REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES & DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Conditions Nécessaires Et Suffisantes Pour La Régularité Maximale De La Solution d'Une Equation Différentielle Abstraite Complète De Type Elliptique Dans Les Espaces De Hölder

Présenté par :

BENHAMIDA Ouafaâ

Composition du Jury :

Président :	MEDEGHRI Ahmed	Pr.	U. Mostaganem
Examinateur :	LIMAM Kheira	M.C.B	U. Mostaganem
Encadreur :	BOUZIANI Fatima	M.C.B	U. Mostaganem

Année Universitaire : 2013-2014

Résumé:

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète dans les espaces de Hölder.

On démontre l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte sous certaines conditions de compatibilité naturelles liées à l'équation.

Ici, les techniques utilisées reposent essentiellement sur la théorie des semi-groupes analytiques et sur les résultats de régularité de Sinestrari.

Mots clés:

Semi-groupes, Espaces d'interpolation, Espaces da Hölder, Solution stricte, Régularite maximale.

Remerciements

Je souhaite adresser tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apportée leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord à mon encadreur Madame Bouziani Fatima pour l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mes remerciements s'adressent aussi vivement à Monsieur Medeghri Ahmed pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury et à Madame Limam Kheira d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Merci à toute ma famille, qui m'a soutenu en toutes circonstances. J'espère qu'ils trouvent ici l'expression de mon éternelle reconnaissance.

Un remerciement très spécial au staff des enseignants qui m'ont accompagnée pendant mes années d'études.

J'adresse mes chaleureux remerciements à ma mère, mon père et tous mes proches et amis pour leurs encouragements durant la réalisation de ce mémoire.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail est vivement remerciée.

Table des matières

Introduction

Ce travail est une synthèse des résultats obtenus dans l'article de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [7].

Le but était d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre suivante

$$u^{''}(x) + 2Bu^{'}(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

sous les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0,\ u(1) = u_1, \tag{2}$$

où A, B sont des opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A)$, $D(B)$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe X. Le second membre f est höldérien i.e $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ $(0 < \theta < 1)$ et u_0, u_1 sont des données dans X.

On note que cette étude a été aussi faite dans le cadre des espaces $L^p([0,1], X)$ $(1 < p < \infty)$ où l'espace X a la propriété géométrique UMD [6]. Il est à noter aussi que le cas $B \equiv 0$ a été amplement étudié dans [11].

L'objectif de ce travail est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution stricte de (1)-(2) c'est à dire une fonction u telle que

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)), \quad u^{'} \in C([0,1], D(B)),$$

et qui vérifie (1)-(2).

Après avoir trouvé la représentation de la solution stricte, on cherche sous quelles conditions nécessaires et suffisantes cette dernière a la régularité maximale (i.e) quand u vérifie

$$u'', \quad Bu', \quad Au \in C^{\theta}([0,1]; X).$$

Ici l'approche est basée sur l'introduction de deux opérateurs linéaires fermés L et M liés avec A et B tels que

$$\begin{cases} D(L) = D(M) \\ D(LM) = D(ML) \end{cases} \tag{H_1}$$

$$\begin{cases} L - M \subset 2B \\ LM - ML \subset -A \end{cases} \tag{H_2}$$

On note que si $(P, D(P))$, $(Q, D(Q))$ deux opérateurs linéaires, on écrit $P \subset Q$, si

$$D(P) \subset D(Q) \text{ et } P = Q \text{ sur } D(P).$$

(H_3) L, M génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur X.

(H_4) $L + M$ admet un inverse borné.

Sous ces hypothèses le problème (1)-(2) sera équivalent à l'équation différentielle abstraite complète du second ordre

$$u^{''}(x) + (L - M)u^{'}(x) - LMu(x) = f(x),$$

avec les mêmes conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ u(1) = u_1,$$

et la solution stricte de ce dernier, appelée (L, M) stricte solution, sera clairement la solution stricte de (1)-(2).

