REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE

MEMOIRE

Présenté Pour obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse Fonctionnelle

par:

Melle: BELBEY Fouzia

Intitulé:

Ordre de Croissance des Solutions des Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre

Soutenu le 19/06/2013 devant le jury composé de:

Mr BELAIDI Benharrat	President	Prof.	U. MOSTAGANEM
Mr HAMOUDA Saada	Examinateur	M.C.A.	U. MOSTAGANEM
Mme AZIZ HAMANI Karima	Encadreur	M.C.A.	U. MOSTAGANEM

Remerciements

Avant tout, Nous remercions "DIEU" qui nous a donné le courage, la volonté, la patience, la santé et la force pour finir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire. En particulier notre encadreur Mme **AZIZ HAMANI Karima**, pour sa totale disposition et ses conseils précieux qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Nous remercions aussi l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement.

Nous tenons aussi à exprimer nos vifs remerciements aux membres du jury Mr **BELAIDI Benharrat** et Mr **HAMOUDA Saada** qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Dédicace

Grâce a mon Dieu elkadir
Je dédie ce travail à mes chers parents que j'aime plus que tout au monde, à mes chers frères: khaled, kamel et Nessradine, à mes soeurs, Zineb, Hafsa et Assma, à mes amis, à toute ma Grande famille"BELBEY" et spécialement à tout musulmon.

Fouzia

Table des Matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt joue un rôle trés important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Ce mémoire consiste à étudier les solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières. En 1982, Steven B. Bank et Ilpo Laine [1] ont étudié la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle $f'' + A(z) f = 0$, où $A(z)$ est soit un polynôme, soit une fonction transcendante. Plut tard, différents résultats concernant cette étude dans le cas où $A(z)$ est transcendante ont été obtenus. Voir par exemple [12, 13].

Dans l'étude de l'équation différentielle $f'' + A(z) f' + B(z) f = 0$, où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières, Gary G. Gundersen [5] a cherché des conditions sur les coefficients de telle façon que chaque solution soit d'ordre infini. On sait que si $A(z)$ est transcendante, alors au moins une de chaque deux solutions linéairement indépendantes est d'ordre infini [4]. D'autre part, si $A(z)$ et $B(z)$ sont des polynômes, alors chaque solution est une fonction entière d'ordre rationnel fini [14, p. 108], [15, pp. 65-67], [16].

Le but de ce mémoire est d'étudier les différents résultats obtenus par Gundersen [5] et les illuster par des exemples.

le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécéssaires par la suite dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients fonctions entières.. On trouve que si les coefficients vérifient certaines conditions de croissance, alors chaque solution d'ordre fini va également satisfaire d'autres conditions de croissance. On cherche aussi des conditions suffisantes sur les coefficients de telle façon que chaque solution soit d'ordre infini. Finalement, on illustre chaque résultat obtenu par quelques exemples.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicié et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$.
Notons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{[n(t, a, f) - n(0, a, f)]}{t} dt + n(0, a, f) \log r \ \ (a \neq \infty), \tag{1.1.1}$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{[n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)]}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r, \tag{1.1.2}$$

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \ \ (a \neq \infty) \tag{1.1.3}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \tag{1.1.4}$$

où $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, $x > 0$ et $0 < r < +\infty$.

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$ et $m(r,a,f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

Définition 1.1.1 ([7]) Soit f une fonction méromorphe non constante. On appelle fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f la fonction notée $T(r,f)$ définie par

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f), \tag{1.1.5}$$

où $0 < r < +\infty$.

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$m(r,f) = r/\pi, \;\; N(r,f) = 0. \tag{1.1.6}$$

D'où

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = r/\pi. \tag{1.1.7}$$

1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe $a \neq \infty$, on a*

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + \varepsilon(r,a), \tag{1.2.1}$$

où $0 < r < +\infty$ *et* $\varepsilon(r,a) = O(1)$ *quand* $r \to +\infty$.

1.3 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 ([7]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f noté $\sigma(f)$ est défini par

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.3.1 Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.3.2}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemples 1.3.1

1) Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$T(r,f) = r/\pi. \tag{1.3.3}$$

D'où $\sigma(f) = 1$.

2) Pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$, on a

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, r \to +\infty. \tag{1.3.4}$$

D'où $\sigma(f) = +\infty$.

1.4 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 1 ([1]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros de la fonction f noté $\lambda(f)$ est défini par

$$\lambda\left(f\right)=\limsup_{r\rightarrow+\infty}\frac{\log N\left(r,1/f\right)}{\log r} \tag{4.1.1}$$

Exemple 1.4.1

Pour la fonction $f\left(z\right)=e^{z}+b$, où $b\neq 0,\ \infty$, on a $\lambda\left(f\right)=1$.

1.5 Théorème de Phragmén-Lindelöf

Soit $\alpha>0$. Notons

$$S_{\alpha}=\left\{z\in\mathbf{C}:\left|\arg z\right|<\frac{\pi}{2\alpha}\right\}, \tag{1.5.1}$$

$$\gamma_{r}=\left\{z:z=re^{i\theta},z\in S_{\alpha}\right\}\ \text{ et }\ M\left(r,\gamma_{r},f\right)=\max_{z\in\gamma_{r}}\left|f\left(z\right)\right|. \tag{1.5.2}$$

Théorème 1.5.1 ([10, p. 214]) Soit f une fonction analytique dans le secteur S_{α} et continue sur ∂S_{α} telle que

$$\forall z\in\partial S_{\alpha}:\left|f\left(z\right)\right|\leq M, \tag{1.5.3}$$

où M (>0) est une constante.

Si

$$\limsup_{r\rightarrow+\infty}\frac{\log\log M\left(r,\gamma_{r},f\right)}{\log r}<\alpha, \tag{1.5.4}$$

alors

$$\forall z\in S_{\alpha}:\left|f\left(z\right)\right|\leq M. \tag{1.5.5}$$

1.6 Mesure et densité

Définition 1.6.1 ([8, pp. 318-319]) On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty)$ par

$$m\left(E\right)=\int_{0}^{+\infty}\chi_{E}\left(t\right)dt, \tag{1.6.1}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Les densités supérieure et inférieure de l'ensemble E sont respectivement définies par

$$\overline{dens}E = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m\left(E\cap[0,r]\right)}{r} \text{ et } \underline{dens}E = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m\left(E\cap[0,r]\right)}{r}. \tag{1.6.2}$$

Définition 1.6.2 ([8, pp. 318-319]) La mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm\left(H\right) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H\left(t\right)}{t} dt, \tag{1.6.3}$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H.

