

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM
Abd el Hamid Ibn Badis



Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

Mémoire de Master en mathématiques
Option : Analyse Harmonique et EDP

Intitulé

LA THÉORIE DES ONDELETTES APPLIQUÉE À
L'IMAGERIE MÉDICALE : TIBIA

Présenté par
Benyoucef Naziha

Soutenu le : /06/2013.

Devant les membres du jury :

Présidente : S.HAMANI, Maître de conférences A, Université de Mostaganem.

Examineur : D. LAID, Maître assistant A, Université de Mostaganem.

Encadreur : A. BENBERNOU, professeur, Université de Mostaganem.

Année universitaire : 2012-2013

Table des matières

Introduction	2
0.1 Historique[2][13]	3
0.2 Contenu des chapitres	3
1 Rappels et définitions	4
1.1 Les ondelettes[9][6]	4
1.2 Quelques type d'ondelette[8][12]	6
1.2.1 Ondelette de Haar	6
1.2.2 Ondelette de Morlet	6
1.3 La transformée de Fourier	7
1.4 Le produit de convolution	7
1.5 La transformée en ondelette[5][14]	7
1.5.1 La transformation en ondelette continue(TOC)[9][15]	9
1.5.2 La transformation en ondelette discrète(DWT)[9][15]	9
1.6 Base de Riesz[9]	10
1.7 Moments nuls des ondelettes[12][8]	10
1.8 Construction de la fonction originale	11
1.9 Base d'ondelette[9][13]	11
2 Reconstructin en 3D d'image médicale tibia	12
2.1 l'image[15]	14
2.1.1 une image numérique	14
2.2 Analyse multi-résolution(AMR)[9][14]	16
2.3 Les espaces d'approximations, détails[9][14]	17
2.4 Construction d'image[5]	22
2.5 Reconstruction d'image[15]	23
Conclusion	26

Remerciement

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute cette période de recherche, c'est grâce à Lui que ce travail de mémoire a vu le jour. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près, à la réalisation de ce mémoire de Master, tout particulièrement :

Mon encadreur ; M^{em} **A.BENBERNOU** qui a accepté d'encadrer ce travail et pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Je le remercie tout aussi pour avoir dirigé mes travaux, pour m'avoir écouté et m'encouragé durant cette période. Merci aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie M^{em} **S.HAMANI** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire et je remercie également **Monsieur D.LAID** Pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier docteur **CHIALI** et le corps enseignant du Département de Mathématiques de l'Université de Mostaganem pour les efforts qu'il ne cesse de déployer afin d'assurer le développement et l'épanouissement de la formation surtout l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement précieux.

Je voudrais faire, maintenant, **une place toute particulière à mes parents.** Je profite cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profond et ma **très très** grande reconnaissance. Je remercie ma mère qui a attendu, avec patience et sans jamais se lasser, les fruits de son éducation et ses efforts. Aucun terme et aucune langue ne peut exprimer mon amour envers vous. A mon père qui avait autant espéré me voir en ce jour.

Je dédie ce travail à mes frères abd azize et surtout **Mohamed Amine**, à mes sœurs Houria, Asma, Amel, et surtout **Hafsa**.

A mes amis et tout ma familles, en particulier : **Asma.H, Ahlem.B, Mouna.A, Samiha.T, Fatiha.B, Anissa.M, Hakima.B.**

Introduction

L'imagerie médicale est le procédé par lequel un médecin examine l'intérieur du corps d'un patient sans l'opérer. En effet l'imagerie médicale est l'ensemble des techniques permettant de visualiser une partie du corps humain ou d'un organe et d'en conserver une image, dont le but de réaliser un diagnostic, de guider un geste thérapeutique, ou de réaliser des résultats de traitement est devenue un outil essentiel d'aide au diagnostic et à la chirurgie, et certainement l'un des domaines de la médecine qui a le plus progressé ces vingt dernières années. L'utilisation des images radiographiques, ultrasonores, IRM, ... pose un grand problème de stockage et d'archivage. En plus du problème de stockage, si de telles images doivent être transmises via un réseau, la durée de la transmission est souvent trop longue. Pour parler à tous ces problèmes, la compression des images médicales volumiques apparaît donc incontournable, elle consiste à minimiser le nombre de bits nécessaire à une représentation fidèle de l'image originale et d'accéder uniquement à l'information requise allégeant ainsi les transferts et autorisant un accès à distance aux données.

Les modèles 3D sont de plus en plus répandus grâce au développement des réseaux de télécommunications et l'accroissement de leur rapidité et grâce aussi au succès des scanners 3D qui ont grandement facilité l'acquisition de modèles tridimensionnels très détaillés. Ces objets 3D sont utilisés dans plusieurs domaines tels que la médecine, Conception Assistée par ordinateur, les jeux vidéo, le cinéma. Un modèle 3D des structures anatomiques du corps humain offre l'avantage d'obtenir des informations de volume plus précises. Il permet également de « naviguer » à l'intérieur du corps d'un patient pour découvrir ses organes et analyser leur état.

Dans ce travail on veut traiter une image par les ondelettes dans le cas médical pratique : "le tibia"

0.1 Historique[2][13]

La transformée en ondelette est apparue dans les années 1980 avec les travaux de l'ingénieur J.Morlet sur des signaux sismiques. Les outils et méthodes classiques d'analyse de Fourier s'étaient montrés inadaptés ; ceux issus de FFG et de Gabor étaient inadéquats car ils n'assuraient pas une résolution suffisante pour ces signaux. Indépendamment des travaux de A.Calderon effectués en mathématiques dans les années 1960, il présente en 1983 un algorithme d'analyse et de synthèse par ondelettes qui autorise l'analyse de signaux où cohabitent des phénomènes d'échelles très différentes. En collaboration avec A.Grossman, physicien du centre de physique théorique de Marseille, il développe les bases de la transformée en ondelettes continues 1D, reposant sur représentation de carré intégrable du groupe affine $aX + b$ (groupe de translations et dilatations).

En 1985, Y.Meyer, lisant les travaux de Morlet et Grossmann, reconnaît l'identité de Calderon derrière la condition d'admissibilité, puis découvre une base orthogonale d'ondelettes construite à partir d'une ondelette régulière. En 1987, il introduit avec S.Mallat l'analyse multirésolution (décomposition en détails et approximations du signal) et rejoint la théorie de filtres miroirs en quadratique.

Les applications se diversifient pour toucher la mécanique des fluides, la turbulence, les fractales, la résolution d'équations aux dérivées partielles.

En 1990, les travaux de R.Murenzi étendent la théorie continue aux dimensions 2 puis N quelconque, en introduisant un opérateur supplémentaire : la rotation. Il ouvre la porte au traitement d'images par ondelettes. Mallat effectue la même extension avec l'analyse multirésolution, qui autorise la compression d'images par ondelettes.

Depuis lors, les extensions sont nombreuses et touchent des branches très diverses comme l'astronomie, l'holographie acoustique. L'analyse d'écoulements turbulents par visualisations et autres.

