



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS DE  
MOSTAGANEM



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET  
D'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUE

MEMOIRE

Présenté par  
Melle Aicha Mellah

Pour obtenir le  
DIPLÔME DE MASTER

Spécialité: Mathématiques  
Option : Analyse Harmonique et EDP

Intitulé :

Calcul Fractionnaire et L'ondelette de Haar

Soutenu le 19 /06/2013

Devant les membres du jury:

Président:	S.Gala	Pr	UMAB
Examineur:	Dj.Bensikadour	MA	UMAB
Encadreur:	Sidi Mohamed BAHRI	MCA	UMAB

Promotion :2012-2013

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Calcul fractionnaire</b>	<b>2</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	2
1.1.1 Quelques Définitions . . . . .	2
1.2 Fonction spécifiques de calcul fractionnaire . . . . .	4
1.2.1 La fonction Gamma . . . . .	4
1.2.2 La fonction Bêta . . . . .	5
1.3 Théorie de Riemann-Liouville . . . . .	5
1.3.1 Intégrales de Riemann-Liouville . . . . .	6
1.3.2 Dérivée de Riemann -Liouville . . . . .	10
<b>2 Les ondelettes</b>	<b>13</b>
2.1 Base d'ondelette . . . . .	14
2.1.1 Analyse Multi Résolution (AMR) . . . . .	15
2.2 L' ondelette de Haar . . . . .	15
2.2.1 Propriétés des ondelettes de Haar . . . . .	18
<b>3 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire</b>	<b>22</b>
3.1 La matrice de Haar . . . . .	22
3.2 L'inverse de la matrice de Haar . . . . .	24
3.3 Le vecteur de coefficient de Haar . . . . .	26
3.4 Intégration de l'ondelette de Haar . . . . .	27
3.5 Approximation de l'intégral du vecteur de Haar . . . . .	29
3.6 La matrice opérationnelle d'intégration . . . . .	31

3.6.1	La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire . . . . .	32
3.6.2	La matrice opérationnelle d' intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>35</b>
4.1	Equation différentielle de Torvik . . . . .	35
4.1.1	Solution numérique via la matrice opérationnelle d' intégration . . . . .	36
	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

## **Introduction**

La théorie du calcul fractionnaire et ses applications joue un rôle très important pour résoudre les équations différentielles ou intégrales d'ordre fractionnaire.

La matrice opérationnelle d'ondelette de Haar est l'une des méthodes qui donne une solution numérique à ces équations.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.

On définit dans le premier chapitre, les notions principales de la théorie de calcul intégral fractionnaire et de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann -Louville. Dans le deuxième chapitre, on introduit les ondelettes de Haar et leurs propriétés importantes comme la série de Haar ,la matrice de Haar,..etc.Dans le troisième chapitre ,on définit l'intégral de l'ondelette de Haar puis on cherche une approximation de cet intégral par la matrice opérationnelle .Ensuite on définit la matrice opérationnelle d'ordre fractionnaire de l' ondelette de Haar qui nous aidera à résoudre les équations différentielles ou intégrales.

Dans le dernière chapitre , on utilise toutes les notions définies dans les chapitres précédents pour étudier un problème physique par la résolution d'une équation différentielle.

## **Remerciements**

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et l'effort pour finir ce travail.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Sidi Mohamed Bahri mon encadreur qui m'a guidé dans ce travail, pour son aide continue, ses encouragements sans cesse et ses conseils précieux .

Je n'oublierai pas de remercier également Mr S. Gala pour avoir accepté de présider mon jury. Je tiens aussi à remercier Melle Dj Bensikaddour pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématique et informatique à l'université Abdelhamid Ibn Badis -Mostaganem. Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont poussé vers la réussite, en particulier:

mes parents, mes frères et sœurs.

# Chapitre 1

## Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire devient de plus en plus important dans plusieurs domaines de la science et la technologie. Dans ce chapitre, on introduit la théorie de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann -Louville qui est la plus connue et la plus répandue.

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Quelques Définitions

Avant d'approfondir notre étude de la théorie du calcul fractionnaire et de l'ondelette de Haar, il est indispensable de définir quelques concepts mathématiques fondamentaux.

**Définition 1 (Fonction mesurable)** *Une fonction mesurable est une fonction continue presque par tout .*

**Définition 2 (Produit scalaire)** *Soit  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables . On définit le produit scalaire de  $f$  et  $g$  par*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

**Définition 3 (Fonctions orthogonales )** *Soit  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables. On dit que  $f$  et  $g$  sont orthogonales si*

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

*En utilisant ce produit scalaire, il est possible de définir une norme et une distance.*

**Définition 4 (Espace  $L^2(X, \mu)$ )** Soit  $X$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini. Nous disons qu'une fonction mesurable  $f$ , définie presque partout dans  $X$ , appartient à  $L^2(X, \mu)$  si l'intégrale

$$\|f\|^2 = \int_X |f(x)|^2 dx$$

est finie.

**Définition 5 (Le produit de convolution)**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , le produit de convolution de  $f$  et  $g$ , notée  $f * g$  est définie par:

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx.$$

**Théorème 1 (Inégalité de Schwartz)** Pour tous vecteurs  $x, y$  dans un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'inégalité suivante est vraie

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 6 (Suite orthonormée)**

Une suite  $(f_n)_{n>0}$  de vecteurs dans  $L^2(X, \mu)$  est dite orthonormée si

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{n,m}$$

avec

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}.$$

**Définition 7 (Fonction à plusieurs blocs)** On définit la fonction à plusieurs blocs (FPB)  $b_i(t)$  par :

$$b_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{i}{m} < t < \frac{(i+1)}{m} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{avec } i = \overline{1, m-1},$$

les fonctions  $b_i(t)$  sont disjointes et orthogonales.

**Théorème 2 (Théorème de Fubini)**

Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $a \leq b$  et  $c \leq d$ ,  $f$  une fonction continue défini par :

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b] \times [c, d]$  et:



$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.1)$$

## 1.2 Fonction spécifiques de calcul fractionnaire

Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire.

### 1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières.

#### Définition 8 (La fonction Gamma )

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, (\operatorname{Re} z > 0). \quad (1.2)$$

Le graphe de la fonction  $\Gamma(z)$  pour  $z = x \in \mathbb{R}$  est tracé sur la figure ci-dessous:

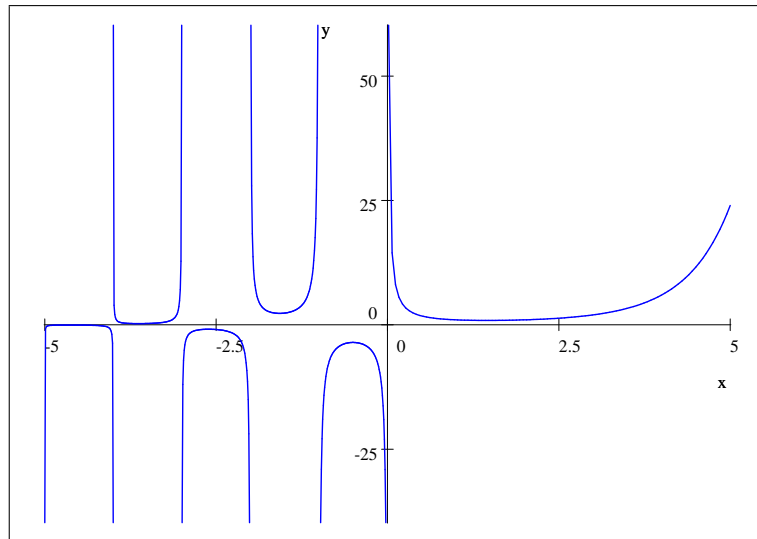


Fig1 La fonction Gamma

#### Les propriétés de la fonction Gamma

1. Une propriété importante de la fonction  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), (\operatorname{Re} z > 0). \quad (1.3)$$

2. La fonction Gamma d' Euler généralise le factoriel ,en effet

$$\Gamma(z + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*, (\text{Re } z > 0). \quad (1.4)$$

3. Si  $-1 < z < 0$  alors  $0 < z + 1 < 1$  donc  $\Gamma(z + 1)$  est bien définie et

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}. \quad (1.5)$$

4.  $\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) = +\infty, \Gamma(1) = 1.$

5. Pour toutes les valeurs entières négatives de  $z$ , la fonction Gamma est infinie, c'est à dire,  $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \dots, \Gamma(-n), \dots$  sont infinies.

## 1.2.2 La fonction Bêta

**Définition 9 ( La fonction Bêta d'Euler )**

*La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante:*

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} t^{y-1} dt, (\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0). \quad (1.6)$$

*La relation entre la fonction Bêta d'Euler et La fonction Gamma d'Euler est donnée par*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (1.7)$$

**Remarque 3** *La formule (1.7) permet de simplifier le calcul de la dérivation fractionnaire et de l'intégration fractionnaire.*

## 1.3 Théorie de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue ,nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville.

### 1.3.1 Intégrales de Riemann-Liouville

#### Intégrales d'ordre arbitraire

On commence par examiner une formule qui donne des primitives successives d'une fonction continue.

Soit  $f$  une fonction continue

$$f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une primitive de  $f$  est donnée par

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left( \int_a^s f(t) dt \right) ds. \quad (1.8)$$

Le théorème 2 de Fubini ramène l'intégrale double (1.8) à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Puis par itération sur  $n$ , on obtient

$$((I_a^n f)x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

**Définition 10** Soit  $f$  une fonction continue  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle intégrale de Riemann-Liouville de  $f$  l'intégrale suivante:

$$((I_a^\alpha f)x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est un réel (ou même complexe) convenablement choisi .

**Remarque 4** La formule (1.9) est (du moins formellement) une généralisation de la nième primitive avec l'ordre de "primitivation"  $\alpha$  non entier.

**Exemple 1** Considérons la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = (x - a)^\beta, \beta > 0.$$

L'intégrale de Riemann -Liouville de  $f$  est donné par:

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (x - a)^\beta dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement de variable suivant

$$t = a + (x - a)\tau,$$

d'où

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (x - a)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

après utilisation de la relation (1.3).

Pour  $\alpha = 1$ , on a

$$\begin{aligned} I_a^1 (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)} (x - a)^\beta \\ &= \frac{(x - a)^\beta}{\beta + 1} \end{aligned}$$

à cause de la relation(1.3).

**Proposition 5** Soit  $f$  une fonction continue à support compact i.e.  $f \in C^0([a, b])$ .

1. Pour  $\alpha, \beta$  complexes tels que  $\text{Re } \alpha > 0$  et  $\text{Re } \beta > 0$  on a

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f. \quad (1.11)$$

2. Pour  $\text{Re } \alpha > 1$  on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f. \quad (1.12)$$

3. Et pour  $\text{Re } \alpha > 0$  on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x). \quad (1.13)$$

**Preuve.**

1. La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d' Euler ( 1.6).

En effet

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) \left[ \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt. \end{aligned}$$

On pose  $s = t + (x-t)\tau$ , alors

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendante d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler (1.3) pour  $z = \alpha - 1$ :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

3. Pour la dernière identité , soit  $f \in C^0([a, b])$  alors

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

et grâce à l'exemple1, on a

$$(I_a^1 f)(x) = \frac{(x-a)^\beta}{\beta+1} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 1$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\beta}{\beta+1} \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt
\end{aligned}$$

D'une part,  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc pour tout  $x$  et  $t$  dans  $[a, b]$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt &\leq \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} (|f(t)| + |f(x)|) dt \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)| \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} dt, \forall x \in [a, b] \\
&= 2M \left( \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right) \text{ avec } M = \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)].
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\alpha$  vers  $0^+$ , on obtient pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon$$

c'est à dire pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon,$$

Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

□

### 1.3.2 Dérivée de Riemann -Liouville

**Définition 11** Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On appelle dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann -Liouville la fonction définie par

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(x)]. \quad (1.14)$$

avec  $I_a^{m-\alpha}$  l'opérateur intégral fractionnaire (1.9).

**Exemple 2** Soit  $f(x) = (x-a)^\beta$  avec  $\beta > 0$ .

On a :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \left( \frac{d}{dx} \right)^m \left[ \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (x-a)^{\beta+m-\alpha} \right) \right]$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^m (x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} (x-a)^{\lambda-m}.$$

Il est clair que la formule de dérivation (1.14) se réduit pour  $\alpha = 1$  à

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx} (x-a)^\beta.$$

Dans l'exemple 1, si on prend  $\beta = 0$ , on obtient le résultat suivant :

$$D_a^\alpha 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

**Remarque 6** La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

**Lemme 1** Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$  et  $f$  une fonction vérifiant  $D_a^\alpha f = 0$  (appartenant au noyau de l'opérateur  $D_a^\alpha$ ).

Alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m} \quad (1.15)$$

où les  $c_j$  sont des constantes quelconques.

**Preuve.** En partant de la relation

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0,$$

on a d'abord

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$$

et par application de l'opérateur integral fractionnaire  $I_a^\alpha$  on obtient :

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha ((x-a)^j).$$

En tenant compte de la relation (1.5), on aura

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{\alpha+j}.$$

Ensuite par dérivation classique et en utilisant le fait que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)} (x-a)^{\lambda-m}.$$

on aura le résultat. □

**Proposition 7** L'opérateur de dérivation de Riemann Liouville  $D_a^\alpha$  possède les propriétés suivantes:



1.  $D_a^\alpha$  est linéaire.
2.  $\lim_{\alpha \rightarrow > m-1} (D_a^\alpha f)(x) = f^{(m-1)}(x)$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow < m} (D_a^\alpha f)(x) = f^m(x)$ .
3.  $D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$ .
4.  $[(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)}$ .

**Corollaire 8** Si  $0 < \alpha < 1$  et  $f$  de classe  $C^1([a, b])$ , alors

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)f = f. \quad (1.16)$$

**Lemme 2** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha > 0$ , alors:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) = 0. \quad (1.17)$$

# Chapitre 2

## Les ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions simples utilisées pour décomposer une fonction réelle (signal) en une combinaison linéaire de fonctions élémentaires: ondelettes de base. Il existe plusieurs familles d'ondelettes : Ondelettes de Haar, Daubechies, Shannon, CAS, etc. Dans ce chapitre, nous présenterons la plus ancienne et la plus simple de toutes les familles d'ondelettes : les ondelettes de Haar .