Les densités logarithmiques supérieure et inférieure de l'ensemble H sont respectivement définies par

$$\overline{\log dens}H = \limsup_{r\to+\infty} \frac{m\left(H\cap[1,r]\right)}{\log r} \text{ et } \underline{\log dens}H = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m\left(H\cap[1,r]\right)}{\log r}. \tag{1.6.4}$$

Chapitre 2

Ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières

2.1 Introduction et résultats

On considère l'équation différentielle linéaire suivant

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières avec $B(z) \not\equiv 0$.

Il est connu que toutes les solutions de cette équation sont des fonctions entières et si certains coefficients de l'équation (2.1.1) sont des fonctions entières transcendantes, alors cette équation admet au moins une solution f d'ordre infini. D'autre part, il existe plusieurs équations de la forme (2.1.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^z + 1$ satisfait l'équation diférentielle $f'' + e^z f' - e^z f = 0$.

La question qui se pose maintenant est la suivante:
Quelle sont les conditions sur les coefficients $A(z)$, $B(z)$ qui nous garantissent que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.1) soit d'ordre infini?. De plus, si les coefficients de l'équation (2.1.1) sont des polynômes, avec $B(z) \not\equiv 0$, alors chaque solution de l'équation (2.1.1) est une fonction entière d'ordre fini.
Dans ce chapitre, nous allons essayer de répondre à cette question en présentant différents résultats dus à Gundersen [5].

Dans l'étude de l'équation différentielle (2.1.1), où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières, Gundersen a démontré les résultats suivants:

Théorème 2.1.1 ([5, *p.* 417]) *Si $f \not\equiv 0$ est une solution d'équation (2.1.1) avec $\sigma(f) < +\infty$, alors quand $r \to \infty$,*

$$T(r, B) \leq T(r, A) + O(\log r) \tag{2.1.2}$$

Corollaire 2.1.1:[5] *Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions entières telles que soit* (**i**) $\sigma(A) < \sigma(B)$, *soit* (**ii**)*A est un polynôme et B est transcendante. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle (2.1.1) est d'ordre infini .*

Théorème 2.1.2 ([5, *p.* 416]) *Si $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.1.1) telle que $\sigma(f) < +\infty$, alors exactemaent un de ces quatre cas doit être vérifié:*

(**i**) $\lambda(f) = \sigma(f)$.

(**ii**) $\lambda(f) < \sigma(f)$, *$A(z)$ et $B(z)$ sont toutes les deux transcendantes avec $\sigma(A) = \sigma(B)$. De plus, $T(r, A) = T(r, B) + O(\log r)$ quand $r \to +\infty$ à l'extérieur d'un ensemble E de mesure logarithmique finie.*

(**iii**) $1 \leq \lambda(f) < \sigma(f)$, *$A(z)$ et $B(z)$ sont des polynômes non constants vérifiant* $\deg(B) = 2\deg(A) > \deg(4B - A^2)$ *et* $\sigma(f) = 1 + \deg(A)$.

(**iv**) *f admet seulemant un nombre fini de zéros, $\sigma(f) \geq 1$, $A(z)$ et $B(z)$ sont des polynômes. De plus, on doit avoir exactemant un de ces quatre cas suivants:*

(**a**) $\deg(B) > 2\deg(A)$ *et* $\sigma(f) = 1 + (\deg(B))/2$.

(**b**) $\deg(B) = 2\deg(A)$ *et* $\sigma(f) = 1 + \deg(A)$.

(**c**) $\deg(B) < 2\deg(A)$ *et* $\sigma(f) = 1 + \deg(B) - \deg(A)$.

(**d**) $\deg(B) < 2\deg(A)$ *et* $\sigma(f) = 1 + \deg(A)$.

Théorème 2.1.3 ([5, *p.* 417]) *Soient* $A(z)$ *et* $B(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières telles que pour des constantes réelles* α, β, θ_1, θ_2 *qui vérifient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *et* $\theta_1 < \theta_2$, *on a*

$$|A(z)| \geq \exp\left\{(1 + o(1))\alpha |z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.3}$$

et

$$|B(z)| \leq \exp\left\{o(1) |z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.4}$$

quand $z \to \infty$ *dans* $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée suffisamment petite et soit* $S(\varepsilon)$ *l'angle* $\theta_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_2 - \varepsilon$.

Si $f \not\equiv 0$ *est une solution de l'équation* (2.1.1), *où* $\sigma(f) < +\infty$, *alors les conclusions suivantes sont vérifiées :*

(**i**) *Il existe une constante* $b \neq 0$ *telle que* $f(z) \to b$ *quand* $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$.

De plus,

$$|f(z) - b| \geq \exp\left\{-(1 + o(1))\alpha |z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.5}$$

quand $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$.

(**ii**) *Pour chaque entier* $k \geq 1$,

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \exp\left\{-(1 + o(1))\alpha |z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.6}$$

quand $z \to \infty$ dans $S(\varepsilon)$.

Théorème 2.1.4 ([5, *p.* 418]) *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux fonctions entières telles que pour des constantes reélles* α, β, θ_1, θ_2,*où* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *et* $\theta_1 < \theta_2$, *on a*

$$|B(z)| \geq \exp\left\{(1 + o(1))\alpha |z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.7}$$

et

$$|A(z)| \leq \exp\left\{o(1)\,|z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.8}$$

quand $z \to \infty$ dans $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$. Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

Théorème 2.1.5 ([5, *p.* 418]) *Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières, et soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ des constantes tels que $\sigma(B) < \beta$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux collections finies de nombres réels $\{\Phi_k\}$ et $\{\theta_k\}$ vérifiant $\Phi_1 < \theta_1 < \Phi_2 < \theta_2 < ... < \Phi_n < \theta_n < \Phi_{n+1}$, où $\Phi_{n+1} = \Phi_1 + 2\pi$ et*

$$\sum_{k=1}^{n} (\Phi_{k+1} - \theta_k) < \varepsilon \tag{2.1.9}$$

telles que

$$|A(z)| \geq \exp\left\{(1 + o(1))\alpha\,|z|^{\beta}\right\} \tag{2.1.10}$$

quand $z \to \infty$ dans $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$. Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini .

Théorème 2.1.6 ([5, *p.* 419]) *Si $f \not\equiv 0$ est un solution de l'équation (2.1.1), où soit* **(i)** *$\rho(B) < \rho(A) < \frac{1}{2}$, soit* **(ii)** *$A(z)$ est une fonction transcendante avec $\sigma(A) = 0$ et $B(z)$ est un polynôme,alors $\sigma(f) = +\infty$.*

Théorème 2.1.7 ([5, *p.* 419]) *Soient $\{\Phi_k\}$ et $\{\theta_k\}$ deux collections finies de nombres réels qui vérifient $\Phi_1 < \theta_1 < \Phi_2 < \theta_2 < ... < \Phi_n < \theta_n < \Phi_{n+1}$, où $\Phi_{n+1} = \Phi_1 + 2\pi$, et posons*

$$\mu = \max_{1 \leq k \leq n} (\Phi_{k+1} - \theta_k) \tag{2.1.11}$$

Supposons que $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonction entières telle que une certaine constante$\alpha \geq 0$,

$$|A(z)| \leq O\left(|z|^{\alpha}\right) \tag{2.1.12}$$

quand $z \to \infty$ *dans* $\Phi_k \leq \arg(z) \leq \theta_k$ *pour* $k = 1, ..., n$, *où* $B(z)$ *est transcendante avec* $\sigma(B) < \frac{\pi}{\mu}$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

2.2 Lemmes préliminaires

Soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de pairs distinctes d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., m)$.

Lemme 2.2.1 ([6])

Soit w *une fonction transcendante d'ordre fini* ρ, *et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors*

(**i**) *Il existe un ensemble* $E_1 \subset [0, 2\pi]$ *de mesure linéaire nulle, tel que si* $\Psi_0 \in [0, 2\pi[- E_1$, *alors il existe une constante* $R_0 = R_0(\Psi_0) > 0$ *telle que pour tout* z, *vérifiant* $\arg(z) = \Psi_0$ *et* $|z| \geq R_0$ *et pour tout* $(k, j) \in \Gamma$, *on a*

$$\left| \frac{w^{(k)}(z)}{w^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)} \tag{2.2.1}$$

(**ii**) Il existe un ensemble $E_2 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_2 \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$,on a (2.2.1).

(**iii**) Il existe un ensemble $E_3 \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire fini tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_3$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, ona

$$\left| \frac{w^{(k)}(z)}{w^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2($[5, p.\ 421]$)

Soit w une fonction transcendante d'ordre fini $n \geq 1$ avec $\lambda(w) < n$. Alors il existe une constante $b \neq 0$ et un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tels que

$$\frac{w^{'}(z)}{w(z)} = (1 + o(1))bz^{n-1} \tag{2.2.3}$$

quand $z \to \infty, |z| \notin E$.

preuve. D'aprés l'hypothèse et le théorème de la factorisation de Hadamard, il s'ensuit que n est un entier positive et que $w(z) = h(z)\exp(cz^n)$, où $c \neq 0$ est une constante et $h(z)$ est une fonction entière qui vérifie $\sigma(h) < n$. Alors

$$\frac{w^{'}(z)}{w(z)} = \frac{h^{'}(z)}{h(z)} + cnz^{n-1} \tag{2.2.4}$$

Comme $\sigma(h) < n$, il s'ensuit d'aprés le lemme 2.2.1 (ii) qu'il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que

$$\left|\frac{h^{'}(z)}{h(z)}\right| = o(1)\left|z\right|^{n-1} \tag{2.2.5}$$

quand $z \to \infty$, $|z| \notin E$. En utilisant (2.2.3) et (2.2.5), on trouve (2.2.3).

Lemme 2.2.3 ([3, p. 697]) *Soit w une fonction entiére d'ordre ρ avec $0 < \rho < \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon > 0$ un constante donnée. Alors il existe un ensemble $S \subset [0, \infty)$ avec $\overline{dens}S \geq 1 - 2\rho$ tel que* $w(z) > \exp(|z|^{\rho-\varepsilon})$ *pour tout z vérifiant $|z| \in S$.*

Lemme 2.2.4 ([5, p. 421]) *Soit w une fonction entière telle que $|w'(z)|$ ne soit pas borné dans un certain rayon* $\arg z = \theta$. *Alors il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$, où $r_n \to +\infty$ telle que $w'(z_n) \to \infty$ et*

$$\left|\frac{w(z_n)}{w'(z_n)}\right| \leq (1 + o(1))\left|z_n\right| \tag{2.2.6}$$

quand $z_n \to \infty$.

Preuve. Posons $M(r, w', \theta) = \max\limits_{z \in F}|w'(z)|$, où $F = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq |z| \leq r$ et $\arg z = \theta\}$. Il s'ensuit qu'il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$, où $r_n \to +\infty$ telle que $M(r, w', \theta) = \left|w'\left(r_n e^{i\theta}\right)\right|$ pour tout n. Ainsi pour chaque n, on a

$$w\left(z_n\right)=w\left(0\right)+\int_0^{z_n}w'\left(z\right)dz,$$
$$\left|w\left(z_n\right)\right|\leq\left|w\left(0\right)\right|+r_n\left|w'\left(z_n\right)\right|. \tag{2.2.7}$$

Comme $w'\left(z_n\right)\rightarrow\infty$, on obtient $(2.2.5)$.

Lemme 2.2.5 ([5]) *Soient $g(r)$ et $h(r)$ sont des fonctions monotones non décroissantes dans $[0,\infty)$ telles que $g(r)\leq h(r)$ pour tout $r\notin E\cup[0,1]$, où $E\subset(1,\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\alpha>1$ une constante donnée. Alors il existe un $r_0=r_0(\alpha)>0$ tel que $g(r)\leq h(\alpha r)$ pour tout $r>r_0$.*

Preuve . On raisonne comme dans $([2,p.519])$. D'aprés les hypothéses sur E, il existe un $r_0=r_0(\alpha)>0$, tel que pour tout $r\geq r_0$, l'intervalle $[r,\alpha r]$ doit contenir un point r_1 avec $r_1\notin E\cup[0,1]$. Alors $g(r)\leq g(r_1)\leq h(r_1)\leq h(\alpha r)$.

Lemme 2.2.6 $([5,p.421])$ *Soit w une fonction analytique dans un rayon $\arg z=\theta$ et supposons que pour une certaine constante $\alpha>1$, on a*

$$\left|\frac{w'\left(z\right)}{w\left(z\right)}\right|=O\left(\left|z\right|^{-\alpha}\right) \tag{2.2.8}$$

quand $z\rightarrow\infty$ le long de $\arg z=\theta$. Alors il existe une constante $c\neq0$ telle que $w\left(z\right)\rightarrow c$ quand $z\rightarrow\infty$ le long de $\arg z=\theta$.

