REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM
Abdelhamid Ibn Badis

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

Option : Analyse fonctionnelle

Mémoire de Master intitulée

Résolution de l'équation différentielle abstraite complète de type elliptique dans les espaces de Hölder

Présentée par **:**
ABBASSA Amel

Soutenu le 16/06/2013

Devant les membres du jury :

Président : A. MEDEGHRI, Professer, Université de Mostaganem

Examinateur : F. BOUZIANI**,** Maître de conférences B , Université de Mostaganem

Encadreur : K. LIMAM**,** Maître de conférences B**,** Université de Mostaganem.

Année universitaire : 2012-2013

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est la résolution d'une classe d'équations différentielles abstraite complètes de type elliptique dans les espaces de Hölder.

On se propose, ici, à faire l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte de l'équation différentielle complète suivante

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t) \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

posée dans un espace de Hölder avec les conditions aux limites de Dirichlet suivantes

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u(1) = u_1. \tag{2}$$

On dit que u est solution stricte dans $L(X)$ si

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C^1([0,1];D(B)) \cap C([0,1];D(A))$$

vérifiant (1) et (2).

On va faire ici une synthèse sur l'article de A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe et A.Yagi [4].

Ce mémoire est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

Dans **le premier chapitre** on donne un rappel sur quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Le **deuxième chapitre** consiste à résoudre le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t) \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3}$$

quand la donnée f est dans $C^\theta([0,1];X)$ et A est un opérateur linéaire sectoriel à domaine dense i.e, A vérifiant

$$(\mathbf{H1}) \begin{cases} \forall \lambda \geq 0, \exists (\lambda I - A)^{-1} \in L(X), \exists C > 0 \\ \qquad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont

Théorème 1. *Soient $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et $u_0, u_1 \in D(A)$. Sous l'hypothèse* (**H1**) *le problème (3) admet une unique solution stricte u sur* $[0,1]$.

Théorème 2. *Soient $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et $u_0, u_1 \in D(A)$ vérifiant*

$$f(i), Au_i \in D_A(\theta/2, \infty) \qquad i = 0,1.$$

Sous l'hypothèse (**H1**)*, l'unique solution stricte du problème (3) a la propriété de régularité maximale*

$$u^{''}, Au \in C^{\theta}([0,1]; X).$$

Ici, φ est dans l'espace d'interpolation réelle $D_A(\theta/2, \infty)$ si et seulement si

$$\sup_{r>0} r^{\frac{\theta}{2}} \left\| A(A - rI)^{-1}\varphi \right\|_X < \infty.$$

Dans **le troisième chapitre** on va étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte de l'équation complète sous certaines hypothèses sur les opérateurs A et B.

Le quatrième chapitre est réservé aux applications des résultats abstraits obtenus, dans les chapitres 2 et 3, par des exemples concrets.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel (normé). Une application linéaire A de E dans lui même est appelée* ***un opérateur linéaire*** *dans E.*

On appelle domaine de A, et on le note $D(A)$, le sous espace vectoriel des éléments x de E tels que Ax ait un sens.

On appelle l'image de A noté par R_A, le sous-espace vectoriel $A(D(A))$.

Définition 1.2 *Soit E un espace vectorielle normé on appelle opérateur linéaire* ***borné*** *toute l'application linéaire continue de E dans E.*

On dit que A est un opérateur borné si et seulement si

$$\forall x \in D(A) : \|Ax\| \leq \|A\| . \|x\|$$

où la norme de A est définir par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in D(A)} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

1.1.1 Opérateurs adjoints

Définition 1.3 *Soit H un espace de Hilbert. Deux opérateurs $(S, D(S))$ et $(T, D(T))$ sont dits adjoints si*

$$\forall u \in D(S) \subset H; \forall v \in D(T) \subset H : \langle Su, v \rangle = \langle u, Tv \rangle .$$

Si le domaine de T est dense il existe pour T un unique adjoint maximal, qui est défini de la façon suivante

Définition 1.4 *Soit $(T, D(T))$ un opérateur à domaine dense. On définit un sous espace $D(T^*)$ par*

$$D(T^*) = \{\varphi \in H : \exists \eta \in H : \forall \psi \in D(T); \langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle\} .$$

si la condition précédente est réalisée on définit : $T^*\varphi = \eta$.

La proposition suivante relie le spectre d'un opérateur T à celui de son adjoint T^*, pour plus de détails voir [2].

Proposition 1.1 *Soit $T \in L(H)$, ou H est un espace de Hilbert. Le spectre de T^* est l'image du spectre de T par la conjugaison complexe, i.e.*

$$\text{si } \lambda \in \rho(T), \text{ alors } \overline{\lambda} \in \rho(T^*) \text{ et } \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1}.$$

Si T est auto adjoint, on a les propriétés suivantes

Proposition 1.2 *Soit $T = T^* \in L(H)$.*

1) Le rayon spectral de T est égale à la norme de T : $r(T) = \|T\|$.

2) Le spectre de T est réel est on a la majoration

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} : \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, \lambda|}.$$

Proposition 1.3 *Un opérateur auto adjoint est positif si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^+$ et alors*

$$\|T\| \in \sigma(T).$$

Définition 1.5 *Soient $N(A)$ le noyau de l'opérateur A et $R(A)$ son image. Un opérateur A est dit sectoriel si, $N(A) = \Phi$; $R(A)$ est dense dans X ; $\rho(A) \supset \mathbb{R}_-^*$ et*

$$\sup_{\lambda > 0} \left\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} < \infty.$$

L'ensemble des opérateurs sectoriels sur X est noté $S(X)$.

Si A est sectoriel, alors il existe un angle $\varphi > 0$; tel que le secteur

$$\sum\nolimits_{\varphi} := \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg z| < \varphi\}$$

Soit contenu dans $\rho(-A)$ ($\rho(-A)$ est un ouvert) qui contient R_+^*.
On peut alors définir l'angle spectral φ_A de l'opérateur sectoriel A par

$$\varphi_A = \inf\left\{\varphi > 0; \sum\nolimits_{\pi - \varphi} \subset \rho(-A) \text{ et } M_{\pi - \varphi} < \infty\right\}.$$

où

$$M_\theta = \sup\left\{\left\|\lambda(A + \lambda I)^{-1}, \lambda \in \sum\nolimits_\theta\right\|\right\}, \ \theta \in]0, \pi[.$$

1.2 Quelques espaces fonctionnelles

Définition 1.6 *On dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un **espace de Banach** si l'espace métrique correspondant muni de la distance $(d(x, y) = \|x - y\|)$ est complet.*

Définition 1.7 *Un espace **préhilbertien** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un couple (E, B) ou E est un espace vectoriel et B un produit scalaire réel (resp complexe) et on écrit*

$$B(x, y) = (x/y) = (x, y) = < x, y >$$

La norme dans un espace préhilbertien est

$$\|x\| = (B(x,x))^{1/2} = \sqrt{< x, x >}$$

Exemple. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces préhilbertien pour les produits scalaires usuels suivants $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ dans $\mathbb{R}$ et $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.8 *L'espace topologique (E, τ) est dit* ***séparé*** *si :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E : x \neq y \Rightarrow \exists v \in V(x), \exists w \in V(y) : v \cap w = \emptyset.$$

tel que $V(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

Définition 1.9 *Un espace* ***Hilbertien*** *sur R ou C est un espace préhilbertien séparé et complet pour la distance*

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.10 *On note $L(X,Y)$ la collection de tous les opérateurs A (définit) linéaire bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y. $L(X,Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par :*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \qquad \forall A \in L(X,Y)$$

Définition 1.11 *On appelle espace dual de X l'ensemble des fonctionnelles linéaires f définies sur X. On note*

$$X^* = \{f : X \to IK : f \text{ est linéaire}\},$$

X^* est dit le dual algébrique de X.

Les opérations algébriques sur X^* sont définies comme suit

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x), & f, g \in X^* \\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \lambda \in IK, & f \in X^* \end{cases}$$

1.2.1 Les espaces de Hölder

Définition 1.12 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0;1];X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C([0;1];X)} = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_X$$

On considère, pour $0 < \alpha < 1$; l'espace

$$C^{\alpha}([0;1];X) = \left\{ f \in C([0;1];X) : \sup_{t,s \in [0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\alpha}([0;1];X)} = \|f\|_{C([0;1];X)} + \sup_{t,s \in [0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\alpha}}$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace höldérien d'exposant α.

1.2.2 Espace d'interpolation

Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé $\mathcal{F}$.

En posant

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{X_0\cap X_1} = \|\varphi\|_{X_0} + \|\varphi\|_{X_1} & \textit{pour } \varphi \in X_0 \cap X_1 \\ \|\varphi\|_{X_0+X_1} = \inf_{\substack{\varphi=\varphi_0+\varphi_1 \\ \varphi\in X_i}} (\|\varphi\|_{X_0} + \|\varphi\|_{X_1}) & \textit{pour } \varphi \in X_0 + X_1, \end{cases}$$

Il est connue que les espaces $(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0\cap X_1})$ et $(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0+X_1})$ sont des espaces de Banach.

