'holdérianité de f^*, ces deux intégrales sont absolument convergentes.
D'autre part, pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$m''(x,f^*) = [m_1''(x,f^*) + m_4''(x,f^*)] + [m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*)],$$

où

$$\begin{aligned}
& m_1''(x,f^*) + m_4''(x,f^*) \qquad (2.36)\\
= \; & -\frac{1}{2}[U_0(x)Y''(x) + 2U_0'(x)Y'(x) + U_0''(x)Y(x)] \\
& \times \int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}[2U_0'(x)Y(x) + 2U_0(x)Y'(x)] \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{U_0(x)Y(x)}{2} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds
\end{aligned}$$

et pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
& m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*) \\
= \; & -\frac{1}{2}[U_1(x)Y''(x) + 2U_1'(x)Y'(x) + U_1''(x)Y(x)] \\
& \times \int_0^1 \exp(2-(x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}[2U_1'(x)Y(x) + 2U_1(x)Y'(x)] \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp(2-(x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{U_1(x)Y(x)}{2} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\exp(2-(x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds.
\end{aligned}$$

On va traiter la régularité de $m''(x,f^*)$ en 0 et 1, donc il suffit d'étudier la régularité de $m_1''(x,f^*)+m_4''(x,f^*)$ en 0 car $m_2''(x,f^*)+m_3''(x,f^*)$ est continu en 0. De la même manière, on traite la régularité de $m_2''(x,f^*)+m_3''(x,f^*)$ en 1.
On commence par étudier la régularité en 0 des termes suivants (voir (2.36)) :

$$\begin{aligned}
M_1(x,f^*) &= \int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds, \\
M_2(x,f^*) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$M_3(x,f^*) = \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds.$$

Le terme $M_1(x,f^*)$ est se traite d'une manière similaire à celle de $N_{\lambda 1}(f^*)(x)$ et le terme $M_2(x,f^*)$ se traite comme$(N_{\lambda i}(f^*)(x))_{i=2,3}$.

Pour $M_3(x, f^*)$, on a

$$\begin{aligned} M_3(x, f^*) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} z \exp((x+s)z) (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds \\ &\quad -\frac{1}{i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \exp((x+s)z) \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \frac{\exp((x+s)z)}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & -\frac{U_0(x) Y(x)}{2} M_3(x, f^*) + Q(x) [m_1(x, f^*) + m_4(x, f^*)] \\ = & -\frac{U_0(x) Y(x)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \exp((x+s)z) \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds \\ & -\frac{U_0(x) Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \frac{\exp((x+s)z)}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds. \end{aligned}$$

Les deux intégrales sont absolument convergentes grâce aux l'hypothèse (2.6) et (2.10).
En utilisant la formule (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{U_0(x) Y(x)}{2} M_3(x, f^*) + Q(x) [m_1(x, f^*) + m_4(x, f^*)] \\ = & -\frac{U_0(x) Y(x)}{i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds \\ & \frac{-U_0(x) Y(x)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \frac{K(x)(K(x) - zI)^{-1}}{z} \frac{d^2 (K(x))^{-1}}{dx^2} (K(x)) (K(x) - zI)^{-1} f^*(s) \, dzds \\ & -\frac{U_0(x) Y(x)}{i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) K(x) (K(x) - zI)^{-1} \left(\frac{d (K(x))^{-1}}{dx} K(x) (K(x) - zI)^{-1} \right)^2 f^*(s) \, dzds \\ = & -\frac{U_0(x) Y(x)}{i\pi} [I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)]. \end{aligned}$$

Concernant le terme $I_1(x)$, on a

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \left(\frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI) - \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \setminus_{x=0} \right) f^*(s) \, dzds \\ &\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \setminus_{x=0} f^*(s) \, dzds \\ &= I_{11}(x) + I_{12}(x). \end{aligned}$$

Donc par l'hypothèse (2.9), on obtient

$$\|I_{11}\|_X \leq C \; x^\eta \, \|f^*\|_{C(X)} \longrightarrow 0, \text{ quand } x \longrightarrow 0,$$

et par l'hypothèse (2.6)

$$\|I_{12}\|_X \leq C\ x^{\upsilon}\ \|f^*\|_{C(X)} \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Concernant le terme $I_2(x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \frac{K(x)(K(x)-zI)^{-1}}{z} \frac{d^2(K(x))^{-1}}{dx^2} \\
&\quad \times \left[K(x)(K(x)-zI)^{-1} - K(0)(K(0)-zI)^{-1}\right] f^*(s)\, dzds \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \exp((x+s)z) \frac{K(x)(K(x)-zI)^{-1}}{z} \\
&\quad \times \left[\frac{d^2(K(x))^{-1}}{dx^2} - \frac{d^2(K(x))^{-1}}{dx^2}\backslash_{x=0}\right] K(0)(K(0)-zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \exp((x+s)z) \left[\frac{K(x)(K(x)-zI)^{-1} - K(0)(K(0)-zI)^{-1}}{z}\right] \\
&\quad \times \frac{d^2(K(x))^{-1}}{dx^2}\backslash_{x=0} K(0)(K(0)-zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
&= I_{21}(x) + I_{22}(x) + I_{23}(x).
\end{aligned}$$

avec

$$\|I_{21}\|_X \leq C\ x\, \|f^*\|_{C(X)} \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

$$\|I_{22}\|_X \leq C\ x^{\eta}\ \|f^*\|_{C(X)} \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0,$$