Preuve . D'après (2.2.8), il s'ensuit qu'il existe un $R_0>0$ et un domaine simplement connexe D tels que w'/w soit analytique dans D et où si z vérifie $\arg z=\theta$ et $|z|\geq R_0$, alors $z\in D$. Ainsi il existe une fonction analytique $F\left(z\right)$ dans D telle que $F'=w'/w$ dans D. Si $z_1=r_1\exp\left(i\theta\right)$ et $z_2=r_2\exp\left(i\theta\right)$ sont assez grands, où $R_0<r_1<r_2$, alors par la considération de

$$F\left(z_2\right)-F\left(z_1\right)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{w'\left(\xi\right)}{w\left(\xi\right)}d\xi \tag{2.2.9}$$

et (2.2.8), on peut déduire qu'il existe une constante b telle que $F(z) \to b$ quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \theta$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $w(z) \to c$ quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \theta$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.2

Suposons que $f \not\equiv 0$ est un solution de l'équation (2.1.1) telle que $\sigma(f) < +\infty$. On peut écrire l'équation (2.1.1) sous la forme

$$B(z) = \frac{f''}{f} + A(z)\frac{f'}{f} \tag{2.3.1}$$

D'où d'après les résultats fondamentaux de R. Nevanlinna sur les fonctions méromorphes [7, p. 5] , [7, Théorème 2.2, p. 34] et [7, Théorème 3.1, p. 55], on a

$$\begin{aligned} m(r,B) &\leq m\left(r,\frac{f''}{f}\right) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m(r,A) + O(1) \\ &\leq m(r,A) + O(\ln r). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

D'où

$$T(r,B) \leq T(r,A) + O(\log r) \tag{2.3.3}$$

Exemple 2.3.1 Considérons l'équation différentielle:

$$f'' + e^{-z}f' - \left(2 + 4z^2 + 2ze^{-z}\right) f = 0. \tag{2.3.4}$$

La fonction $f(z) = e^{z^2}$ est une solution de l'équation d'ordre $\sigma(f) = 2 < +\infty$. Alors d'après le Théorème 2.1.1, $T\left(r, -\left(2 + 4z^2 + 2ze^{-z}\right)\right) \leq T\left(r, e^{-z}\right) + O(\ln r)$ quand $r \to \infty$.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.1.1) avec $\sigma(f) < +\infty$. On suppose que $\lambda(f) < \sigma(f)$.Posons $n = \sigma(f)$. Alors $n \geq 1$ est un entier. D'après

(2.1.1), on a

$$A(z) = \frac{-B(z)f}{f'} - \frac{f''}{f'} \tag{2.4.1}$$

D'aprés le Lemme 2.2.2, il existe une constante $b \neq 0$ et un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithemique finie tels que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (1 + o(1))bz^{n-1} \tag{2.4.2}$$

quand $z \to \infty$, $|z| \notin E$.

D'aprés les résultats fondamentaux de R. Nevanlinna sur les fonctions méromorphes [7, p. 5] , [7, Théorème 2.2, p. 34] et [7, Théorème 3.1, p. 55], (2.4.2) et (2.4.1) ona

$$\begin{aligned} m(r, A) &\leq m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, B) + O(1) \\ &\leq m(r, B) + O(\ln r). \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

quand $r \to \infty$, $r \notin E$.

D'où

$$T(r, A) \leq T(r, B) + O(\log r) \tag{2.4.4}$$

quand $r \to \infty$, $r \notin E$.

Comme $T(r, B) \leq T(r, A) + O(\log r)$ quand $r \to +\infty$ d'aprés (2.1.2), on obtient que

$$T(r, B) = T(r, A) + O(\log r) \tag{2.4.5}$$

quand $r \to \infty$, $r \notin E$.

Premiérement supposons que $B(z)$ est transcendante. Alors $A(z)$ est transcendante d'aprés (2.4.5). Comme la fonction caractéristique de R. Nevanlinna est une fonction croissane en r, on peut déduire d'aprés (2.4.5) et le Lemme 2.2.5 que $\sigma(A) = \sigma(B)$;C'est le cas (ii).

Maintenant supposons que $B(z) \not\equiv 0$ est un polynôme. Alors $A(z)$ est un polynôme d'aprés (2.4.5). On doit utiliseR la transformation connue

$$w(z) = f(z)\exp(\frac{1}{2}\int A(z)dz) \tag{2.4.6}$$

En substituant (2.4.6) dans (2.1.1), on trouve

$$w'' + G\,(z)\,w = 0, \tag{2.4.7}$$

$G(z) = B(z) - \frac{1}{2}A^{'}(z) - \frac{1}{4}\left(A(z)\right)^{2}$. Si $G(z) \not\equiv 0$, Alors(voir [1, Theorème 1])

$$\sigma\,(w) = 1 + \frac{\deg(G))}{2}. \tag{2.4.8}$$

Comme $\lambda\,(f) < \sigma(f)$, on a aussi

$$f(z) = h(z)e^{Q(z)}, \tag{2.4.9}$$

où $h(z)$ est soit un produit canonique, soit $h(z)/z$ est un produit canonique, $Q(z)$ est un polynôme et $\sigma(h) = \lambda(f) < \sigma(f) = \deg(Q)$. On substituant (2.4.9) dans (2.1.1), on trouve

$$\frac{h''}{h} + (2Q' + A)\frac{h'}{h} + Q'' + (Q')^{2} + AQ' + B = 0. \tag{2.4.10}$$

Notons $\alpha = \deg(A)$ et $\beta = \deg(B)$.

Premièrement, supposons que $\beta > 2\alpha$. Alors d'après l'application de la théorie de Wiman-Valiron [14] à l'équation (2.1.1), on obtient que $\sigma(f) = 1 + \beta/2$. D'où $\sigma(f) = \sigma(w)$ d'après (2.4.6) . Comme d'après (2.4.6) , $\lambda(w) = \lambda(f) < \sigma(f) = \sigma(w)$, il s'ensuit d'après (2.4.7) et [1, Théorème 1] que w admet seulemant un nombre fini de zéros. Donc f admet seulemant un nombre fini de zéros; C'est le cas $(iv)(a)$.

Maintenant supposons que $\beta < 2\alpha$. Alors d'après l'application de la théorie de Wiman-Valiron à l'équation (2.1.1), on obtient que $\sigma(f) \leq 1 + \alpha$. D'aprés (2.4.8) . $\sigma(w) = 1 + \alpha$. Donc $\sigma(w) \geq \sigma(f) > \lambda(f) = \lambda(w)$, une autre fois, on obtient d'aprés (2.4.7) et [1, Théorème 1] que w et f chacune admet un nombre fini de zéros. Si $\sigma(f) = 1 + \alpha$, alors on obtient le cas $(iv)(d)$. Maintenant, on suppose que $\sigma(f) < 1 + \alpha$. D'aprés (2.4.9), $\deg(Q') = \sigma(f) - 1 < \alpha$, et h est un polynôme. Alors en faisant tendre z vers l'infini dans (2.4.10),on déduit que $\deg(AQ') = \deg(B)$. Ce qui mène à $\alpha + \sigma(f) - 1 = \beta$;C'est le cas $(iv)(c)$.