Les principaux résultats de ce travail sont illustrés par les deux théorèmes suivants, le premier donne des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution stricte et le deuxième concerne la régularité maximale de cette solution.

Théorème 0.1 *On suppose que les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$ sont vérifiées, $\theta \in \,]0, 1[$ et $f \in C^\theta([0, 1], X)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le problème (1)-(2) admet une unique (L, M) solution stricte u,*
2. *u_0, $u_1 \in D(LM)$ et*
$$f(i) - Au_i \in \overline{D(LM)}, \quad i = 0, 1.$$

Théorème 0.2 *On suppose que les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$ sont vérifiées et $\theta \in \,]0, 1[$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le problème (1)-(2) admet une unique (L, M) solution stricte u ayant la régularité maximale :*
$$u^{''}, \quad Bu^{'}, \quad Au \in C^\theta([0, 1], X),$$
2. *$f \in C^\theta([0, 1], X)$, u_0, $u_1 \in D(LM)$ et*
$$f(i) - Au_i \in (D(LM), X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}, \quad i = 0, 1.$$

A la fin de ce travail on donne un exemple du couple d'opérateurs (L, M) [5].

Ce mémoire comporte quatre chapitres :
le premier est consacré à des rappels et des définitions des outils mathématiques utilisés : semi-groupes, espaces d'interpolation, espaces de Hölder...
Au deuxième chapitre on donne la représentation formelle de la solution du problème.
Dans le troisième chapitre on expose les résultats essentiels d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution stricte de l'équation complète dans les espaces de Hölder.
Le quatrième chapitre est réservé aux applications des résultats abstraits obtenus au chapitre 3 sur des exemples concrets.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1 *A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$, dit domaine de A, à valeurs dans X.*
On désigne par $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définis sur X $(D(A) = X)$. Cet espace muni de la norme

$$\|A\|_{L(X)} = \sup \{\|Ax\|_X : x \in X, \|x\|_X = 1\},$$

est un espace de Banach.

Définition 1.2 *Soient $(P, D(P))$, $(Q, D(Q))$ deux opérateurs linéaires de X dans X. On dit que Q est une extension ou un prolongement de P et on note $P \subset Q$ si*

$$D(P) \subset D(Q) \text{ et } P = Q \text{ sur } D(P).$$

Définition 1.3 *L'opérateur $A : D(A) \to X$ est dit fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\},$$

est fermé dans $X \times X$.

Proposition 1.1 *$A : D(A) \to X$ est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour tout $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}.$$

Définition 1.4 *On dit que l'opérateur linéaire A $D(A) \to X$ est fermable s'il admet une extension fermée.*

Proposition 1.2 *L'opérateur $A : D(A) \to X$ est fermable si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in N} \subset D(A)$,*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Définition 1.5 *On dit que l'opérateur $A : D(A) \to X$ est à domaine dense, si $\overline{D(A)} = X$, (i.e) si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Définition 1.6 *On appelle ensemble résolvant de l'opérateur A l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. *Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvante de A au point λ, notée $R_\lambda(A)$, par*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. *$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.*

Proposition 1.3 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.*

Définition 1.7 *Soit $0 < \omega < \pi$. On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\sigma(A) \subset \overline{S}_\omega,$$

et

$$\forall \grave{\omega} \in]\omega, \pi[, \;\; M(A, \grave{\omega}) := \sup_{\lambda \notin \overline{S}_{\grave{\omega}}} \left\| \lambda(A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} < \infty.$$

On note sect(ω) l'ensemble des opérateurs linéaires sur X qui sont sectoriels d'angle ω.

1.2 Intégrale de Dunford-Riesz

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition 1.8 *Soient $A \in L(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$ et γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A). Soit $f \in H(U)$, alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz.$$

1.3 Semi-groupes

Définition 1.9 *Soit X un espace de Banach complexe. Un semi groupe sur X est une famille $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés telle que*

1. $G(0) = I$.
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}_+ : G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la deuxième propriété est vérifiée pour t et s quelconques dans $\mathbb{R}$, $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est dit un groupe.