$$\|I_{23}\|_X \leq C\ x\, \|f^*\|_{C(X)} \longrightarrow 0,\ \text{quand } x \longrightarrow 0.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
& m_1''(x,f^*) + m_4''(x,f^*) + Q(x)\left[m_1(x,f^*) + m_4(x,f^*)\right] \\
= \ & -\frac{1}{2}\left[U_0(x)Y''(x) + 2U_0'(x)Y'(x) + U_0''(x)Y(x)\right] \int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2}\left[2U_0'(x)Y(x) + 2U_0(x)Y'(x)\right] \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\, ds \\
& -\frac{U_0(x)Y(x)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \exp((x+s)z) \frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
& -\frac{U_0(x)Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma 1} \exp((x+s)z) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
: \ & = P_\lambda(f^*)(x).
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
& m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*) + Q(x)\left[m_2(x,f^*) + m_3(x,f^*)\right] \\
= \quad & -\frac{1}{2}\left[U_1(x)Y''(x) + 2U_1'(x)Y'(x) + U_1''(x)Y(x)\right]\int_0^1 \exp\left(2-(x+s)K(x)\right)(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\left[2U_1'(x)Y(x) + 2U_1(x)Y'(x)\right]\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp\left(2-(x+s)K(x)\right)(K(x))^{-1}\right\} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{U_1(x)Y(x)}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} \exp\left(2-(x+s)z\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& +\frac{U_1(x)Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} \exp\left(2-(x+s)z\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
: \quad & = Q_\lambda(f^*)(x),
\end{aligned}$$

grâce aux propriétés des semi-groupes et les hypothèses (2.6) et (2.10), les intégrales précédentes sont bien définies.
Ainsi

$$Op\left(m\left(.,f^*\right)\right)(x) = M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x),$$

où

$$\begin{aligned}
M_\lambda(f^*)(x) \quad = \quad & m_1''(x,f^*) + m_4''(x,f^*) + Q(x)\left[m_1(x,f^*) + m_4(x,f^*)\right] \\
& + m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*) + Q(x)\left[m_2(x,f^*) + m_3(x,f^*)\right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

2.4.4 Régularité de l'opérateur $Op(v)$

On rappelle que, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, on a

$$v(x,f^*) = \frac{1}{2}\int_0^x \exp\left((x-s)K(x)\right)(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_x^1 \exp\left((s-x)K(x)\right)(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds$$

où $f^* \in C^\beta([0,1];X)$, $(0<\beta<1)$.
On pose

$$Op\left(v\left(.,f^*\right)\right)(x) = v''(x,f^*) + Q(x)\,v(x,f^*) + B(x)\,v'(x,f^*).$$

Alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.4 *On suppose que les hypothèses* $(2.3),(2.4),(2.6)$ *et* (2.11) *sont vérifiées. Alors la fonction* $x \longmapsto Op\left(v\left(.,f^*\right)\right)(x)$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\beta,\eta+\upsilon-1)}([0,1];X)$.

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
Q(x)\,v(x,f^*) \quad = \quad & -\frac{1}{2}\int_0^x K(x)\exp\left((x-s)K(x)\right)\left(f^*(s)-f^*(x)\right)ds \\
& -\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)\exp\left((s-x)K(x)\right)\left(f^*(s)-f^*(x)\right)ds \\
& + f^*(x) - \frac{1}{2}\exp\left(xK(x)\right)f^*(x) - \frac{1}{2}\exp\left((1-x)K(x)\right)f^*(x),
\end{aligned}$$

grâce aux propriétés des semi-groupes analytiques et l'höldérianité de f^*, les deux premières intégrales sont absolument convergentes, par exemple :

$$\left\| -\frac{1}{2}\int_0^x K(x)\exp\left((x-s)K(x)\right)\left(f^*(s)-f^*(x)\right)ds \right\|_X \leq C\ x^{\beta}\left\|f^*\right\|_{C^{\beta}(X)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
v'(x,f^*) &= \frac{1}{2}\int_0^x \exp\left((x-s)K(x)\right)f^*(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_x^1 \exp\left((s-x)K(x)\right)f^*(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}\int_0^x \exp\left((x-s)K(x)\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_x^1 \exp\left((s-x)K(x)\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(x-s)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left((s-x)K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(s-x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\
: &= \sum_{i=1}^{6} w_i(x,f^*).
\end{aligned}$$

Pour simplifier les termes $w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)$ et $w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)$ on utilise le calcul fonctionnel de Dunford, on obtient alors

$$w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)=\beta_1(x)+\beta_2(x).$$

De la formule

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}=\frac{1}{z}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1},$$

(voir la preuve du lemme (2.4)), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\beta_2(x) \\
= &-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,dzds-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&+\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\exp\left((x-s)z\right)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
= &\ \beta_{21}(x)+\beta_{22}(x)+\beta_{23}(x),
\end{aligned}$$

avec

$$\beta_1(x)+\beta_{23}(x)=0,$$

et par intégration à gauche de la courbe Γ_1, on obtient $\beta_{21}(x)=0$.
Alors

$$w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)=-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds,$$

cette intégrale est absolument convergente car

$$\left\|-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds\right\|_X\leq C\ x^{\upsilon+1}\left\|f^*\right\|_{C(X)},$$

d'une manière similaire, on obtient

$$w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)=-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((s-x)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}v'(x,f^*) &= w_1(x,f^*)+w_2(x,f^*)+[w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)]+[w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)]\\ &= w_1(x,f^*)+w_2(x,f^*)-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((x-s)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\ &\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((s-x)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds,\end{aligned}$$

tous ces termes sont bien définis grâce aux propriétés des semi-groupes et l'hypothèse (2.6) et de même pour $B(x)v'(x,f^*)$, où

$$\begin{aligned}B(x)v'(x,f^*) &= B(x)w_1(x,f^*)+B(x)w_2(x,f^*)\\ &\quad -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((x-s)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\ &\quad -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((s-x)z)}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\ &:= W_\lambda(f^*)(x),\end{aligned}\tag{2.38}$$

donc $B(0)v'(x,f^*)\in\overline{D(K(0))}=\overline{D(A(0))}$ en vertu de (2.7).
Le calcul du terme $w_3'(x,f^*)+w_5'(x,f^*)+w_4'(x,f^*)+w_6'(x,f^*)$, donne

$$\begin{aligned}&w_3'(x,f^*)+w_5'(x,f^*)+w_4'(x,f^*)+w_6'(x,f^*)\\ =\;&\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp(\eta K(x))\right)\backslash_{\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((x-s)z)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\ &-\frac{1}{2}\int_x^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp(\eta K(x))\right)\backslash_{\eta=(s-x)}f^*(s)\,ds-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((s-x)z)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds.\end{aligned}$$