0.2 Contenu des chapitres

Ce travail est organisé comme suit :

Le **chapitre 1** est consacré aux rappels et définitions utilisés dans travail.

Au **chapitre 2**, traitement d'une image "le tibia" par ondelette.

Rappels et définitions

1.1 Les ondelettes[9][6]

Les ondelettes sont des fonctions élémentaires très particulières; ce sont des vibrations très courtes. Mathématiquement, le but essentiel de l'analyse par ondelettes est de décomposer les espaces fonctionnels usuels sur des bases ayant d'excellentes propriétés tel que l'orthogonalité et la régularité.

Définition 1.1 Une ondelette est une fonction oscillante de valeurs réelles, de carré intégrable $L^2(\mathbb{R})$ et de moyenne nulle

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0$$

Et de norme

$$\|\Psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)|^2 dt = 1$$

Ψ est dit ondelette mère.

Remarque 1.1 i) Ψ est de moyenne nulle veut dire $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$.

ii) Ψ est une ondelette $\Rightarrow \Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.2 Une ondelette Ψ est dite admissible si

$$C_{\Psi} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty$$

On a

$$\begin{aligned}
C_\Psi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(-\xi)|^2}{|-\xi|} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(y)|^2}{|y|} dy + \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi
\end{aligned}$$

Si $\int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty$ alors $C_\Psi < +\infty$

Le caractère d'admissibilité d'une ondelette est nécessaire pour pouvoir utiliser cette ondelette quel fois dans l'analyse et dans la reconstruction du signal. Le coefficient C_Ψ est utilisé comme facteur de normalisation dans la reconstruction, on appelle facteur de reconstruction.

Proposition 1.1 Soit $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$

1. Si Ψ est admissible, alors

$$\widehat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi) d\xi = 0$$

2. Si $\widehat{\Psi}(0) = 0$, $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ et si la dérivée de $\widehat{\Psi}$ est bornée, alors Ψ est admissible.

Définition 1.3 Les ondelettes sont définies par translation et dilatation (contraction) de l'ondelette mère Ψ et ont la forme $\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$

Où $u \in \mathbb{R}$ est la translation temporelle.

$s \in \mathbb{R}^*$ est l'échelle de dilatation ($s > 1$) contraction ($s < 1$). On dit que cette ondelette est un ondelette fille.

Prenons pour des approximations par des constantes par morceaux, $\phi = \chi_{[0,1]}$ comme $h[n] = \left\langle 2^{-\frac{1}{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle$ on en déduit que

$$h[n] = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

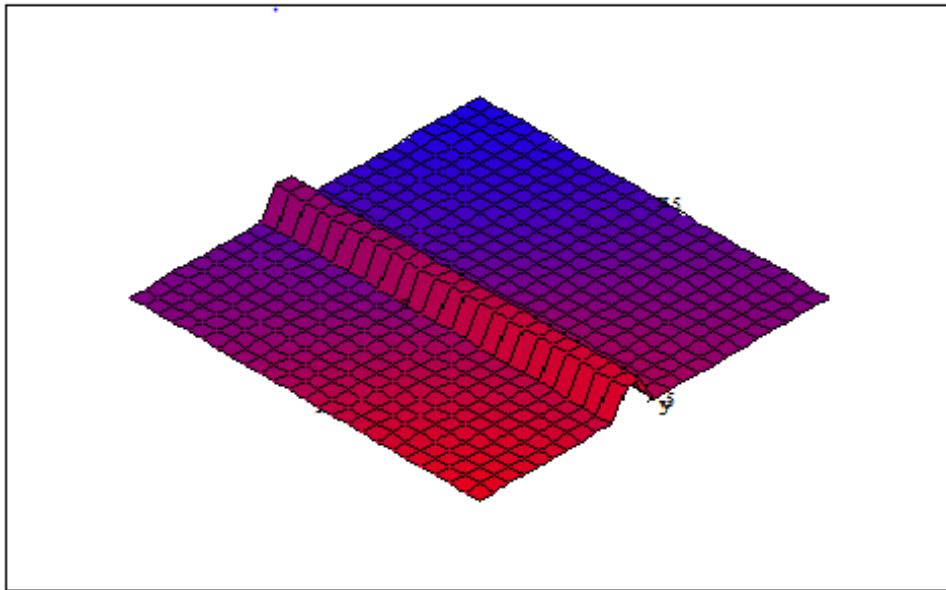
1.2 Quelques type d'ondelette[8][12]

1.2.1 Ondelette de Haar

L'ondelette de Haar est la plus ancienne (1909) et la plus simple des ondelettes et correspond à une multirésolution de fonctions constantes par morceaux. La fonction d'échelle est alors $\phi = \chi_{[0,1]}$. Le filtre h donné en (1.2), a deux coefficients non nuls valant $2^{-\frac{1}{2}}$ en $n = 0$ et $n = 1$. L'ondelette de Haar est l'ondelette orthogonale dont le support est le plus petit.

Nous définissons sur $\Omega = L^2[0, 1]$ L'ondelette de Haar associée est discrète et à support compact. Le fait qu'elle soit à support compact est une propriété intéressante car elle implique un calcul très rapide de la transformée en ondelettes correspondante. la fonction suivante :

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Representation d'ondelette de Haar en 3D

1.2.2 Ondelette de Morlet

L'ondelette de Morlet est une fonction particulièrement populaire pour la transformée en ondelettes. Elle est définie comme suite

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{t^2}{\alpha^2}\right) \left[\exp(-\pi t) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \alpha^2}{4}\right) \right]$$

1.3 La transformée de Fourier

La théorie de Fourier permet de décomposer un signal en une série de sinusoides a différentes fréquences ; la fonction analysée peut être comparée a une partition dont les sinusoides seraient les différentes notes.

La transformée de Fourier joue un rôle important dans la théorie des ondelettes puisque plusieurs propriétés des ondelettes mères et pères sont données en fonction de leur transformée de Fourier.

Définition 1.4 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ on appelle transformée de fourier de f et on note $\mathcal{F}f$ où \hat{f} , la fonction définie en tout $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t} dt$$

1.4 Le produit de convolution

Le produit de convolution est utilisé dans le traitement du signal. et pour la régularité.