Définition 1.13 *Pour* $p \in [1, +\infty[$ *et* $\theta \in [0, 1]$ *; on définit l'espace intermédiaire, noté* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$*, entre* $X_0 \cap X_1$ *et* $X_0 + X_1$ *; par* $\varphi \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si*

1) $\forall t > 0$, $\exists u_0(t) \in X_0$, $\exists u_1(t) \in X_1$ *tel que*

$$\varphi = u_0(t) + u_1(t).$$

2) $t^{-\theta}u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_0)$, $t^{1-\theta}u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_1)$.

où $L^p_*(\mathbb{R}_+, X_i)$ est l'espace des fonctions fortement mesurables $u_i : \mathbb{R}_+ \to X_i$ telles que

$$\|u_i\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_i)} = \left(\int_0^\infty \|u_i(t)\|^p_{X_i} \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty,$$

pour $p \in [1, +\infty]$ et par

$$\|u_i\|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+,X_i)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|u_i(t)\|_{X_i},$$

si $p = \infty$.

Remarque. Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. On note

$$D_A(\theta, p) = (D(A); X)_{1-\theta,p}$$

où $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on sait donner des caractéristique explicites de $D_A(\theta; p)$, par exemple

– Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall\lambda > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{c}{\lambda};$$

alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X : t^\theta A(A - \lambda I)^{-1}\varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\}.$$

ce résultat est démontré dans Grisvard [5].

– Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)\varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\}.$$

Ce résultat est démontré dans Grisvard [7].

– Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{\varphi \in X : t^{1-\theta}Ae^{tA}\varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\}.$$

La preuve de ce résultat est donnée dans Butzer-Bérens [3].

1.2.3 Définition discrète d'un espace d'interpolation

On dit que x dans l'espace d'interpolation $(X_0; X_1)$; si et seulement si

$$\begin{cases} i)\forall n \in \mathbb{Z} : x = u_0 + u_1, \quad u_i \in X_i, \qquad i = 0,1 \\ ii) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| e^{-\theta} u_0 \right\|_{X_0}^p < \infty \quad \text{i.e.} \quad e^{-\theta} u_0 \in L^p(X_0) \\ iii) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| e^{(1-\theta)} u_1 \right\|_{X_1}^p < \infty \quad \text{i.e.} \quad e^{(1-\theta)} u_1 \in L^p(X_1) \end{cases}$$

Définition 1.14 *Soit X un espace de Banach complexe, et soit A un opérateur linéaire fermé, si*

$$\theta \in (0,1) \quad et \quad p \in [1, \infty];$$

alors

$$D_A(\theta; p) = \left\{ x \in X : [x]_{D_A(\theta;p)} < \infty \right\},$$

où

$$[x]_{D_A(\theta;p)} = \left(\int_0^\infty t^\theta \left\| A(A + \lambda I)^{-1} x \right\|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

Définition 1.15 *On définit l'espace $D_A(\theta; \infty)$ par*

$$D_A(\theta; \infty) = \left\{ x \in X : \sup \left\| t^\theta A(A - \lambda I)^{-1} x \right\|_X < \infty \right\}.$$

Définition 1.16 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, alors*

$$D_{A^2}(\theta; p) = D_A(2\theta; p)$$

si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et plus généralement

$$D_{A^m}(\theta; p) = D_A(m\theta; p)$$

si $m\theta \in N$, $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

Définition 1.17 *On appelle l'ensemble résolvant de A l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\}.$$

un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

2.$\sigma(A) = C \backslash \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.

1.2.4 Lemme de Schur

Théorème 1.1 (de Marcel Riez) *Soit* $K : L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \longrightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ *un opérateur linéaire,* $p_i, q_i \in [1, +\infty]$ *et* Ω_i *sont des ouverts de* $\mathbb{R}^n$*, avec* $i = 0, 1$ *telle que*

$$K|_{L^{p_0}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0}) \ \ et \ \ K|_{L^{p_1}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$$

alors

$$K|_{L^{q_\theta}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_\theta}, L^{q_\theta})$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ *et*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Lemme 1.1 (de Schur) *Soit* $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable telle que*

i) $\exists a > 0$, *p.p* $x_2 \in \Omega_2 : \int\limits_{\Omega_1} |K(x_1, x_2)|\, dx_1 \leqslant a,$

ii) $\exists b > 0$, *p.p* $x_1 \in \Omega_1 : \int\limits_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|\, dx_2 \leqslant b.$

On définit l'opérateur K *par*

$$(Kf)(x_2) = \int\limits_{\Omega_1} k(x_1, x_2) f(x_1)\, dx_1,$$

p. p. $x_2 \in \Omega_2$*. Alors pour tout* $p \in [1, +\infty]$

$$K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)).$$

Preuve. Ce lemme est une conséquence directe du Théorème de Marcel Riez.

1.3 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$.

L'opérateur $f(A) \in L(E)$ et ne dépend pas du choix de γ.

1.4 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires :

1.4.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.18 *Soit* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires dans* X*. On dit que cette famille forme un semi-groupe fortement continu (*C_0 *semi-groupe) dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. $G(0) = I$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+ : G(t+s) = G(t).G(s)$,
3. $\forall x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0$.

$G(t)x : \mathbb{R}_+ \to X$ est fortement continue en 0.
Remarques.
i) Si $t \in \mathbb{R}$, $\{G(t)\}$ est dit groupe.
ii) La condition (3) n'implique pas que

$$\lim_{t\to 0} \|G(t) - I\| = 0.$$

Exemple. Soit $A \in L(X)$. Alors $t \mapsto G(t) = e^{tA} = \sum_{n\geq 0} t^n \frac{A^n}{n!}$ est un groupe sur X.

1.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.19 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t>0}$ l'opérateur linéaire A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \ \textit{existe}\} \\ A\varphi = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

Exemple. Soit A un opérateur borné dans X, alors $\forall t \geq 0$, $G(t) = e^{tA}$ est un semi-groupe uniformément continue et le générateur infinitésimal est l'opérateur A. En effet

$$\begin{aligned} \|G(t) - G(t+h)\| &= \|G(t) - G(t).G(h)\| \\ &\leq \|G(t)\| \, \|I - G(h)\| \\ &\leq \|G(t)\| \, \left\|(e^{h\|A\|} - 1)\right\| \end{aligned}$$

donc $\|G(t) - G(t+h)\| \to 0$ quand $h \to 0$. D'où la continuité uniforme.
D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(G(t) - I) - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t}(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n - I) - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n\geq 2} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \\ &\leq t\,\|A\|^2 .e^{t\|A\|} \end{aligned}$$

quand $t \to 0$, alors $A = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(G(t) - I)$ limite uniforme donc forte.

Remarques
i) Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, alors A est fermé à domaine dense.

ii) Le semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $(e^{tB})_{t\geq 0}$ où B est un opérateur borné dans X.

iii) Si A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, alors on a

$$\|G(t)\| \leq Me^{wt}$$

pour $\lambda > w$, et l'opérateur

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)xdt$$

est borné et

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}x\right\| \leq M(\lambda - w)^{-1}, \lambda \in \rho(A).$$

Chapitre 2

Problème de Dirichlet pour une équation différentielle abstraite simple dans un espace de Hölder

2.1 Position du problème et hypothèses

Dans l'espace de Banach complexe X ; on considère le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t); & t \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X vérifiant l'hypothèse suivante

$$(\mathbf{H1}) \quad \begin{cases} \forall \lambda \geq 0, \exists (\lambda I - A)^{-1} \in L(X) \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda} \end{cases}$$

et le second membre

$$f \in C([0,1];X)$$

ici ; u_0, u_1 sont deux éléments donnés dans X.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème (2.1) i.e.

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)).$$

Remarque. Sous l'hypothèse (**H1**) l'opérateur $-\sqrt{-A}$ génère un semi-groupe analytique noté

$$V(t) = e^{-t\sqrt{-A}}, \quad t \geq 0.$$

Pour plus de détails voir [1].

2.2 Construction de la solution

On sait que la solution de l'équation homogène du problème (2.1)

$$u''(t) + Au(t) = 0$$

dans le cas scalaire est donnée par

$$u(t) = C_1 e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2 e^{-t\sqrt{-A}} \tag{2.2}$$

On utilise la méthode de la variation des constantes pour l'équation non homogène, c'est à dire on va cherche une solution sous la forme

$$u(t) = C_1(t) e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2(t) e^{-t\sqrt{-A}}$$

telles que C_1 et $C\ _2$ sont deux fonctions à déterminer vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2' e^{-t\sqrt{-A}} = 0 \\ \sqrt{-A}C_1'(t)e^{-(1-t)\sqrt{-A}} - \sqrt{-A}C_2'(t)e^{-t\sqrt{-A}} = f(t) \end{cases}$$

Le déterminant de ce systéme est

$$D = \begin{vmatrix} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & e^{-t\sqrt{-A}} \\ \sqrt{-A}e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & -\sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{-A}e^{-\sqrt{-A}}$$

Alors

$$C_1'(t) = D^{-1} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t\sqrt{-A}} \\ f(t) & -\sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -D^{-1} e^{-t\sqrt{-A}} f(t)$$

et

$$C_2'(t) = D^{-1} \begin{vmatrix} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & 0 \\ \sqrt{-A}e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & f(t) \end{vmatrix} = D^{-1} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} f(t),$$

donc

$$\begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{2} \int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{(1-s)\sqrt{-A}} f(s) ds + \zeta_0 \\ C_2(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} e^{s\sqrt{-A}} f(s) ds + \zeta_1 \end{cases}$$

Par conséquent dans le cas opérationnels la solution est donné par :

$$\begin{aligned} u(t) \quad = \quad & e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s) ds \\ & -\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s) ds \end{aligned}$$

Pour déterminer ζ_0, ζ_1, on utilise les conditions aux limites

$$u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u(1) = u_1$$

On trouve

$$\begin{cases} u_0 = e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ u_1 = \zeta_0 + e^{-\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \zeta_1 = u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ \zeta_0 = u_1 - e^{-\sqrt{-A}}\zeta_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \end{cases}$$

En remplace la valeur de ζ_1 dans la deuxième équation, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\zeta_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 + e^{-2\sqrt{-A}}\zeta_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \\ &= (1 - e^{-2\sqrt{-A}})^{-1}\left[u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds\right] \end{aligned}$$

On sait que l'opérateur $(1 - Z)$ avec $Z = e^{-2\sqrt{-A}}$, est inversible grâce à Lunardi [9] page 60.