Ces intégrales sont absolument convergentes (voir les hypothèses (2.6) et (2.10), par exemple

$$\left\|-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp((x-s)z)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\right\|_X\le C\;x^{\upsilon}\,\|f^*\|_{C(X)}.$$

Maintenant, pour la dérivé de $w_1'(x,f^*)+w_2'(x,f^*)$, on utilise la méthode présentée par exemple dans([16], théorème $(3.3.4)$. p. $70)$.
Pour $0<\varepsilon\le x<1$, on a

$$w_1^\varepsilon(x,f^*)+w_2^\varepsilon(x,f^*):=\frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon}\exp((x-s)K(x))f^*(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^1\exp((s-x)K(x))f^*(s)\,ds,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\left(w_1^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)+\left(w_2^{\varepsilon}\right)'(x,f^*) &= \frac{1}{2}\exp\left(\varepsilon K(x)\right)\left[f^*(x-\varepsilon)+f^*(x+\varepsilon)\right]-\exp\left(\varepsilon K(x)\right)f^*(x)\\
&+\frac{1}{2}\exp\left(xK(x)\right)f^*(x)+\frac{1}{2}\exp\left((1-x)K(x)\right)f^*(x)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon}K(x)\exp\left((x-s)K(x)\right)\left[f^*(s)-f^*(x)\right]ds\\
&+\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^{1}K(x)\exp\left((s-x)K(x)\right)\left[f^*(s)-f^*(x)\right]ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(s-x)}f^*(s)\,ds
\end{aligned}
$$

et quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left[\left(w_1^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)+\left(w_2^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)\right]\\
=\;&\frac{1}{2}\exp\left(xK(x)\right)f^*(x)+\frac{1}{2}\exp\left((1-x)K(x)\right)f^*(x)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{x}K(x)\exp\left((x-s)K(x)\right)\left[f^*(s)-f^*(x)\right]ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^{1}K(x)\exp\left((s-x)K(x)\right)\left[f^*(s)-f^*(x)\right]ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int_x^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(s-x)}f^*(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

tous ces termes sont bien définis grâce aux propriétés des semi-groupes, l'höldérianité de f^* et l'hypothèse (2.6).
Finalement, on déduit que

$$
\begin{aligned}
v''(x,f^*) &= \frac{1}{2}\exp\left(xK(x)\right)f^*(x)+\frac{1}{2}\exp\left((1-x)K(x)\right)f^*(x)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{x}K(x)\exp\left((x-s)K(x)\right)\left(f^*(s)-f^*(x)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^{1}K(x)\exp\left((s-x)K(x)\right)\left(f^*(s)-f^*(x)\right)ds\\
&+\int_0^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(s-x)} f^*(s)\,ds \\
&-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&-\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((s-x)z\right)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds,
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
v''(x,f^*)+Q(x)\,v(x,f^*)=f^*(x)+V_\lambda(x,f^*),
$$

où

$$
\begin{aligned}
V_\lambda(x,f^*) &= \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(x-s)} f^*(s)\,ds-\int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\eta K(x)\right)\right)\backslash_{\eta=(s-x)} f^*(s)\,ds \qquad (2.39)\\
&-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)z\right)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&-\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((s-x)z\right)}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (2.8), on obtient

$$
\begin{cases}
V_\lambda(0,f^*)\in\overline{D(K(0))}=\overline{D(Q(0))}\\
V_\lambda(1,f^*)\in\overline{D(K(1))}=\overline{D(Q(1))}
\end{cases}.
$$

D'après les calculs précédents, on obtient

$$
Op\left(v(.,f^*)\right)(x)=f^*(x)+V_\lambda(f^*)(x)+W_\lambda(f^*)(x). \qquad (2.40)
$$

Comme $V_\lambda(f^*)(x)+W_\lambda(f^*)(x)\in C^{\eta+\upsilon-1}([0,1];X)$ et $f^*\in C^\beta([0,1];X)$ alors la fonction $x\longmapsto Op\left(v(.,f^*)\right)(x)$ appartient à $C^{\min(\beta,\eta+\upsilon-1)}([0,1];X)$.

2.4.5 L'équation vérifiée par la solution et sa résolution

En vertu de tous les calculs précédents, on déduit que la représentation donnée par (2.21) satisfait l'équation abstraite suivante

$$
\begin{aligned}
u''(x)+B(x)\,u'(x)+Q(x)\,u(x) &= Op(u)(x) \qquad (2.41)\\
&= \left[F_\lambda(x)\varphi+G_\lambda(x)\varphi\right]+\left[S_\lambda(x)\psi+T_\lambda(x)\psi\right]\\
&\quad+\left[M_\lambda(f^*)(x)+N_\lambda(f^*)(x)\right]\\
&\quad+\left[V_\lambda(f^*)(x)+W_\lambda(f^*)(x)+f^*(x)\right]\\
&= f(x),\qquad \text{pour } x\in\left]0,1\right[.
\end{aligned}
$$

Pour déterminer la fonction inconnue f^*, on utilise le résultat suivante (voir [5])

Lemme 2.8 *Sous hypothèse* (2.3)*, il existe à constante* $C>0$ *tel que*

$$
\left\|\left(K(x)-zI\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\leq\frac{C}{\sqrt{\lambda}}
$$

pour tout $\lambda > 0, z \in \Gamma_{\theta_1+\pi/2,r_1}, x \in [0,1]$ *et*

$$\left\| (-A(x) + \lambda)^k \exp\left(y(-A(x)+\lambda)^{1/2} \right) \right\|_{L(X)} \leq C \exp\left(-wy\lambda^{1/2} \right)$$

pour $w > 0$ *et pour tout* $k \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *et* $\lambda > 0$.