Définition 1.5 pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution de f et g , notée $f * g$ est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - x)g(x)dx$$

1.5 La transformée en ondelette[5][14]

La transformée en ondelettes décompose les signaux sur une famille d'ondelettes translatées et dilatées. Une famille d'atomes temps-fréquence s'obtient en dilatant l'ondelette Ψ par un facteur s , et en la translatant par u :

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t - u}{s}\right)$$

En utilisant la transformée en ondelette pour représenter une partie d'un signal en 3D voir l'exemple suivante :

Exemple 1.1



Figure 2

Figure 2 : Ce signal est un morceau de musique, bien que satisfaisant au niveau de la résolution fréquentielle n'est pas très convaincant du point des évènements (apparitions des fréquences). L'analyse en ondelette du même signal donne cette représentation :

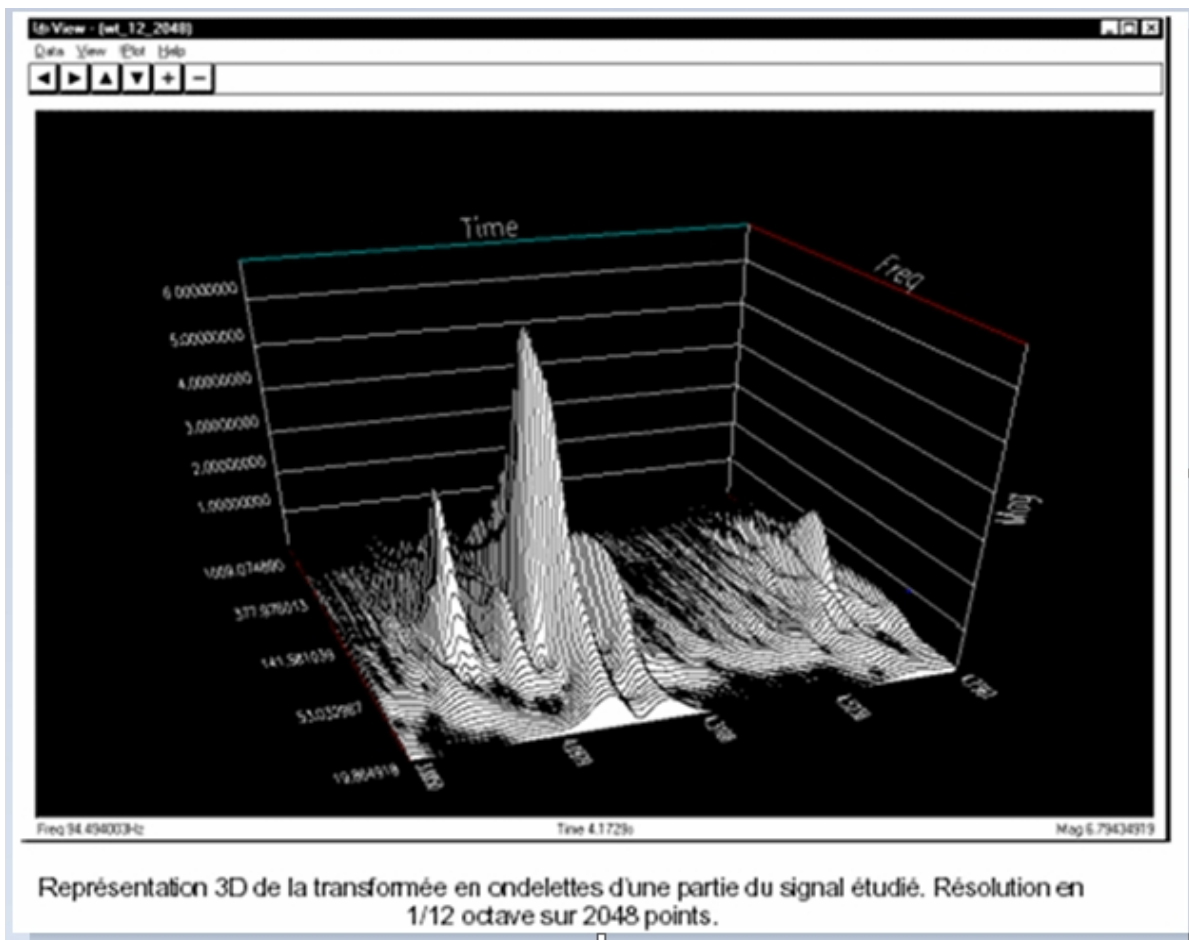


Figure 3

Figure 3 : représentation 3D de la transformée en ondelette d'une partie du signal musique est un cas précis, dont nous arrivons à définir très clairement l'instant d'apparition des fréquences.

1.5.1 La transformation en ondelette continue(TOC)[9][15]

La transformation continue en ondelette, ou transformation intégrale en ondelette a la possibilité de faire un "zoom", c'est à dire que la dimension de la cellule peut s'adapter à la position du centre dans le plan

La transformée en ondelette continue d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ au temps u et à l'échelle s est définie par produit scalaire avec $\Psi_{u,s}$

$$W_f(u, s) = \langle f, \Psi_{u,s} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\Psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

Où W est l'initiale de wavelet, c-à-d ondelette.

La transformé en ondelette continue est une analyse temps-échelle. Elle permet d'avoir des informations sur le comportement d'une fonction au voisinage du point x et à l'échelle s . Tel que x est le **paramètre de translation**, l'ondelette Ψ ayant été déplacée pour être centrée sur x : c'est donc le point autour duquel l'analyse se fait. s est le **paramètre d'échelle** et décide de la finesse de l'analyse; plus s est grand, plus est dilatée, donc plus $\Psi_{u,s}$ l'analyse se fait sur une large zone de f .

Remarque 1.2 *La transformée en ondelette peut se d'écrire comme un produit de convolution car si nous prondrons :*

$$\begin{aligned} \Psi_s^*(t) &= \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\Psi}\left(-\frac{t}{s}\right) \\ W_f(u, s) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\Psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \\ \Psi_s^*(u-t) &= \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\Psi}\left(-\left(\frac{u-t}{s}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\Psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi_s^*(u-t) dt \\ &= (f * \Psi_s^*)(u) \end{aligned}$$

1.5.2 La transformation en ondelette discrète(DWT)[9][15]

Dans les calculs discrets, il est plus simple de renormaliser le pas d'échantillonnage à 1.

On note $f(n) = f[n]$ le signal discret de taille N . Sa transformée en ondelettes discrète se calcule aux échelles $s = a^j$, avec $a = 2^{\frac{1}{v}}$, ce qui fournit v échelles intermédiaires pour chaque octave $[2^j, 2^{j+1}[$.

On défini une ondelette discrète dilatée par a^j et pour $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$

$$\Psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \Psi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

Remarque 1.3 Une transformée en ondelettes calculée jusqu'à l'échelle a^j n'est pas une représentation complète du signal. Il est nécessaire d'ajouter la composante, qui correspond aux échelles plus grands que a^j .

1.6 Base de Riesz[9]

Dans un espaces de dimension infinie, si on relâche la condition d'orthogonalité, il faut imposer une condition d'équivalence d'énergie pour assurer la stabilité de la base. Une famille de vecteur $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé une base de Riesz d'un espace de Hilbert H si

1. Elle est linéairement indépendant.
2. S'il existe deux constantes $A, B > 0$ tel que

$$\forall f \in H \quad A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

Remarque 1.4 On dit *filtre étroit* si $A = B$

1.7 Moments nuls des ondelettes[12][8]

les ondelettes sont des fonctions réelles. Pour mesurer la régularité locale d'un signal, l'important n'est pas tellement d'utiliser une ondelette avec un support fréquentiel étroit, mais les moments nuls ont une importance cruciale. **Si l'ondelette a n moments nuls alors on montre que la transformée en ondelette peut s'interpréter comme un opérateur différentiel multiéchelle d'ordre n .**

La régularité locale d'un signal est caractérisée par la décroissance de ses coefficients d'ondelettes à travers les échelles.