1.3.1 Semi-goupes fortement continus

Définition 1.10 *Le semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit fortement continu (ou C_0 semi-groupe), si pour tout $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue c'est à dire*

$$\forall x \in X : \lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

Proposition 1.4 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $w \geq 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|G(t)\|_{L(X)} \leq Me^{wt}.$$

Le C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est dit uniformément borné si $M \geqslant 1$ et $\omega = 0$, en particulier il est de contractions si $M = 1$ et $\omega = 0$.

1.3.2 Générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe

Définition 1.11 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in X : \lim_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \quad \text{existe dans } X\right\} \\ \forall \varphi \in D(A), \quad A\varphi = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

Théorème 1.1 *(Hille-Yosida) Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tel que $\overline{D(A)} = X$. Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ si et seulement s'il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\rho(A) \supset]\omega, +\infty[,$$

et

$$\forall \lambda \in]\omega, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(A - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

1.3.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.12 *Soient* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\Delta = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \alpha\}$*. On appelle semi groupe analytique de type* α *une application* T *définie sur* $\overline{\Delta}$ *à valeurs dans* $L(X)$ *vérifiant*

1. $z \to T(z)$ *est analytique dans* Δ.
2. $T(0) = I$ *et* $\forall x \in X, \quad \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{\Delta}}} T(z)x = x.$
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{\Delta}, \quad T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2).$

1.3.4 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique

Théorème 1.2 *(Kato) Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire tel que*

1. A *est fermé.*
2. $D(A)$ *est dense dans* X.
3. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *et*

$$\exists K > 0,\ \forall\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \ \left\|(A - \lambda I_E)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}.$$

Alors Λ *est générateur d'un semi-groupe analytique* G *vérifiant*

1. $\exists M > 0, \forall t > 0, \|G(t)\|_{L(X)} \leqslant M.$
2. $\forall t > 0,\ G(t) \in L(X, D(A))$ *et*

$$\|AG(t)\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{t}.$$

Semi-groupe analytique généralisé

Un opérateur linéaire A sur X est dit générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique généralisé s'il est générateur d'un semi groupe analytique à domaine non dense.
Dans ce cas ils existent $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ tels que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\omega,\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\omega\} : |\arg(\lambda - \omega)| < \dfrac{\pi}{2} + \delta \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty. \end{cases}$$

Le semi-groupe analytique généralisé sera noté $(e^{xA})_{x \geq 0}$ et il n'est pas supposé fortement continu.

Pour $r > 0$ fixé, $\delta_0 \in]0, \delta[$, $(e^{xA})_{x \geq 0}$ est donné par

$$e^{xA} = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\lambda x}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda, & \text{si } x > 0 \\ I, & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

où γ est le bord de $S_{\omega,\delta_0} \backslash B(\omega, r)$ orienté de $\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta_0)}$ à $\infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta_0)}$.
(Pour plus de détails voir [13], [14]).

Remarque 1.1 *Un semi groupe analytique est un semi groupe analytique généralisé fortement continu en* 0.

1.4 Espaces d'interpolation

Définition 1.13 *Soit* X *un espace de Banach. On désigne par* $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ $(1 \leq p < \infty)$, *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour presque tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* X *telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)} < \infty.$$

Si $p = +\infty$ *, on définit l'espace* $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ *par*

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \to X \text{ fortement mesurable et} \\ \sup_{t \in \mathbb{R}_+} ess \, \|f(t)\|_X < \infty. \end{cases}$$

Définition 1.14 *Soient* $(X_0, \|.\|_0)$ *et* $(X_1, \|.\|_1)$ *deux espaces de Banach s'injectant continuement dans un espace topologique séparé* F.