**Définition 12** Une ondelette est une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  de moyenne nulle c-à-d

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0, \quad (2.1)$$

de plus

$$\|\psi\|_{L^2} = 1, \quad (2.2)$$

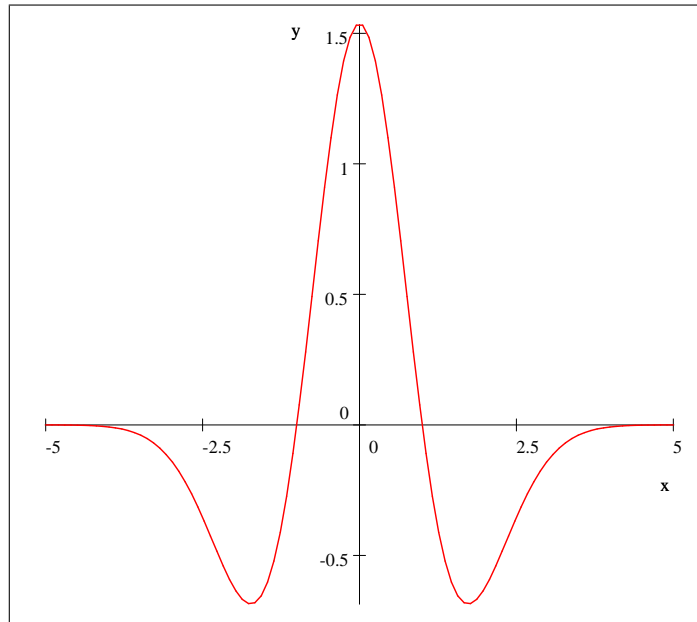
$\psi$  est dite ondelette mère.

### Remarques

1. La condition (2.1) signifie que  $\psi$  est oscillante et de moyenne nulle.
2. La condition (2.2) signifie que  $\psi^2$  ne s'annule pas.
3.  $\psi$  peut être à valeurs complexes.
4. Il existe de nombreuses ondelettes mères  $\psi$  possibles.

**Exemple 3** Ondelette "Chapeau Mexicain"

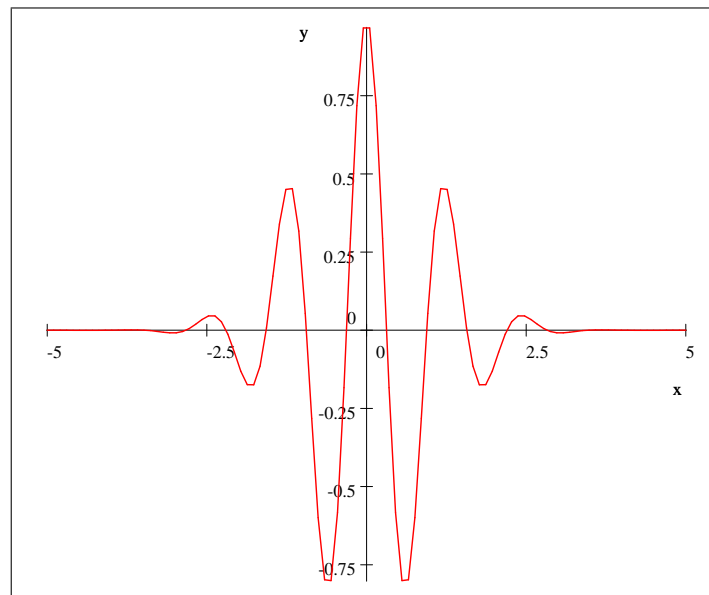
$$\psi(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{\frac{1}{4}} \right) (1 - t^2) \exp\left( \frac{-t^2}{2} \right).$$



*Fig 2 Ondelette de Chapeau Mexicain*

*Ondelette de Morlet*

$$\psi(t) = \exp\left(-t \left(\frac{t}{2}\right)\right) \cos(5t).$$



*Fig3 Ondelette de Morlet*

## 2.1 Base d'ondelette

Les ondelettes de base sont des fonctions obtenue à partir de l'ondelette mère  $\psi(t)$  avec les supports dans les domaines fréquentiel et spatial (où temporel) sont bornés.

Localisée et oscillante,  $\psi(t)$  engendre les autres ondelettes  $\psi_{a,b}(t)$  lorsqu'elle est contractée et translatée par un paramètre  $b$ . Les ondelettes ainsi générées sont définies par:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \text{ avec } a > 0, b \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

où  $a$  est le paramètre d'échelle ou de dilatation et  $b$  le paramètre de translation. Une ondelette est seulement une copie translatée représentée dans une autre échelle d'une fonction unique  $\psi(t)$  appelée ondelette -mère.

Dans le cas où  $a$  et  $b$  sont discrétisés de la manière suivante:

$a = a_0^m$  et  $b = nb_0a_0^m$  avec  $a_0 > 1$  et  $b_0 > 0$  fixés et appartenant à  $\mathbb{Z}$ , alors

$$\psi_{n,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{1}{a_0^m}t - nb_0\right). \quad (2.4)$$

**Remarque 9**  $\psi_{a,b}$  et  $\psi_{n,m}$  sont dites ondelettes filles.

### 2.1.1 Analyse Multi Résolution (AMR)

L'analyse multirésolution a été introduite par Mallat(1989). Cet outil mathématique permet de calculer des approximations successives d'une fonction à des résolutions spatiales différentes.

**Définition 13** On dit que la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces emboîtés de  $L^2(\mathbb{R})$  est une analyse multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  si les conditions suivantes sont vérifiées

1.  $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ .
2.  $f \in V_j$  ssi  $f(2\cdot) \in V_{j+1}$ .
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .
4.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .
5. Il existe une fonction  $\psi$  en  $V_0$  telle que  $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de  $V_0$ .

## 2.2 L' ondelette de Haar

L' ondelette de Haar est une ondelette créée par *Alfréd Haar* en 1909. C'est la première ondelette connue. Elle est la plus simple à comprendre et à implémenter.

Elle est définie par:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Les ondelettes de Haar de base sont des fonctions dilatées et ou translatées de l'ondelette mère  $h_1$  :

$$h_{i,j}(t) = h_1(2^i t - j + 1), \quad (2.6)$$

avec  $i \in \mathbb{N}$  et  $0 < j \leq 2^n$ .

La famille  $\{h_{i,j}\}_{i,j}$  forme une suite orthonormée dans  $L^2[0, 1[$ .

On peut écrire les ondelettes de Haar de base sous la forme simple suivante :

$$h_{i,j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-2}{2^{i+1}}; \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right[ , \\ -2^{\frac{i}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-1}{2^{i+1}}; \frac{2j}{2^{i+1}} \right[ , \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[. \end{cases} \quad (2.7)$$

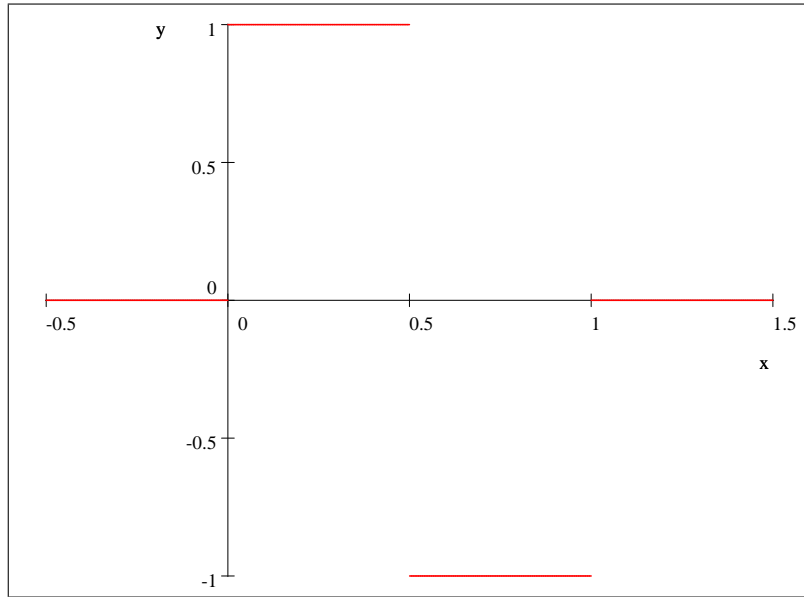


Fig4: Ondelette mère de Haar  $h_1(t)$

Pour faciliter l'exposé, nous allons utilisé les notations simple suivantes :

**Notation 10** Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique couple  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  telque

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}, \quad (2.8)$$

alors, en posant

$$h_r(t) = h_{i,j}(t), \quad (2.9)$$

et

$$J_u = \frac{(j-u)}{2^i} \text{ avec } u = 0, \frac{1}{2}, 1;$$

l'expression (2.7) prend la nouvelle forme suivante:

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -1 & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.10)$$

De même, on définit la fonction échelle de Haar (ondelette père)  $h_0(t)$  par:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.11)$$

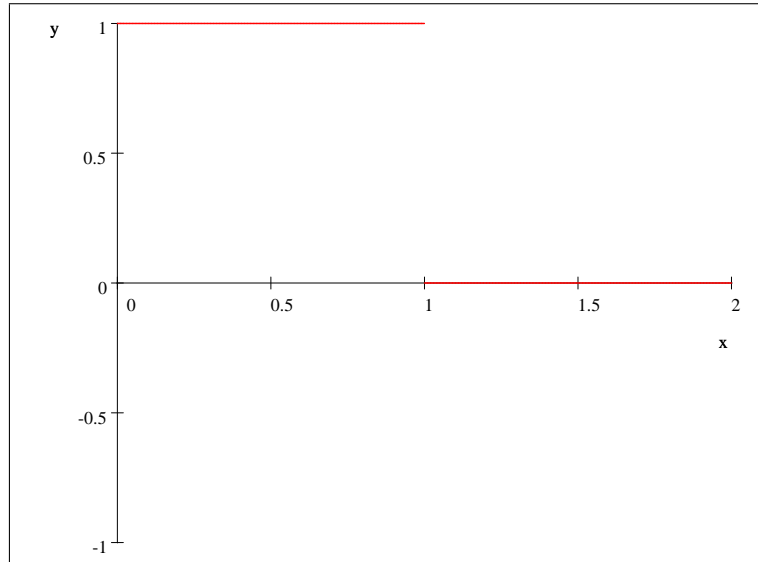


Fig5 Fonction échelle de Haar  $h_0(t)$

Le tableau suivant définit les paramètres  $i$  et  $j$  des huit premières ondelettes de Haar :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
ondelette de Haar	$h_0(t)$	$h_1(t)$	$h_2(t)$	$h_3(t)$	$h_4(t)$	$h_5(t)$	$h_6(t)$	$h_7(t)$
i	0	0	1	1	2	2	2	2
j	0	1	1	2	1	2	3	4

**Exemple 4** L'ondelette de Haar  $h_2(t)$

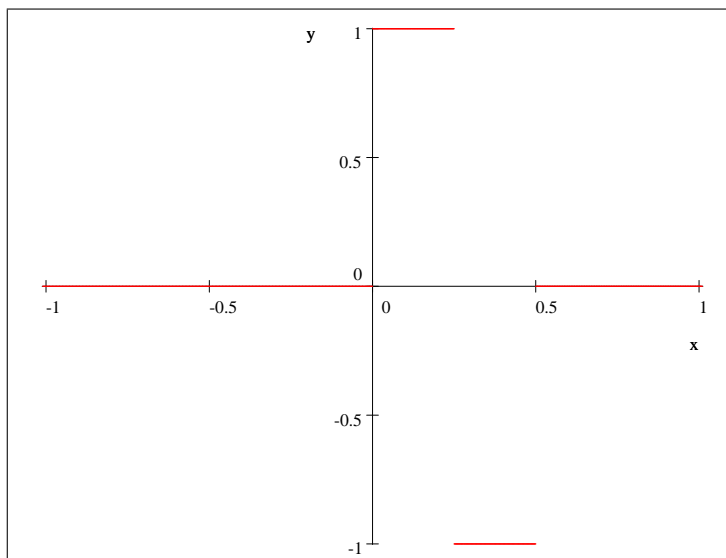


Fig6 Ondelette de Haar  $h_2(t)$

## 2.2.1 Propriétés des ondelettes de Haar

Les ondelettes de Haar ont plusieurs propriétés importantes :

### 1. Les fonction de Haar $h_r(t)$ sont orthogonales .

Par construction de la norme du chaque  $h_r(t)$ ; est  $2^{-i}$  pour tout  $r = 2^i + j - 1$ ; et  $0 < j \leq 2^i$ .

Montons que  $\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = 0$  pour  $r \neq u$ .

on pose  $u = 2^n + m - 1$  avec  $r \neq u, 0 < m \leq 2^n$

de plus  $(n, m)$  est l'unique couple tel que  $u$  s'écrit ainsi et  $m \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$

On distingue deux cas :

#### 1<sup>ier</sup> cas

Soit  $i = n$  et  $j \neq m$  et on a alors :

$$I_r = \left[ \frac{j}{2^i}, \frac{2j+1}{2^{i+1}} \right] \text{ et } I_u = \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^{n+1}} \right].$$

Ainsi  $I_r \cap I_u = \emptyset$ , et donc

$$\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = \int_{I_r \cap I_u} h_r(t) h_u(t) dt = 0.$$

#### 2<sup>ième</sup> cas

Soit  $i \neq n$  et  $j = m$  on distingue encore deux sous cas :

1<sup>ier</sup> sous cas: soit  $I_r \cap I_u = \emptyset$ ; et on est ramené au premier cas

**2<sup>ième</sup> sous cas:** soit  $I_r \cap I_u \neq \emptyset$ ; et dans ce cas on est ramené au premier cas, les rappels sur les intervalles dyadiques(2.2)justifient que l'un des deux intervalles est inclus dans la moitié de l'autre supposons par exemple sans perte de généralité que  $n < i$ ,  $I_r$  d'amplitude  $2^{-j}$  et  $I_u$  d'amplitude  $2^{-n}$ . Alors  $I_r$  est inclus dans la moitié de  $I_u$ . En particulier,  $h_u(t)$  est constante sur  $I_r$

égal à 1 ou  $-1$ :notons  $c$  cette valeur

$$\begin{aligned} \langle h_r(t), h_u(t) \rangle &= \int_{I_r \cap I_u} h_r(t), h_u(t) dt \\ &= \int_{I_r} h_r(t), h_u(t) dt \\ &= c \int_{I_r} h_r(t) dt \\ &= c \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc pour tout  $r$  et  $u$  dans  $\mathbb{N}$ , on a

$$\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = \int_0^1 h_r(t) h_u(t) dt = \begin{cases} 2^{-i} & \text{pour } r = u = 2^i + j - 1 \\ 0 & \text{pour } r \neq u \end{cases} .$$

1. **La famille des ondelettes de Haar**  $\{h_r\}_{r \in \mathbb{N}}$  **forme une base Hilbertienne de**  $L^2[0, 1[$ .