Maintenant, on a le résultat suivant

Proposition 2.5 *Soient* $\varphi \in D\left((K(0))^2 \right)$, $\psi \in D\left((K(1))^2 \right)$ *et* $f \in C^\theta([0,1];X)$ $(0 < \theta < 1)$, *on suppose que les hypothèses* (2.3) , (2.4) , (2.6) *et* (2.11) *sont vérifiées et que* u *donné par* (2.21) *est une solution stricte du problème* (2.1) – (2.2). *Alors la fonction* $f^* \in C([0,1];X)$ *vérifie l'équation*

$$(I + R_\lambda)(f^*)(.) = f(.) - F_\lambda(.)\varphi - G_\lambda(.)\varphi - S_\lambda(.)\psi - T_\lambda(.)\psi, \tag{2.42}$$

où

$$R_\lambda(f^*)(.) = (M_\lambda)(f^*)(.) + (N_\lambda)(f^*)(.) + (V_\lambda)(f^*)(.) + (W_\lambda)(f^*)(.).$$

De plus, il existe $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^*$, *l'opérateur* $(I + R_\lambda)$ *est inversible dans* $C([0,1];X)$ *et donc* f^* *sera donnée par*

$$(f^*)(.) = (I + R_\lambda)^{-1} [f(.) - F_\lambda(.)\varphi - G_\lambda(.)\varphi - S_\lambda(.)\psi - T_\lambda(.)\psi]. \tag{2.43}$$

Preuve.
Pour avoir (2.42) , il suffit de voir (2.41) sa résolution dans l'espace $C([0,1];X)$, on doit éstimer $\|R_\lambda(f^*)(x)\|_{L(C([0,1];X))}$ pour $\lambda > 0$ assez grand.

Par exemple, on estimer les termes écrits dans $V_\lambda(f^*)(x)$ (voir (2.39)).

On a

$$\begin{aligned}
V_\lambda(x, f^*) &= \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \exp(\varepsilon K(x)) \right) \backslash_{\varepsilon=(x-s)} f^*(s)\, ds - \int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \exp(\varepsilon K(x)) \right) \backslash_{\varepsilon=(s-x)} f^*(s)\, ds \\
&\quad - \frac{1}{4i\pi} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\exp((x-s)z)}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
&\quad - \frac{1}{4i\pi} \int_x^1 \int_{\Gamma_1} \frac{\exp((s-x)z)}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
&= R_1 + R_2 + R_3 + R_4.
\end{aligned}$$

De l'estimation (2.24),on obtient

$$\|R_1\|_X \leq \frac{C}{\lambda^{(1-\eta)/2}} \|f^*\|_{C(X)},$$

de même pour R_2, tel que

$$\|R_2\|_X \leq \frac{C}{\lambda^{(1-\eta)/2}} \|f^*\|_{C(X)}.$$

Pour le terme R_3, on utilise la formule (2.16) et l'identité de la résolvante, donc

$$\begin{aligned}
R_3 &= -\frac{1}{4i\pi} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \exp((x-s)z)(K(x) - zI)^{-1} \frac{d^2(K(x))^{-1}}{d^2 x} K(x)(K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
&\quad - \frac{1}{4i\pi} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \exp((x-s)z) \frac{d^2(K(x))^{-1}}{d^2 x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{\exp\left((x-s)\,z\right)}{z}\frac{d^2(K\left(x\right))^{-1}}{d^2x}f^*\left(s\right)dzds\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\exp\left((x-s)\,z\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\frac{d(K\left(x\right))^{-1}}{dx}K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}f^*\left(s\right)dzds\\
= \;& R_{31}+R_{32}+R_{33}+R_{34}.
\end{aligned}
$$

On remarque que $R_{33}=0$.
Concernant le terme R_{31}, on utilise la propriété (2.25) (voir [12]) et le remarque (2.2), alors on obtient

$$\left\|R_{31}\right\|_X\leq\frac{C}{\lambda^{1/4}}\left\|f^*\right\|_{C(X)},$$

de même pour R_{32}.
Pour le terme R_{34}, on a

$$\left\|R_{34}\right\|_X\leq\frac{C}{\lambda^{(\upsilon+\eta-1)/2}}\left\|f^*\right\|_{C(X)}.$$

D'une manière analogue, on traite les opérateurs $N_\lambda\left(f^*\right)(x)$.(voir (2.35)), $M_\lambda\left(f^*\right)(x)$ (voir (2.37)) et $W_\lambda\left(f^*\right)(x)$ (voir (2.38)).
En conclusion

$$
\begin{aligned}
\left\|R_\lambda\left(f^*\right)(x)\right\|_X &= \left\|M_\lambda\left(f^*\right)(x)+N_\lambda\left(f^*\right)(x)+V_\lambda\left(f^*\right)(x)+W_\lambda\left(f^*\right)(x)\right\|_X\\
&\leq C\left(\frac{1}{\lambda^{(\upsilon+\eta-1)/2}}+\frac{1}{\lambda^{\upsilon/2}}+\frac{1}{\lambda^{(1-\eta)}}+\frac{1}{\lambda^{1/2}}+\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right)\left\|f^*\right\|_{C(X)}
\end{aligned}
$$

Donc $R_\lambda\in L\left(C\left([0,1]\,;X\right)\right)$.
Ainsi, il existe $\lambda^*>0$ tel que

$$\forall\lambda\geq\lambda^*,\;\;\left\|R_\lambda\right\|_{L(C([0,1];X))}<1.$$

Par conséquent $(I+R_\lambda)$ est inversible et $(I+R_\lambda)^{-1}$ existe pour tout $\lambda\geq\lambda^*$ dans $C\left([0,1]\,;X\right)$ et on obtient (2.43).
Dans ce qui suit, on aura besoin du résultat suivant concernant $f^*\left(0\right)$ et $f^*\left(1\right)$.