Maintenant supposons que $\beta = 2\alpha = \deg(4B - A^2)$ et $G(z) \equiv 0$ dans (2.4.7). Alors $A(z) \not\equiv 0$ (car $B(z) \not\equiv 0$). Alors d'aprés (2.4.7) et (2.4.6), il s'ensuit que f admet seulemant un nombre fini des zéros et que $\sigma(f) = 1 + \alpha$; C'est le cas $(iv)(b)$.

Ensuite supposons que $\beta = 2\alpha = \deg(4B - A^2)$ et $G(z) \not\equiv 0$. Alors $\sigma(w) = 1 + \alpha$ d'aprés (2.4.8). Par l'application de la théorie de Wiman-Valiron à (2.1.1), on trouve $\sigma(f) \leq 1 + \alpha$. Donc $\sigma(w) \geq \sigma(f) > \lambda(f) = \lambda(w)$ et donc comme ci-dessus w et f chacune admet seulement un nombre fini de zéros. Si $\sigma(f) = 1 + \alpha$ alors on obtient le cas $(iv)(b)$. Si $\sigma(f) < 1+\alpha$, alors comme ci-dessus, on peut déduire d'après (2.4.9) et (2.4.10) que $\deg(Q') = \sigma(f) - 1 < \alpha$, h est un polynôme et $\deg(AQ') = \deg(B)$. Ce qui donne $\sigma(f) + \alpha - 1 = \beta$. Mais ceci contredit $\beta = 2\alpha$ et $\sigma(f) < 1 + \alpha$.

Finalement, on suppose que $\beta = 2\alpha > \deg(4B - A^2)$. Alors $\sigma(w) < 1 + \alpha$ d'aprés (2.4.7) et (2.4.8). Alors d'aprés (2.4.6) , on obtient $\sigma(f) = 1 + \alpha$. Si f admet une infinité de zéros. alors c'est le cas $(iv)(b)$. Si f admet seulemant un nombre fini de zéros, alors d'aprés (2.4.6) , (2.4.7) , (2.4.8) et [1, Théorème 1], on déduit que $\lambda(f) = \lambda(w) = \sigma(w) \geq 1$; C'est le cas (iii).

L'exemple suivant illustre le cas (i) du Théorème 2.1.1

Exemple 2.4.1 L'équation différentielle

$$f'' + e^z f' - e^z f = 0 \tag{2.4.11}$$

admet une solution $f(z) = e^z + 1$ avec $\sigma(f) = 1 = \lambda(f)$.

L'exemple suivant illustre le cas (iii) du Théorème 2.1.1

Exemple 2.4.2 Soit Q un polynome non constant. Alors d'aprés [3, Théorème 1], il existe une solution $w \not\equiv 0$ de l'équation

$$w'' - \frac{Q'(z)}{2} w = 0 \tag{2.4.12}$$

qui vérifie $\sigma(w) = \lambda(w) = (1 + \deg(Q))/2 = 2$. Alors $f(z) = w(z) \exp(-\frac{1}{2} \int Q(z)\, dz)$ vérifie l'équation

$$f'' + Q(z) f' + \frac{(Q(z))^2}{4} + f = 0 \tag{2.4.13}$$

et $1 \leq \lambda(f) = (1 + \deg Q)/2 = 2 < \sigma(f) = 1 + \deg(Q)$.
De plus, si l'équation (2.4.12) possède deux solutions linéairemaent indépendantes w_1 et w_2 avec $\sigma(w_i) = \lambda(w_i) = (1 + \deg(Q))/2 = 2$ pour $i = 1, 2$, alors l'équation (2.4.13) va avoir deux solutions linéairemaent indépendantes f_1 et f_2 avec $1 \leq \sigma(f_i) = \lambda(f_i)$ pour $i = 1, 2$. Par exemple, pour $Q(z) = 2z$, les fonctions $f_1(z) = (\sinh z) \exp(-z^2/2)$ et $f_2(z) = (\cosh z) \exp(-z^2/2)$ sont solutions de l'équation $f'' + 2zf' + z^2 f = 0$.

L'exemple suivant illustre les quatre cas de (iv) dans le Théorème 2.1.1.

Exemple 2.4.3 Si P est un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors $f = e^P$ vérifie l'équation (2.1.1) avec $A \equiv 0$ et $B = -P'' - (P')^2$.
Lorsque $n \geq 2$,on a $2deg(A) = 0 < deg(B) = 2n - 2$ et $\sigma(f) = n = 1 + \frac{(deg(B))}{2}$; c'est le cas (a). Pour $n = 1$, on a $2deg(A) = deg(B) = 0$ et $\sigma(f) = 1 = 1 + deg(A)$; C'est le cas (b).
Soit $k \geq 1$ un entier. Alors $f(z) = exp(z^k)$ Vérifie l'équation

$$f'' + \left(H(z) - kz^{k-1}\right) f' - \left(k(k-1)z^{k-2} + kz^{k-1}H(z)\right) f = 0, \tag{2.4.14}$$

où $H(z) = z^k$et c'est un exemple pour le cas (c).
Soit $k \geq 2$ est un entier, Alors $f(z) = exp(z^k)$ Vérifie l'équation (2.4.14) avec

$H(z) \equiv 0$ et c'est un exemple pour le cas (d).

2.5 Preuve du Théorème 2.1.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.1.1) avec $\sigma(f) < +\infty$. Posons $\delta = \sigma(f)$. Alors d'après le Lemme 2.2.1(i), il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, alors

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = o(1)\,|z|^{\delta} \tag{2.5.1}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_0$.