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = 2^n - 1$*

$$\text{Vect}\{h_r(t), r = 0, 1, \dots, m\} = \text{Vect}\{\chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}, k = 0, 1, \dots, m\}.$$

avec

*Vect: enveloppe linéaire (ensemble des combinaisons linéaires) des  $h_r(t)$ ;*

$\chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$  : fonction caractéristique de  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ .

D'après le lemme(3), le système de Haar est orthogonal. Il reste à prouver qu'il est complet, c'est à dire montrer la densité suivante :

$$\overline{\text{Vect}\{h_r(t), r = 0, 1, \dots, m\}} = L^2[0, 1].$$



Soit  $f \in C^0([0, 1])$ , on définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[ ,$$

Alors on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[ ,$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq \sup_{|x-y| \leq \frac{1}{2^n}} |f(x) - f(y)| = f\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

car  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  donc uniformément continue sur ce segment.

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [0; 1[, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

puis

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{2^n} \leq \delta$$

par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{|x-y| \leq \frac{1}{2^n}} |f(x) - f(y)| = f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

Enfin on utilise la densité des fonctions continues dans  $L^2([0, 1])$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

## 2. Toute fonction de $L^2[0, 1[$ peut être approcher par des combinaisons linéaires des ondelettes de Haar (série de Haar).

D'après la propriété précédente, toute fonction  $f$  à carrée intégrable sur l'intervalle  $[0, 1]$ , peut être développer en série de Haar de la manière suivante :

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r h_r(t), \tag{2.12}$$

avec

$$a_r = \langle f, h_r \rangle, \tag{2.13}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire dans  $L^2([0, 1])$ .

La série(2.12) contient un nombre infini de termes. Or, pour le calcul numérique, nous

avons besoin d'une somme finie. On procède donc à une troncature, à savoir

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{k-1} a_r h_r(t). \quad (2.14)$$

**3. Il existe une relation entre la fonction échelle (ondelette père)  $h_0$  et l'ondelette mère  $h_1$  :**

$$h_1(t) = h_0(2t) - h_0(2t - 1). \quad (2.15)$$

(2.15) est dite relation d'échelle.

# Chapitre 3

## La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre une équation intégrale. La méthode de la matrice opérationnelle d'intégration est l'une des méthodes qui permet de convertir cette équation intégrale à une équation algébrique simple à résoudre.

### 3.1 La matrice de Haar

**Définition 14** On définit la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{k \times k}$  en tout point de colocation  $t_i = \frac{(2i-1)}{2m}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  par:

$$\widehat{\Phi}_{k \times k} = \begin{bmatrix} h_0(\frac{1}{2k}) & h_0(\frac{3}{2k}) & \cdots & h_0(\frac{2k-1}{2k}) \\ h_1(\frac{1}{2k}) & h_1(\frac{3}{2k}) & \cdots & h_1(\frac{2k-1}{2k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k(\frac{1}{2k}) & \cdots & \cdots & h_k(\frac{2k-1}{2k}) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

**Exemple 5** Pour  $k = 2$ , on a

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} h_0(\frac{1}{4}) & h_0(\frac{3}{4}) \\ h_1(\frac{1}{4}) & h_1(\frac{3}{4}) \end{bmatrix},$$

on utilise la formule (2.4), à savoir

$$\begin{cases} h_0(t) = h_0(\frac{1}{4}) = h_0(\frac{3}{4}) = 1, 0 \leq t < 1 \\ h_1(\frac{1}{4}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ h_1(\frac{3}{4}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases},$$

d'où

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 4$  on a

$$\begin{cases} h_0(\frac{1}{8}) = h_0(\frac{3}{8}) = h_0(\frac{5}{8}) = h_0(\frac{7}{8}) = 1 \\ h_1(\frac{1}{8}) = h_1(\frac{3}{8}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ h_1(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{7}{8}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} h_2(\frac{1}{8}) = h_1(\frac{1}{4}) = 1, i = j = 1 \\ h_2(\frac{3}{8}) = h_1(\frac{3}{4}) = -1, i = j = 1 \\ h_2(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{5}{4}) = 0, t > 1 \\ h_2(\frac{7}{8}) = h_1(\frac{7}{4}) = 0, t > 1 \end{cases},$$

de plus

$$\begin{cases} h_3(\frac{1}{8}) = h_1(-\frac{3}{4}) = 0, t < 0, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{3}{8}) = h_1(-\frac{3}{4}) = 0, t < 0, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{1}{4}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2}, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{7}{8}) = h_1(\frac{3}{4}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1, i = 1, j = 2 \end{cases},$$

alors

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 8$  en effet

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 11** La matrice de Haar contient beaucoup de zéros ,en effet

La matrice de Haar	le nombre d'éléments	le nombre des zéro	Pourcentage des zéro
$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}$	64	32	50%
$\widehat{\Phi}_{16 \times 16}$	256	176	68.75%
$\widehat{\Phi}_{32 \times 32}$	1024	832	81.25%

## 3.2 L'inverse de la matrice de Haar

Pour calculer l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{k \times k}$ , on applique l'expression suivante:

$$\widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1} = \frac{1}{k} \widehat{\Phi}_{k \times k}^T Q_{k \times k} = \frac{1}{k} \widehat{\Phi}_{k \times k}^T \text{diag}(1, 1, 2, 2, \underbrace{2^2, \dots, 2^2}_{2^2}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{2^3}, \dots, \underbrace{\frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{2}}_{\frac{k}{2}}), \quad (3.2)$$

où

$$Q_{k \times k} = \begin{bmatrix} I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 2I_2 & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 2^{p-1}I_{2^{p-1}} \end{bmatrix}.$$

et

*diag* :matrice diagonale

**Exemple 6** Pour  $k = 2$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{2 \times 2}$  est donné par:

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_{2 \times 2}^T Q_{2 \times 2},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

d'où

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 4$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{4 \times 4}$  est donné par

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1} = \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_{4 \times 4}^T Q_{4 \times 4}.$$

En effet,

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 8$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{8 \times 8}$  est donné par

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}^{-1} = \frac{1}{8} \widehat{\Phi}_{8 \times 8}^T \text{diag}(1, 1, 2, 2, 2^2, 2^2, 2^2, 2^2),$$

en effet

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Le vecteur de coefficient de Haar

D'après (2.14), on peut approcher toute fonction de  $L^2[0, 1]$  comme suit :

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{k-1} a_r h_r(t) = A^T \phi(t). \quad (3.3)$$

où  $A$  est le vecteur des coefficients de Haar défini par :

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T,$$

et  $\phi(t)$  le vecteur des ondelettes de Haar défini par

$$\phi(t) = [h_0, h_1, \dots, h_{k-1}]^T.$$

Pour connaître le vecteur des coefficients de Haar, en tout point de colocation  $t_i = \frac{2k-1}{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , on écrit

$$\left[ f\left(\frac{1}{2k}\right), f\left(\frac{3}{2k}\right), f\left(\frac{5}{2k}\right) \cdots f\left(\frac{2k-1}{2k}\right) \right] = A^T \widehat{\Phi}_{k \times k},$$

alors

$$A^T = \left[ f\left(\frac{1}{2k}\right), f\left(\frac{3}{2k}\right), f\left(\frac{5}{2k}\right) \cdots f\left(\frac{2k-1}{2k}\right) \right] \widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1}. \quad (3.4)$$

**Exemple 7** Si  $y(t) = [-0, 5, -1, 5, 4, 6]$  est une fonction constante par morceaux alors :

$$y(t) = 2h_0(t) - 3h_1(t) + \frac{1}{2}h_2(t) - h_3(t) = A^T \widehat{\Phi}_{4 \times 4}.$$

Les coefficients de Haar  $a_i$  peuvent être obtenus en utilisant directement 3.4 et par inversion de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{4 \times 4}$  on trouve

$$\begin{aligned} A^T &= y(t) \widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1}(t) \\ &= [-0, 5, -1, 5, 4, 6] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[ 2 \quad -3 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \right]. \end{aligned}$$

**Exemple 8** Prenons la fonction de  $L^2[0, 1[$  suivante:

$$f(t) = t^2, 0 \leq t < 1,$$

pour  $k = 4$  on a:

$$\left[ f\left(\frac{1}{8}\right), f\left(\frac{3}{8}\right), f\left(\frac{5}{8}\right), f\left(\frac{7}{8}\right) \right] = \left[ \frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{49}{64} \right].$$

On applique la formule (3.4):

$$A^T = \left[ \frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{49}{64} \right] \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{512} \begin{bmatrix} 168 & -128 & -32 & -96 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des coefficients de Haar est

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,328 & -0,25 & 0,0625 & -0,1875 \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Intégration de l'ondelette de Haar

Nous définissons l'intégral de l'ondelette de Haar comme suit

$$h_0(t) = 1 \Rightarrow \int_0^t h_0(x) dx = t, \forall 0 \leq t < 1$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 h_1(t) dt = \begin{cases} t & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$



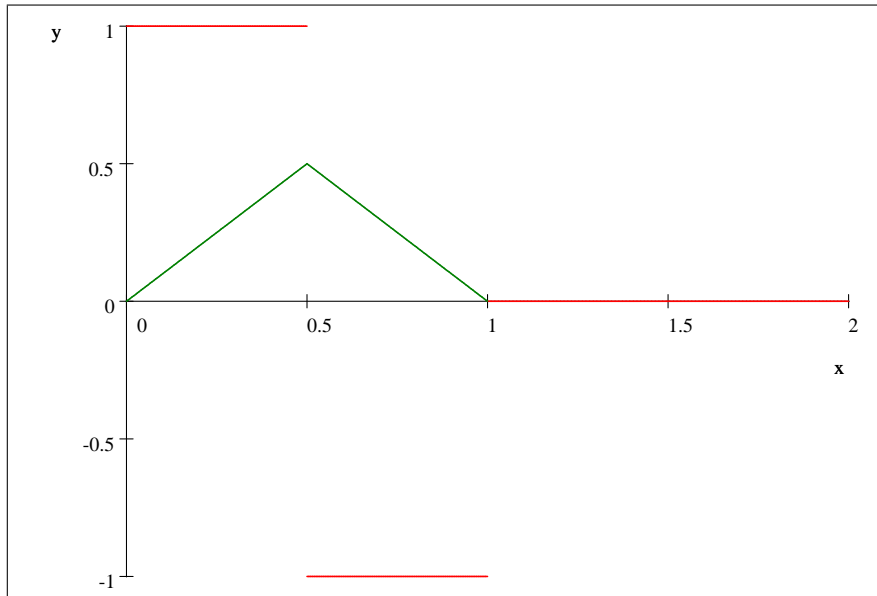


Fig8 Ondelette de Haar  $h_1(t)$  et l'intégrale correspondante

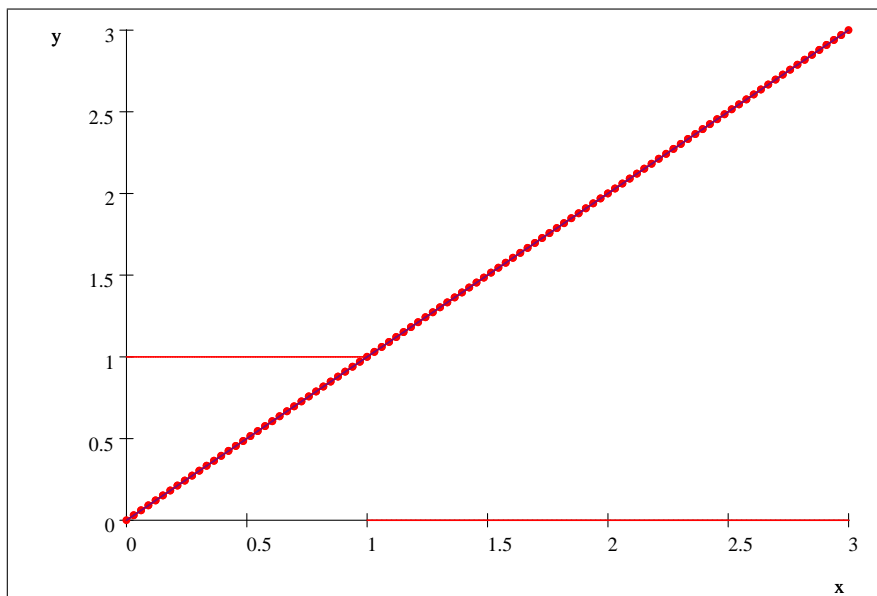


Fig7Ondelette de Haar  $h_0(t)$  et l'intégrale correspondante

En général l'intégrale d'une ondelette de Haar est définie comme:

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}} \\ -1 & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est définie par:

$$\int_0^t h_r(x) dx = \begin{cases} t - J_1, & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}} \\ J_0 - t, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0 \end{cases} . \quad (3.5)$$

Dans la suite de notre travail on calcul cette intégrale par une méthode numérique qui basée sur les matrices de Haar.