Définition 1.6 (moments nuls d'une ondelette) On dit que l'ondelette Ψ est à n moments nuls si

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \Psi(t) dt = 0, 0 \leq k < n$$

Cela revient à dire que Ψ est orthogonale à tous les polynomes de degré inférieur à n .

1.8 Construction de la fonction originale

L'ondelette Ψ doit nécessairement vérifier la condition d'admissibilité suivante :

$$C_\Psi = \int_0^{+\infty} |\Psi(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} < +\infty$$

Où $\hat{\Psi}(\xi)$ est la transformée de Fourier de Ψ . La reconstruction de la fonction originale f s'effectue par :

$$f(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u,s}(t) \frac{duds}{u^2}$$

La formule de conservation de l'énergie

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 \frac{duds}{u^2}.$$

1.9 Base d'ondelette[9][13]

On peut construire des ondelettes Ψ qui génèrent des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ par translation et dilatation :

$$\left\{ \Psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

Les ondelettes orthogonales dilatées de 2^j reproduisent les variations d'un signal à la résolution 2^{-j} . La construction de ces bases est ainsi liée à l'approximation multirésolution des signaux.

Définition 1.7 Une base d'ondelette est une base préhilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\Psi_{j,k}$ obtenue par translation et dilatation dyadique de l'ondelette mère Ψ :

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 1.2 La base d'ondelette de Haar est définie par

$$\Psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -1 & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

Définition 1.8 Une base d'ondelettes $\Psi_{m,k}(t)$ est dite orthonormales si

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{i,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,k}(x) \Psi_{i,l}(x) dx = \delta(j-i) \delta(k-l)$$

Où δ est la matrice de Kroneker

$$\delta(j-i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}, \delta(k-l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Reconstructin en 3D d'image médicale tibia

Dans ce travail, nous intéressons à la reconstruction de signaux qui peut être réaliser. L'intérêt de la reconstruction est de reconstruire le signal par ses fréquences et ses positions temporelles. D'une manière plus générale, le problème appelé **reconstruction 3D** est le suivant : on dispose d'une ou plusieurs représentations en 2D d'un objet et on souhaite déterminer les coordonnées des éléments visibles sur ces représentations dans un repère de l'espace réel 3D.

Structures osseuses

L'articulation du genou est composée de trois os longs : le fémur qui constitue l'os de la cuisse, le tibia et le péroné qui forment les deux os de la jambe, et d'un petit os plat : la rotule qui se situe à la face antérieure du genou. La figure montre la position de chaque os

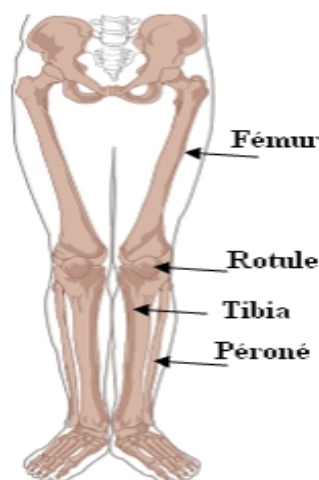


Figure 4 : représente une squelette, montre les structures d'osseuses dans le corps humain de telle façon à déterminer la position du tibia.

Définition 2.1 (*Tibia*)

C'est l'os antéro médial de la jambe. L'épiphyse proximale est constituée de deux condyles qui forment le plateau tibia. Le condyle médial est ovale concave et le condyle latéral est rond et convexe d'avant en arrière et concave transversalement. L'épiphyse distale est formée par la malléole interne et le pillon.

Pour l'affichage de l'image médicale tibia en matlab on fait le programme suivant :

```
>>image=imread('imageD0x27unTibiaEn3D.jpg');
```

D'après ça en clique sur entrer. On obtient le résultat suivant :

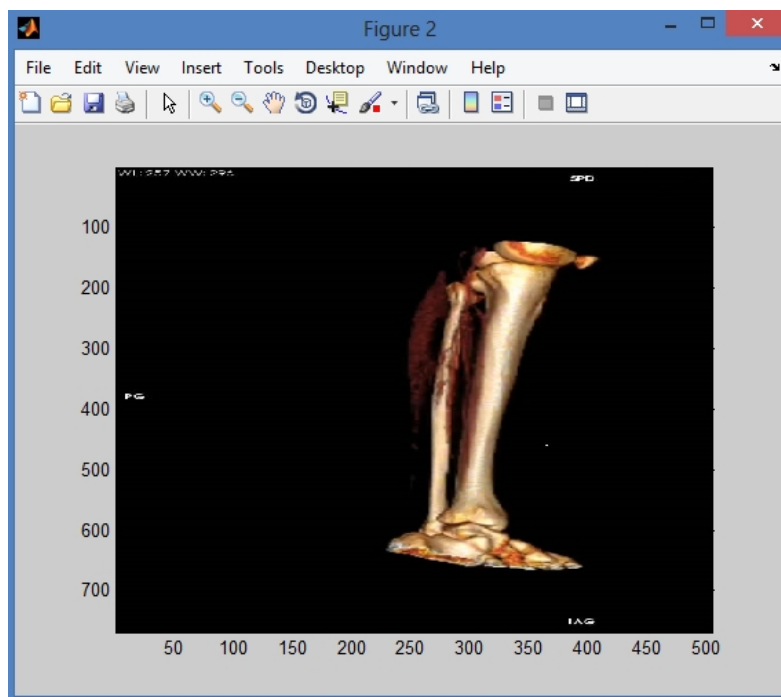


Figure 5

Figure 5 : représente une image médicale : tibia en matlab pour voir les informations de ce tibia (nombre de couleur et précise la qualité), faciliter de la manipulation sur Toolbox wavelet, et décomposer ces images par la méthode d'analyse multirésolution.

2.1 l'image[15]

Définition 2.2 Soit Ω un domaine fermé de \mathbb{R}^2 une image est une fonction (signal) u continue aux coordonnées spatiales de Ω dans \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\rightarrow u(x) \end{aligned}$$

Où x représente le pixel et $u(x)$ représente la valeur de l'intensité du pixel x .

2.1.1 une image numérique

Définition 2.3 une image numérique est une image dont la surface est divisée en éléments de taille fixe appelés pixels, ayant comme caractéristique le niveau de gris où de couleur, ces derniers ne peuvent prendre qu'un nombre discret de valeur comprise entre 0 et 255.