De même ; on trouve que

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1 - Z)^{-1}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds\right] \end{aligned}$$

2.3 Représentation de la solution

Ainsi la solution du problème considéré est

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \qquad (2.3) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s)ds \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= (1-Z)^{-1}\left[u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds \right. \qquad (2.4) \\ &\quad \left. +\frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1-Z)^{-1}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds \right. \qquad (2.5) \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds\right]. \end{aligned}$$

Pour vérifier que u est bien une solution du problème (2.1), on dérive deux fois la solution obtenue, on trouve

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sqrt{-A}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_0 - \sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}}f(s)ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u''(t) &= -Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_0 - Ae^{t\sqrt{-A}}\zeta_1 + \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(s-t)\sqrt{-A}}f(s)ds + \frac{1}{2}f(t) \\ &= -A[e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds] + f(t) \\ &= -Au(t) + f(t), \end{aligned}$$

alors

$$u''(t) + Au(t) = f(t).$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds = u_0,$$

$$u(1) = u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds = u_1.$$

Remarque. Soit $(T(t))_{t>0}$ un semi-groupe analytique génère par $-\sqrt{-A}$. Alors la formule représentatif de la solution (2.3), (2.4) et (2.5) est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) &= T(1-t)\zeta_0 + T(t)\zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} T(t-s) f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(s-t) f(s)ds, \end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= (1-T(2))^{-1}(u_1 - u_0 T(1)) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(s) f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(1-s) f(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1-T(2))^{-1}(u_0 - u_1 T(1)) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(s) f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(1-s) f(s)ds \end{aligned}$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = T(1)\zeta_0 + \zeta_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(s) f(s)ds = u_0 \\ u(1) = \zeta_1 + T(1)\zeta_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} T(1-s) f(s)ds = u_1 \end{cases}$$

2.4 Solution stricte :

Lemme 2.1 *Sous l'hypothèse* (**H1**), *pour tout* $x \in X$ *; on a*

$$\int_0^t V(s)xds = \left(\sqrt{-A}\right)^{-1}(I - V(t))\,x.$$

avec $V(t) = e^{-\sqrt{-A}t}, t \geq 0.$

Preuve : Soit $x \in D(\sqrt{-A})$ alors

$$\begin{aligned}\sqrt{-A}\int_0^t V(s)xds &= \int_0^t V(s)\sqrt{-A}xds = -\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(s)xds \\ &= -V(s)x|_0^t = x - V(t)x\end{aligned}$$

d'où le résultat dans le cas particulier $x \in D(\sqrt{-A})$.

Supposons maintenant que x est quelconque dans X. Soit la suite $(x_n)_{n\in N} \in D(\sqrt{-A})$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et

$$\begin{aligned}\int_0^t V(s)x_n ds &\longrightarrow \int_0^t V(s)xds \\ (I - V(t))x_n &\longrightarrow (I - V(t))x\end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part

$$(I - V(t))x_n = \sqrt{-A}\int_0^t V(s)x_n ds$$

et comme$\sqrt{-A}$ est fermé on déduit que $\int_0^t V(s)xds \in D(\sqrt{-A})$ et

$$\sqrt{-A}\int_0^t V(s)xds = (I - V(t))x$$

d'où la proposition.

Remarque : Si $0 < t < 1$

$$\int_0^{1-t} V(s)ds = \int_t^1 V(s-t)xds.$$

Théorème 2.1 *Soient $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1$ et $u_0, u_1 \in D(A)$. Sous l'hypothèse* (**H1**) *le problème (2.1) a une unique solution stricte u sur* $[0,1]$.

Preuve. On sait que la solution du problème précédent s'écrit sous la forme

$$u = \overline{u} + \overline{\overline{u}}$$

Telle que $\overline{u}$ est une solution particulière et $\overline{\overline{u}}$ est une solution du problème homogène.

Posons

$$\overline{u}(t) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^t e^{-(t-s)(\sqrt{-A})}f(s)ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_t^1 e^{-(s-t)(\sqrt{-A})}f(s)ds.$$

pour $0 \leq t \leq 1$.

On introduit les deux fonctions suivantes

$$\begin{cases} G(t) = \sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}\left(f(s) - f(t)\right)ds \\ H(t) = -\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}}\left(f(t) - f(s)\right)ds \end{cases}$$

En Vue de montrer que $\overline{u}(t) \in D(A)$ et $A\overline{u}(.)$ continue, on écrit que

$$\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= -(-A)\overline{u}(t) = -\left(\sqrt{-A}\right)^2 \overline{u}(t) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s)ds + \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s)ds \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} \left(f(s) - f(t)\right) ds + \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(t)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} \left(f(t) - f(s)\right) ds + \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(t)ds \\
&= \frac{1}{2}\left(G(t) + H(t)\right) + \frac{1}{2}\left(I - e^{-t\sqrt{-A}}\right) f(t) - \frac{1}{2}\left(e^{-(1-t)\sqrt{-A}} - I\right) f(t).
\end{aligned}$$

La continuité de $A\overline{u}(.)$, en particulier en 0, résulte du fait que

$$\begin{aligned}
\|G(t)\| &= \left\| \sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} \left(f(s) - f(t)\right) ds \right\| \\
&\leq K \int_0^t \frac{Me^{-a}}{(t-s)} \|f(s) - f(t)\| ds \\
&\leq KMe^{-a} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} ds \, \|f\|_{C^\theta([0,1],E)} \\
&\leq Ct^{2\theta} \|f\|_{C^\theta([0,1],E)},
\end{aligned}$$

On démontre, maintenant que $\overline{u}$ est deux fois continûment différentiable sur $[0,1]$

$$\overline{u}'(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s)ds$$

puisque f est höldérienne alors $\overline{u}'(.)$ est différentiable et

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= f(t) - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s)ds - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s)ds \\
&= f(t) - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} \left(f(s) - f(t)\right) ds - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(t)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} \left(f(s) - f(t)\right) ds - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\int_t^1 e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(t)ds \\
&= f(t) - \frac{1}{2}G(t) - \frac{1}{2}\left(I - e^{-t\sqrt{-A}}\right) f(t) - \frac{1}{2}H(t) - \frac{1}{2}\left(I - e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\right) f(t)
\end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned}\overline{u}''(t) &= f(t) - \left[\frac{1}{2}(G(t)+H(t)) + \frac{1}{2}\left(I - e^{-t\sqrt{-A}}\right)f(t) - \frac{1}{2}\left(e^{-(1-t)\sqrt{-A}} - I\right)f(t)\right] \\ &= f(t) - A\overline{u}(t).\end{aligned}$$

Ainsi $\overline{u}$ est une solution stricte de l'équation $\overline{u}''(t) + A\overline{u}(t) = f(t)$ vérifiant les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \overline{u}(0) = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int\limits_0^1 e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds \\ \overline{u}(1) = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int\limits_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \end{cases}$$

Montrons que $\overline{u}(0)$, $\overline{u}(1) \in D(A)$. En effet

$$\begin{cases} \sqrt{-A}\overline{u}(0) = -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds \\ \sqrt{-A}\overline{u}(1) = -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}-A\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}H(0) - \frac{1}{2}\sqrt{-A}\Big(\int_0^1 e^{-s\sqrt{-A}}ds\Big)f(0) \\ &= -\frac{1}{2}H(0) + \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{-A}} - I)f(0)\end{aligned}$$

donc $\overline{u}(0) \in D(A)$

$$\begin{aligned}-A\overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-A}\Big(\int_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}}(f(s) - f(1))ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\sqrt{-A}\Big(\int_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(1)ds \\ &= -\frac{1}{2}G(1) + \frac{1}{2}(I - e^{-\sqrt{-A}})f(1)\end{aligned}$$

donc $\overline{u}(1) \in D(A)$.

Pour le problème homogène on a le résultat suivant.