Les espaces $(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0 \cap X_1})$, $(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0+X_1})$ *munis des normes suivantes*

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, \text{ pour } x \in X_0 \cap X_1 \\ \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in X_i}} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right), \text{ pour } x \in X_0 + X_1 \end{cases},$$

sont des espaces de Banach.

Pour $\theta \in \left]0, 1\right[$, $p \in [1, +\infty]$, *on définit l'espace d'interpolation entre* X_0 *et* X_1 *noté* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *comme étant l'ensemble des vecteurs* $x \in X_0 + X_1$ *tels que*

$$\begin{cases} \forall t > 0, \ \exists u_0(t) \in X_0, \ \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.5 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *muni de la norme*

$$\|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{x = u_0(t) + u_1(t) \\ u_i(t) \in X_i}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1)}\right),$$

est un espace de Banach vérifiant

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Cas particulier : Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé. Son domaine $D(A)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X, \quad x \in D(A).$$

Pour $X_0 = D(A)$, $X_1 = X$, on note pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0,1[$,

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p}.$$

Certains espaces d'interpolation ont une caractérisation explicite, on cite par exemple les cas suivants :

1. Si $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I_X)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{c}{\lambda},$$

   alors l'espace $D_A(\theta, p)$ est donné par

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : \ t^\theta A(A - tI)^{-1} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X)\},$$

   (voir [2], [8]).

   Dans ce cas et grâce à la propriété de réitération de Lions-Peetre [12], on a pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$D_A(m\theta, p) = D_{A^m}(\theta, p).$$

2. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E alors

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : \ t^{-\theta}(e^{tA} - I_X)^{-1} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X)\},$$

   (voir [12]).

3. Si A génère un semi-groupe analytique et borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : \ t^{1-\theta} A e^{tA} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X)\}.$$

Ces espaces vérifient la propriété d'inclusion

$$D_A(\theta', p) \subset D_A(\theta, q),$$

pour $\theta' > \theta$ et $p, q \in [1, +\infty]$ quelconques ou pour $\theta' = \theta$ et $q \leq p$.

1.5 Espaces de Hölder

Définition 1.15 *Soient X un espace de Banach complexe, $\theta \in]0,1[$ un nombre fixé et I un intervalle fini quelconque de $\mathbb{R}$.*

On note $C(I, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur I à valeurs dans X muni de la norme

$$\|f\|_{C(I,X)} = \max_{t \in I} \|f(t)\|_X .$$

On appelle espace de Hölder d'exposant θ noté $C^\theta(I; X)$ l'espace

$$C^\theta(I, X) = \left\{ f \in C(I, X) : \sup_{\substack{t,\ s \in I \\ t - s \neq 0}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\theta} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta(I,X)} = \|f\|_{C(I,X)} + \sup_{\substack{t,\ s\in I \\ t-s\neq 0}} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\theta},$$

est un espace de Banach.

Définition 1.16 *D'une façon générale on définit l'espace de Hölder $C^{k,\theta}(I,X)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0,1[$ par*

$$C^{k,\theta}(I,X) = \{f \in C^k(I,X) : f^{(k)} \in C^\theta(I,X)\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\theta}(I,X)} = \|f\|_{C^k(I,X)} + \left\|f^{(k)}\right\|_{C^\theta(I,X)},$$

où

$$\|f\|_{C^k(I;X)} = \sum_{i=0}^{k} \left\|f^{(i)}\right\|_{C(I,X)}.$$

Pour la suite on aura besoin de certains résultats classiques dont on rappelle les principaux.

1.6 Quelques résultats classiques

Proposition 1.6 *Soient $A \in L(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$, un opérateur linéaire fermé tel que* $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$. *Alors $BA \in L(X)$.*

Pour tout opérateur Q générateur d'un semi-groupe analytique généralisé, on a les résultats suivants.

Proposition 1.7 **1.** *Soit $\varphi \in X$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C([0,1],X)$.

(b) $\varphi \in \overline{D(Q)}$.