Définition 2.4 L'image numérisée est définie comme suit :

Pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, soit $D = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{N}^2$ Où $I_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ et $J = \{0, \dots, 255\}$. Une image de taille $n_1 \times n_2$ est une fonction u aux coordonnées spatiales définie par :

$$\begin{aligned} u : D &\rightarrow J^m \\ u(k, l) &\rightarrow u(k, l) \end{aligned}$$

Donnons un exemple :

- 1) Une image noir et blanc (binaire) et représentée par la fonction : $u_1 : D \rightarrow \{0, 255\}$
- 2) Une image en niveaux de gris est représentée par la fonction : $u_2 : D \rightarrow J$.
- 3) Une image couleur est représentée par la fonction : $u_3 : D \rightarrow J^3$, (chaque pixel contient les valeurs des trois canaux (RVB))

pour comprendre l'idée voir l'image tibia suivant :

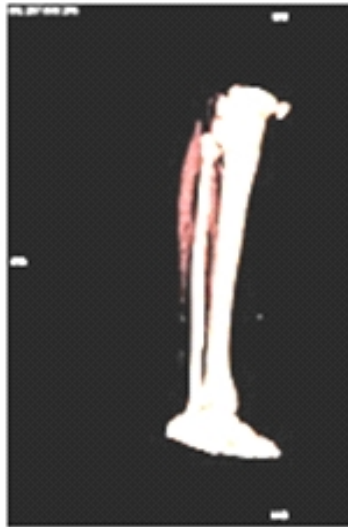


Figure 6

Figure 6 : image d'une tibia affiché par IRM contient 2 couleurs : noir et blanc.



Figure 7

Figure 7 : image d'une tibia affiché par matlab contient 256 couleurs.

2.2 Analyse multi-résolution(AMR)[9][14]

Les AMR d'ondelettes, sont des espaces d'approximation générés par des bases de fonctions introduites par Mallat en 1986. On peut calculer des approximation successives d'une fonction à des résolutions grossières.

L'analyse multirésolution donne un ensemble de signaux d'approximation et de détails d'un signal. On obtient une décomposition multi-échelle du signal de départ en séparant à chaque niveau de résolution les basses fréquences (approximation) et les hautes fréquences (détails) du signal. La boîte à outils ondelettes se décompose en plusieurs familles de fonctions : familles d'ondelettes, ondelettes continues, ondelettes discrètes....

Définition 2.5 Une analyse multi-résolution(AMR) de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous espaces vectoriels fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ constitue une suite d'espaces emboîtés :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$$

2. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\}$, $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

3. Une fonction $f(x)$ appartient à V_j si et seulement si sa dilatée $f(2x)$ appartient à V_{j+1} .

4. Il existe $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, appelée fonction d'échelle ou l'ondelette père telle que

$$\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

forme une base orthonormale de V_0 .

- a) La première condition signifie que V_j est un sous espace de V_{j+1} et donc la projection d'une fonction sur V_j constitue une moins bonne approximation que sa projection sur V_{j+1} . Cette inclusion montre que l'approximation sur V_{j+1} contient toute l'information nécessaire pour calculer l'approximation sur V_j .
- b) Les secondes montre que quand $j \rightarrow +\infty$ on prend toutes les informations sur la fonction, alors que quand $j \rightarrow -\infty$ l'approximation est asymptotiquement égale au fonction d'origine.
- c) De troisième condition, on peut passer de V_j à V_{j+1} en multipliant par le facteur d'échelle 2.

2.3 Les espaces d'approximations, détails[9][14]

Les espaces V_j sont appelés les espaces d'approximation et le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} noté par W_j est appelé espace de détails et on écrit :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Où \oplus désigne la somme directe de sous espaces vectoriels.

Ainsi la projection orthogonale d'une fonction f sur V_{j+1} peut se décomposer comme la somme de sa projection orthogonale sur V_j et W_j .

Les familles

$$\left\{ \phi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j t - n), n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } \left\{ \Psi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - n), n \in \mathbb{Z} \right\}$$

étants les bases orthonormales des espaces V_j et W_j respectivement.

La projection de f sur V_{j+1} est donnée par

$$PV_{j+1}f(t) = PV_jf(t) + PW_jf(t)$$

Où

$$PV_jf(t) = \sum_n a_j[n] 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j t - n)$$

$$PW_jf(t) = \sum_N c_j[n] 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - n)$$

Et

$$a_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j t - n) \right\rangle, c_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - n) \right\rangle$$

Les coefficients $a_j[n]$ et $c_j[n]$ sont appelés coefficients approximation et coefficients d'ondelettes où de détails du fonction. Et ces coefficients sont nécessaires. Cependant, en utilisant les coefficients et l'algorithme de reconstruction il est possible de retrouver les fonctions ϕ et Ψ et ainsi en avoir une représentation graphique (histogramme) qui aide à comprendre intuitivement leur comportement.

On utilisane l'ondelette de Haar pour analysé l'image tibia, pour bien voir les coefficients de ce tibia et comprendre la variation des coefficients dans l'histogramme. et on a deux type de coefficients voir l'exemple :

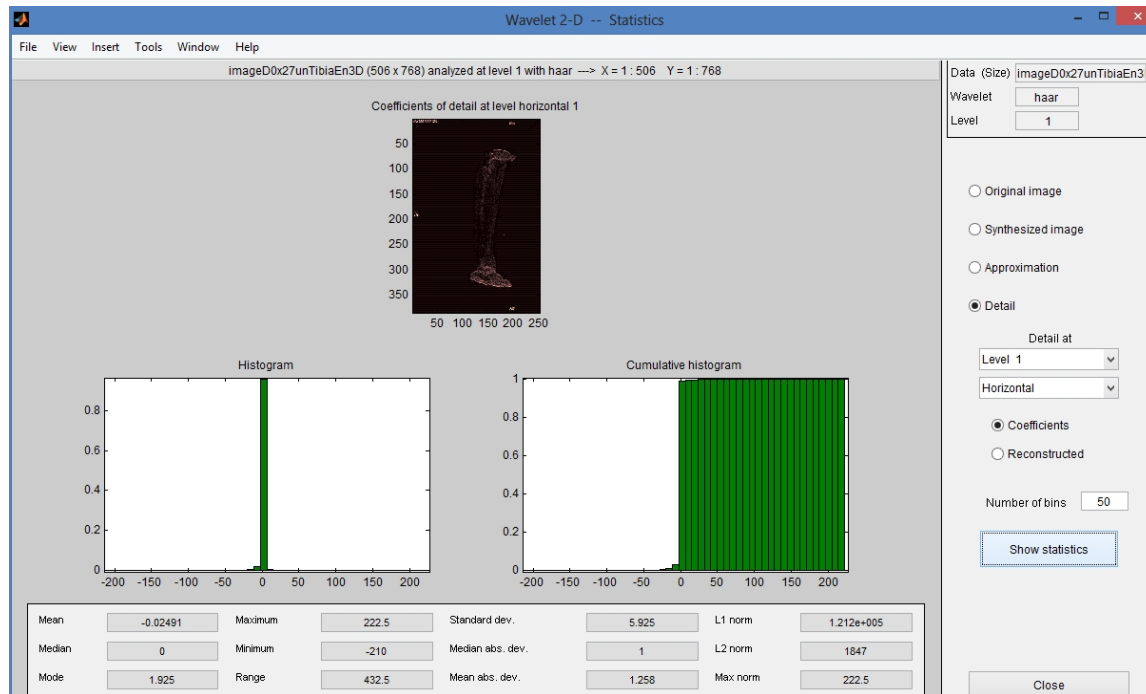


Figure 8

Figure 8 : en utilisant l'ondelette de Haar au niveau 1 afin d'afficher les coefficients détails horizontal de ce tibia en histogramme.