### 3.5 Approximation de l'intégral du vecteur de Haar

Prenons le vecteur de Haar d'ordre 4

$$\phi(t) = [h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)].$$

Les intégrales des quatre ondelettes de Haar peuvent être exprimées comme :

$$\int_0^t h_0(x)dx = t, 0 \leq t < 1 \simeq \frac{1}{8} [ 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 ]$$

car

$$\int_0^t h_r(x)dx = t \simeq a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + a_3 h_3(t),$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 \int_0^1 t h_0(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ a_1 &= 2^0 \int_0^1 t h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = -\frac{2}{8} \\ a_2 &= 2^1 \int_0^1 t h_2(t) dt = 2 \left( \int_0^{\frac{1}{4}} t dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t dt \right) = -\frac{1}{8} \\ a_3 &= 2^1 \int_0^1 t h_3(t) dt = 2 \left( \int_0^{\frac{3}{4}} t dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 t dt \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

a la fin

$$t \simeq \frac{4}{8}[1, 1, 1, 1] - \frac{2}{8}[1, 1, -1, -1] - \frac{1}{8}[1, -1, 0, 0] - \frac{1}{8}[0, 0, 1, -1],$$

$$t \simeq \frac{1}{8}[1, 3, 5, 7],$$

$$\int_0^t h_1(t)dx = \left\{ \begin{array}{l} t, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 ],$$

par ce que

$$\int_0^t h_1(t) dx \simeq a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + a_3 h_3(t),$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt = \frac{2}{8}, \\ a_1 &= 2^0 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt \right) = 0 \\ a_2 &= 2^1 \left( \int_0^{\frac{1}{4}} t dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t dt \right) = -\frac{1}{8} \\ a_3 &= 2^1 \left( \int_0^{\frac{3}{4}} (1-t) dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 (1-t) dt \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t h_1(x) dx &\simeq \frac{2}{8}[1, 1, 1, 1] - \frac{1}{8}[1, -1, 0, 0] + \frac{1}{8}[0, 0, 1, -1] \\ &\simeq \frac{1}{8}[1, 3, 3, 1]. \end{aligned}$$

De même façon , nous obtenue les approximations d'autres on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t h_2(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t, 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - t, \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [1 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \int_0^t h_3(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ 1 - t, \frac{3}{4} \leq t < 1 \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [0 \ 0 \ 1 \ 1] \end{aligned}$$

Ainsi on trouve

$$\int_0^t \phi_4(x) dx \simeq \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.6 La matrice opérationnelle d'intégration

L'intégration de vecteur de ondelette de Haar  $\phi$  peut être développer avec les série de Haar comme

$$\int_0^t \phi(t) \approx P \phi(t) \quad (3.6)$$

avec  $P$  la matrice opérationnelle d'intégration de ondelette de Haar

On peut définir

$$P = P_{k \times k} = \left\langle \int_0^t \phi(x) dx, \phi(t) \right\rangle = \int_0^1 \int_0^t \phi(x) \phi(t) dx dt,$$

On obtient la matrice  $P_{k \times k}$  avec

$$P_{k \times k} = \left[ \int_0^t \phi(x) dx \right] \widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1}. \quad (3.7)$$

**Exemple 9** Pour  $k = 2$  on a

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 \int_0^1 t h_0(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ a_1 &= 2^0 \int_0^1 t h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

nous avons

$$\int_0^t h_0(x) dx = t \approx a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt = \frac{2}{8} \\ a_1 &= 2^0 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt \right) = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^t h_1(x) dx &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \int_0^t \Phi_2(x) dx &\approx \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$P_{2 \times 2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

La matrice opérationnelle d'intégration des ondelettes de Haar  $P_{4 \times 4}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{4 \times 4} &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 12** La matrice opérationnelle d'intégration contient beaucoup de zéros.

### 3.6.1 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire

La méthode de la matrice opérationnelle est l'une des méthodes numériques d'optimisation la plus importante pour résoudre les équations différentielles ou intégrales; cette méthode permet de réduire ces équations par des équations algébriques. On va s'intéresser dans cette section à la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar.

**La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction à plusieurs blocs (FPB)**

**Définition 15 (Formule de Kilicman and Al Zhour)**

On note la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction **(FPB)**  $F^\alpha$  définie par

$$(I^\alpha B_m)(t) \approx F^\alpha B_m(t), \quad (3.8)$$

avec

$$F^\alpha = \frac{1}{m^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où

$$\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}. \quad (3.10)$$

**Exemple 10** La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction à plusieurs blocs d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Pour  $k = 2$

$$F^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 2,29 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 8$

$$F^{0,5} = \begin{bmatrix} 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 & -0,76 & 0 \\ 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 & -0,76 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 13** Comme l'ondelette de Haar est constante alors on peut l'écrire sous la forme d'une fonction **FPB**.

$$h_r(t) = \widehat{\Phi}_{n \times n} B_m(t), \quad (3.11)$$

où

$$B_n(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) & b_1(t) & \dots & b_i(t) & \dots & b_{m-1}(t) \end{bmatrix}.$$

### 3.6.2 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar

La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar est donnée par

$$(I^\alpha \phi)(t) \approx P_{m \times m}^\alpha \phi(t), \quad (3.12)$$

avec

$P_{m \times m}^\alpha$  la matrice carré  $m \times m$  et dite la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar.

On peut écrire la série de Haar comme fonction(**FPB**) d'après (3.8)et(3.11)on trouve :

$$\begin{aligned}
(I^\alpha \phi)(t) &\approx (I^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m} B_m(t))(t) \\
&= \widehat{\Phi}_{m \times m} (I^\alpha B_m)(t) \\
&\approx \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha B_m
\end{aligned}$$

d'où

$$P_{m \times m}^\alpha \phi(t) = P_{m \times m}^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha B_m$$

La matrice opérationnelle d' intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar  $P_{m \times m}^\alpha$  et donnée par :

$$P_{m \times m}^\alpha = \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m}^{-1} . \quad (3.13)$$

**Exemple 11** La matrice opérationnelle d' intégration d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}^{0,5}$  :

$$\begin{aligned}
P_{2 \times 2}^{0,5} &= 0,23 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2,29 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,49 & -0,03 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Application

### 4.1 Equation différentielle de Torvik

Notre but est de montrer l'importance de la matrice opérationnelle pour résoudre des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire. Cette méthode permet de réduire ce système à une équation algébrique.

L'équation différentielle de Torvik qui définit le mouvement de prolongement d'une plaque solide avec :

$m$  : la masse,

$\mu$  : la densité,

$\rho$  : la viscosité (le glissement),

$y(t)$  : le déplacement de cette plaque.

On considère l'équation différentielle de Torvik

$$\begin{cases} Ay''(t) + BD^{\frac{3}{2}}y(t) + Cy(t) = f(t), t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

avec  $A, B, C$  des constantes telles que

$$A = m, B = 2A\sqrt{\mu\rho}, C = k$$

Soit le système

$$\begin{cases} y''(t) + 0,5D^{\frac{3}{2}}y(t) + 0,5y(t) = f(t), t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec



$$f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases},$$

où

$$f(t) = 8(u(t) - u(t - 1)),$$

et  $u(t)$  est la fonction d' Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Solution exacte

Le théorème existence et l'unicité de la solution exacte de système (4.1) est donné dans la référence[5]

La solution exacte de l'équation (4.1) s'écrit

$$y(t) = u(t) \left[ 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{1}{2}\right)^r t^{2r+1} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}r+2}^r \left(\frac{-1}{2} t^{\frac{1}{2}}\right) \right],$$

où

$$E_{\lambda, \mu}^r = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda r + \mu)}, r \in \mathbb{N}.$$

#### 4.1.1 Solution numérique via la matrice opérationnelle d' intégration

Nous allons utiliser une méthode de résolution basée sur le développement en base d'ondelette de Haar et sur la matrice opérationnelle l'intégration et de la dérivation fractionnaire

vue dans le chapitre 2 et 3 les fonction  $y(t)$  et  $f(t)$  peuvent s'écrit sous forme d'une série de Haar comme suit :

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{r=0}^N a_r h_r(t) \\ f(t) = \sum_{r=0}^N c_r h_r(t) \end{cases}$$

ou bien sous forme matricielle

$$\begin{cases} y(t) = A^T \widehat{\Phi}_{m \times m} \\ f(t) = B^T \widehat{\Phi}_{m \times m} \end{cases}$$

avec

$A^T$  le vecteur de coefficients de Haar inconnue

$B^T$  le vecteur de coefficients de Haar connu.

Par l'intégration de l'équation (4.1), on trouve

$$\int_0^t \int_0^t y''(t) dt dt + 0,5 \int_0^t \int_0^t D^{\frac{3}{2}} y(t) dt dt + 0,5 \int_0^t \int_0^t y(t) dt = \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt \quad (4.2)$$

En vertu du calcul fractionnaire

$$\begin{cases} I^2 D^2 y(t) = y(t) \\ I^2 D^{\frac{3}{2}} y(t) = I^{0,5} y(t) \end{cases}$$

d'après la relation (4.2), on trouve

$$y(t) + 0,5 I^{1,5} y(t) + 0,5 \int_0^t \int_0^t y(t) dt dt = \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt \quad (4.3)$$

En vertu de (3.6), on obtient:

$$\begin{cases} I^{1,5} y(t) = A^T P_{m \times m}^{0,5} \\ I^2 y(t) = A^T P_{m \times m}^2 \end{cases}$$

Maintenant on peut approximer équation (4.3) sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{aligned} A^T \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 A^T P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 A^T P_{m \times m}^2 &= B^T P_{m \times m}^2 \\ A^T \left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 P_{m \times m}^2 \right) &= B^T P_{m \times m}^2 \\ A^T &= B^T P_{m \times m}^2 \left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 P_{m \times m}^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

avec  $B^T$  le vecteur de coefficients de Haar associé à  $f(t)$ .

On peut calculer le vecteur de coefficient de Haar par la formule (2.9)

$$B^T = [f(\frac{1}{4}), f(\frac{3}{4})] \widehat{\Phi}_{2 \times 2} = [16, 0].$$

La matrice d'intégration de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}$  étant

$$P_{2 \times 2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$P_{2 \times 2}^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice opérationnelle d'intégration de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}$  d'ordre  $\alpha = 0,5$  étant

$$P_{2 \times 2}^{0,5} = \begin{bmatrix} 0,49 & -0,03 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5P_{m \times m}^{0,5} + 0,5P_{m \times m}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,015 \\ 0,015 & -0,015 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,125 & -0,031 \\ 0,031 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,365 & 0,954 \\ 1,046 & -1,015 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par inversion matricielle, on trouve:

$$\left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5P_{m \times m}^{0,5} + 0,5P_{m \times m}^2 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4259 & 0,4003 \\ 0,4389 & -0,5727 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^T &= [16 \ 0] \times \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4259 & 0,4003 \\ 0,4389 & -0,5727 \end{bmatrix} \\ &= [2,1424 \ 1,0284]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\widehat{\Phi}_{2 \times 2} \\
&= \begin{bmatrix} 2,1424 & 1,0284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3,1707 & 1,1140 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Il faut choisir  $n$  très grand pour avoir une meilleure approximation de la solution du problème (4.1).

### Interprétation graphique de la solution

Dans la figure ci-dessous, on a représenté la solution numérique notée  $y_{app}$  et la solution exacte notée  $y_{ext}$ . Il apparaît clairement que  $y_{ext}$  approche  $y_{app}$  d'une manière assez satisfaisante.

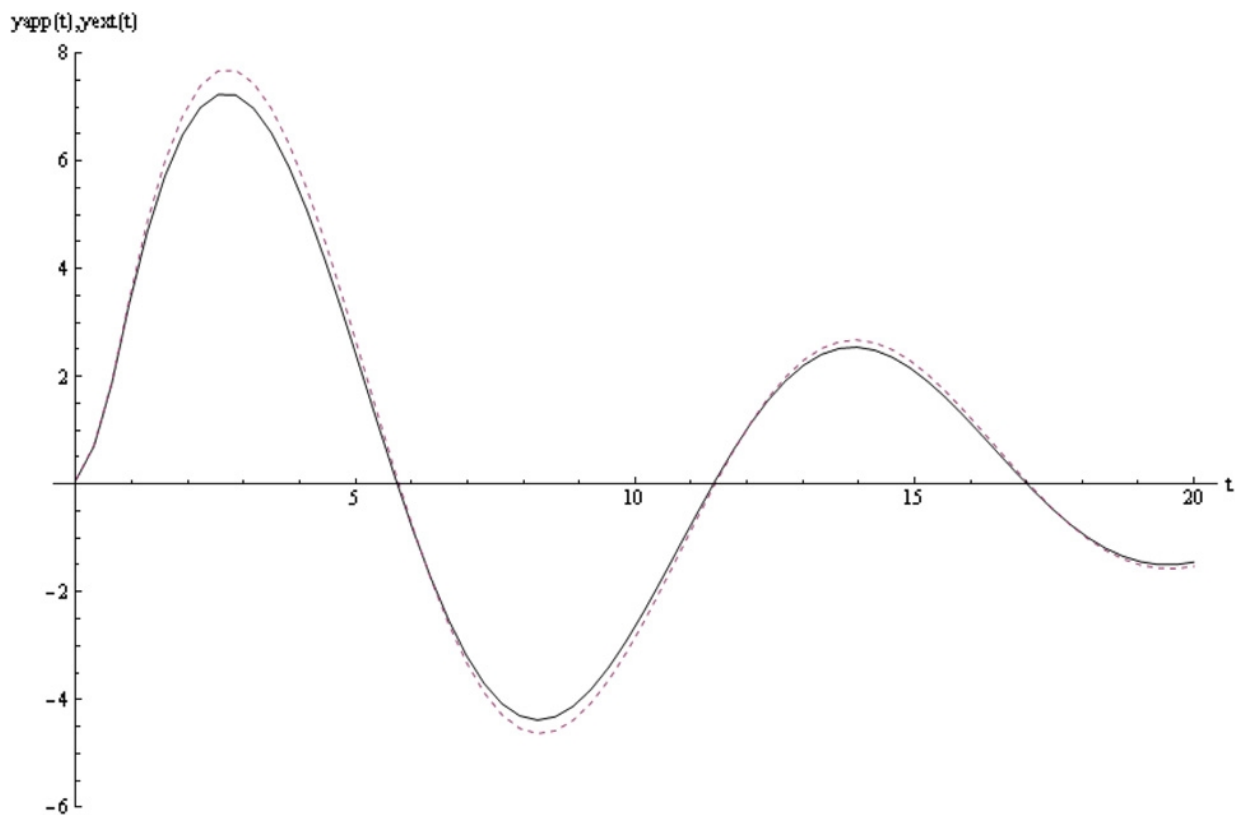


Figure 4-1: FIG la solution exacte  $y_{ext}(t)$  et la solution d'approximation  $y_{app}(t)$

# Conclusion

Notre but était de résoudre les équations différentielles fractionnaire par une méthode numérique qui est basée sur la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire. L'intérêt de cette méthode réside dans la réduction des équation différentielles de équations algébriques linéaire

Cette méthode peut être utiliser pour résoudre les équations différentielles linéaires et non linéaire d'ordre fractionnaire .

L'exemples de l' équation différentielle de Torvik montrer la puissance de cette méthode pour résoudre des différent problèmes.

# Bibliographie

[1] A. Kilicman, Z.A.A. Al Zhour, Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications, *Appl. Math. Comput.* 187 (2007) 250–265.

[2] G.K. Wallace, The JPEG Still Picture Compression Standard, *Communications of the ACM*, vol.34, no 4, (avril 1991), 31-44.

[3] J. Patrick. *Second Generation Wavelets and Applications* by Maarten H. Jansen, Patrick J. Oonincx

[4] S. Saha Ray, On Haar wavelet operational matrix of general order and its application for the numerical solution of fractional Bagley Torvik equation Rourkela (2011) 769 008, India.