2. Soient $\theta \in]0,1[$, $g \in C^\theta([0,1],X)$ et $\varphi \in X$. On pose pour tout $x \in [0,1]$,

$$v(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds.$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(c) $v \in C^1([0,1],X) \cap C([0,1],D(Q))$.

(d) $\varphi \in D(Q)$ et $g(0) + Q\varphi \in \overline{D(Q)}$.

Preuve :

Voir [14] et [15].

Théorème 1.3 **1.** *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors on a l'équivalence entre*

(a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C^{\theta}([0,1], X)$.

(b) $\varphi \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}$.

2. Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}([0,1]; X)$. On pose pour tout $x \in [0,1]$,

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q}(g(s) - g(0))ds.$$

Alors

$$v \in C^{1,\theta}([0,1], X) \cap C^{\theta}([0,1], D(Q)).$$

3. Soient $g \in C([0,1], X)$ et $\varphi \in X$. On pose pour $x \in [0,1]$,

$$w(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}g(s)ds.$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(c) $w \in C^{1,\theta}([0,1], X) \cap C^{\theta}([0,1], D(Q))$.

(d) $g \in C^{\theta}([0,1], X)$, $\varphi \in D(Q)$ et $g(0) + Q\varphi \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}$.

4. Soit $g \in C^{\theta}([0,1], X)$. Alors

$$Q\int_0^1 e^{sQ}(g(s) - g(0))ds \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}.$$

Preuve :

Voir [2], [3] et [14].

Notation : Soient g et h deux fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans X et $\theta \in]0,1[$. On écrit

$$g \simeq_{\theta} h,$$

si

$$g - h \in C^{\theta}([0,1], X).$$

Proposition 1.8 *Soient $h \in C^{\theta}([0,1], X)$ et $\varphi \in D(Q)$. Si on pose pour tout $x \in [0,1]$,*

$$w(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}h(s)ds,$$

alors

$$Qw(.) \simeq_{\theta} e^{\cdot Q}(Q\varphi + h(0)).$$

Preuve :

Il suffit d'écrire que

$$
\begin{aligned}
Qw(x) &= Qe^{xQ}\varphi + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}(h(s)-h(0))ds + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}h(0)ds \\
&= e^{xQ}Q\varphi + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}(h(s)-h(0))ds - (h(0)-e^{xQ}h(0)) \\
&= e^{xQ}(Q\varphi + h(0)) + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}(h(s)-h(0))ds - h(0),
\end{aligned}
$$

(i.e)

$$
Qw(x) - e^{xQ}(Q\varphi + h(0)) = Q\int_0^x e^{(x-s)Q}(h(s)-h(0))ds - h(0),
$$

et d'utiliser le deuxième point du théorème 1.3. $\square$

Chapitre 2

Représentation de la solution de l'équation complète dans les espaces de Hölder

Dans ce chapitre on donne une représentation formelle de la solution stricte de l'équation complète. On note que certaines étapes faites ici ne sont justifiées qu'au chapitre suivant.

On considère l'équation abstraite complète

$$u^{''}(x) + 2Bu^{'}(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{2.2}$$

tels que A, B sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X, de domaines respectifs $D(A)$, $D(B)$ non nécessairement denses dans X, u_0, u_1 sont des éléments donnés dans X et le second membre $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ $(0 < \theta < 1)$.

Afin de trouver la représentation formelle de la solution stricte de cette équation c'est à dire la fonction u telle que

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)), \quad u^{'} \in C([0,1], D(B)),$$

on commence par la représentation de la solution pour l'équation simple (i.e $B \equiv 0$).

2.1 Résolution de l'équation différentielle simple

On considère donc l'équation suivante

$$u^{''}(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2.3}$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{2.4}$$

tels que u_0, u_1 sont des éléments donnés dans l'espace X, $f \in C^\theta([0,1], X)$, $0 < \theta < 1$ et A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X vérifiant l'hypothèse d'ellipticité suivante

$$\exists c > 0,\ \forall \lambda \geq 0,\ (A - \lambda I)^{-1} \in L(X) \text{ et } \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{c}{1+\lambda}. \tag{H_0}$$

Cette hypothèse n'implique pas que A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Par contre elle implique que $Q = -(-A)^{1/2}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté

$$s(t) = e^{tQ}, \quad t \geq 0,$$

(pour plus détails voir [1]).