Proposition 2.6 *Soient* $\varphi\in D\left(\left(K\left(0\right)\right)^2\right)$, $\psi\in D\left(\left(K\left(1\right)\right)^2\right)$ *et* $f\in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, $0<\theta<1$. *On suppose les hypothèses* (2.3) , (2.4) , (2.6) *et* (2.11) *sont vérifiées et* u *donné par* (2.21) *est une solution stricte du problème* $(2.1)-(2.2)$ *alors que*

$$f^*\left(0\right)=f\left(0\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\backslash_{x=0}K\left(0\right)\varphi+\Phi_0^*\left(\varphi\right)+r_0\left(f^*,\psi\right),$$

avec

$$\Phi_0^*\left(\varphi\right)\in\overline{D\left(K\left(0\right)\right)},\;\;r_0\left(f^*,\psi\right)\in\overline{D\left(K\left(0\right)\right)}$$

et

$$f^*\left(1\right)=f\left(1\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(K\left(x\right)\right)^{-1}\backslash_{x=1}K\left(1\right)\psi+\Phi_1^*\left(\psi\right)+r_1\left(f^*,\varphi\right),$$

où

$$\Phi_1^*\left(\psi\right)\in\overline{D\left(K\left(1\right)\right)},\;\;r_1\left(f^*,\varphi\right)\in\overline{D\left(K\left(1\right)\right)}.$$

De plus $f^*\in C^\beta\left([0,1]\,;X\right)$ *où* $\beta=\min\left(\theta,\eta+\upsilon-1\right)$.

Preuve.
On a

$$f^*(0) = f(0) - F_\lambda(0)\varphi - G_\lambda(0)\varphi - S_\lambda(0)\psi - T_\lambda(0)\psi - M_\lambda(f^*)(0) - N_\lambda(f^*)(0) - V_\lambda(f^*)(0) - W_\lambda(f^*)(0),$$

$$f^*(1) = f(1) - F_\lambda(1)\varphi - G_\lambda(1)\varphi - S_\lambda(1)\psi - T_\lambda(1)\psi - M_\lambda(f^*)(1) - N_\lambda(f^*)(1) - V_\lambda(f^*)(1) - W_\lambda(f^*)(1).$$

Le terme

$$-S_\lambda(0)\psi - T_\lambda(0)\psi - M_\lambda(f^*)(0) - N_\lambda(f^*)(0) - V_\lambda(f^*)(0) - W_\lambda(f^*)(0) := r_0(f^*, \psi)$$

avec $r_0(f^*, \psi) \in \overline{D(K(0))}$,
et on a

$$-F_\lambda(1)\varphi - G_\lambda(1)\varphi - M_\lambda(f^*)(1) - N_\lambda(f^*)(1) - V_\lambda(f^*)(1) - W_\lambda(f^*)(1) := r_1(f^*, \varphi)$$

telle que $r_1(f^*, \varphi) \in \overline{D(K(1))}$.
On a vu que

$$F_\lambda(0)\varphi + G_\lambda(0)\varphi = \Phi_0^*(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0} K(0)\varphi,$$

où $\Phi_0^*(\varphi) = \Psi_0(\varphi) + \Psi_0^*(\varphi)$, donc

$$f^*(0) = f(0) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0} K(0)\varphi - \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi),$$

avec $\Phi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))}$.
Grâce à (2.33), on obtient

$$S_\lambda(1)\psi + T_\lambda(1)\psi = \Phi_1^*(\psi) - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=1} K(1)\psi,$$

où $\Phi_1^*(\psi) = \Psi_1(\psi) + \Psi_1^*(\psi)$, donc

$$f^*(1) = f(1) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=1} K(1)\psi - \Phi_1^*(\psi) + r_1(f^*, \varphi),$$

avec $\Phi_1^*(\psi) \in \overline{D(K(1))}$.
On sait que, sous des résultats précédent la fonction

$$x \longmapsto F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\varphi + S_\lambda(x)\psi + T_\lambda(x)\psi + M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x) + V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x)$$

appartient à l'espace $C^{\eta+\upsilon-1}([0,1]; X)$, on déduit donc que si f^*existe elle appartient nécessairement à l'espace $C^\beta([0,1]; X)$ où $\beta = \min(\eta + \upsilon - 1, \theta)$.

2.4.6 Résultat essentiel d'existence et d'unicité de la solution stricte

Théorème 2.1 *Soient* $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$, $\psi \in D\left((K(1))^2\right)$ *et* $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $(0 < \theta < 1)$. *On suppose que les hypothèses* (2.3), (2.4), (2.6) *et* (2.11) *sont vérifiées. Alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^*$, *la fonction* u *donné par* (2.21) *est la solution stricte unique du problème* (2.1) – (2.2) *si et seulement si*

$$\begin{cases} f(0) + (K(0))^2\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=0} K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))} \\ f(1) + (K(1))^2\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}\setminus_{x=1} K(1)\psi \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))} \end{cases}.$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant les opérateurs $A(x)$.