[5] Y. Weiwei Zhao b, Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations, Nanjing(2010) 210044, PR China.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Calcul fractionnaire</b>	<b>2</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	2
1.1.1 Quelques Définitions . . . . .	2
1.2 Fonction spécifiques de calcul fractionnaire . . . . .	4
1.2.1 La fonction Gamma . . . . .	4
1.2.2 La fonction Bêta . . . . .	5
1.3 Théorie de Riemann-Liouville . . . . .	5
1.3.1 Intégrales de Riemann-Liouville . . . . .	6
1.3.2 Dérivée de Riemann -Liouville . . . . .	10
<b>2 Les ondelettes</b>	<b>13</b>
2.1 Base d'ondelette . . . . .	14
2.1.1 Analyse Multi Résolution (AMR) . . . . .	15
2.2 L' ondelette de Haar . . . . .	15
2.2.1 Propriétés des ondelettes de Haar . . . . .	18
<b>3 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire</b>	<b>22</b>
3.1 La matrice de Haar . . . . .	22
3.2 L'inverse de la matrice de Haar . . . . .	24
3.3 Le vecteur de coefficient de Haar . . . . .	26
3.4 Intégration de l'ondelette de Haar . . . . .	27
3.5 Approximation de l'intégral du vecteur de Haar . . . . .	29
3.6 La matrice opérationnelle d'intégration . . . . .	31

3.6.1	La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire . . . . .	32
3.6.2	La matrice opérationnelle d' intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>35</b>
4.1	Equation différentielle de Torvik . . . . .	35
4.1.1		
	$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad \textit{ailleurs} \end{cases} .$	
	Solution exacte . . . . .	36
4.1.2	Solution numérique via la matrice opérationnelle d' intégration . . . . .	36
	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>



## **Introduction**

La théorie du calcul fractionnaire et ses applications joue un rôle très important pour résoudre les équations différentielles ou intégrales d'ordre fractionnaire.

La matrice opérationnelle d'ondelette de Haar est l'une des méthodes qui donne une solution numérique à ces équations.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.

On définit dans le premier chapitre, les notions principales de la théorie de calcul intégral fractionnaire et de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann -Louville. Dans le deuxième chapitre, on introduit les ondelettes de Haar et leurs propriétés importantes comme la série de Haar ,la matrice de Haar,..etc.Dans le troisième chapitre ,on définit l'intégral de l'ondelette de Haar puis on cherche une approximation de cet intégral par la matrice opérationnelle .Ensuite on définit la matrice opérationnelle d'ordre fractionnaire de l' ondelette de Haar qui nous aidera à résoudre les équations différentielles ou intégrales.

Dans le dernière chapitre , on utilise toutes les notions définies dans les chapitres précédents pour étudier un problème physique par la résolution d'une équation différentielle.

## **Remerciements**

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et l'effort pour finir ce travail.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Sidi Mohamed Bahri mon encadreur qui m'a guidé dans ce travail, pour son aide continue, ses encouragements sans cesse et ses conseils précieux .

Je n'oublierai pas de remercier également Mr S. Gala pour avoir accepté de présider mon jury. Je tiens aussi à remercier Melle Dj Bensikaddour pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématique et informatique à l'université Abdelhamid Ibn Badis -Mostaganem. Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont poussé vers la réussite, en particulier:

mes parents, mes frères et sœurs.

# Chapitre 1

## Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire devient de plus en plus important dans plusieurs domaines de la science et la technologie. Dans ce chapitre, on introduit la théorie de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann -Louville qui est la plus connue et la plus répandue.

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Quelques Définitions

Avant d'approfondir notre étude de la théorie du calcul fractionnaire et de l'ondelette de Haar, il est indispensable de définir quelques concepts mathématiques fondamentaux.

**Définition 1 (Fonction mesurable)** *Une fonction mesurable est une fonction continue presque par tout .*

**Définition 2 (Produit scalaire)** *Soit  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables . On définit le produit scalaire de  $f$  et  $g$  par*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

**Définition 3 (Fonctions orthogonales )** *Soit  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables. On dit que  $f$  et  $g$  sont orthogonales si*

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

*En utilisant ce produit scalaire, il est possible de définir une norme et une distance.*

**Définition 4 (Espace  $L^2(X, \mu)$ )** Soit  $X$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini. Nous disons qu'une fonction mesurable  $f$ , définie presque partout dans  $X$ , appartient à  $L^2(X, \mu)$  si l'intégrale

$$\|f\|^2 = \int_X |f(x)|^2 dx$$

est finie.

**Définition 5 (Le produit de convolution)**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , le produit de convolution de  $f$  et  $g$ , notée  $f * g$  est définie par:

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx.$$

**Théorème 1 (Inégalité de Schwartz)** Pour tous vecteurs  $x, y$  dans un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'inégalité suivante est vraie

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 6 (Suite orthonormée)**

Une suite  $(f_n)_{n>0}$  de vecteurs dans  $L^2(X, \mu)$  est dite orthonormée si

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{n,m}$$

avec

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}.$$

**Définition 7 (Fonction à plusieurs blocs)** On définit la fonction à plusieurs blocs (FPB)  $b_i(t)$  par :

$$b_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{i}{m} < t < \frac{(i+1)}{m} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{avec } i = \overline{1, m-1},$$

les fonctions  $b_i(t)$  sont disjointes et orthogonales.

**Théorème 2 (Théorème de Fubini)**

Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $a \leq b$  et  $c \leq d$ ,  $f$  une fonction continue défini par :

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b] \times [c, d]$  et:

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.1)$$

## 1.2 Fonction spécifiques de calcul fractionnaire

Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire.

### 1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières.

#### Définition 8 (La fonction Gamma )

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, (\operatorname{Re} z > 0). \quad (1.2)$$

Le graphe de la fonction  $\Gamma(z)$  pour  $z = x \in \mathbb{R}$  est tracé sur la figure ci-dessous:

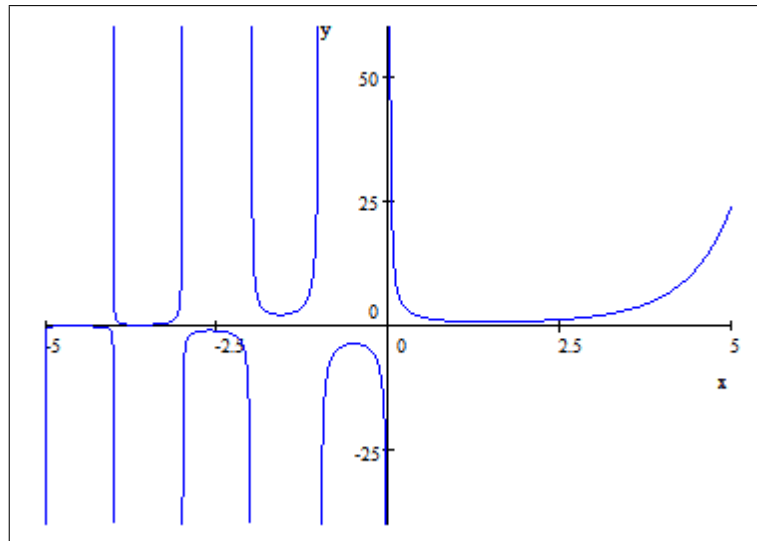


Fig1 La fonction Gamma

#### Les propriétés de la fonction Gamma

1. Une propriété importante de la fonction  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), (\operatorname{Re} z > 0). \quad (1.3)$$

2. La fonction Gamma d' Euler généralise le factoriel ,en effet

$$\Gamma(z + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*, (\text{Re } z > 0). \quad (1.4)$$

3. Si  $-1 < z < 0$  alors  $0 < z + 1 < 1$  donc  $\Gamma(z + 1)$  est bien définie et

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}. \quad (1.5)$$

4.  $\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) = +\infty, \Gamma(1) = 1.$

5. Pour toutes les valeurs entières négatives de  $z$ , la fonction Gamma est infinie, c'est à dire,  $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \dots, \Gamma(-n), \dots$  sont infinies.

## 1.2.2 La fonction Bêta

**Définition 9 ( La fonction Bêta d'Euler )**

*La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante:*

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} t^{y-1} dt, (\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0). \quad (1.6)$$

*La relation entre la fonction Bêta d'Euler et La fonction Gamma d'Euler est donnée par*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (1.7)$$

**Remarque 3** *La formule (1.7) permet de simplifier le calcul de la dérivation fractionnaire et de l'intégration fractionnaire.*

## 1.3 Théorie de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue ,nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville.

### 1.3.1 Intégrales de Riemann-Liouville

#### Intégrales d'ordre arbitraire

On commence par examiner une formule qui donne des primitives successives d'une fonction continue.

Soit  $f$  une fonction continue

$$f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une primitive de  $f$  est donnée par

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left( \int_a^s f(t) dt \right) ds. \quad (1.8)$$

Le théorème 2 de Fubini ramène l'intégrale double (1.8) à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Puis par itération sur  $n$ , on obtient

$$((I_a^n f)x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

**Définition 10** Soit  $f$  une fonction continue  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle intégrale de Riemann-Liouville de  $f$  l'intégrale suivante:

$$((I_a^\alpha f)x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est un réel (ou même complexe) convenablement choisi .

**Remarque 4** La formule (1.9) est (du moins formellement) une généralisation de la nième primitive avec l'ordre de "primitivation"  $\alpha$  non entier.

**Exemple 1** Considérons la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = (x - a)^\beta, \beta > 0.$$

L'intégrale de Riemann -Liouville de  $f$  est donné par:

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (x - a)^\beta dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement de variable suivant

$$t = a + (x - a)\tau,$$

d'où

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (x - a)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

après utilisation de la relation (1.3).

Pour  $\alpha = 1$ , on a

$$\begin{aligned} I_a^1 (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)} (x - a)^\beta \\ &= \frac{(x - a)^\beta}{\beta + 1} \end{aligned}$$

à cause de la relation(1.3).

**Proposition 5** Soit  $f$  une fonction continue à support compact i.e.  $f \in C^0([a, b])$ .

1. Pour  $\alpha, \beta$  complexes tels que  $\text{Re } \alpha > 0$  et  $\text{Re } \beta > 0$  on a

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f. \quad (1.11)$$

2. Pour  $\text{Re } \alpha > 1$  on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f. \quad (1.12)$$



3. Et pour  $\text{Re } \alpha > 0$  on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x). \quad (1.13)$$

**Preuve.**

1. La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d' Euler ( 1.6).

En effet

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) \left[ \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt. \end{aligned}$$

On pose  $s = t + (x-t)\tau$ , alors

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendante d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler (1.3) pour  $z = \alpha - 1$ :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

3. Pour la dernière identité , soit  $f \in C^0([a, b])$  alors

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

et grâce à l'exemple1, on a

$$(I_a^1 f)(x) = \frac{(x-a)^\beta}{\beta+1} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 1$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\beta}{\beta+1} \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt
\end{aligned}$$

D'une part,  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc pour tout  $x$  et  $t$  dans  $[a, b]$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt &\leq \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} (|f(t)| + |f(x)|) dt \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)| \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} dt, \forall x \in [a, b] \\
&= 2M \left( \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right) \text{ avec } M = \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)].
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\alpha$  vers  $0^+$ , on obtient pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon$$

c'est à dire pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon,$$

Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

□

### 1.3.2 Dérivée de Riemann -Liouville

**Définition 11** Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On appelle dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann -Liouville la fonction définie par

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(x)]. \quad (1.14)$$

avec  $I_a^{m-\alpha}$  l'opérateur intégral fractionnaire (1.9).

**Exemple 2** Soit  $f(x) = (x-a)^\beta$  avec  $\beta > 0$ .

On a :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \left( \frac{d}{dx} \right)^m \left[ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (x-a)^{\beta+m-\alpha} \right]$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^m (x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} (x-a)^{\lambda-m}.$$

Il est clair que la formule de dérivation (1.14) se réduit pour  $\alpha = 1$  à

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx} (x-a)^\beta.$$

Dans l'exemple 1, si on prend  $\beta = 0$ , on obtient le résultat suivant :

$$D_a^\alpha 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

**Remarque 6** La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

**Lemme 1** Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$  et  $f$  une fonction vérifiant  $D_a^\alpha f = 0$  (appartenant au noyau de l'opérateur  $D_a^\alpha$ ).

Alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m} \quad (1.15)$$

où les  $c_j$  sont des constantes quelconques.

**Preuve.** En partant de la relation

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0,$$

on a d'abord

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$$

et par application de l'opérateur integral fractionnaire  $I_a^\alpha$  on obtient :

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha ((x-a)^j).$$

En tenant compte de la relation (1.5), on aura

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{\alpha+j}.$$

Ensuite par dérivation classique et en utilisant le fait que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)} (x-a)^{\lambda-m}.$$

on aura le résultat. □

**Proposition 7** L'opérateur de dérivation de Riemann Liouville  $D_a^\alpha$  possède les propriétés suivantes:

1.  $D_a^\alpha$  est linéaire.
2.  $\lim_{\alpha \rightarrow > m-1} (D_a^\alpha f)(x) = f^{(m-1)}(x)$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow < m} (D_a^\alpha f)(x) = f^m(x)$ .
3.  $D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$ .
4.  $[(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)}$ .

**Corollaire 8** Si  $0 < \alpha < 1$  et  $f$  de classe  $C^1([a, b])$ , alors

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)f = f. \quad (1.16)$$

**Lemme 2** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha > 0$ , alors:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) = 0. \quad (1.17)$$

# Chapitre 2

## Les ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions simples utilisées pour décomposer une fonction réelle (signal) en une combinaison linéaire de fonctions élémentaires: ondelettes de base. Il existe plusieurs familles d'ondelettes : Ondelettes de Haar, Daubechies, Shannon, CAS, etc. Dans ce chapitre, nous présenterons la plus ancienne et la plus simple de toutes les familles d'ondelettes : les ondelettes de Haar .

**Définition 12** Une ondelette est une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  de moyenne nulle c-à-d

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0, \quad (2.1)$$

de plus

$$\|\psi\|_{L^2} = 1, \quad (2.2)$$

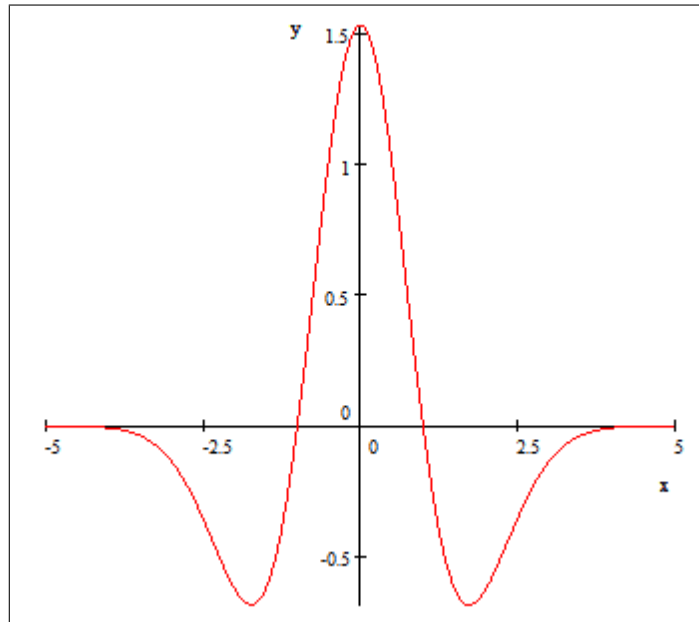
$\psi$  est dite ondelette mère.