Pour donner une représentation de la solution de (2.3), on utilise la méthode de la réduction de l'ordre de Krein.

On suppose l'existence d'une solution stricte u de (2.3) c'est à dire u :

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)),$$

et on pose

$$\begin{cases} v(x) = -Q^{-1}u'(x) \\ y(x) = \dfrac{1}{2}(u(x) - v(x)) \\ z(x) = \dfrac{1}{2}(u(x) + v(x)), \end{cases} \tag{2.5}$$

donc

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(u'(x) - v'(x)\right) = \frac{1}{2}\left(-Qv(x) + Q^{-1}u''(x)\right).$$

En utilisant (2.3) et (2.5), on obtient

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \dfrac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

avec

$$y_0 = \frac{1}{2}(u(0) - v(0)) = \frac{1}{2}\left(u(0) + Q^{-1}u'(0)\right).$$

Similairement, on a

$$z'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) + v'(x)) = \frac{1}{2}\left(Qv(x) + Q^{-1}u''(x)\right),$$

en utilisant (2.3) et (2.5), on obtient

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) - \dfrac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ z(1) = z_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

avec
$$z(1) = \frac{1}{2}\left(u(1) - Q^{-1}u^{'}(1)\right).$$
Alors la résolution du problème (2.3)-(2.4) est équivalente à celle des deux systèmes qui sont des problèmes de Cauchy bien posés.

On note que l'avantage de la méthode de réduction de l'ordre est que si le problème admet une solution alors elle est nécessairement unique.

Par conséquent, pour tout $x \in (0,1)$, on obtient
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{xQ}y_0 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds, \\ z(x) &= e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds. \end{aligned}$$
Finalement, la solution du problème est donnée par
$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x) \\ &= e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + I_x + J_x, \end{aligned} \tag{2.8}$$
où
$$\begin{cases} I_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds, \\ J_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds. \end{cases}$$

2.2 Résolution de l'équation différentielle complète

Pour passer à la représentation de la solution de l'équation complète (2.1), on pose
$$u(x) = e^{-xB}v(x),$$
lorsque B génère un groupe, donc
$$u^{'}(x) = -Be^{-xB}v(x) + e^{-xB}v^{'}(x),$$
et
$$u^{''}(x) = B^2e^{-xB}v(x) - 2Be^{-xB}v^{'}(x) + e^{-xB}v^{''}(x).$$
En remplaçant ces deux expressions dans (2.1), on obtient l'équation
$$v^{''}(x) + (A - B^2)v(x) = e^{xB}f(x). \tag{2.9}$$
Par conséquent, si l'opérateur $(A - B^2)$ est sectoriel (i.e) $(A - B^2)$ vérifie l'hypothèse (H_0), en posant
$$Q = -\sqrt{B^2 - A},$$

et par analogie avec (2.8), la solution de (2.9) est donnée par

$$v(x) = e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}e^{sB}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}e^{sB}f(s)ds,$$

d'où la solution de l'équation complète u est donnée formellement par

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-xB}\left(e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}e^{sB}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}e^{sB}f(s)ds\right)\\
&= e^{x(Q-B)}y_0 + e^{(1-x)(Q+B)}e^{-B}z_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}e^{(s-x)B}f(s)ds\\
&\quad +\frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}e^{(s-x)B}f(s)ds\\
&= e^{x(Q-B)}y_0 + e^{(1-x)(Q+B)}y_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)(Q-B)}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)(Q+B)}f(s)ds
\end{aligned}$$

avec

$$y_1 = e^{-B}z_1.$$

Si on définit les deux opérateurs L, M par

$$L := B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} = B + Q, \quad M := -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} = Q - B,$$

et si on suppose que les opérateurs L et M génèrent des semi groupes analytiques généralisés et que $L + M$ admet un inverse borné, alors la solution de (2.1) devient

$$u(x) = e^{xM}y_0 + e^{(1-x)L}y_1 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds.$$