Théorème 2.2 *Soient* $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$, $\psi \in D\left((K(1))^2\right)$ *et* $f \in C^\theta([0,1];X)$, $(0<\theta<1)$. *On suppose que les hypothèses* (2.3), (2.4), (2.6) *et* (2.11) *sont vérifiées. Alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^*$, *la fonction* u *donné par* (2.21) *est la solution stricte unique du problème* (2.1) $-$ (2.2) *si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-1/2}\backslash_{x=0}(\lambda - A(0))^{1/2}\varphi \in \overline{D(A(0))} \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-1/2}\backslash_{x=1}(\lambda - A(1))^{1/2}\psi \in \overline{D(A(1))} \end{array}\right. .$$

Preuve.
On doit vérifier que la représentation suivante

$$\begin{aligned} u(x) &= Y(x)[I - \exp((2-2x)K(x))]\exp(xK(x))\varphi \\ &+Y(x)[I - \exp(2xK(x))]\exp((1-x)K(x))\psi \\ &-\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2+x-s)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &-\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x-s)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x+s)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\left[\int_0^x \exp((x-s)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds + \int_x^1 \exp((s-x)K(x))(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds\right] \end{aligned}$$

est une solution stricte de problème $(2.1),(2.2)$. Il suffit de considérer le cas $\psi = 0$ et de montrer que

$$x \longmapsto Q(x)u(x) = -(K(x))^2 u(x) \in C([0,1];X)$$

On a

$$\begin{aligned} (K(x))^2 u(x) &= Y(x)[I - \exp(2-2x)K(x)](K(x))^2\exp(xK(x))\varphi \\ &+(K(x))^2 m(x,f^*) + \frac{1}{2}\int_0^x K(x)\exp((x-s)K(x))(f^*(s) - f^*(x))ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)\exp((s-x)K(x))(f^*(s) - f^*(x))\,ds + \frac{1}{2}\exp(xK(x))f^*(x) \\ &+\frac{1}{2}\exp((1-x)K(x))f^*(x) - f^*(x). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $m(x,f^*)$, on va considérer seulement le premier terme (qui peut avoir une singularité en 0, les autres termes sont réguliers quand on leur applique $(K(x))^2$.

Donc

$$\begin{aligned}
(K(x))^2 m(x,f^*) &= \frac{-Y(x)K(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\, f^*(s)\, ds + R_m(x,f^*) \\
&= \frac{-Y(x)K(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\,(f^*(s)-f^*(0))\, ds \\
&\quad \frac{-Y(x)K(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\, f^*(0)\, ds + R_m(x,f^*) \\
&= \frac{-Y(x)K(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\,(f^*(s)-f^*(0))\, ds \\
&\quad -\frac{Y(x)}{2}\left[\exp(xK(x)-I\right]\exp(xK(x)\, f^*(0) + R_m(x,f^*),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
R_m(x,f^*) &= \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2+x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
&\quad -\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x-s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
&\quad +\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 \exp((2-x+s)K(x))\,(K(x))^{-1} f^*(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
(K(x))^2 u(x) &= Y(x)\left[I-\exp\left((2-2x)K(x)\right)\right](K(x))^2\exp\left(xK(x)\right)\varphi + \frac{1}{2}\exp(xK(x))f^*(x) \\
&\quad -\frac{Y(x)}{2}\left[\exp(xK(x)-I\right]\exp(xK(x)\, f^*(0) \\
&\quad -\frac{Y(x)K(x)}{2}\int_0^1 \exp((x+s)K(x))\left[f^*(s)-f^*(0)\right] ds \\
&\quad R_m(x,f^*) + \frac{1}{2}\int_0^x K(x)\exp((x-s)K(x))\left[f^*(s)-f^*(x)\right] ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)\exp((s-x)K(x))\left[f^*(s)-f^*(x)\right] ds.
\end{aligned}$$

Les quatres derniers termes sont continus sur $[0,1]$. On regarde les trois premiers termes.
On a

$$\begin{aligned}
&Y(x)\left[I-\exp\left((2-2x)K(x)\right)\right](K(x))^2\exp\left(xK(x)\right)\varphi + \frac{1}{2}\exp(xK(x))f^*(x) \\
&-\frac{Y(x)}{2}\left[\exp(xK(x)-I\right]\exp(xK(x)\, f^*(0) \\
= \;&\left[Y(x)\left[I-\exp\left((2-2x)K(x)\right)\right]-I\right](K(x))^2\exp\left(xK(x)\right)\varphi \\
&+(K(x))^2\exp\left(xK(x)\right)\varphi - \frac{(Y(x)-I)}{2}\left[\exp(xK(x)-I\right]\exp(xK(x)\, f^*(0) \\
&-\frac{1}{2}\exp\left((1+x)K(x)\right)f^*(0) + \frac{1}{2}\exp\left(xK(x)\right)\left[f^*(x)-f^*(0)\right] + \exp\left(xK(x)\right)f^*(0).
\end{aligned}$$

Il reste à étudier le terme

$$(K(x))^2 \exp(xK(x))\varphi + \exp(xK(x)) f^*(0).$$

On a

$$\begin{aligned}
& (K(x))^2 \exp(xK(x))\varphi + \exp(xK(x)) f^*(0) \\
= & \left((K(x))^2 - (K(0))^2\right) \exp(xK(x))\varphi + (K(0))^2 \exp(xK(x))\varphi + \exp(xK(x)) f^*(0) \\
= & \left((K(x))^2 - (K(0))^2\right) \exp(xK(x))\varphi + (K(0))^2 [\exp(xK(x)) - \exp(xK(0))]\varphi \\
& + [\exp(xK(x)) - \exp(xK(0))] f^*(0) + (K(0))^2 \exp(xK(0))\varphi + \exp(xK(0)) f^*(0) \\
= & a + b + c + d + e.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\left((K(x))^2 - (K(0))^2\right) \exp(xK(x))\varphi \to 0, \text{ quand } x \to 0,$$

$$(K(0))^2 [\exp(xK(x)) - \exp(xK(0))]\varphi \to 0, \text{ quand } x \to 0,$$

$c \in C([0,1]; X)$ et pour le terme $d+e$, on obtient

$$\begin{aligned}
d + e &= \exp(xK(0)) \left[(K(0))^2 + f^*(0)\right] \\
&= \exp(xK(0)) \left[(K(0))^2 + f(0) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0)\varphi + \phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi)\right] \\
&= \exp(xK(0)) \left[(K(0))^2 + f(0) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0)\varphi\right] + \exp(xK(0))(\phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi)) \\
&= \alpha + \beta.
\end{aligned}$$

On a d'après le lemme (2.4), $\beta \in C([0,1]; X)$ et pour α on a :
$\alpha \in C([0,1]; X)$ si et seulement si $f(0) + (K(0))^2 \varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} \backslash_{x=0} K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}$.
De la même manière, on obtient la condition de compatibilité en 1.