### Remarques

1. La condition (2.1) signifie que  $\psi$  est oscillante et de moyenne nulle.
2. La condition (2.2) signifie que  $\psi^2$  ne s'annule pas.
3.  $\psi$  peut être à valeurs complexes.
4. Il existe de nombreuses ondelettes mères  $\psi$  possibles.

**Exemple 3** Ondelette "Chapeau Mexicain"

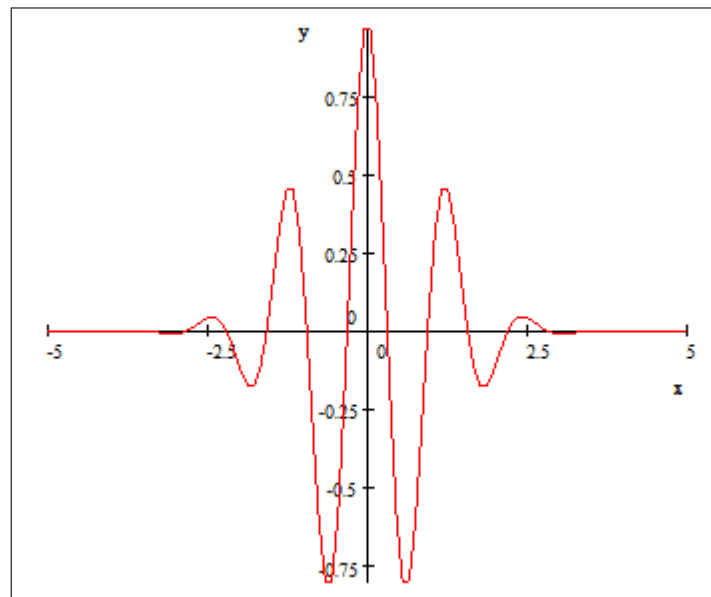
$$\psi(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{\frac{1}{4}} \right) (1 - t^2) \exp\left( \frac{-t^2}{2} \right).$$



*Fig 2 Ondelette de Chapeau Mexicain*

*Ondelette de Morlet*

$$\psi(t) = \exp\left(-t \left(\frac{t}{2}\right)\right) \cos(5t).$$



*Fig3 Ondelette de Morlet*

## 2.1 Base d'ondelette

Les ondelettes de base sont des fonctions obtenue à partir de l'ondelette mère  $\psi(t)$  avec les supports dans les domaines fréquentiel et spatial (où temporel) sont bornés.

Localisée et oscillante,  $\psi(t)$  engendre les autres ondelettes  $\psi_{a,b}(t)$  lorsqu'elle est contractée et translatée par un paramètre  $b$ . Les ondelettes ainsi générées sont définies par:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \text{ avec } a > 0, b \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

où  $a$  est le paramètre d'échelle ou de dilatation et  $b$  le paramètre de translation. Une ondelette est seulement une copie translatée représentée dans une autre échelle d'une fonction unique  $\psi(t)$  appelée ondelette -mère.

Dans le cas où  $a$  et  $b$  sont discrétisés de la manière suivante:

$a = a_0^m$  et  $b = nb_0a_0^m$  avec  $a_0 > 1$  et  $b_0 > 0$  fixés et appartenant à  $\mathbb{Z}$ , alors

$$\psi_{n,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{1}{a_0^m}t - nb_0\right). \quad (2.4)$$

**Remarque 9**  $\psi_{a,b}$  et  $\psi_{n,m}$  sont dites ondelettes filles.

### 2.1.1 Analyse Multi Résolution (AMR)

L'analyse multirésolution a été introduite par Mallat(1989). Cet outil mathématique permet de calculer des approximations successives d'une fonction à des résolutions spatiales différentes.

**Définition 13** On dit que la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces emboîtés de  $L^2(\mathbb{R})$  est une analyse multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  si les conditions suivantes sont vérifiées

1.  $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ .
2.  $f \in V_j$  ssi  $f(2 \cdot) \in V_{j+1}$ .
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .
4.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .
5. Il existe une fonction  $\psi$  en  $V_0$  telle que  $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de  $V_0$ .

## 2.2 L' ondelette de Haar

L' ondelette de Haar est une ondelette créée par *Alfréd Haar* en 1909. C'est la première ondelette connue. Elle est la plus simple à comprendre et à implémenter.



Elle est définie par:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Les ondelettes de Haar de base sont des fonctions dilatées et ou translatées de l'ondelette mère  $h_1$  :

$$h_{i,j}(t) = h_1(2^i t - j + 1), \quad (2.6)$$

avec  $i \in \mathbb{N}$  et  $0 < j \leq 2^n$ .

La famille  $\{h_{i,j}\}_{i,j}$  forme une suite orthonormée dans  $L^2[0, 1[$ .

On peut écrire les ondelettes de Haar de base sous la forme simple suivante :

$$h_{i,j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-2}{2^{i+1}}; \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right[ , \\ -2^{\frac{i}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-1}{2^{i+1}}; \frac{2j}{2^{i+1}} \right[ , \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[. \end{cases} \quad (2.7)$$

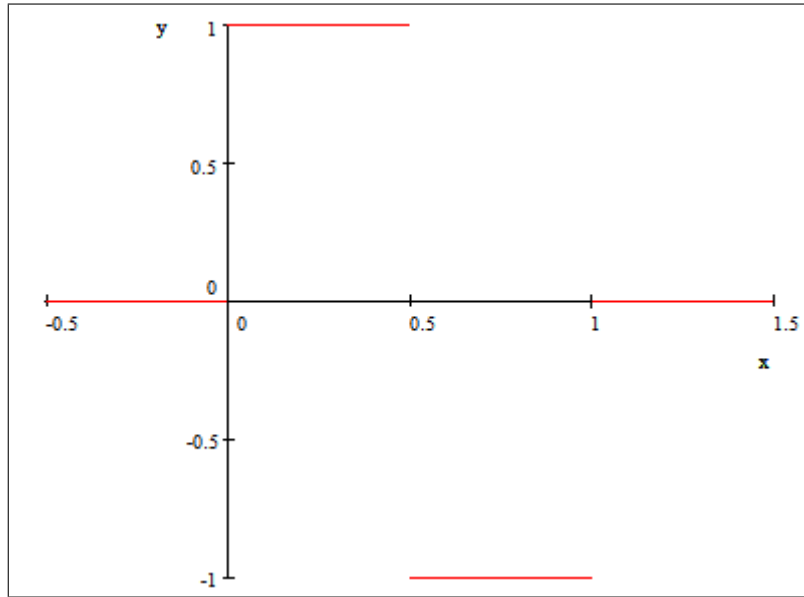


Fig4: Ondelette mère de Haar  $h_1(t)$

Pour faciliter l'exposé, nous allons utilisé les notations simple suivantes :

**Notation 10** Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique couple  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  telque

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^i\}, \quad (2.8)$$

alors, en posant

$$h_r(t) = h_{i,j}(t), \quad (2.9)$$

et

$$J_u = \frac{(j-u)}{2^i} \text{ avec } u = 0, \frac{1}{2}, 1;$$

l'expression (2.7) prend la nouvelle forme suivante:

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -1 & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.10)$$

De même, on définit la fonction échelle de Haar (ondelette père)  $h_0(t)$  par:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.11)$$

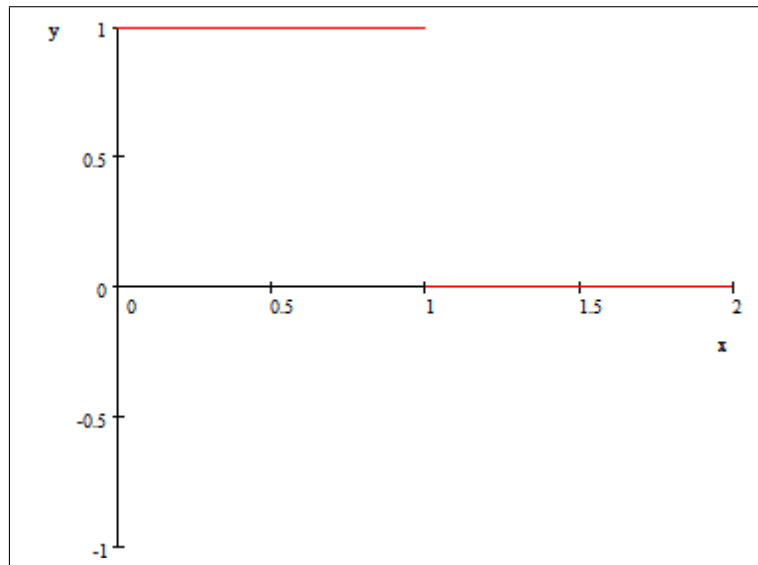


Fig5 Fonction échelle de Haar  $h_0(t)$

Le tableau suivant définit les paramètres  $i$  et  $j$  des huit premières ondelettes de Haar :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
ondelette de Haar	$h_0(t)$	$h_1(t)$	$h_2(t)$	$h_3(t)$	$h_4(t)$	$h_5(t)$	$h_6(t)$	$h_7(t)$
i	0	0	1	1	2	2	2	2
j	0	1	1	2	1	2	3	4

**Exemple 4** L'ondelette de Haar  $h_2(t)$

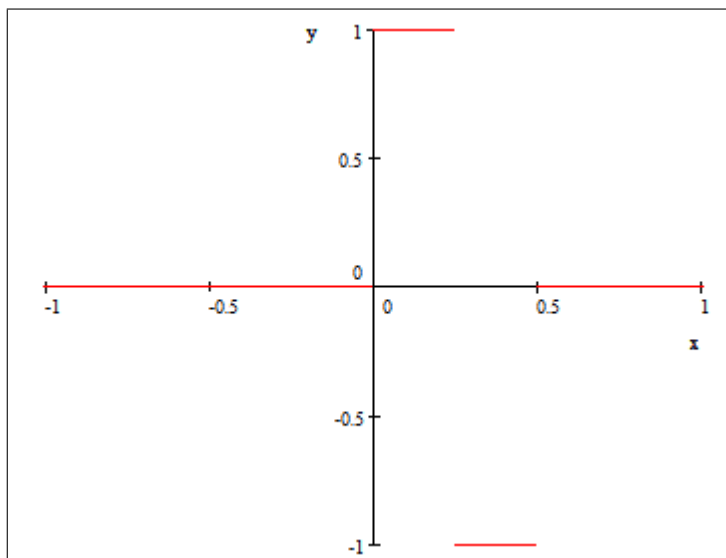


Fig6 Ondelette de Haar  $h_2(t)$

## 2.2.1 Propriétés des ondelettes de Haar

Les ondelettes de Haar ont plusieurs propriétés importantes :

### 1. Les fonction de Haar $h_r(t)$ sont orthogonales .

Par construction de la norme de chaque  $h_r(t)$ ; est  $2^{-i}$  pour tout  $r = 2^i + j - 1$ ; et  $0 < j \leq 2^i$ .

Montons que  $\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = 0$  pour  $r \neq u$ .

on pose  $u = 2^n + m - 1$  avec  $r \neq u, 0 < m \leq 2^n$

de plus  $(n, m)$  est l'unique couple tel que  $u$  s'écrit ainsi et  $m \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$

On distingue deux cas :

#### 1<sup>ier</sup> cas

Soit  $i = n$  et  $j \neq m$  et on a alors :

$$I_r = \left[ \frac{j}{2^i}, \frac{2j+1}{2^{i+1}} \right] \text{ et } I_u = \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^{n+1}} \right].$$

Ainsi  $I_r \cap I_u = \emptyset$ , et donc

$$\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = \int_{I_r \cap I_u} h_r(t) h_u(t) dt = 0.$$

#### 2<sup>ième</sup> cas

Soit  $i \neq n$  et  $j = m$  on distingue encore deux sous cas :

1<sup>ier</sup> sous cas: soit  $I_r \cap I_u = \emptyset$ ; et on est ramené au premier cas

**2<sup>ième</sup> sous cas:** soit  $I_r \cap I_u \neq \emptyset$ ; et dans ce cas on est ramené au premier cas, les rappels sur les intervalles dyadiques(2.2)justifient que l'un des deux intervalles est inclus dans la moitié de l'autre supposons par exemple sans perte de généralité que  $n < i$ ,  $I_r$  d'amplitude  $2^{-j}$  et  $I_u$  d'amplitude  $2^{-n}$ . Alors  $I_r$  est inclus dans la moitié de  $I_u$ . En particulier,  $h_u(t)$  est constante sur  $I_r$

égal à 1 ou  $-1$ :notons  $c$  cette valeur

$$\begin{aligned} \langle h_r(t), h_u(t) \rangle &= \int_{I_r \cap I_u} h_r(t), h_u(t) dt \\ &= \int_{I_r} h_r(t), h_u(t) dt \\ &= c \int_{I_r} h_r(t) dt \\ &= c \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc pour tout  $r$  et  $u$  dans  $\mathbb{N}$ , on a

$$\langle h_r(t), h_u(t) \rangle = \int_0^1 h_r(t)h_u(t)dt = \begin{cases} 2^{-i} & \text{pour } r = u = 2^i + j - 1 \\ 0 & \text{pour } r \neq u \end{cases} .$$

1. **La famille des ondelettes de Haar**  $\{h_r\}_{r \in \mathbb{N}}$  **forme une base Hilbertienne de**  $L^2[0, 1[$ .

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = 2^n - 1$*

$$\text{Vect}\{h_r(t), r = 0, 1, \dots, m\} = \text{Vect}\{\chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}, k = 0, 1, \dots, m\}.$$

avec

*Vect: enveloppe linéaire (ensemble des combinaisons linéaires) des  $h_r(t)$ ;*

$\chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$  : fonction caractéristique de  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ .

D'après le lemme(3), le système de Haar est orthogonal. Il reste à prouver qu'il est complet, c'est à dire montrer la densité suivante :

$$\overline{\text{Vect}\{h_r(t), r = 0, 1, \dots, m\}} = L^2[0, 1].$$

Soit  $f \in C^0([0, 1])$ , on définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[ ,$$

Alors on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[ ,$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq \sup_{|x-y| \leq \frac{1}{2^n}} |f(x) - f(y)| = f\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

car  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  donc uniformément continue sur ce segment.

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [0; 1[, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

puis

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{2^n} \leq \delta$$

par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{|x-y| \leq \frac{1}{2^n}} |f(x) - f(y)| = f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

Enfin on utilise la densité des fonctions continues dans  $L^2([0, 1])$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

## 2. Toute fonction de $L^2[0, 1[$ peut être approcher par des combinaisons linéaires des ondelettes de Haar (série de Haar).

D'après la propriété précédente, toute fonction  $f$  à carrée intégrable sur l'intervalle  $[0, 1]$ , peut être développer en série de Haar de la manière suivante :

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r h_r(t), \tag{2.12}$$

avec

$$a_r = \langle f, h_r \rangle, \tag{2.13}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire dans  $L^2([0, 1])$ .

La série(2.12) contient un nombre infini de termes. Or, pour le calcul numérique, nous

avons besoin d'une somme finie. On procède donc à une troncature, à savoir

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{k-1} a_r h_r(t). \quad (2.14)$$

**3. Il existe une relation entre la fonction échelle (ondelette père)  $h_0$  et l'ondelette mère  $h_1$  :**

$$h_1(t) = h_0(2t) - h_0(2t - 1). \quad (2.15)$$

(2.15) est dite relation d'échelle.

# Chapitre 3

## La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre une équation intégrale. La méthode de la matrice opérationnelle d'intégration est l'une des méthodes qui permet de convertir cette équation intégrale à une équation algébrique simple à résoudre.

### 3.1 La matrice de Haar

**Définition 14** On définit la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{k \times k}$  en tout point de colocation  $t_i = \frac{(2i-1)}{2m}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  par:

$$\widehat{\Phi}_{k \times k} = \begin{bmatrix} h_0(\frac{1}{2k}) & h_0(\frac{3}{2k}) & \cdots & h_0(\frac{2k-1}{2k}) \\ h_1(\frac{1}{2k}) & h_1(\frac{3}{2k}) & \cdots & h_1(\frac{2k-1}{2k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k(\frac{1}{2k}) & \cdots & \cdots & h_k(\frac{2k-1}{2k}) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

**Exemple 5** Pour  $k = 2$ , on a

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} h_0(\frac{1}{4}) & h_0(\frac{3}{4}) \\ h_1(\frac{1}{4}) & h_1(\frac{3}{4}) \end{bmatrix},$$

on utilise la formule (2.4), à savoir

$$\begin{cases} h_0(t) = h_0(\frac{1}{4}) = h_0(\frac{3}{4}) = 1, 0 \leq t < 1 \\ h_1(\frac{1}{4}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ h_1(\frac{3}{4}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases},$$

d'où

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 4$  on a

$$\begin{cases} h_0(\frac{1}{8}) = h_0(\frac{3}{8}) = h_0(\frac{5}{8}) = h_0(\frac{7}{8}) = 1 \\ h_1(\frac{1}{8}) = h_1(\frac{3}{8}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ h_1(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{7}{8}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} h_2(\frac{1}{8}) = h_1(\frac{1}{4}) = 1, i = j = 1 \\ h_2(\frac{3}{8}) = h_1(\frac{3}{4}) = -1, i = j = 1 \\ h_2(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{5}{4}) = 0, t > 1 \\ h_2(\frac{7}{8}) = h_1(\frac{7}{4}) = 0, t > 1 \end{cases},$$

de plus

$$\begin{cases} h_3(\frac{1}{8}) = h_1(-\frac{3}{4}) = 0, t < 0, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{3}{8}) = h_1(-\frac{3}{4}) = 0, t < 0, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{5}{8}) = h_1(\frac{1}{4}) = 1, 0 \leq t < \frac{1}{2}, i = 1, j = 2 \\ h_3(\frac{7}{8}) = h_1(\frac{3}{4}) = -1, \frac{1}{2} \leq t < 1, i = 1, j = 2 \end{cases},$$

alors

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



Pour  $k = 8$  en effet

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 11** La matrice de Haar contient beaucoup de zéros ,en effet

La matrice de Haar	le nombre d'éléments	le nombre des zéro	Pourcentage des zéro
$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}$	64	32	50%
$\widehat{\Phi}_{16 \times 16}$	256	176	68.75%
$\widehat{\Phi}_{32 \times 32}$	1024	832	81.25%

## 3.2 L'inverse de la matrice de Haar

Pour calculer l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{k \times k}$ , on applique l'expression suivante:

$$\widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1} = \frac{1}{k} \widehat{\Phi}_{k \times k}^T Q_{k \times k} = \frac{1}{k} \widehat{\Phi}_{k \times k}^T \text{diag}(1, 1, 2, 2, \underbrace{2^2, \dots, 2^2}_{2^2}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{2^3}, \dots, \underbrace{\frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{2}}_{\frac{k}{2}}), \quad (3.2)$$

où

$$Q_{k \times k} = \begin{bmatrix} I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 2I_2 & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 2^{p-1}I_{2^{p-1}} \end{bmatrix}.$$

et

*diag* :matrice diagonale

**Exemple 6** Pour  $k = 2$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{2 \times 2}$  est donné par:

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_{2 \times 2}^T Q_{2 \times 2},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

d'où

$$\widehat{\Phi}_{2 \times 2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 4$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{4 \times 4}$  est donné par

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1} = \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_{4 \times 4}^T Q_{4 \times 4}.$$

En effet,

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 8$  l'inverse de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{8 \times 8}$  est donné par

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}^{-1} = \frac{1}{8} \widehat{\Phi}_{8 \times 8}^T \text{diag}(1, 1, 2, 2, 2^2, 2^2, 2^2, 2^2),$$

en effet

$$\widehat{\Phi}_{8 \times 8}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Le vecteur de coefficient de Haar

D'après (2.14), on peut approcher toute fonction de  $L^2[0, 1]$  comme suit :

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{k-1} a_r h_r(t) = A^T \phi(t). \quad (3.3)$$

où  $A$  est le vecteur des coefficients de Haar défini par :

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T,$$

et  $\phi(t)$  le vecteur des ondelettes de Haar défini par

$$\phi(t) = [h_0, h_1, \dots, h_{k-1}]^T.$$

Pour connaître le vecteur des coefficients de Haar, en tout point de colocation  $t_i = \frac{2k-1}{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , on écrit

$$\left[ f\left(\frac{1}{2k}\right), f\left(\frac{3}{2k}\right), f\left(\frac{5}{2k}\right) \cdots f\left(\frac{2k-1}{2k}\right) \right] = A^T \widehat{\Phi}_{k \times k},$$

alors

$$A^T = \left[ f\left(\frac{1}{2k}\right), f\left(\frac{3}{2k}\right), f\left(\frac{5}{2k}\right) \cdots f\left(\frac{2k-1}{2k}\right) \right] \widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1}. \quad (3.4)$$

**Exemple 7** Si  $y(t) = [-0, 5, -1, 5, 4, 6]$  est une fonction constante par morceaux alors :

$$y(t) = 2h_0(t) - 3h_1(t) + \frac{1}{2}h_2(t) - h_3(t) = A^T \widehat{\Phi}_{4 \times 4}.$$

Les coefficients de Haar  $a_i$  peuvent être obtenus en utilisant directement 3.4 et par inversion de la matrice de Haar  $\widehat{\Phi}_{4 \times 4}$  on trouve

$$\begin{aligned} A^T &= y(t) \widehat{\Phi}_{4 \times 4}^{-1}(t) \\ &= [-0, 5, -1, 5, 4, 6] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[ 2 \quad -3 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \right]. \end{aligned}$$

**Exemple 8** Prenons la fonction de  $L^2[0, 1[$  suivante:

$$f(t) = t^2, 0 \leq t < 1,$$

pour  $k = 4$  on a:

$$\left[ f\left(\frac{1}{8}\right), f\left(\frac{3}{8}\right), f\left(\frac{5}{8}\right), f\left(\frac{7}{8}\right) \right] = \left[ \frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{49}{64} \right].$$

On applique la formule (3.4):

$$A^T = \left[ \frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{49}{64} \right] \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{512} \begin{bmatrix} 168 & -128 & -32 & -96 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des coefficients de Haar est

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,328 & -0,25 & 0,0625 & -0,1875 \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Intégration de l'ondelette de Haar

Nous définissons l'intégral de l'ondelette de Haar comme suit

$$h_0(t) = 1 \Rightarrow \int_0^t h_0(x) dx = t, \forall 0 \leq t < 1$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 h_1(t) dt = \begin{cases} t & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

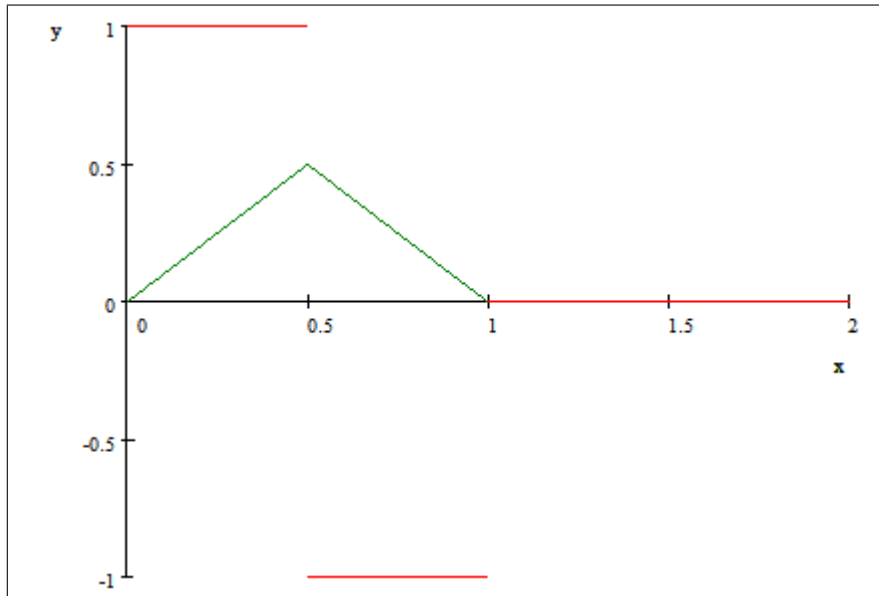


Fig8 Ondelette de Haar  $h_1(t)$  et l'intégrale correspondante

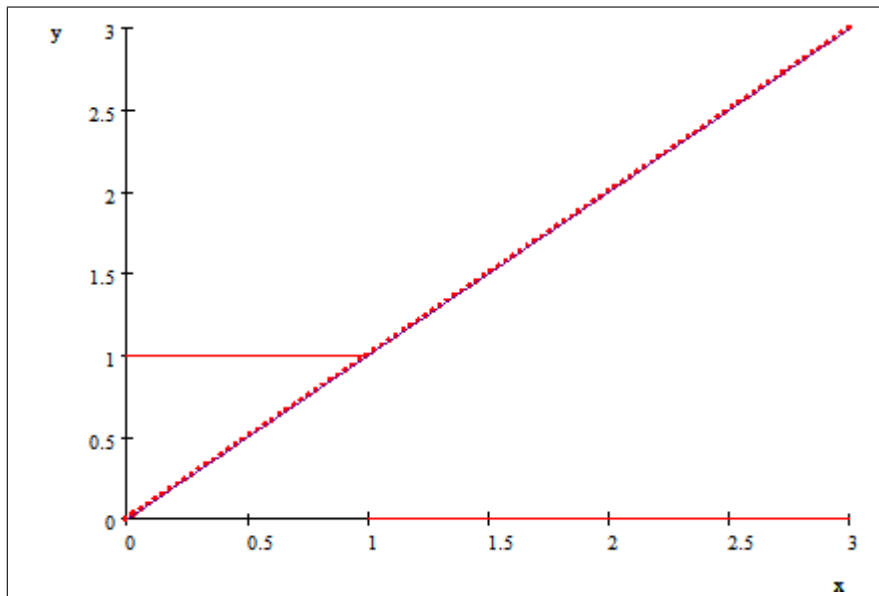


Fig7Ondelette de Haar  $h_0(t)$  et l'intégrale correspondante

En général l'intégrale d'une ondelette de Haar est définie comme:

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}} \\ -1 & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est définie par:

$$\int_0^t h_r(x) dx = \begin{cases} t - J_1, & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}} \\ J_0 - t, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0 \end{cases} . \quad (3.5)$$

Dans la suite de notre travail on calcul cette intégrale par une méthode numérique qui basée sur les matrices de Haar.