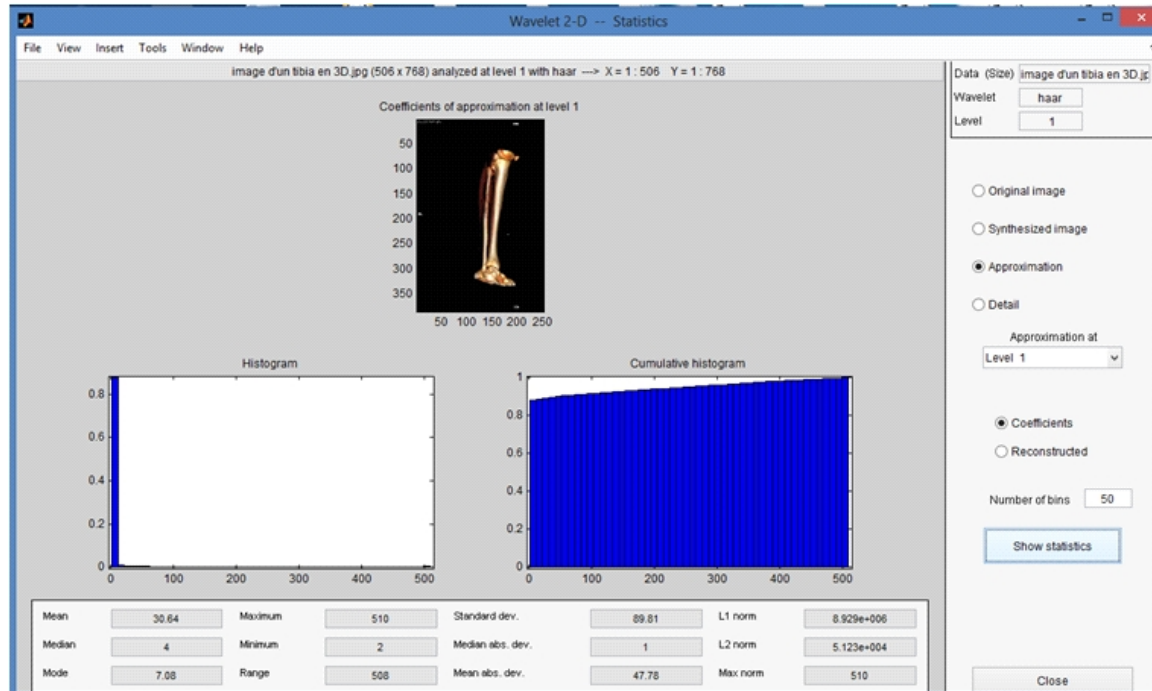


Figure 9

Figure 9 : En utilise l'ondelette de Haar au niveau 1 afin d'afficher les coefficients d'approximation horizontal de ce tibia en histogramme.

Chaque espace d'approximation V_j est donc décomposé en un espace d'approximation plus grossier V_{j-1} et 3 espaces de détails. Considérons le cas d'une image carrée, donc d'une fonction définie sur un domaine carré, et plaçons nous dans le cas de conditions périodiques aux limites du domaine. Une image numérique comporte un nombre fini de pixels. Une image $2^j \times 2^j$ sera ainsi considérée comme appartenant à V_j puis décomposée dans les espaces $(W_j^1, W_j^2, W_j^3)_{j=L \dots j-1}$, et dans V_L

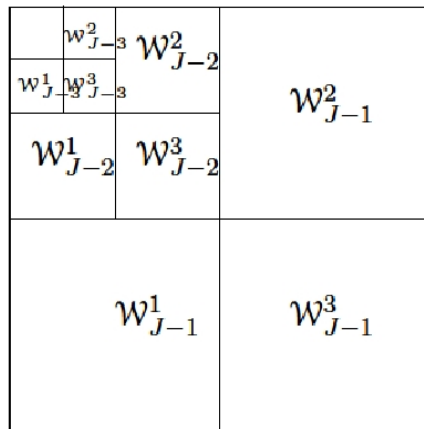


Figure i

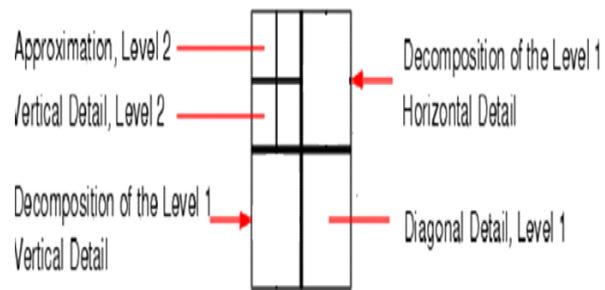


Figure ii

Figure i : représente la transformée en ondelette orthogonale d'une image et la figure ii : clarifie figure i en précisant l'image dans chaque carrée.

On applique cette méthode sur l'image tibia on obtient le résultat suivant :