Chapitre 3

Exemple

On donne ici un exemple concret où on appliquer tous les résultats précédents.
Soit $X = C\left([0,1]\right)$ muni de sa norme du maximum,

$$a, b \in C^{2,k}\left([0,1]\right), \;\; k \in \left]0,1\right[, \quad a\left(x\right) \geq 0$$

et

$$\min_{x\in[0,1]} b\left(x\right) > 0.$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $\left(-A\left(x\right)\right)^{1/2}$ pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\begin{cases} D\left(-\left(-A\left(x\right)\right)^{1/2}\right) = \left\{\varphi \in C^{2}\left([0,1]\right) : a\left(x\right)\varphi\left(0\right) - b\left(x\right)\varphi'\left(0\right) = 0, \;\; \varphi\left(1\right) = 0\right\} \\ \left(\left(-A\left(x\right)\right)^{1/2}\varphi\right)\left(y\right) = \varphi''\left(y\right), \;\; y \in [0,1] \end{cases},$$

ce qui implique

$$\begin{cases} D\left(A\left(x\right)\right) = \left\{\begin{array}{l} \varphi \in C^{4}\left([0,1]\right) : a\left(x\right)\varphi\left(0\right) - b\left(x\right)\varphi'\left(0\right) = 0, \\ \varphi'\left(1\right) = 0, \;\; a\left(x\right)\varphi''\left(0\right) - b\left(x\right)\varphi'''\left(0\right) = 0, \;\; \varphi''\left(1\right) = 0 \end{array}\right\} \\ \left(A\left(x\right)\varphi\right)\left(y\right) = -\varphi^{(iv)}\left(y\right), \;\; y \in [0,1] \end{cases}.$$

De plus, on a

$$\overline{D\left(A\left(x\right)\right)} = \overline{D\left(\left(A\left(x\right)\right)^{1/2}\right)} = \left\{\varphi \in C\left[0,1\right], \;\; \varphi\left(1\right) = 0\right\} \neq X$$

et donc $D\left(A\left(x\right)\right)$ n'est pas dense dans X.
On définit la famille d'opérateurs linéaires bornés $B\left(x\right)_{x\in[0,1]}$ par

$$\begin{cases} D\left(B\left(x\right)\right) = X \\ \left(B\left(x\right)\varphi\right)\left(y\right) = c\left(x\right)\varphi\left(y\right) \end{cases},$$

où c désigne une fonction dans $C^{k}\left([0,1]\right)$.
On considère ainsi le problème concret suivant

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right) + c\left(x\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x,y\right) - \lambda u\left(x,y\right) = f\left(x,y\right), \; x, y \in \left(0,1\right) \\ a\left(x\right)u\left(x,0\right) - b\left(x\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right) = 0, \quad x \in \left(0,1\right) \\ a\left(x\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,0\right) - b\left(x\right)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(x,0\right) = 0, \quad x \in \left(0,1\right) \\ u\left(x,1\right) = 0 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,1\right), \quad x \in \left(0,1\right) \\ u\left(0,y\right) = \varphi\left(y\right), u\left(1,y\right) = \psi\left(y\right), \quad y \in \left(0,1\right) \end{cases},$$

où $f \in C^{\theta}([0,1] \times [0,1]; X)$.
Pour obtenir l'écriture abstraite du problème (P) on utilise la notation vectorielle usuelle suivante

$$\begin{cases} u(x,y) = u(x,.)(y) = u(x)(y) \\ f(x,y) = f(x,.)(y) = f(x)(y) \end{cases},$$

pour la solution u et le second membre f.

Alors, on a

$$\begin{cases} u''(x) + B(x)u(x) + A(x)u(x) = f(x), \; x \in (0,1) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = \psi \end{cases},$$

Les hypothèses (2.5) , (2.6) , (2.7) , (2.8) , (2.9) , (2.10) et (2.11) sont vérifiées pour les familles des opérateurs $(B(x))_{x\in[0,1]}$ et $(A(x))_{x\in[0,1]}$. La vérification des ces hypothèses est très techniques, on se limite à démontrer (2.5) et (2.6).

Vérification de l'hypothèse (2.5) :
On posse $-(-A(x))^{1/2} = K(x)$, on ressoud le problème

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = \psi(y) \\ a(x)\varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases},$$

alors la solution s'écrit sous la forme

$$\left[\left(-(-A(x))^{1/2} - zI\right)^{-1}\psi\right](y) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

où

$$K_{\sqrt{z}}(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-y)\left[a(x)\sinh\sqrt{z}s + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}s\right]}{\sqrt{z}\left[a(x)\sinh\sqrt{z}s + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}s\right]} & \text{si } 0 \le s \le y \\ \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-s)\left[a(x)\sinh\sqrt{z}y + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}y\right]}{\sqrt{z}\left[a(x)\sinh\sqrt{z}s + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}s\right]} & \text{si } y \le s \le 1 \end{cases}.$$