Maintenant, supposons que $|f'(z)|$ n'est pas bornée dans un certain rayon $\arg z = \phi_0$, où $\phi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E_1$. Alors d'après le Lemme 2.2.4, il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\phi_0}$, où $r_n \to +\infty$ telle que $f'(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right| \leq (1 + o(1))\,|z_n| \tag{2.5.2}$$

quand $z_n \to \infty$.
D'après (2.1.1), on a

$$|A(z)| \leq \left|\frac{f''}{f'}\right| + |B(z)| \left|\frac{f}{f'}\right|. \tag{2.5.3}$$

En utilisant $(2.1.3), (2.1.4), (2.5.1), (2.5.2)$ et $(2.5.3)$, on obtient que

$$\exp\left\{(1 + o(1))\alpha\,|z_n|^{\beta}\right\} \leq o(1)\,|z_n|^{\delta} + \exp\left\{o(1)\,|z_n|^{\beta}\right\}(1 + o(1))\,|z_n|\,.$$

Ce qui donne

$$\exp\left\{(1 + o(1))\alpha\,|z_n|^{\beta}\right\} \leq \frac{o(1)\,|z_n|^{\delta}}{\exp\left\{o(1)\,|z_n|^{\beta}\right\}} + (1 + o(1))\,|z_n| \tag{2.5.4}$$

Si $\delta > 1$, alors en écrivant l'inégalité (2.5.4) sous la forme

$$\frac{\exp\left\{(1+o(1))\,\alpha\,|z_n|^{\beta}\right\}}{|z_n|^{\delta}} \leq \frac{o(1)}{\exp\left\{o(1)\,|z_n|^{\beta}\right\}} + \frac{(1+o(1))\,|z_n|}{|z_n|^{\delta}},$$

on obtient une contradiction quand $z_n \to \infty$.

Si $\delta \leq 1$, alors en écrivant l'inégalité (2.5.4) sous la forme

$$\frac{\exp\left\{(1+o(1))\,\alpha\,|z_n|^{\beta}\right\}}{|z_n|} \leq \frac{o(1)\,|z_n|^{\delta}}{|z_n|\exp\left\{o(1)\,|z_n|^{\beta}\right\}} + (1+o(1)),$$

on obtient une contradiction quand $z_n \to \infty$.

Donc $|f'(z)|$ est bornée dans chaque rayon $\arg z = \phi$, où $\phi \in [\theta_1, \theta_2] - E_1$. Alors d'après le Théorème classique de Phragmén-Lindelöf, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f'(z)| \leq M \tag{2.5.5}$$

pour tout $z \in S(\varepsilon)$. Si $\theta_0 \in [\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon] - E_1$, alors quand $\arg z = \theta_0$, on obtient de (2.5.5) que

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^z f'(u)\,du\right| \leq |f(0)| + M\,|z|. \tag{2.5.6}$$

D'après $(2.5.6), (2.5.1)$ et (2.1.1), on trouve que

$$|A(z)|\left|f'(z)\right| \leq o(1)\left|f'(z)\right||z|^{\delta} + |B(z)|\left\{|f(0)| + M\,|z|\right\} \tag{2.5.7}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \theta_0$. D'après $(2.5.7), (2.1.3)$ et (2.1.4), on peut déduire que

$$|f'(z)| \leq \exp\left\{-(1+o(1))\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\} \tag{2.5.8}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \theta_0$. En utilisant une application du Théorème de Phragmén-Lindelöf pour (2.5.8), on peut conclure que

$$|f'(z)| \leq \exp\left\{-(1+o(1))\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\} \tag{2.5.9}$$

quand $z \to \infty$ dans $S(2\varepsilon)$. Ceci donne $k = 1$ dans $(2.1.6)$.

Maintenant, soit $z \in S(3\varepsilon)$, où $|z| > 1$, γ un cercle de rayon un et de centre en z et soit $k \geq 1$ un entier. Alors d'après la formule de Cauchy et (2.5.9), on obtient quand $z \to \infty$ dans $S(3\varepsilon)$,

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{(k-1)!}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f'(u)|}{|z-u|^{k}} |du| \leq \exp\left\{-(1+o(1))\, \alpha\, |z|^{\beta}\right\}. \tag{2.5.10}$$

Ceci prouve $(2.1.6)$.

Maintenant, fixons θ, où $\theta_1 + \varepsilon \leq \theta \leq \theta_2 - \varepsilon$ et posons

$$a_0 = \int_0^{+\infty} f'\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt, \tag{2.5.11}$$

où nous notons que $a_0 \in \mathbf{C}$ d'après $(2.1.6)$. Soit $z = |z|\, e^{i\psi}$, où $\theta_1 + \varepsilon \leq \psi \leq \theta_2 - \varepsilon$. Alors d'après le Théorème de Cauchy et (2.5.11), on obtient que

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) - a_0 &= \int_0^{z} f'(u)\, du - \int_0^{+\infty} f'\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt \\ &= \int_{\theta}^{\psi} f'\left(|z|\, e^{i\xi}\right) i\, |z|\, e^{i\xi} d\xi - \int_{|z|}^{+\infty} f'\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt. \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Comme

$$|f'(z)| \leq \exp\left\{-(1+o(1))\, \alpha\, |z|^{\beta}\right\} \tag{2.5.13}$$

quand $z \to \infty$ dans $S(\varepsilon)$, alors d'après (2.5.12), on trouve que

$$\begin{aligned}
& |f(z) - b| \\
= & \left| \int_{\theta}^{\psi} f'\left(|z| e^{i\xi}\right) i |z| e^{i\xi} d\xi - \int_{|z|}^{+\infty} f'\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt \right| \\
\leq & |\psi - \theta| |z| \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\} + \int_{|z|}^{+\infty} \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha t^{\beta}\right\} dt \\
\leq & |\psi - \theta| |z| \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\} \\
& + \frac{1}{(1+o(1)) \alpha\beta \frac{|z|^{\beta-1}}{2} \exp\left((1+o(1)) \alpha \frac{|z|^{\beta}}{2}\right)} \int_{|z|}^{+\infty} \frac{(1+o(1)) \alpha\beta \frac{t^{\beta-1}}{2}}{\exp\left\{(1+o(1)) \alpha \frac{t^{\beta}}{2}\right\}} dt \\
\leq & |\psi - \theta| |z| \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\} \\
& + \frac{1}{(1+o(1)) \alpha\beta \frac{|z|^{\beta-1}}{2} \exp\left\{(1+o(1)) \alpha \frac{|z|^{\beta}}{2}\right\}} \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha \frac{|z|^{\beta}}{2}\right\} \\
\leq & \exp\left\{-(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\}
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

quand $z \to \infty$ dans $S(\varepsilon)$, où $b = f(0) + a_0$. Notons que a_0 dans (2.3.11) est indépendant de θ. Comme (2.5.13) est l'inégalité (2.1.5), il reste seulement à montrer que $b \neq 0$. D'après le Lemme 2.2.1(i), il existe un rayon $\arg z = \psi_1$, où $\theta_1 + \varepsilon \leq \psi_1 \leq \theta_2 - \varepsilon$ tel que