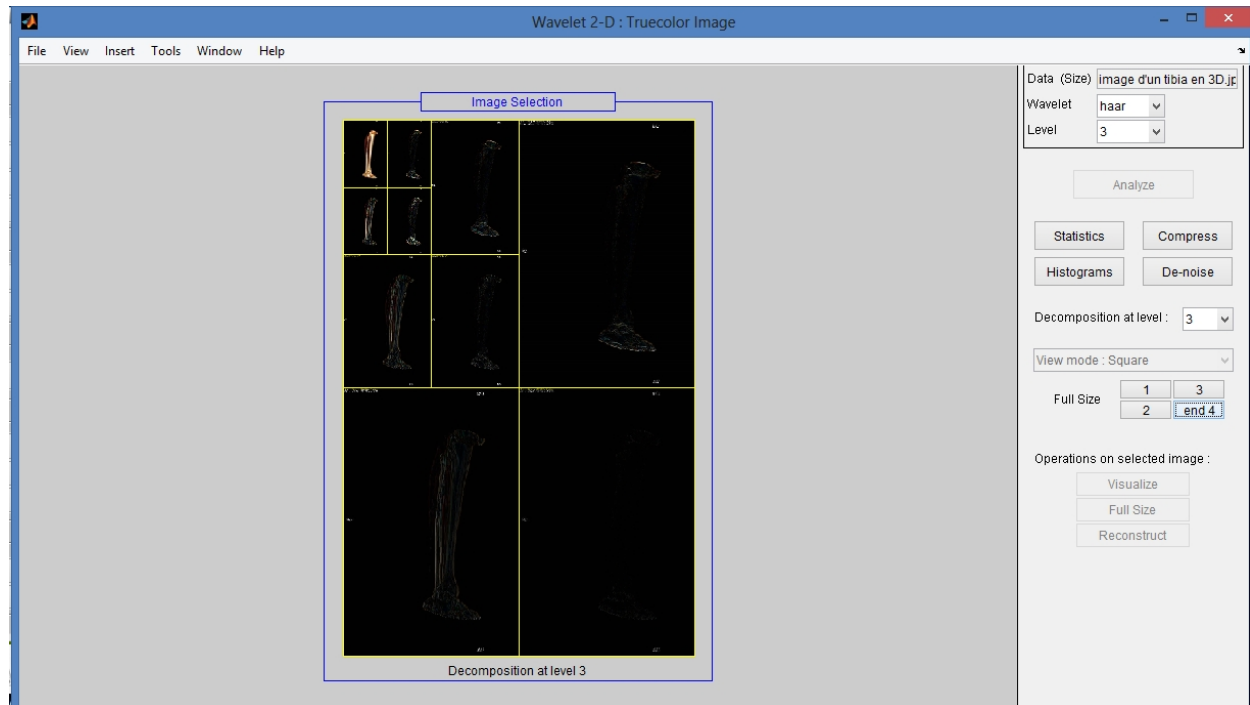


Figure 10

Figure10 : On choisit la transformée en ondelettes de Haar orthogonale pour afficher la décomposition du tibia au niveau 3, pour voir l'approximation et détails d'image tibia dans chaque carrée.

2.4 Construction d'image[5]

La construction des images est l'opération qui corrige les images dégradées et restaure une image de bonne qualité à partir d'une image de médiocre qualité. L'équation fondamentale de la construction relie une image originale u à une image dégradée v par l'intermédiaire d'un opérateur linéaire et spatialement invariant H :

$$v = H(u)$$

Ces dégradations peuvent être introduites lors des étapes d'acquisition où de transmission où d'enregistrement des images. On distingue deux types de dégradations :

1. Les dégradations convolutives : elles sont liées à un mouvement du capteur où à un défaut de mise au point ; ces derniers sont donnés par :

$$v = u * h. \quad (2.2)$$

où h est la réponse impulsionnelle de défaut. On les traite en inversant un opérateur linéaire qui est supposé connu : ce sont les techniques dites de construction.

Le problème de construction (où de la déconvolution), consiste à retrouver u où une estimation de u à partir de v . Supposons que h soit connu dans le domaine fréquentiel, l'équation (2.2) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}v = \mathcal{F}u\mathcal{F}h \Rightarrow \mathcal{F}u = \mathcal{F}v\widetilde{\mathcal{F}h} \text{ où } \widetilde{\mathcal{F}h} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{F}h \simeq 0 \\ \frac{1}{\mathcal{F}h} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc $u = v * \widetilde{h}$ où $\widetilde{h} = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}h})$.

2. Les dégradations liées au bruit : elles sont dues au capteur, à la quantification, à la transmission, Ces dernières sont données par l'équation

$$v(x) = u(x) + h(x)$$

où

$$v(x) = u(x)h(x)$$

On les traite en tirant partie des informations locales par le filtrage. Nous venons d'introduire deux nouvelles notions, le bruit et le filtrage.

- Le bruit se traduit par des perturbations aléatoires de l'intensité qui sont gênantes visuellement mais qui posent aussi un problème à la plupart des traitements. L'équation(2.2) bruitée devient :f

$$v = u * h + b$$

où b est un bruit.

- Filtrer une image signifie éliminer le bruit, de manière à ne conserver que le signal utile. Pratiquement, ce signal utile apparaît souvent sous la forme de structures où d'objets présents dans l'image, mais peu visibles. L'objectif du filtrage est alors généralement d'accroître ces structures, de renforcer leurs contours, de manière à améliorer leur visibilité.

Plus formellement, le filtrage est une application F d'un espace fonctionnel E dans lui-même (ici, l'espace des images), tel que la valeur de $F(u)$ en un point x soit fonction de l'ensemble $v_u(x)$ des valeurs prises au voisinage du même point x :

$$F : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ u \rightarrow F(u) \end{array} \quad \text{avec } \forall x, F(u)(x) = f(V_u(x))$$

Nous venons d'introduire la notion de contour. Par définition, un contour (bord) peut être considéré comme une frontière entre deux régions différentes. C'est la limite entre deux pixels dont les niveaux de gris représentent une différence significative.

Généralement le contour est une information capitale pour la description d'une scène.

Définition 2.6 *Un contour est une courbe (C) de \mathbb{R}^2 souvent écrite sous la forme paramétrée : $s \rightarrow (x(s), y(s))$ où s est l'abscisse curviligne. La tangente à (C) en s_0 est le vecteur $T(s_0) = (-y'(s_0), x'(s_0))$. La normale est le vecteur $N(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0))$.*

2.5 Reconstruction d'image[15]

Nous avons la possibilité d'avoir les données 3D des os à chaque instant. Ceci peut se faire avec des acquisitions 3D ou en effectuant des reconstructions dans les positions étudiées. Un recalage 3D est par la suite appliqué pour définir le mouvement.

La reconstruction des structures osseuses dans la position debout, une manière de faire les estimations des mouvements est d'étendre la possibilité des reconstructions à différentes positions et de faire un recalage 3D. La reconstruction exacte peut être obtenue en utilisant des filtres de reconstruction différents.

En traitement de l'image, les images sont souvent attaquées, légèrement déformées par des algorithmes de compression, par des imprimantes,...

Si ces petites modifications changent complètement les coefficients d'ondelettes, la reconstruction de l'image à partir de ses coefficients risque d'être instable. La propriété d'invariance par translation garantit qu'en cas de translation des données, les coefficients d'ondelettes sont également simplement translatés.

On représente l'image tibia en 3D puis appliquons la méthodologie de reconstruction sur cette image comme suit :

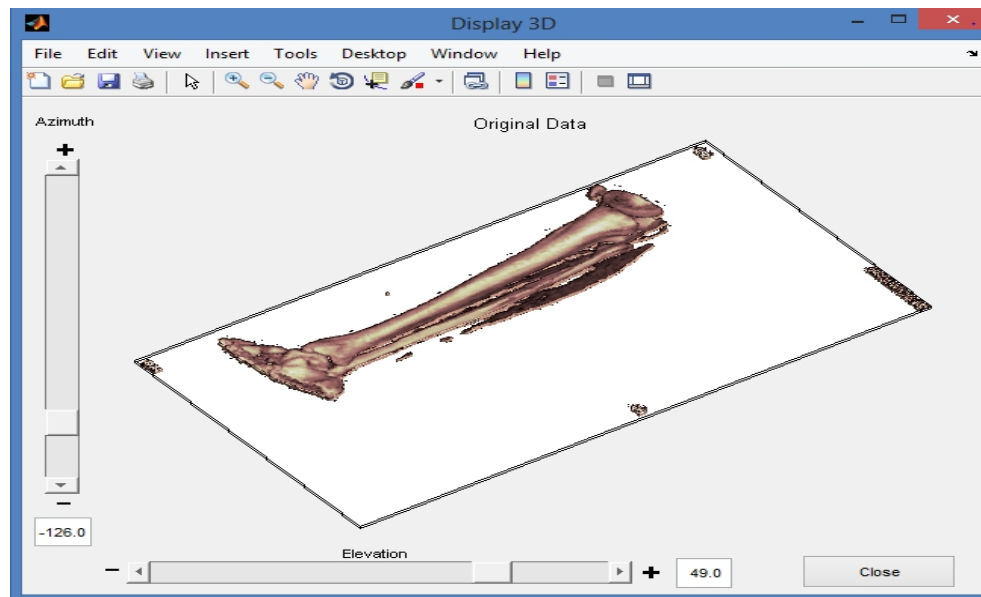


Figure11

Figure 11 : On a transformée l'image d'un tibia du 2D en 3D i.e(en une image originale).