De plus

$$\left|K_{\sqrt{z}}(y,x,s)\right| \le \begin{cases} \dfrac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}(1-y)\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}s}{|\sqrt{z}|}\dfrac{a(x)+b(x)|\sqrt{z}|}{\left[a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right]} & \text{si } s \le y \\ \dfrac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}y\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}(1-s)}{|\sqrt{z}|}\dfrac{a(x)+b(x)|\sqrt{z}|}{\left[a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right]} & \text{si } y \le s \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|K_{\sqrt{z}}(y,x,s)\right| ds &\le \left[\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}y\cosh\operatorname{Re}\sqrt{z}(1-s)\right]\frac{a(x)+b(x)|\sqrt{z}|}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\,|\sqrt{z}|\,\left|a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right|} \\ &= \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z}\,(a(x)+b(x)|\sqrt{z}|)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\,|\sqrt{z}|\,\left|a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right|} \\ &\le \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z}\,(a(x)+b(x)|\sqrt{z}|)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\,|\sqrt{z}|\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z}\,(a(x)+\operatorname{Re}|\sqrt{z}|\,b(x))}. \end{aligned}$$

puisque

$$\left|a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right| \ge \sinh\operatorname{Re}\sqrt{z}\left(a(x) + \operatorname{Re}\left|\sqrt{z}\right| b(x)\right). \tag{1}$$

D'où pour $\psi \in X$,

$$\left\| \left(-\left(-A\left(x\right)\right)^{1/2} - zI \right)^{-1} \psi \right\|_X \leq \sup \int_0^1 \left| K_{\sqrt{z}}\left(y,x,s\right) \right| ds \leq \frac{C}{|z|}.$$

Vérification de l'hypothèse (2.6) :
On a

$$\left[\left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1} \psi \right]\left(y\right) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}\left(y,x,s\right) \psi\left(s\right) ds.$$

Grâce à l'hypothèse de différentiabilité des fonctions a, b, on a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1} \psi \right]\left(y\right) = -\sinh \sqrt{z}\left(1-y\right) \frac{a\left(x\right) b'\left(x\right) - a'\left(x\right) b\left(x\right)}{\left(a\left(x\right)\sinh\sqrt{z} + b\left(x\right)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right)^2} \int_0^1 \sinh z\left(1-s\right) \psi\left(s\right) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1} \psi \right\|_X &\leq \left\| \sinh \sqrt{z}\left(1-y\right) \frac{a\left(x\right) b'\left(x\right) - a'\left(x\right) b\left(x\right)}{\left(a\left(x\right)\sinh\sqrt{z} + b\left(x\right)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right)^2} \int_0^1 \sinh z\left(1-s\right) \psi\left(s\right) ds \right\|_X \\
&\leq C \frac{\left|\sinh\sqrt{z}\left(1-y\right)\right|}{\left|\sinh \operatorname{Re}\sqrt{z}\right|^2 \left|a\left(x\right) + \operatorname{Re}\sqrt{z} b\left(x\right)\right|^2} \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{z}}{\operatorname{Re}\sqrt{z}} \left\|\psi\right\|_X \\
&\leq C \frac{1}{(\operatorname{Re}\sqrt{z})^2 \operatorname{Re}\sqrt{z}} \left\|\psi\right\|_X \\
&\leq \frac{C}{|z|} \left\|\psi\right\|_X \\
&\leq \frac{C}{|z|^{\upsilon}} \left\|\psi\right\|_X,
\end{aligned}$$

pour tout $z \in \Gamma_{\theta_1 + \pi/2, r_1}$ avec $\upsilon \in \left]1/2, 1\right]$.

Bibliographie

[1] **P. Acquistapace,B. Terreni** ; *Some Existence and Regularity Results of Abstract Non-Autonomous Parabolic Equations*, Journal of Math. Anal. Appli.Vol. 99, No 1 (1984), 9-64.

[2] **A.V. Balakrishnan** ; *Fractoinal Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them*, Pacifc.J.Math.10 (1960), 419-437.

[3] **F. Boutaous** ; *Ètude d'une Équation Différentielle Abstraite Complète du Second Ordre de Type Elliptique et à Coefficients Opérateurs Variables,* Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure, Kouba, Alger 2012.

[4] **G. Da Prato, P. Gtisvard** ; *Sommes d'Opérateurs Linéaires et équations Différentielles Opérationnelles*, J.Math.Pures et Appl.54 (1975),305-387.

[5] **G. Dore, S. Yakubov** ; *Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems*, Semigroup Forum Vol. 60 (2000), 93-121.

[6] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A. Yagi** ; *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkcialaj Ekvacioj,47 (2004), 423-452.

[7] **A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, B.-K. Sadallah** ; *Study of a Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type with Variable Operators Coefficients* (part I), Rev. Mat. Complut.21 (2008), 89-133.

[8] **P. Grisvard** ; *Spazi di trace e applicazioni*, Rendiconti di Matematica (4) Vol. 5, VI (1972), 657-729.

[9] **M. Haase** ; *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkh¨auser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[10] **S. G. Krein** ; *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscow, 1967, English translation, AMS, Providence, 1971.

[11] **R. Labbas** ; *Problèmes aux Limites pour une Équation Différentielle Opérationnelle du Second Ordre*, Thèse de doctorat d'état, Université de Nice, 1987.

[12] **R. Labbas, B. Terreni** ; *Sommes d'Opérateurs Linéaires de Type Parabolique*, preumière Partie.Boll. Un. Math. Ital. 1-B, 7 (1987), 545-569.

[13] **A. Lunardi** ; *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser,1995.

[14] **C. Martinez Carracedo, M. Sanz Alix** ; *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North-Holland Mathematics Studies 187. New York, Elsevier Science, 2001.

[15] **E. Sinestrari** ; *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions*, J. Math. Anal. Appli. 66 (1985), 16-66.

[16] **H. Tanabe** ; *Equations of Evolution, Monographs and Studies in Mathematics*, Vol. 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

[17] **A. Yagi** ; *On the Abstract Evolution Equation of Parabolic Type*, Osaka J. Math. 14 (1977), 557-568.

[18] **A. Yagi** ; *On the Abstract Linear Evolution Equations in Banach Spaces*, J. Math. Soc. Japan,Vol. 28, No. 2 (1976), 290-303.