$$\left| \frac{f''(z)}{f(z)} \right| = o(1) |z|^{2\delta} \tag{2.5.14}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_1$, où $\delta = \sigma(f)$. Alors d'après (2.5.14), (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.1), on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| & \leq \left| \frac{B(z)}{A(z)} \right| + \left| \frac{f''(z)}{f(z) A(z)} \right| \\
& \leq \frac{\exp\left\{o(1) |z|^{\beta}\right\}}{\exp\left\{(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\}} + \frac{o(1) |z|^{2\delta}}{\exp\left\{(1+o(1)) \alpha |z|^{\beta}\right\}}
\end{aligned}$$

$$\leq \exp\left\{-(1+o(1))\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\} + \frac{o(1)\,|z|^{2\delta}}{\exp\left\{(1+o(1))\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\}}$$
$$\leq \exp\left\{-(1+o(1))\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\} \tag{2.5.15}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_1$. En appliquant le Lemme 2.2.6 à (2.3.15) et en notant que $f(z) \to b$ quand $z \to \infty$ dans $S(\varepsilon)$ d'après (2.5.13), on voit bien que $b \neq 0$. Ainsi la preuve du Théorème 2.1.3 est complète.

Exemple 2.5.1 Pour toute constante $b \neq 0$, la fonction $f(z) = e^z + b$ vérifie l'équation

$$f'' + \left(e^z - be^{-z} + b - 2\right) f' + (1 - e^z)\, f = 0 \tag{2.5.16}$$

2.6 Preuve du Théorème 2.1.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est un solution de (2.1.1) telle que $\sigma(f) < +\infty$. On pose $\sigma(f) = \mu$.

D'aprés lemme 2.1.1(i), il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, alors

$$\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| = o(1)\,|z|^{2\mu} \text{ and } \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = o(1)\,|z|^{\mu} \tag{2.6.1}$$

quand $z \to \infty$ le log de $\arg z = \psi_0$.

On peut écrire (2.1.1) sous la forme

$$B(z) = -\frac{f''}{f} - \frac{f'}{f}A(z) \tag{2.6.2}$$

D'après (2.6.1) et (2.6.2), on a

$$|B(z)| \leq o(1)\,|z|^{\mu}\,|A(z)| + o(1)\,|z|^{2\mu} \tag{2.6.3}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_0$.

En utilisant (2.6.3) , (2.1.7) et (2.1.8) , on obtient

$$\exp\left\{(1+o(1))\alpha\left|z\right|^{\beta}\right\} \leq o\left(1\right)\left|z\right|^{\mu}\exp\left\{o(1)\left|z\right|^{\beta}\right\} + o\left(1\right)\left|z\right|^{2\mu} \tag{2.6.4}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_0$,où .$\psi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E_1$.

Ce qui donne

$$\exp\left\{(1+o(1))\alpha\left|z\right|^{\beta}\right\} \leq o(1)\left|z\right|^{\mu} + \frac{o(1)\left|z\right|^{2\mu}}{\exp\left\{o(1)\left|z\right|^{\beta}\right\}} \tag{2.6.5}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg z = \psi_0$,où .$\psi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E_1$.

Alors en écrivant l'inégalité (2.6.5) sous la forme

$$\frac{\exp\left\{(1+o\left(1\right))\,\alpha\left|z\right|^{\beta}\right\}}{\left|z\right|^{2\mu}} \leq \frac{o\left(1\right)}{\left|z\right|^{\mu}} + \frac{o\left(1\right)}{\exp\left\{o\left(1\right)\left|z\right|^{\beta}\right\}}, \tag{2.6.6}$$

on obtient une contradiction quand $z \to \infty$.

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

Exemple 2.6.1

Considérons l'équation différentielle:

$$f'' + e^{z}f' + -2e^{-z}f = 0. \tag{2.6.7}$$

Dans cette équation, pour $z = re^{i\theta}$ $(r \to +\infty)$ et $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, on a

$$\begin{gathered}\left|B\left(z\right)\right| = \left|-2e^{-z}\right| = 2\exp\left(-r\cos\theta\right) \geq \exp\left\{(1+o\left(1\right))\frac{r}{2}\right\}\\ \left|A\left(z\right)\right| = \left|e^{z}\right| = \exp\left(r\cos\theta\right) \leq \exp\left(o\left(1\right)r\right)\end{gathered} \tag{2.6.8}$$

Il est facile de voir que les conditions du Théorème 2.1.4 sont vérifiées avec ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$). Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de cette équation est d'ordre infini.

2.7 Preuve du Théorème 2.1.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.1.1), où $\sigma(f) < +\infty$. Soient $\varepsilon > 0$, $\{\phi_s\}$ et $\{\theta_s\}$ comme dans les hypothèses. D'après (2.1.10) et les inégalités $\sigma(B) < \beta$ $(j = 0, 2..., k-1)$, on voit bien d'après le Théorème 2.1.3 (i) que $|f(z)|$ est bornée dans chaque angle $\phi_s + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_s - \varepsilon$ $(s = 1, 2, ..., n)$. Comme ε est arbitrairement petit, alors d'après (2.1.9) et le Théorème de Phragmén-Lindelöf, $|f(z)|$ est bornée dans tout le plan fini. D'où f est une fonction constante non nulle d'après le Théorème de Liouville. Ceci contredit (2.1.1).

Exemple 2.7.1 Considérons l'équation différentielle:

$$f'' + (\sin z) f' + \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} f = 0. \tag{2.7.1}$$

Alors d'après le Théorème 2.1.5, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.7.1) est d'ordre infini.

Exemple 2.7.1

Supposons que $B(z)$, $A(z)$, avec $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction entiére et $n \geq 1$ est un entier, alors d'après le Théorème 2.1.5, chaque solution $f \not\equiv 0$ des deux équations suivantes est d'ordre infini:

$$f'' - \sin(z^n) f' + B(z) f = 0, \text{ où } \sigma(B) < n. \tag{2.7.2}$$

et

$$f'' - \cos(z^{\frac{n}{2}}) f' + B(z) f = 0, \text{ où } \sigma(B) < \frac{n}{2}. \tag{2.7.3}$$

2.8 Preuve du Théorème 2.1.6

Soit $f \not\equiv 0$ une solution de l'équation (2.1.1). Si $A(z)$ est une fonction transcendante avec $\sigma(A) < \frac{1}{2}$ et $B(z)$ est un polynôme, alors Ozawa [11, Théorème 1] a montré que $\sigma(f) = +\infty$.