Pour déterminer y_0, y_1 on utilise les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = u_0,\\ u(1) = u_1,\end{cases}$$

on trouve alors

$$\begin{cases} u_0 = (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds + y_0 + e^{L}y_1,\\ u_1 = (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds + e^{M}y_0 + y_1,\end{cases}$$

donc

$$y_0 = u_0 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds - e^{L}y_1, \tag{2.10}$$

$$y_1 = u_1 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds - e^{M}y_0, \tag{2.11}$$

en remplaçant la valeur de y_0 dans (2.11) et on supposant que $e^{L+M} = e^{L}e^{M} = e^{M}e^{L}$, on obtient

$$(I - e^{L+M})y_1 = u_1 - e^{M}u_0 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}e^{M}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds.$$

Si l'opérateur $(I - e^{L+M})$ est inversible, on aura

$$\begin{aligned} y_1 &= (I - e^{L+M})^{-1} \Big[u_1 - e^M u_0 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\ &+ (L+M)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \Big] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds - (I - e^{L+M})^{-1} e^L \big[u_1 - e^M u_0 - \\ & (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds + (L+M)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \Big] \end{aligned}$$

si on pose

$$T = (I - e^{L+M})^{-1},$$

alors

$$\begin{cases} y_0 = u_0 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds - T e^L [u_1 - e^M u_0 - \\ (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds + (L+M)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds]. \\ y_1 = T[u_1 - e^M u_0 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\ +(L+M)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s) ds], \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM} T u_0 + e^{(1-x)L} T u_1 + (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s) ds \\ & -T(L+M)^{-1} e^{xM} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \\ & +(L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s) ds \\ & -T(L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \\ & -T e^{(1-x)L} e^M \left(u_0 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \right) \\ & -T e^{xM} e^L \left(u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds \right) . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Remarque 2.1 *On peut obtenir cette représentation en s'inspirant du cas scalaire on supposant que* $(L+M)^2$ *est un scalaire strictement positif.*
La solution générale de l'équation est alors donnée par

$$u(x) = e^{xM} \xi_0 + e^{(1-x)L} \xi_1,$$

où ξ_0, ξ_1 sont des constantes.
En utilisant la méthode de la variation des constantes, on obtient la représentation

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM}\varepsilon_0 + e^{(1-x)L}\varepsilon_1 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes ε_0 et ε_1 pour avoir l'expression (2.12).

Chapitre 3

Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution

Dans cette partie on va étudier l'équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique

$$u^{''}(x) + 2Bu^{'}(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{3.1}$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \tag{3.2}$$

On s'intéresse ici à la recherche d'une solution stricte u de (3.1) c'est à dire la fonction u vérifiant

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)), \quad u^{'} \in C([0,1], D(B)).$$

On cherche une telle solution quand la donnée f est höldérienne. De plus on va montrer que la solution trouvée, sous certaines conditions de compatibilité, a la régularité maximale c'est à dire u est telle que

$$u'', \quad Bu', \quad Au \in C^{\theta}([0,1]; X).$$

Pour cela on étudie l'équation différentielle abstraite complète du second ordre

$$u^{''}(x) + (L - M)u^{'}(x) - LMu(x) = f(x), \tag{3.3}$$

avec les mêmes conditions aux limites

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \tag{3.4}$$

où L, M sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaines $D(L)$, $D(M)$ respectivement et satisfaisant les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} D(L) = D(M), \\ D(LM) = D(ML), \end{cases} \tag{H_1}$$

L et M sont liés avec A et B par

$$\begin{cases} L - M \subset 2B \\ LM = ML \subset -A \end{cases} \tag{H_2}$$

(H_3) : L, M génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur X,

(H_4) : $L + M$ admet un inverse borné.