Lemme 2.2 *Sous l'hypothèse* (**H1**), *le problème homogène suivant*

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = x_0, \quad u(1) = x_1 \end{cases}$$

admet une unique solution stricte dés que

$$x_0, x_1 \in D(A).$$

Preuve. La représentation de la solution est donnée par

$$u(t) = e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_1$$

avec

$$\zeta_0 = (I - Z)^{-1}(x_0 - e^{-\sqrt{-A}}x_1),$$
$$\zeta_1 = (I - Z)(x_1 - e^{-\sqrt{-A}}x_0).$$

Puisque $x_0, x_1 \in D(A)$, on peut voir que

$$u \in C^2([0,1]; X)$$

avec

$$u^{'}(t) = -\sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 + \sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1$$

et

$$u^{''}(t) = -Ae^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 - Ae^{-t\sqrt{-A}}\zeta_1 = -Au(t).$$

Remarque. La fonction $\overline{\overline{u}}$ vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} \overline{\overline{u}}^{''}(t) + A\overline{\overline{u}}(t) = 0 \\ \overline{\overline{u}}(0) = u_0 - \overline{u}(0), \quad \overline{\overline{u}}(1) = u_1 - \overline{u}(1). \end{cases}$$

par conséquent

$$\overline{\overline{u}}(t) = e^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 + e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_1$$

avec

$$\zeta_0 = (I - Z)^{-1}(u_0 - \overline{u}(0) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_1 - \overline{u}(1)\right)),$$
$$\zeta_1 = (I - Z)(u_1 - \overline{u}(1) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_0 - \overline{u}(0)\right)).$$

2.5 La régularité

Théorème 2.2 *Soient $f \in C^\theta([0,1]; X), 0 < \theta < 1, u_0, u_1 \in D(A)$ vérifiant*

$$f(0), f(1), Au_0, Au_1 \in D_A\left(\frac{\theta}{2}, \infty\right)$$

Sous l'unique hypothèses $(H1)$, La solution stricte du problème (2.1) a la propriété de régularité maximale

$$u^{''}, Au \in C^\theta([0,1]; X)$$

Ici, φ est dans l'espace d'interpolation réelle $D_A\left(\frac{\theta}{2}, \infty\right)$ si et seulement si

$$\sup_{r>0} r^{\theta/2}\left\|A(rI - A)^{-1}\varphi\right\|_X < \infty.$$

Pour démontrer ce théorème on va utiliser le résultat de Sinestrari [13] suivant.

Théorème 2.3 *Soient $x \in E$ et*
$$u(t) = e^{At}x$$
pour tout $t \geq 0$. Alors
i) $x \in \overline{D(A)}$ si et seulement si $u \in C([0,T];E)$.
ii) $x \in D_A(\theta,\infty)$ si et seulement si $u \in C^{\theta}([0,T];E)$, avec $0 < \theta < 1$.

Preuve de théorème 2.2.
Il suffit de montrer que Au est höldérienne. En utilisant les expressions de $\overline{u}(t)$, $A\overline{\overline{u}}(t)$ on trouve

$$\begin{aligned}
Au(t) &= A\overline{u}(t) + A\overline{\overline{u}}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(G(t)+H(t)\right) + \frac{1}{2}\left(I - e^{-t\sqrt{-A}}\right)f(t) - \frac{1}{2}\left(e^{-(1-t)\sqrt{-A}} - I\right)f(t) \\
&\quad + Ae^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 + Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(G(t)+H(t)\right) + f(t) + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(0)+f(0)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(1)+f(1)\right) + Ae^{-t\sqrt{-A}}\zeta_0 + Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\zeta_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(G(t)+H(t)\right) + f(t) + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}f(0) - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}f(1) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(0)\right) - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(1)\right) \\
&\quad + Ae^{-t\sqrt{-A}}\left[(I-Z)^{-1}(u_0 - \overline{u}(0) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_1 - \overline{u}(1)\right))\right] \\
&\quad + Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\left[(I-Z)(u_1 - \overline{u}(1) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_0 - \overline{u}(0)\right)).\right]
\end{aligned}$$

car
$$\zeta_0 = (I-Z)^{-1}(u_0 - \overline{u}(0) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_1 - \overline{u}(1)\right)),$$
$$\zeta_1 = (I-Z)(u_1 - \overline{u}(1) - e^{-\sqrt{-A}}\left(u_0 - \overline{u}(0)\right)).$$

Donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
Au(t) &= f(t) + \frac{1}{2}\left(G(t)+H(t)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}f(0) - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}f(1) + (I-Z)^{-1}e^{-t\sqrt{-A}}Au_0 \\
&\quad + (I-Z)^{-1}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}Au_1 - (I-Z)^{-1}e^{-2t\sqrt{-A}}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}Au_1 \\
&\quad - (I-Z)^{-1}e^{-2(1-t)\sqrt{-A}}e^{-t\sqrt{-A}}Au_0 \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(0)\right) - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(1)\right) \\
&\quad + (I-Z)^{-1}\left(e^{-2(1-t)\sqrt{-A}} - I\right)Ae^{-t\sqrt{-A}}\overline{u}(0) \\
&\quad + (I-Z)^{-1}\left(e^{-2t\sqrt{-A}} - I\right)Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\overline{u}(1) \\
&= f(t) + \frac{1}{2}\left(G(t)+H(t)\right) + k(t) + \sum_{i=1}^{4} I_i(t).
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} k(t) &= +\frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}f(0) - \frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}f(1) + (I-Z)^{-1}e^{-t\sqrt{-A}}Au_0 \\ &\quad +(I-Z)^{-1}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}Au_1 - (I-Z)^{-1}e^{-2t\sqrt{-A}}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}Au_1 \\ &\quad -(I-Z)^{-1}e^{-2(1-t)\sqrt{-A}}e^{-t\sqrt{-A}}Au_0. \end{aligned}$$

$$I_1(t) = +\frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(0)\right), \quad I_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(1)\right)$$

$$\begin{aligned} I_3(t) &= (I-Z)^{-1}\left(e^{-2(1-t)\sqrt{-A}} - I\right)Ae^{-t\sqrt{-A}}\overline{u}(0) \\ &= \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(e^{-2(1-t)\sqrt{-A}} - I\right)\sqrt{-A}\int_0^1 e^{-(s+t)\sqrt{-A}}f(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4(t) &= (I-Z)^{-1}\left(e^{-2t\sqrt{-A}} - I\right)Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\overline{u}(1) \\ &= \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(e^{-2t\sqrt{-A}} - I\right)\sqrt{-A}\int_0^1 e^{-(2-t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds. \end{aligned}$$

pour la fonction $k(t)$ en appliquant le théorème 2.3, on trouve que $k(.) \in C^\theta([0,1];X)$, si et seulement si

$$f(0), f(1), Au_0, Au_1 \in D_{\sqrt{-A}}(\theta, \infty),$$

et grâce au théorème de réitération de Lions [11] on a

$$D_{\sqrt{-A}}(\theta,\infty) = D_A(\frac{\theta}{2},\infty).$$

Pour montrer que les autres termes sont höldériennes, il suffit de faire un calcul explicite par exemple pour $0 < s < t < 1$ en effet

$$\begin{aligned} I_1(t) - I_1(s) &= \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(0)\right) - \frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-A}}\left(f(s)-f(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-t\sqrt{-A}} - e^{-s\sqrt{-A}}\right)\left(f(s)-f(0)\right) + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{-A}}\left(f(t)-f(s)\right) \\ &= J_1 + J_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|J_1\| &= \left\|\frac{1}{2}\left(e^{-t\sqrt{-A}} - e^{-s\sqrt{-A}}\right)\left(f(s)-f(0)\right)\right\| \\ &\leq \left\|s^\theta\frac{1}{2}\int_s^t \sqrt{-A}e^{-\tau\sqrt{-A}}d\tau\right\| \|f\|_{C^\theta} \end{aligned}$$

d'autre part on sait qu'il existe deux constante a et M telles que

$$\left\|\sqrt{-A}e^{-\tau\sqrt{-A}}\right\| \leq M\tau^{-1}e^{-a\tau}$$

donc

$$\|J_1\| \leq \frac{M}{2} \|f\|_{C^\theta} \int_s^t s^\theta \tau^{-1} e^{-a\tau} d\tau$$

et comme $s < \tau$ alors

$$\begin{aligned} \|J_1\| &\leq \frac{M}{2} \|f\|_{C^\theta} \int_s^t \tau^{\theta-1} d\tau = \frac{M}{2} \|f\|_{C^\theta} \tau^\theta\Big|_s^t \\ &\leq C \|f\|_{C^\theta} \left(t^\theta - s^\theta\right) \leq C \|f\|_{C^\theta} (t-s)^\theta . \end{aligned}$$

Pour J_2 on a

$$\begin{aligned} \|J_2\| &= \left\| \frac{1}{2} e^{-t\sqrt{-A}} (f(t) - f(s)) \right\| \\ &\leq C \|f\|_{C^\theta} (t-s)^\theta \end{aligned}$$

car f est hölderienne et

$$\left\| e^{-\tau\sqrt{-A}} \right\| \leq M e^{-a\tau} < M,$$

pour cette dernière estimation Voir [12].

Chapitre 3

Problème de Dirichlet pour une équation différentielle abstraite complète dans un espace de Hölder

On va étudier l'équation différentielle opérationnelle complète du second ordre posé sur un intervalle borné $[0,1]$, avec des conditions aux limites de type Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} u^{''}(t) + 2Bu^{'}(t) + Au(t) = f(t); t \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X, $u_0, u_1 \in X$. Et le second membre f est dans $C([0,1];X)$.