Maintenant supposons que $\sigma(f) < +\infty$ et $\sigma(B) < \sigma(A) < \frac{1}{2}$. Supposons en premier que f admet une infinité de zéros. En intégrant $\frac{f'}{f}$ autour des cercles $|z| = r$, il s'ensuit d'aprés le théorème des résidus qu' il existe une constante $R > 0$ telle que pour tous $r > R$, on doit avoir un point $z_r$vérifiant que $|z_r| = r$ et

$$\left|\frac{f'(z_r)}{f(z_r)}\right| > \frac{1}{|z_r|} \tag{2.8.1}$$

Maintenant soit μ une constante vérifiant $\sigma(B) < \mu < \sigma(A)$. Alors d'aprés le Lemme 2.1.3, il existe un ensemble $S \subset [0, \infty)$ de densité supérieure positive tel que

$$|A(z)| > \exp\left(|z|^{\mu}\right) \tag{2.8.2}$$

pour tout z vérifiant $|z| \in S$.

De plus, d'après le Lemme 2.1.1(iii), Il existe un ensemble $E_3 \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_3$, ona

$$\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| \leq |z|^{\alpha}, \tag{2.8.3}$$

où $\alpha = 2\sigma(f) + 1$.

En utilisant (2.1.1), (2.8.1), (2.8.2) , et (2.8.3), on voit qu' il existe un z arbitrairement large tel que

$$\frac{\exp(|z|^{\mu})}{|z|} \leq |A(z)| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq |B(z)| + \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| \leq |B(z)| + |z|^{\alpha} \tag{2.8.4}$$

et ceci contredit $\sigma(B) < \mu$.

Maintenant supposons que f admet seulemant un nombre fini de zéros. Alors $f = Pe^{Q}$ avec $P \not\equiv 0$ et Q est un polynôme. En substituant ceci dans (2.1.1) , on obtient

$$P'' + 2Q'P' + Q''p + (Q')^2P + A(z)(P' + Q'P) + B(z)P = 0 \tag{2.8.5}$$

Comme $\sigma(B) < \sigma(A)$, il s'ensuit d'après (2.8.5) que $(P' + Q'P) \equiv 0$. D'où $P' \equiv 0$ et $Q' \equiv 0$. Alors f est une fonction constante non nulle. Ce qui contredit (2.1.1) . Donc il est un impossible d'avoir $\sigma(f) < \infty$ et $\sigma(B) < \sigma(A) < \frac{1}{2}$.

2.9 Preuve du Théorème 2.1.7

Supposons que $f \not\equiv 0$ est un solution de l'équation de (2.1.1) avec $\sigma(f) < +\infty$. Posons $\beta = \sigma(f)$. D'aprés Lemme 2.1.1(i), il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que si $\Psi_0 \in [\phi_k, \theta_k] - E_1$ pour quelque k, alors

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = O(|z|^{\beta}) \quad \text{et} \quad \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| = O(|z|^{2\beta}) \tag{2.9.1}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg(z) = \Psi_0$. D'après (2.9.1), (2.1.12), et (2.1.1), on obtient

$$|B(z)| \leq |A(z)| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| = O(|z|^{\sigma}) \tag{2.9.2}$$

quand $z \to \infty$ le long de $\arg(z) = \Psi_0$, où $\sigma = \alpha + 2\beta$.

Maintenant soit $\varepsilon > 0$ est un petite canstante vérifiant $\sigma(B) < \pi/(\mu + 2\varepsilon)$ (c'est possible car $\sigma(B) < \frac{\pi}{\mu}$). En utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf dans (2.9.2), on peut déduire que pour un certain entier $m > 0$,

$$|B(z)| = O(|z|^{m}) \tag{2.9.3}$$

quand $z \to +\infty$ dans $\phi_k + \varepsilon \leq \arg(z) \leq \theta_k - \varepsilon$ pour $k = 1, ...n$.

Maintenant pour chaque k, d'après (2.1.11), on a $\Phi_{k+1} - \theta_k + 2\varepsilon \leq \mu + 2\varepsilon$ et donc $\sigma(B) < \frac{1}{\Phi_{k+1} - \theta_k + 2\varepsilon}$. Ainsi en utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf sur (2.9.3), on peut déduire que $|B(z)| = O(|z|^{m})$ qaund $z \to +\infty$ dans le plan complexe. Ce qui veut dire que $B(z)$ est un polynôme. Ce qui contredit les hypothèses.

Exemple 2.9.1 Si $B(z)$ est une fonction entière transcendente avec $\sigma(B) < \frac{4}{3}$, alors toute solution de l'équation

$$f'' + \left(e^{z^2} + e^{iz^2}\right) f' + B(z) f = 0 \tag{2.9.4}$$

est d'ordre infini.

Conclusion

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont soit d'ordre infini, soit d'ordre infini.

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats dus à Gundersen [5] dans lesquels, il a cherché des conditions de croissance sur les coefficients des équations différentielles du second ordre à coefficients fonctions entières pour étudier l'ordre des solutions de ces équations.

Dans ce travail, on a aussi donner plusieurs exemple pour illuster les différents résulats obtenus par Gundersen [5] .

Bibliographie

[1] S. B. Bank and I. Laine*, On the oscillation theory of* $f'' + Af = 0$, *where* A *is entire,* Tran. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 351-363.

[2] S. B. Bank, *On the distribution theory for entire solutions of second order linear differential equations,* Proc. London Math. Soc., (3)50 (1985), 505-534.

[3] A. S. Besicovitch*, On integral functions of order <1,* Math. Ann., 97 (1927), pp 677-695.

[4] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris., 236 (1953), 38-40.

[5] G. Gundersen*, Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc., 305. (1988), 415-429.

[6] G. Gundersen*, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar* estimates, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), 88-104.

[7] W. K. Hayman*, Meromorphic functions,* Clrarendon Press, Oxford, 1964.

[8] W. K. Hayman*, The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method,* Canad. Math. Bull., 17 (1974), 317-358.

[9] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain,* Wiley, New-York, 1976.

[10] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable,* Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[11] M. Ozawa, *On a solution of* $w'' + e^{-z}w' + (az+b)\,w = 0$, Kodai Math. J.3(1980) ,295-309.

[12] J. Rossi, *Second order differential equations with transcendental coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 97, No. 1 (1986), 61-66.

[13] L.-C. Shen, *Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation* $f'' + Af = 0$, Kexue Tongbao., 30 (1985), 1579-1585.

[14] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions,* translated by E. F. Collingwood. Chelsea, New York, 1949.

[15] H. Wittich*, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funkionen,* 2^{nd} Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[16] H. Wittich, *Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen,* Math. Ann., 124 (1952), 277-288.