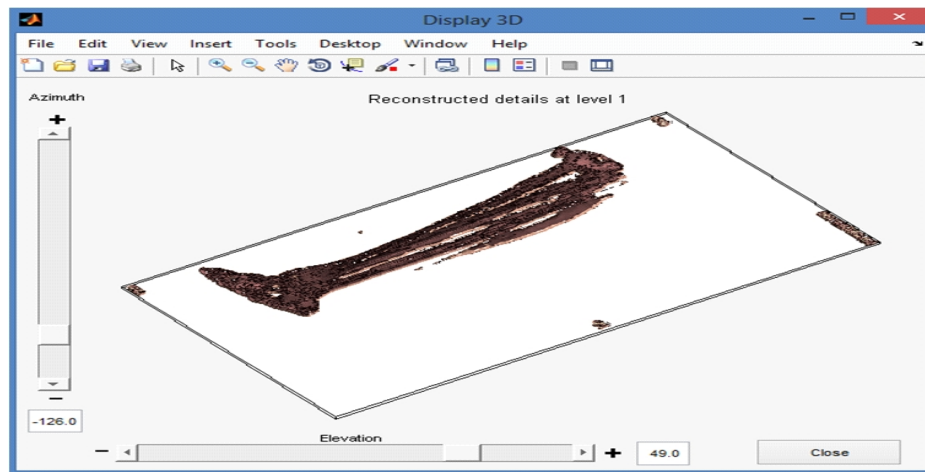


Figure 12

Figure 12 : Reconstruction détail de l'image original au niveau 1 pour voir la possibilité de reformer (évitée l'erreur médical).

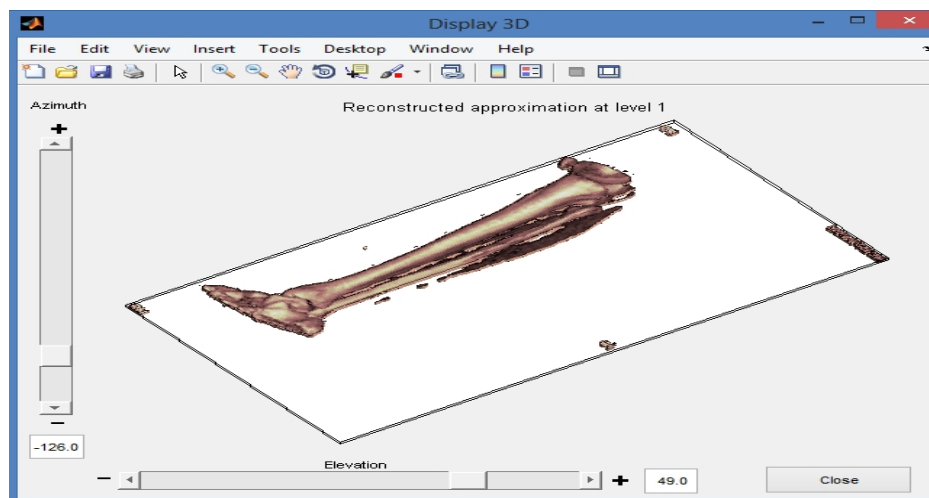


Figure 13

Figure 13 : Reconstruction approximation de l'image original a niveau 1 pour voir la possibilité de reformer mais dans ce cas les informations n'est pas exacte par contre la reconstruction détail.

Conclusion

Dans les applications médicales, la validation des résultats d'une nouvelle technique ou d'un nouvel algorithme constitue une étape délicate. En effet, dans la plupart des applications médicales, l'absence de la vérité terrain rend difficile la possibilité d'avoir un gold standard qui constitue une référence pour les résultats obtenus contrairement à d'autres applications où des mesures peuvent être faites d'une manière facile et précise. Concernant les applications de recalage des structures osseuses, l'évaluation des méthodes rencontre les mêmes difficultés pour l'identification d'une vérité terrain facilement mesurable. En effet, l'accès limité aux structures osseuses rend cette tâche difficile.

Bibliographie

- [1] **Bouyouceff K.** : *Sur des Aspects Multirésolution en Reconstruction d'Images. Application au telescope spatiale Hubble.* Thèse de Doctorat, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1993.
- [2] **COHEN(A.)**.-*Ondelette et traitement numérique du signal.*Masson,1992.
- [3] **CHIALI.Hakim.** *Cours d'anatomies,2013*
- [4] **Daubechies I.** : *Ten Lectures on Wavelet SIAM,* Philadelphie ,1992.
- [5] **Gasquet C., Witomaski P.** : *Analyse de Fourier et Applications,* Masson, 1990.
- [6] **Le Pennec E, Mallat S.** : *Image Compression with Geometrical Wavelet,* IEEE-TCP Conference, Tessaloniki.
- [7] **Mallat S.** : *A Wavelet Tour of Signal Processing,* Academic Press, Second Edition, 1998.
- [8] **Mallat S.** : *A Wavelet Tour of Signal Processing,* Academic Press, 1999.
- [9] Mallat S. Une exploration des signaux en ondelettes. Les éditions de décole polytechnique Mallat.S, paris,juillet 2000.
- [10] **Meyer Y.** : *Ondelettes. Algorithmes et Applications.* Armand Colin, Paris 1992.
- [11] **Meyer Y.** : *Ondelettes et Opérateurs I : Ondelettes,* Paris, Herman, 1990.
- [12] **Meyer Y.** : *Wavelet, Ed. J.M.Combes et al., Springer Verlag, Berlin, P.21, 1989.*
- [13] **Morlet(j.)**.-Sampling theory and wave propagation. Nato asi series, F1, 233-261. Springer-verlag, berlin, 1983.
- [14] **Pesquet, Popescu B. et Pesquet J-C.** : *Ondelettes et Applications,* TE5215, Traité Télécoms 2001.
- [15] **Unser M., Aldroubi A. et Laine A.** : *Special Issue on Wavelet in Medical Imaging,* IEEE Trams, Medic.Imag., Mars 2003.