On s'intéresse, ici, à la recherche d'une solution stricte u de (3.1) c'est à dire u vérifie

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C^1([0,1];D(B)) \cap C([0,1];D(A))$$

on recherchera une telle solution quand la donnée f est höldérienne. On va montrer que la solution donnée à la régularité maximale c'est à dire u vérifie de plus

$$u^{''}, Bu^{'}, Au \in C^{\theta}([0,1];X)$$

avec $0 < \theta < 1$et u satisfait (3.1). Nos résultats sont établis sous les hypothèses suivantes :

(H1) $B^2 - A$ est un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans X et pour tout $\lambda \geq 0$

$$(\lambda I + B^2 - A)^{-1} \in L(X) \ et \ \left\|(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}.$$

ce qui implique (voir [1]) que $-(B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté

$$e^{-t(B^2-A)^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 0.$$

(H2) Les opérateurs $(B^2 - A)$ et B commute au sens du résolvante i.e. $\forall \mu \in \rho(B)$, $\forall \lambda \geq 0$

$$(\lambda I + B^2 - A)^{-1}(B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1}(\lambda I + B^2 - A)^{-1}$$

ce qui implique que si $y \in D(B)$ il vient

$$B(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)^{-1}By.$$

(H3) $D(A) \subseteq D(B^2)$, $D((B^2 - A)^{1/2}) \subseteq D(B)$.
(H4) A admet un inverse dans $L(X)$.
(H5) B génère un groupe.
Conséqence. Sous les hypothèses $(H1)\tilde{}(H.4)$. Si l'opérateur $B+(B^2-A)^{1/2}$ est inversible, alors $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ génèrent des semi-groupes analytiques. Voir [4] lemme 4 page 210.
Les résultats obtenus ici sont donnés par

Théorème 3.1 *Soient $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1$ et $u_0, u_1 \in D(A)$. Sous les hypothèses **(H1)~(H5)** le problème (3.1) a une unique solution stricte u sur $[0,1]$.*

Théorème 3.2 *Soient $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1, u_0, u_1 \in D(A)$ vérifiant*

$$f(0), f(1), Au_0, Au_1 \in D_{-(B^2-A)}(\frac{\theta}{2}, \infty).$$

Sous les hypothèses **(H1)~(H5)**, l'unique solution stricte du problème (3.1) a la propriété de régularité maximale

$$u'', Bu', Au \in C^\theta([0,1];X).$$

3.1 Représentation de la solution

Pour démontrer ces résultats on a besoin d'une représentation explicite de la solution pour cela on pose

$$u(t) = e^{-tB}v(t)$$

lorsque que B génère un groupe. Donc

$$u'(t) = -Be^{-tB}v(t) + e^{-tB}v'(t)$$

et

$$u''(t) = B^2e^{-tB}v(t) - Be^{-tB}v'(t) - Be^{-tB}v'(t) + e^{-tB}v''(t).$$

On remplace ces deux expressions dans le problème (3.1) on obtient

$$(A - B^2)v(t) + v''(t) = e^{tB}f(t),$$

par conséquent, si l'opérateur $A - B^2$ est sectoriel i.e, $A - B^2$ vérifie l'hypothèse (**H1**), on obtient

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-(1-t)(B^2-A)^{1/2}}\zeta_0 + e^{-t(B^2-A)^{1/2}}\zeta_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2 - A)^{-1/2}\int_0^t e^{-(t-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2 - A)^{-1/2}\int_t^1 e^{-(s-t)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= (I-Z)^{-1}\Big[e^{B}u_1 - e^{-(B^2-A)^{1/2}}u_0 - \frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}e^{-(B^2-A)^{1/2}}\int_0^1 e^{-s(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-(1-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= (I-Z)^{-1}\Big[u_0 - e^{-(B^2-A)^{1/2}}e^{B}u_1 + \frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-s(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{-(B^2-A)^{1/2}}(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 e^{-(1-s)(B^2-A)^{1/2}}e^{sB}f(s)ds\Big].\end{aligned}$$

tel que $Z = e^{-2(B^2-A)^{1/2}}$. Notons que selon Lunardi [9] l'opérateur $I-Z$ est inversible et son inverse est donne par

$$(I-Z)^{-1} = I + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}\left(zI + (B^2-A)^{1/2}\right)dz.$$

3.2 Lemmes techniques

Par la suite on a bosoin des lemmes suivants

Lemme 3.1 *supposons que A et $B+(B^2-A)^{1/2}$ sont inversible. Alors $B-(B^2-A)^{1/2}$ est inversible et*

$$\begin{cases}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1} = (B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1} \\ (B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} = (B-(B^2-A)^{1/2})A^{-1}.\end{cases}$$

Preuve. D'après **(H2)** et le calcul fonctionnel de Dunford il vient

$$B(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}By \tag{3.2}$$

pour $y \in D(B)$. D'après **(H2)** on a pour tout $x \in X$

$$(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x = (B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)A^{-1}x \in D((B^2-A)^{1/2}) \subseteq D(B).$$

Puisque $D(A) \subseteq D(B^2)$ et $D(B^2) \subseteq D(B)$ alors de (3.2) il vient que pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned}BA^{-1}x &= B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x \\ &= (B^2-A)^{-1/2}B(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x.\end{aligned}$$

ce qui implique

$$D(A) \subseteq D((B^2-A)^{1/2}B) \cap D(B(B^2-A)^{1/2})$$

et

$$(B^2-A)^{1/2}BA^{-1}x = B(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x \qquad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Soit

$$z \in D((B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})) = D((B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})),$$

et

$$\begin{cases} x = (B^2 - A)^{1/2}(B + (B^2 - A)^{1/2})z \\ y = (B^2 - A)^{-1/2}(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}x \end{cases} \tag{3.4}$$

Alors $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$ et

$$(B^2 - A)^{1/2}y = (B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}x \in D((B^2 - A)^{1/2}).$$

Ce qui implique que $y \in D(A)$, A l'aide de (3.3) on obtient

$$By \in D((B^2 - A)^{1/2})$$

et

$$\begin{aligned} x &= (B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{1/2}y = B(B^2 - A)^{1/2}y + (B^2 - A)y \\ &= (B^2 - A)^{1/2}By + (B^2 - A)y = (B^2 - A)^{1/2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)y \end{aligned} \tag{3.5}$$

de (3.4) et (3.5) on trouve que $z = y \in D(A)$. Donc

$$D((B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})) \subseteq D(A). \tag{3.6}$$

Pour l'inclusion inverse de (3.6), on utilise l'hypothèse **(H3)** on obtient alors

$$D((B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})) = D(A).$$

Or

$$\begin{aligned} &(B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})A^{-1} \\ =\ & B^2A^{-1} - (B^2 - A)^{1/2}BA^{-1} + B(B^2 - A)^{1/2})A^{-1} - (B^2 - A)A^{-1} \\ =\ & I \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'où l'opérateur $B - (B^2 - A)^{1/2}$ est surjectif. Il reste à démontrer que $B - (B^2 - A)^{1/2}$ est injectif. On suppose que

$$(B - (B^2 - A)^{1/2})y = 0$$

Il existe $x \in X$ tel que

$$y = (B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}x$$

donc

$$(B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}x = 0. \tag{3.8}$$

On calcule $(B + (B^2 - A)^{1/2})^2$ comme dans (3.7), En vu de **(H3)** et (3.3) on a

$$D\left((B + (B^2 - A)^{1/2})^2\right) = D(A)$$

$$(B + (B^2 - A)^{1/2})^2z = 2(B^2 + B(B^2 - A)^{1/2})z - Az \qquad \forall z \in D(A),$$

qui implique

$$(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-2}x \in D(A) \quad \forall x \in X.$$

On peut écrire (3.8) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-2}x \\ &= A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-2}x \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.7) donc

$$y = (B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x = 0.$$

D'ou le résultat.

Lemme 3.2 *Si A et $B+(B^2-A)^{1/2}$ sont inversibles alors on a pour tout $x \in X$:*

$$\int_0^t e^{-sB}V(s)ds := J_-(t,x) = (B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))x$$

$$\int_0^t e^{sB}V(s)ds := J_+(t,x) = (-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{tB}V(t))x.$$

Preuve. La preuve est similaire du lemme 2.1. Par exemple si $x \in D((B^2-A)^{1/2})$, en effet

$$\begin{aligned} (B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-sB}V(s)xds &= \int_0^t e^{-sB}V(s)(B^2-A)^{1/2}xds = -\int_0^t e^{-sB}\frac{\partial V}{\partial s}(s)xds \\ &= x - e^{-tB}V(t)x - \int_0^t e^{-sB}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}xds \\ &= x - e^{-tB}V(t)x - B\int_0^t e^{-sB}V(s)xds. \end{aligned}$$

Alors $\int_0^t e^{-sB}V(s)ds \in D((B^2-A)^{1/2})$ et

$$(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^t e^{-sB}V(s)ds = (I-e^{-tB}V(t))x.$$

Remarque. Si $0 < t < 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{1-t} e^{sB}V(s)ds &= (-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{(1-t)B}V(1-t))x \\ &= \int_0^{1-t} e^{sB}V(s)xds = \int_t^1 e^{(s-t)B}V(s-t)xds. \end{aligned}$$

3.3 Preuves des théorèmes

3.3.1 Preuve du théorème 3.1

Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$ telle que $\theta \in]0,1[$. Posons pour $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(s-t)B}V(s-t)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \end{aligned}$$

c'est une solution particulière du problème donné. Sa dérivé est

$$\begin{aligned}
\left(\overline{u}\right)'(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)B(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(s-t)B}V(s-t)B(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(s-t)B}V(s-t)f(s)ds \\
&= \frac{1}{2}(v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)-v_4(t)).
\end{aligned}$$