### 3.5 Approximation de l'intégral du vecteur de Haar

Prenons le vecteur de Haar d'ordre 4

$$\phi(t) = [h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)].$$

Les intégrales des quatre ondelettes de Haar peuvent être exprimées comme :

$$\int_0^t h_0(x)dx = t, 0 \leq t < 1 \simeq \frac{1}{8} [ 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 ]$$

car

$$\int_0^t h_r(x)dx = t \simeq a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + a_3 h_3(t),$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 \int_0^1 t h_0(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ a_1 &= 2^0 \int_0^1 t h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = -\frac{2}{8} \\ a_2 &= 2^1 \int_0^1 t h_2(t) dt = 2 \left( \int_0^{\frac{1}{4}} t dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t dt \right) = -\frac{1}{8} \\ a_3 &= 2^1 \int_0^1 t h_3(t) dt = 2 \left( \int_0^{\frac{3}{4}} t dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 t dt \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

a la fin

$$t \simeq \frac{4}{8}[1, 1, 1, 1] - \frac{2}{8}[1, 1, -1, -1] - \frac{1}{8}[1, -1, 0, 0] - \frac{1}{8}[0, 0, 1, -1],$$

$$t \simeq \frac{1}{8}[1, 3, 5, 7],$$

$$\int_0^t h_1(t)dx = \left\{ \begin{array}{l} t, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 ],$$

par ce que

$$\int_0^t h_1(t) dx \simeq a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + a_3 h_3(t),$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt = \frac{2}{8}, \\ a_1 &= 2^0 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt \right) = 0 \\ a_2 &= 2^1 \left( \int_0^{\frac{1}{4}} t dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t dt \right) = -\frac{1}{8} \\ a_3 &= 2^1 \left( \int_0^{\frac{3}{4}} (1-t) dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 (1-t) dt \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t h_1(x) dx &\simeq \frac{2}{8}[1, 1, 1, 1] - \frac{1}{8}[1, -1, 0, 0] + \frac{1}{8}[0, 0, 1, -1] \\ &\simeq \frac{1}{8}[1, 3, 3, 1]. \end{aligned}$$

De même façon , nous obtenue les approximations d'autres on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t h_2(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t, 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - t, \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [1 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \int_0^t h_3(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ 1 - t, \frac{3}{4} \leq t < 1 \end{array} \right\} \simeq \frac{1}{8} [0 \ 0 \ 1 \ 1] \end{aligned}$$

Ainsi on trouve

$$\int_0^t \phi_4(x) dx \simeq \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.6 La matrice opérationnelle d'intégration

L'intégration de vecteur de ondelette de Haar  $\phi$  peut être développer avec les série de Haar comme

$$\int_0^t \phi(t) \approx P \phi(t) \quad (3.6)$$

avec  $P$  la matrice opérationnelle d'intégration de ondelette de Haar

On peut définir

$$P = P_{k \times k} = \left\langle \int_0^t \phi(x) dx, \phi(t) \right\rangle = \int_0^1 \int_0^t \phi(x) \phi(t) dx dt,$$

On obtient la matrice  $P_{k \times k}$  avec

$$P_{k \times k} = \left[ \int_0^t \phi(x) dx \right] \widehat{\Phi}_{k \times k}^{-1}. \quad (3.7)$$

**Exemple 9** Pour  $k = 2$  on a

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 \int_0^1 t h_0(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ a_1 &= 2^0 \int_0^1 t h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

nous avons

$$\int_0^t h_0(x) dx = t \approx a_0 h_0(t) + a_1 h_1(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt = \frac{2}{8} \\ a_1 &= 2^0 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt \right) = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^t h_1(x) dx &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \int_0^t \Phi_2(x) dx &\approx \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



$$P_{2 \times 2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

La matrice opérationnelle d'intégration des ondelettes de Haar  $P_{4 \times 4}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{4 \times 4} &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 12** La matrice opérationnelle d'intégration contient beaucoup de zéros.

### 3.6.1 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire

La méthode de la matrice opérationnelle est l'une des méthodes numériques d'optimisation la plus importante pour résoudre les équations différentielles ou intégrales; cette méthode permet de réduire ces équations par des équations algébriques. On va s'intéresser dans cette section à la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar.

**La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction à plusieurs blocs (FPB)**

**Définition 15 (Formule de Kilicman and Al Zhour)**

On note la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction **(FPB)**  $F^\alpha$  définie par

$$(I^\alpha B_m)(t) \approx F^\alpha B_m(t), \quad (3.8)$$

avec

$$F^\alpha = \frac{1}{m^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où

$$\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}. \quad (3.10)$$

**Exemple 10** La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire d'une fonction à plusieurs blocs d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Pour  $k = 2$

$$F^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 2,29 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour  $k = 8$

$$F^{0,5} = \begin{bmatrix} 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 & -0,76 & 0 \\ 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 & -0,76 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 & 0,76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,28 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 13** Comme l'ondelette de Haar est constante alors on peut l'écrire sous la forme d'une fonction **FPB**.

$$h_r(t) = \widehat{\Phi}_{n \times n} B_m(t), \quad (3.11)$$

où

$$B_n(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) & b_1(t) & \dots & b_i(t) & \dots & b_{m-1}(t) \end{bmatrix}.$$

### 3.6.2 La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar

La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar est donnée par

$$(I^\alpha \phi)(t) \approx P_{m \times m}^\alpha \phi(t), \quad (3.12)$$

avec

$P_{m \times m}^\alpha$  la matrice carré  $m \times m$  et dite la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar.

On peut écrire la série de Haar comme fonction(**FPB**) d'après (3.8)et(3.11)on trouve :

$$\begin{aligned}
(I^\alpha \phi)(t) &\approx (I^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m} B_m(t))(t) \\
&= \widehat{\Phi}_{m \times m} (I^\alpha B_m)(t) \\
&\approx \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha B_m
\end{aligned}$$

d'où

$$P_{m \times m}^\alpha \phi(t) = P_{m \times m}^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha B_m$$

La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire de l'ondelette de Haar  $P_{m \times m}^\alpha$  et donnée par :

$$P_{m \times m}^\alpha = \widehat{\Phi}_{m \times m} F^\alpha \widehat{\Phi}_{m \times m}^{-1} . \quad (3.13)$$

**Exemple 11** La matrice opérationnelle d'intégration d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}^{0,5}$  :

$$\begin{aligned}
P_{2 \times 2}^{0,5} &= 0,23 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2,29 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,49 & -0,03 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Application

### 4.1 Equation différentielle de Torvik

Notre but est de montrer l'importance de la matrice opérationnelle pour résoudre des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire. Cette méthode permet de réduire ce système à une équation algébrique.

L'équation différentielle de Torvik qui définit le mouvement de prolongement d'une plaque solide avec :

$m$  : la masse,

$\mu$  : la densité,

$\rho$  : la viscosité (le glissement),

$y(t)$  : le déplacement de cette plaque.

On considère l'équation différentielle de Torvik

$$\begin{cases} Ay''(t) + BD^{\frac{3}{2}}y(t) + Cy(t) = f(t), t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

avec  $A, B, C$  des constantes telles que

$$A = m, B = 2A\sqrt{\mu\rho}, C = k$$

Soit le système

$$\begin{cases} y''(t) + 0,5D^{\frac{3}{2}}y(t) + 0,5y(t) = f(t), t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases},$$

où

$$f(t) = 8(u(t) - u(t - 1)),$$

et  $u(t)$  est la fonction d' Heaviside

#### 4.1.1

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

#### Solution exacte

Le théorème existence et l'unicité de la solution exacte de système (4.1) est donné dans la référence[5]

La solution exacte de l'équation (4.1) s'écrit

$$y(t) = u(t) \left[ 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{1}{2}\right)^r t^{2r+1} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^r \left(\frac{-1}{2} t^{\frac{1}{2}}\right) \right],$$

où

$$E_{\lambda, \mu}^r = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda r + \mu)}, r \in \mathbb{N}.$$

#### 4.1.2 Solution numérique via la matrice opérationnelle d'intégration

Nous allons utiliser une méthode de résolution basée sur le développement en base d'ondelette de Haar et sur la matrice opérationnelle l'intégration et de la dérivation fractionnaire

vue dans le chapitre 2 et 3 les fonction  $y(t)$  et  $f(t)$  peuvent s'écrit sous forme d'une série de Haar comme suit :

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{r=0}^N a_r h_r(t) \\ f(t) = \sum_{r=0}^N c_r h_r(t) \end{cases}$$

ou bien sous forme matricielle

$$\begin{cases} y(t) = A^T \widehat{\Phi}_{m \times m} \\ f(t) = B^T \widehat{\Phi}_{m \times m} \end{cases}$$

avec

$A^T$  le vecteur de coefficients de Haar inconnue

$B^T$  le vecteur de coefficients de Haar connu.

Par l'intégration de l'équation (4.1), on trouve

$$\int_0^t \int_0^t y''(t) dt dt + 0,5 \int_0^t \int_0^t D^{\frac{3}{2}} y(t) dt dt + 0,5 \int_0^t \int_0^t y(t) dt = \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt \quad (4.2)$$

En vertu du calcul fractionnaire

$$\begin{cases} I^2 D^2 y(t) = y(t) \\ I^2 D^{\frac{3}{2}} y(t) = I^{0,5} y(t) \end{cases}$$

d'après la relation (4.2), on trouve

$$y(t) + 0,5 I^{1,5} y(t) + 0,5 \int_0^t \int_0^t y(t) dt dt = \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt \quad (4.3)$$

En vertu de (3.6), on obtient:

$$\begin{cases} I^{1,5} y(t) = A^T P_{m \times m}^{0,5} \\ I^2 y(t) = A^T P_{m \times m}^2 \end{cases}.$$

Maintenant on peut approximer équation (4.3) sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{aligned} A^T \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 A^T P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 A^T P_{m \times m}^2 &= B^T P_{m \times m}^2 \\ A^T \left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 P_{m \times m}^2 \right) &= B^T P_{m \times m}^2 \\ A^T &= B^T P_{m \times m}^2 \left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5 P_{m \times m}^{0,5} + 0,5 P_{m \times m}^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

avec  $B^T$  le vecteur de coefficients de Haar associé à  $f(t)$ .

On peut calculer le vecteur de coefficient de Haar par la formule (2.9)

$$B^T = [f(\frac{1}{4}), f(\frac{3}{4})] \widehat{\Phi}_{2 \times 2} = [16, 0].$$

La matrice d'intégration de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}$  étant

$$P_{2 \times 2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$P_{2 \times 2}^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice opérationnelle d'intégration de l'ondelette de Haar  $P_{2 \times 2}$  d'ordre  $\alpha = 0,5$  étant

$$P_{2 \times 2}^{0,5} = \begin{bmatrix} 0,49 & -0,03 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5P_{m \times m}^{0,5} + 0,5P_{m \times m}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,015 \\ 0,015 & -0,015 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,125 & -0,031 \\ 0,031 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,365 & 0,954 \\ 1,046 & -1,015 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par inversion matricielle, on trouve:

$$\left( \widehat{\Phi}_{m \times m} + 0,5P_{m \times m}^{0,5} + 0,5P_{m \times m}^2 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4259 & 0,4003 \\ 0,4389 & -0,5727 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^T &= [16 \ 0] \times \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4259 & 0,4003 \\ 0,4389 & -0,5727 \end{bmatrix} \\ &= [2,1424 \ 1,0284]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\widehat{\Phi}_{2 \times 2} \\
&= \begin{bmatrix} 2,1424 & 1,0284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3,1707 & 1,1140 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Il faut choisir  $n$  très grand pour avoir une meilleur approximation de la solution du problème(4.1).

### Interprétation graphique de la solution

Dans la figure ci dessous, on a représenté la solution numérique notée  $y_{app}$  et la solution exacte notée  $y_{ext}$ . Il apparait clairement que  $y_{ext}$  approche  $y_{app}$  d'une manière assez satisfaisante.

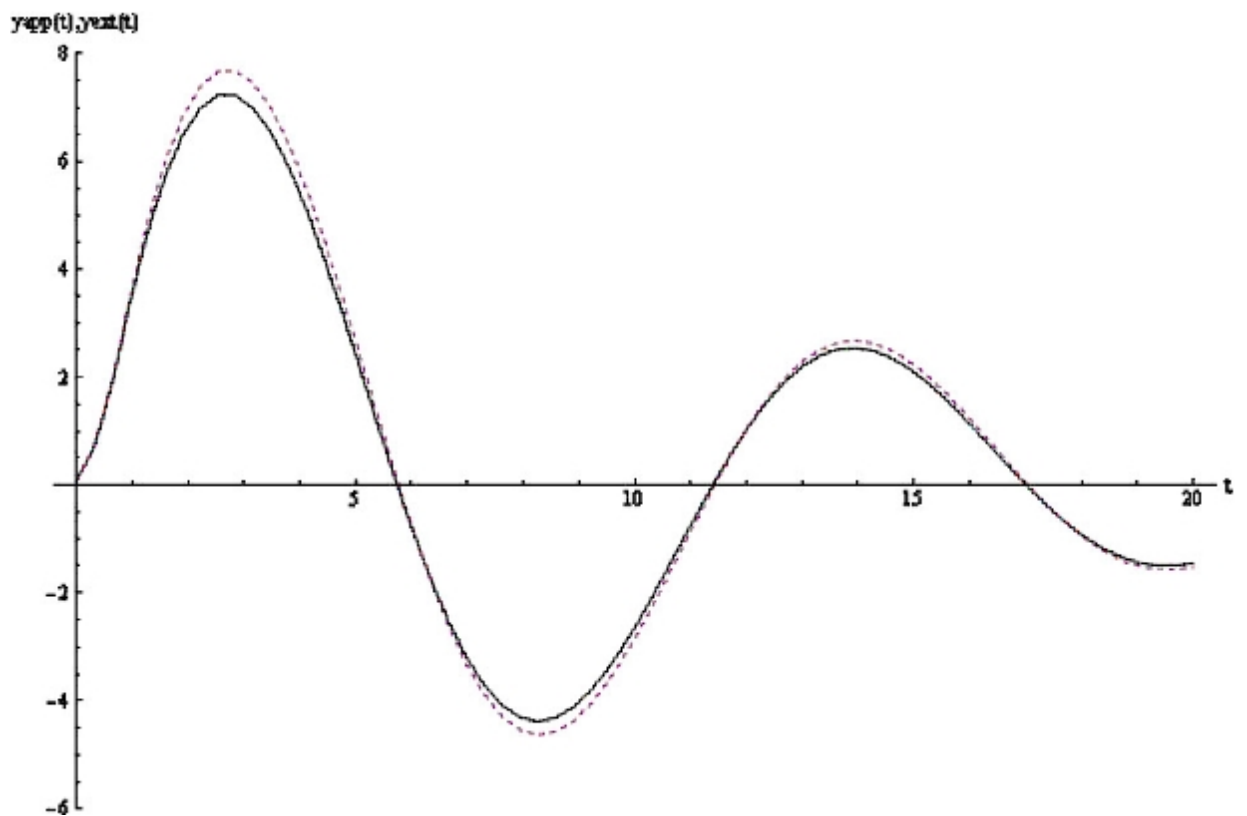


Figure 4-1: FIG la solution exacte  $y_{ext}(t)$  et la solution d' approximation  $y_{app}(t)$



# Conclusion

Notre but était de résoudre les équations différentielles fractionnaire par une méthode numérique qui est basée sur la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire. L'intérêt de cette méthode réside dans la réduction des équation différentielles de équations algébriques linéaire

Cette méthode peut être utiliser pour résoudre les équations différentielles linéaires et non linéaire d'ordre fractionnaire .

L'exemples de l' équation différentielle de Torvik montrer la puissance de cette méthode pour résoudre des différent problèmes.

# Bibliographie

[1] A. Kilicman, Z.A.A. Al Zhour, Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications, *Appl. Math. Comput.* 187 (2007) 250–265.

[2] G.K. Wallace, The JPEG Still Picture Compression Standard, *Communications of the ACM*, vol.34, no 4, (avril 1991), 31-44.

[3] J. Patrick. *Second Generation Wavelets and Applications* by Maarten H. Jansen, Patrick J. Oonincx

[4] S. Saha Ray, On Haar wavelet operational matrix of general order and its application for the numerical solution of fractional Bagley Torvik equation Rourkela (2011) 769 008, India.

[5] Y. Weiwei Zhao b, Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations, Nanjing(2010) 210044, PR China.