On note

$$G(t)=\int_0^t e^{-(t-s)B}\frac{\partial V}{\partial s}(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds,$$

et

$$H(t)=\int_t^1 e^{-(t-s)B}\frac{\partial V}{\partial s}(s-t)\left(f(t)-f(s)\right)ds.$$

Pour démontrer que $(\overline{u})'(t)\in D(B)$ et $B\,(\overline{u})'(t)\in C([0,1];X)$, on écrit

$$\begin{aligned}
&Bv_1(t) \\
&= (I+A\left((B^2-A)^{-1}\right)(B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)ds \\
&= (I+A\left((B^2-A)^{-1}\right)(B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad +(I+A\left((B^2-A)^{-1}\right)\left\{(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\right\} \\
&= (I+A\left((B^2-A)^{-1}\right)\left[G(t)+(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Bv_2(t) \\
&= (I+A\left((B^2-A)^{-1}\right)\left[H(t)+(B^2-A)^{1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}(e^{-(1-t)B}V(1-t)-I)f(t)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Bv_3(t) \\
&= B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)ds \\
&= B(B^2-A)^{-1/2}\left[G(t)+(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&Bv_4(t) \\
&= B(B^2-A)^{-1/2}\left[H(t)+(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(e^{-(1-t)B}V(1-t)-I)f(t)\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& 2B\left(\overline{u}\right)'(t) \\
= \ & (B^2(B^2-A)^{-1}+B(B^2-A)^{-1/2})G(t) \\
& -(-B^2(B^2-A)^{-1}+B(B^2-A)^{-1/2})H(t) \\
& +B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)(I-e^{tB}V(t))f(t) \\
& +B(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)\left[(I-e^{-(1-t)B}V(1-t))f(t)\right]
\end{aligned}$$

En utilisant l'holdérianité de second membre et le lemme 3.2, on obtient la continuité de $B\left(\overline{u}\right)'(t)$.

On démontre maintenant que $\overline{u}(t)\in D(A)$ et $A\overline{u}(.)$ est continue, on écrit

$$\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}A((B^2-A)^{-1}(B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A((B^2-A)^{-1}(B^2-A)^{1/2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)f(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1}(G(t)+H(t)) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-(1-t)B}V(1-t))f(t).
\end{aligned}$$

Ainsi $\overline{u}(.)$ et $\overline{u}'(t)$ sont continus grâce à l'holdérianité de f. On peut écrire la dérivée $\overline{u}'(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_0^t e^{-(t-s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(-B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_t^1 e^{(t-s)(-B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\overline{u}'(.)$ est différentiable et sa dérivée est

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= f(t)-\frac{1}{2}\left((B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\right)^2\left((B^2-A)^{1/2})\int_0^t e^{-(t-s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left((-B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\right)^2\left((B^2-A)^{1/2})\int_t^1 e^{(t-s)(-B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& (B^2-A)^{1/2})\int_0^t e^{-(t-s)(B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\
= \ & (B^2-A)^{1/2})v_3(t) \\
= \ & G(t)+(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B^2-A)^{1/2})\int_t^1 e^{(t-s)(-B+(B^2-A)^{1/2})}f(s)ds \\
= \ & (B^2-A)^{1/2})v_4(t) \\
= \ & H(t)-(B^2-A)^{1/2}(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(e^{(1-t)B}V(1-t)-I)f(t),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\overline{u}''(t) &= f(t) - \frac{1}{2}\left((B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\right)^2 G(t)\\ &-\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\\ &-\frac{1}{2}\left((-B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\right)^2 H(t)\\ &+\frac{1}{2}(-B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(e^{(1-t)B}V(1-t)-I)f(t).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\overline{u}''(t)+2B\overline{u}^{'}(t)+A\overline{u}(t)\\ =\ & f(t)-\frac{1}{2}\left(I+B(B^2-A)^{-1/2}\right)^2 G(t)-\frac{1}{2}\left(I+B(B^2-A)^{-1/2}\right)^2 H(t)\\ &-\left(I+B(B^2-A)^{-1/2}\right)(I-e^{-tB}V(t))f(t)\\ &+\frac{1}{2}\left(I-B(B^2-A)^{-1/2}\right)(e^{(1-t)B}V(1-t)-I)f(t)\\ &+\left(B^2(B^2-A)^{-1}+B(B^2-A)^{-1/2}\right)G(t)\\ &-\left(-B^2(B^2-A)^{-1}+B(B^2-A)^{-1/2}\right)H(t)\\ &+B(B^2-A)^{-1/2}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\\ &-B(B^2-A)^{-1/2}(I-e^{(1-t)B}V(1-t))f(t)\\ &-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1}\left(G(t)+H(t)\right)\\ &-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))f(t)\\ &-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{(1-t)B}V(1-t))f(t)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}(I+B(B^2-A)^{-1/2})+B(B^2-A)^{-1/2}-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\\ =\ & -\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(I+B(B^2-A)^{-1/2})^{-1}\\ =\ & \left(-\frac{1}{2}(I-B(B^2-A)^{-1/2})(I+B(B^2-A)^{-1/2})-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1}\right)((I+B(B^2-A)^{1/2})^{-1})\\ =\ & -\frac{1}{2}\left[I-B^2(B^2-A)^{-1}+A(B^2-A)^{-1}\right](I+B(B^2-A)^{-1/2})^{-1}\\ =\ & 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(I - B(B^2-A)^{-1/2}) - B(B^2-A)^{-1/2} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\
= & -\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(I - B(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\
= & \left(-\frac{1}{2}(I + B(B^2-A)^{-1/2})(I - B(B^2-A)^{-1/2}) - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1}\right)((I - B(B^2-A)^{1/2})^{-1}) \\
= & \left(-\frac{1}{2}(I - B(B^2-A)^{-1/2}) - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1}\right)(I - B(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\
= & \ 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)^2 + B^2(B^2-A)^{-1} + B(B^2-A)^{-1/2} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & -\frac{1}{2}(B^2(B^2-A)^{-1} + I + 2B(B^2-A)^{-1/2}) + B^2(B^2-A)^{-1} \\
& + B(B^2-A)^{-1/2} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & \ \frac{1}{2}B^2(B^2-A)^{-1} - \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & \ 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(I - B(B^2-A)^{-1/2})^2 - (-B^2(B^2-A)^{-1} + B(B^2-A)^{-1/2}) - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & -\frac{1}{2}(I + B^2(B^2-A)^{-1} - 2B(B^2-A)^{-1/2}) + B^2(B^2-A)^{-1} - B(B^2-A)^{-1/2} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}B^2(B^2-A)^{-1} - \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1} \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

On trouve que $\overline{u}(.)$ vérifie l'équation $\overline{u}''(t) + 2B\overline{u}'(t) + A\overline{u}(t) = f(t)$ et les conditions aux limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u}(0) = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{sB}V(s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\ = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{s\left(+B-(B^2-A)^{1/2}\right)}(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u}(1) = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(1-s)B}V(1-s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\ = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{(1-s)\left(-B-(B^2-A)^{1/2}\right)}(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds, \end{array} \right.$$

de plus $\overline{u}(0)$, $\overline{u}(1) \in D(A)$. En effet

$$(B^2-A)^{1/2}\overline{u}(0) = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{s\left(+B-(B^2-A)^{1/2}\right)}f(s)ds$$

alors

$$\begin{aligned}(B^2-A)\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^1 e^{s\left(+B-(B^2-A)^{1/2}\right)}(f(s)-f(0))ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^1 e^{s\left(+B-(B^2-A)^{1/2}\right)}f(0)ds\\ &= \frac{1}{2}H(0)-\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}(e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}-I)f(0).\end{aligned}$$

$$B^2\overline{u}(0)=B^2(B^2-A)^{-1}(B^2-A)\overline{u}(0),$$

d'où $\overline{u}(0)\in D(A)$. Idem pour $\overline{u}(1)$, on trouve

$$\begin{aligned}(B^2-A)\overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^1 e^{(1-s)\left(-B-(B^2-A)^{1/2}\right)}(f(s)-f(1))ds\\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}\int_0^1 e^{(1-s)\left(-B-(B^2-A)^{1/2}\right)}dsf(1)\\ &= \frac{1}{2}G(1)-\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-B-(B^2-A)^{1/2}})f(1),\end{aligned}$$

et

$$B^2\overline{u}(1)=B^2(B^2-A)^{-1}(B^2-A)\overline{u}(1).$$

Pour terminer la preuve du théorème on donne le résultat suivant

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses **(H1)**$\sim$**(H5)**, le problème homogène suivant*

$$u''(t)+2Bu'(t)+Au(t)=0,\quad t\in[0,1],$$

admet une unique solution stricte $u(.)$ vérifiant

$$u(0)=x_0\in D(A),\ \text{ et }\ u(1)=x_1\in D(A).$$

Preuve. La solution stricte du problème homogène est donnée par

$$u(t)=e^{t\left(-B-(B^2-A)^{1/2}\right)}\zeta_0+e^{(1-t)\left(+B-(B^2-A)^{1/2}\right)}\zeta_1,$$

avec $Z=e^{-2(B^2-A)^{1/2}}$,

$$\zeta_0=(I-Z)^{-1}(x_0-e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}x_1)$$

et

$$\zeta_1=(I-Z)^{-1}(x_1-e^{-B-(B^2-A)^{1/2}}x_0).$$

Comme $x_0,x_1\in D(A)$ alors $\zeta_0,\zeta_1\in D(A)$. Il suffit de remarquer que

$$-A\zeta_0=(I-B^2(B^2-A)^{-1}(B^2-A)\zeta_0,$$

$$(B^2-A)^{1/2}\zeta_0=(I-Z)^{-1}((B^2-A)^{1/2}x_0-e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}(B^2-A)^{1/2}x_1)$$

et

$$(B^2-A)\zeta_0 = (I-Z)^{-1}((B^2-A)x_0 - e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}(B^2-A)x_1).$$

Idem pour ζ_1. Ensuit, on a

$$\begin{aligned}
u(0) &= \zeta_0 + e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}\zeta_1 \\
&= (I-Z)^{-1}(x_0 - e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}x_1) + (I-Z)^{-1}e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}(x_1 - e^{-B-(B^2-A)^{1/2}}x_0) \\
&= (I-Z)^{-1}(I - e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}e^{-B-(B^2-A)^{1/2}})x_0 \\
&= x_0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u(1) &= e^{-B-(B^2-A)^{1/2}}\zeta_0 + \zeta_1 \\
&= e^{-B-(B^2-A)^{1/2}}(I-Z)^{-1}(x_0 - e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}x_1) + (I-Z)^{-1}(x_1 - e^{-B-(B^2-A)^{1/2}}x_0) \\
&= (I-Z)^{-1}(I - e^{+B-(B^2-A)^{1/2}}e^{-B-(B^2-A)^{1/2}})x_1 \\
&= x_1.
\end{aligned}$$

comme $\zeta_0, \zeta_1 \in D(A)$, alors selon le lemme 3.1 il vient $u \in C^2([0,1];X)$ et

$$u'(t) = -e^{-tB}V(t)(B+(B^2-A)^{1/2})\zeta_0 - e^{(1-t)B}V(t)(B-(B^2-A)^{1/2})\zeta_1,$$

$$\begin{aligned}
u''(t) &= -e^{-tB}V(t)(2B^2 - A + 2B(B^2-A)^{1/2})\zeta_0 \\
&\quad - e^{(1-t)B}V(1-t)(2B^2 - A - (B^2-A)^{1/2})\zeta_1
\end{aligned}$$

ainsi

$$u''(t) + 2Bu'(t) = -e^{-tB}V(t)A\zeta_0 - e^{(1-t)B}V(t)A\zeta_1.$$

puisque

$$\begin{aligned}
-Ae^{-tB}V(t)\zeta_0 &= (B^2 - A - B^2)e^{-tB}V(t)\zeta_0 \\
&= (B^2-A)e^{-tB}V(t)\zeta_0 - B^2e^{-tB}V(t)\zeta_0 \\
&= e^{-tB}V(t)(B^2-A)\zeta_0 - e^{-tB}V(t)B^2\zeta_0 \\
&= -e^{-tB}V(t)A\zeta_0
\end{aligned}$$

et

$$Ae^{(1-t)B}V(1-t)\zeta_1 = e^{(1-t)B}V(1-t)A\zeta_1.$$

On achève la démonstration du Théorème 3.1, en remarquant que

$$\overline{\overline{u}} = u - \overline{u},$$

est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \overline{\overline{u}}''(t) + 2B\overline{\overline{u}}(t) + A\overline{\overline{u}}(t) = 0 \\ \overline{\overline{u}}(0) = u_0 - \overline{u}(0), \quad \overline{\overline{u}}(1) = u_1 - \overline{u}(1). \end{cases}$$

et comme $\overline{u}(0), \overline{u}(1)$, $u_0, u_1 \in D(A)$ on peut appliquer donc la proposition 3.1.

3.3.2 Preuve du théorème 3.2

Pour démontrer que la solution stricte obtenue à la régularité maximale, on va faire une analyse fine des représentations de $Au(t)$, $Bu'(t)$, en utilisant l'höldérianité de second membre $f \in C^\theta([0,1];X)$ et le théorème de Sinestrari utilisées dans le chapitre 2.

Chapitre 4

Exemples

4.1 Exemple1 : Propagation de la chaleur

On considère le problème de propagation de la chaleur u en régime permanent suivant

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ \left.\begin{array}{c} u(x,0) = 0, \\ u(x,1) = 0 \end{array}\right\} & \text{si } x \in (0,1) \\ \left.\begin{array}{c} u(0,y) = u_0(y), \\ u(1,y) = u_1(y) \end{array}\right\} & \text{si } y \in (0,1) \end{cases}$$

avec une source interne de chaleur $f \in C^{\theta}([0,1], L^p(0,1))$, avec $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$.

Posons $E = L^p(0,1)$. On utilise les notations vectorielles usuelles

$$u(x,y) = u(x)(y) \quad \text{et} \quad f(x,y) = f(x)(y),$$

pour écrire le problème précédent sous la forme abstraite

$$\begin{cases} u^{''}(x) + Au(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in L^p(0,1); \psi^{'}, \psi^{''} \in L^p(0,1); \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ \qquad := W_0^{2,p}(0,1) \\ (A\psi)(y) = \psi^{''}. \end{cases}$$

Il est connue que

$$\overline{D(A)} = L^p(0,1)$$

Pour appliquer les résultats du chapitre 2, il faut montrer que A vérifie l'hypothèse **(H1)**, pour cela on doit trouver sa résolvante qui est la solution de l'équation spectrale suivante

$$A\psi - z\psi = f$$

par conséquent

$$\begin{cases} \psi^{''}(y) - z\psi(y) = f(y) \\ \psi(0) = \psi(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de l'équation homogène est de la forme

$$\psi(y) = C_1 e^{\sqrt{z}y} + C_2 e^{-\sqrt{z}y},$$

ici on suppose que la racine carré à la détermination analytique définie par

$$\mathrm{Re}\sqrt{z} > 0.$$

Par la méthode des variations des constantes on trouve que la solution de l'équation non homogène vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(y)e^{\sqrt{z}y} + C_2'(y)e^{-\sqrt{z}y} = 0 \\ \sqrt{z}C_1'(y)e^{\sqrt{z}y} - \sqrt{z}C_2'(y)e^{-\sqrt{z}y} = f(y), \end{cases}$$

son déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}y} & e^{-\sqrt{z}y} \\ \sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} & -\sqrt{z}e^{-\sqrt{z}y} \end{vmatrix} = -2\sqrt{z},$$

par conséquent

$$C_1'(y) = D^{-1}\begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{Z}y} \\ f(y) & -\sqrt{z}e^{-\sqrt{Z}y} \end{vmatrix} = -D^{-1}f(y)e^{-\sqrt{Z}y}$$

et

$$C_2'(y) = D^{-1}\begin{vmatrix} e^{\sqrt{z}y} & 0 \\ \sqrt{z}e^{\sqrt{z}y} & f(y) \end{vmatrix} = D^{-1}f(y)e^{\sqrt{Z}y}.$$

Ainsi

$$C_1(y) = \frac{1}{2}\int_y^1 (\sqrt{z})^{-1}e^{-\sqrt{Z}s}f(s)ds + \zeta_0$$

et

$$C_2(y) = -\frac{1}{2}\int_0^y (\sqrt{z})^{-1}e^{\sqrt{Z}s}f(s)ds + \zeta_1,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \psi(y) &= e^{\sqrt{z}y}\zeta_0 + e^{-\sqrt{z}y}\zeta_1 + \frac{1}{2}\int_y^1 (\sqrt{z})^{-1}e^{(y-s)\sqrt{Z}}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^y (\sqrt{z})^{-1}e^{(s-y)\sqrt{z}}f(s)ds. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\psi(0) = \psi(1) = 0,$$

et après des simplifications on trouve que

$$\psi(y) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(y,s) f(s) ds$$

où

$$K_{\sqrt{z}}(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-y)\sinh s\sqrt{z}}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}} & \text{si } 0 \le s \le y \\[2ex] \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-s)\sinh y\sqrt{z}}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}} & \text{si } y \le s \le 1 \end{cases}$$

or

$$\psi = (A - zI)^{-1} f.$$

De plus, l'opérateur A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1}f = \int_0^y (y-s) f(s) ds - y \int_0^1 (1-s) f(s) ds.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|K_{\sqrt{z}}(y,s)\right| ds &\le \frac{\cosh\left(\operatorname{Re}\sqrt{z}(1-y)\right)}{\sqrt{|z|}\,|\sinh\sqrt{z}|} \int_0^y \cosh\left(s \operatorname{Re}\sqrt{z}\right) ds \\ &\quad + \frac{\cosh\left(y\operatorname{Re}\sqrt{z}\right)}{\sqrt{|z|}\,|\sinh\sqrt{z}|} \int_y^1 \cosh\left((1-s)\operatorname{Re}\sqrt{z}\right) ds \\ &\le \frac{\cosh\left(\operatorname{Re}\sqrt{z}(1-y)\right)\sinh\left(y\operatorname{Re}\sqrt{z}\right)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\sqrt{|z|}\,|\sinh\sqrt{z}|} \\ &\quad + \frac{\cosh\left(y\operatorname{Re}\sqrt{z}\right)\sinh\left((1-y)\operatorname{Re}\sqrt{z}\right)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\sqrt{|z|}\,|\sinh\sqrt{z}|} \\ &\le \frac{\sinh\left(\operatorname{Re}\sqrt{z}\right)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\sqrt{|z|}\,|\sinh\sqrt{z}|} \\ &\le \frac{C}{|z|}, \end{aligned}$$

car $\operatorname{Re}\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\cos\theta_0$, et $\left|1 - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{z}}\right| \ge C(\theta_0)$, pour la dernière estimation voir la thèse de Limam [8].

Grâce au lemme de Schur et la symétrie du noyau on trouve que $\rho(A) \supset [0,+\infty[$et $\exists C > 0$:

$$\forall \lambda \in [0,+\infty[: \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| \le \frac{C}{1+\lambda}$$

En revanche, d'après Grisvard [6] Proposition 3 page 683 et lemme 2 page 710, on a pour

$$\begin{aligned} D_A\left(\frac{\theta}{2}, \infty\right) &= \left(W_0^{2,p}(0,1); L^p(0,1)\right)_{1-\theta/2,\infty} \\ &= B_{p,\infty}^{2(1-(1-\theta/2)}(0,1) \\ &= B_{p,\infty}^{\theta}(0,1) \end{aligned}$$

lorsque $\theta < \frac{1}{p}$, et

$$D_A(\frac{\theta}{2}, \infty) = \left\{\psi \in B^{\theta}_{p,\infty}(0,1) : \psi\,(0) = \psi\,(1) = 0\right\}$$

si $\theta > \frac{1}{p}$.

En appliquant les Théorèmes 2.1 et 2.2, il vient

Corollaire 4.1 *Soient $f \in C^{\theta}([0,1]; L^p(0,1))$, avec $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$. Alors le problème (4.1) a une unique solution stricte u sur $[0,1]$ des que $u_0, u_1 \in W^{2,p}_0(0,1)$.*

Corollaire 4.2 *Soient $f \in C^{\theta}([0,1]; L^p(0,1))$,avec $0 < \theta < 1/p$,$1 < p < \infty$. La solution stricte du problème (4.1) a la propriété de régularité maximale*

$$u^{''}, Au \in C^{\theta}([0,1]; L^p(0,1))$$

des que

$$f(0), f(1), Au_0, Au_1 \in B^{\theta}_{p,\infty}(0,1).$$

4.2 Exemple 2 : Conditions aux limites périodiques

Soit $X = L^2(0,1)$ et l'opérateur

$$T : D(T) \subset X \to X$$

défini par

$$\begin{cases} D(T) = \left\{\psi \in H^1(0,1) : \psi(0) = \psi(1)\right\}, \\ T\psi = i\psi^{'}. \end{cases}$$

L'opérateur T est auto adjoint car, pour $u \in D(T)$; $v \in D(T^*)$, on a

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle\,,$$

et

$$\langle Tu, v\rangle = \int_0^1 (Tu)(s).\overline{v(s)}ds = \int_0^1 iu^{'}(s).v(s)ds,$$

on intègre par partie il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 iu^{'}(s).v(s)ds &= \left[iu(s)v(s)|_0^1 - \int_0^1 iu(s).v^{'}(s)ds\right] \\ &= iu(1)v(1) - iu(0)v(0) + \int_0^1 iu(s).\left(iv^{'}(s)\right)ds, \end{aligned}$$

comme $v(1) = v(0)$ et $u(1) = u(0)$, on trouve que

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = \int_0^1 u(s).\overline{iv^{'}(s)}ds,$$

donc T^* est défini comme suit

$$\begin{cases} D(T^*) = D(T) \\ T^*v = iv^{'} = Tv. \end{cases}$$

Puisque T est auto adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, de plus la solution de l'équation spectrale

$$T\psi + \lambda\psi = f,$$

qui donne

$$\begin{cases} i\psi^{'}(t) + \lambda\psi(t) = f(t) \\ \psi(0) = \psi(1), \end{cases}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \left(-i\int_0^t e^{-i\lambda s} f(s)ds + k\right).e^{i\lambda t} \\ &= -i\int_0^t e^{i\lambda(t-s)} f(s)ds + k.e^{i\lambda t}. \end{aligned}$$

En utilise la condition au limite $\psi(0) = \psi(1)$ il vient :

$$\begin{cases} \psi(0) = k \\ \psi(1) = -i\int_0^t e^{i\lambda(1-s)} f(s)ds + k.e^{i\lambda} \end{cases}$$

donc

$$k(1 - e^{i\lambda}) = -i\int_0^t e^{i\lambda(1-s)} f(s)ds.$$

C'est à dire :

$$k = \frac{-i}{(1 - e^{i\lambda})}\int_0^t e^{i\lambda(1-s)} f(s)ds$$

d'où la résolvante de$T$ est

$$\psi(t) = (T + \lambda)^{-1} f = -i\int_0^t e^{i\lambda(1-s)} f(s)ds - \frac{i}{(1 - e^{i\lambda})}\int_0^1 e^{i\lambda t} f(s)ds.$$

Si

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\lambda} &\neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq e^{i\lambda} \Leftrightarrow e^{0i} \neq e^{i\lambda} \\ &\Leftrightarrow i\lambda \neq i2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \lambda \neq 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi $\sigma(T) = 2\pi Z$, par conséquent T^2 est auto adjoint positif.
On considère par la suite que $B = -iT$ et

$$\begin{cases} D(A) = D(T^2) = \{\psi \in H^2(0,1) : \psi(0) = \psi(1) \text{ et } \psi'(0) = \psi'(1)\} \\ \qquad := H^2_{\#}(0,1) \\ A\psi = (-2T^2 - aI)\psi = 2\psi^{''} - a\psi, \qquad \text{avec } \ a > 0 \end{cases}$$

On peut donc écrire le problème (3.1) sous la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)-au(x,y)=f(x,y), \\ \text{pour } (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ \left.\begin{array}{l} u(0,y)=u_0(y) \\ u(1,y)=u_1(y), \end{array}\right\} \quad \text{si } 0<y<1, \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0)=u(x,1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1), \end{array}\right\} \quad \text{si } 0<x<1. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

telles que u_0, u_1 sont deux fonctions données dans $D(A)$, et le second membre

$$f\in C^\theta([0,1];L^2(0,1)).$$

Il suffit maintenant de montrer que les hypothèses de chapitre 3 sont vérifiées.

On a

$$\left\{\begin{array}{l} D(B^2-A)=D(T^2)=\{\psi\in H^2(0,1):\psi(0)=\psi(1),\psi'(0)=\psi'(1)\} \\ (B^2-A)\psi=-3\psi''+a\psi, \end{array}\right.$$

d'après les propriétés des opérateurs auto adjoints l'hypothèse **(H1)** est vérifie.

D'autre part on a $D(A)=D(B^2)=D(T^2)$, et d'après un résultat de Lions-Magenes [10] on a

$$\begin{aligned} D((B^2-A)^{1/2}) &= \left(D(B^2-A),X\right)_{\frac12,2}=\left(D(T^2),X\right)_{\frac12,2} \\ &= \left(H^2_{\#}(0,1),L^2(0,1)\right)_{\frac12,2} \end{aligned}$$

D'autre part on sait

$$\begin{aligned} \left(H^2(0,1),L^2(0,1)\right)_{\frac12,2} &= \left(W^{2,2}(0,1),L^2(0,1)\right)_{\frac12,2} \\ &= B^{2(1-(1/2)}_{2,2}(0,1) \\ &= H^1(0,1) \end{aligned}$$

Ainsi l'espace $D((B^2-A)^{1/2})$ est exactement $H^1_{\#}(0,1)=D(T)=D(B)$.

Par un calcule directe on peut montrer que l'équation suivante

$$A\psi=(-2T^2-aI)\psi=2\psi''-a\psi=f$$

admet une unique solution c'est a dire A est inversible. d'où le résultat suivant

Corollaire 4.3 *Soient $f\in C^\theta([0,1];L^2(0,1))$, $0<\theta<1$ et $u_0,u_1\in H^2_{\#}(0,1)$. Alors le probléme (4.2) a une unique solution stricte u sur* $[0,1]$.

Pour la régularité maximale, il suffit de caractériser l'espace d'interpolation. On a

$$\begin{aligned} D_{(B^2-A)}(\frac{\theta}{2},\infty) &= \left(H^2_{\#}(0,1);L^2(0,1)\right)_{1-\theta/2,\infty} \\ &= \left\{\psi\in B^\theta_{2,\infty}(0,1):\psi(0)=\psi(1)\right\}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **Balakrishnan A. V.** : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] **Bruhl P. L. :** Introduction à la théorie spectrale, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2003.

[3] **Butzer-Bérens** : Semi-groups of operators and approximation,1967.

[4] **Favini A., Labbas R., Tanabe H., Yagi A. :** On the solvability of abstract differential equations of elliptiqc type, Funkcial. Ekvac 47 (2004) 205-224.

[5] **Grisvard P.** : Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, 1966.

[6] **Grisvard P.** : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[7] **Grisvard P**. : Théorème de trace et d'interpolation, 1960.

[8] **Limam K**. Etude de Problèmes de Transmission Régis par des Equations Différentielles Abstraites de type Elliptique, thèse de doctorat, université de mostaganem (2012).

[9] **Lunardi A.** Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Bsel 1995.

[10] **Lions J.L., Magenes E.** : Problème aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[11] **Lions J. L., Peetre J.** : *Sur une classe d'espace d'interpolation.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), pp. 5-86.

[12] **Pazy, A**., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[13] **Sinestrari, E.,** On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 66 (1985) 16-66.

[14] **Tanabe, H**., Equations of Evolution, Pitman London San Francisco-Melbourne, 1979.