Remarques :

1. Des hypothèses (H_1) et (H_3), on conclut que l'opérateur $(L+M)$ génère un semi groupe analytique $\left(e^{x(L+M)}\right)_{x\geq 0}$ sur X.
2. À partir de l'hypothèse (H_1) et comme $ML = LM$, on obtient pour tout n, $m \in \mathbb{N}$,
$$D(M^n L^m) = D(L^m M^n) = D(L^{m+n}) = D(M^{m+n}). \tag{3.5}$$
3. La résolution de (3.1) est équivalente à celle de
$$u^{''}(x) + (L - M)u^{'}(x) - LMu(x) = f(x),$$
et donc à chercher la fonction u telle que
$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(LM)), \quad u^{'} \in C([0,1], D(L-M)),$$
et qui vérifie (3.2). Une telle solution s'appelle (L, M) solution stricte du problème (3.1)-(3.2).

On note que grâce à Lunardi [13], l'opérateur $(I - e^{L+M})$ admet un inverse borné noté T.

En s'inspirant du résultat du chapitre précédent concernant la résolution de l'équation différentielle complète on peut donner une représentation formelle de la solution u de (3.1)-(3.2) :

$$\begin{aligned} u(x) \quad = \quad & e^{xM}Tu_0 + e^{(1-x)L}Tu_1 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\ & -T(L+M)^{-1}e^{xM}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\ & -T(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & -Te^{(1-x)L}e^M f_0 - Te^{xM}e^L f_1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$\begin{cases} f_0 = u_0 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ f_1 = u_1 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds. \end{cases}$$

Si pour $g \in C^\theta([0,1];X)$, $Q \in \{L, M\}$ et $\phi \in D(Q)$, on pose

$$\begin{cases} S_1(x,\phi,g,Q) = e^{xQ}T\phi + \int_0^x e^{(x-s)Q}g(s)ds \\ S_2(x,g,Q) = -Te^{xQ}\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}g(s)ds \\ R(x,\phi,Q) = e^{xQ}e^{L+M-Q}\phi, \end{cases}$$

u sera donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= (L+M)^{-1}S_1(x,(L+M)u_0,f,M) \\ &\quad +(L+M)^{-1}S_2(x,f,M) - TR(x,f_1,M) \\ &\quad +(L+M)^{-1}S_1(1-x,(L+M)u_1,f(1-.),L) \\ &\quad +(L+M)^{-1}S_2(1-x,f(1-.),L) - TR(1-x,f_0,L). \end{aligned}$$

Clairement la régularité de u découle de celle de $S_1(x,\phi,g,Q)$, $S_2(x,g,Q)$ et $R(x,\phi,Q)$. L'étude de ces derniers est l'objectif du paragraphe suivant.

3.1 Lemmes techniques

Lemme 3.1 *On suppose que les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$ sont vérifiées. Alors pour tout $g \in C^\theta([0,1];X)$, $Q \in \{L,M\}$, $\psi \in X$ et $\phi \in D(Q)$, on a*

1. $R(.,\psi,Q)$, $LMR(.,\psi,Q)$, $Q^2R(.,\psi,Q) \in C^\infty([0,1];X)$.
2. $QS_1(.,\phi,g,Q) \simeq_\theta e^{\cdot Q}(QT\phi + g(0))$.
3. $(L+M-Q)S_2(.,g,Q) \simeq_\theta Te^{\cdot Q}g(0)$.

Preuve :

1. Comme $L+M-Q$ est un générateur d'un semi-groupe analytique généralisé, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$e^{L+M-Q} \in L(X, D(L+M-Q)^m)),$$
en utilisant aussi la remarque (3.5), on aura pour tout $\psi \in X$,
$$\begin{cases} R(.,\psi,Q) = e^{\cdot Q}e^{L+M-Q}\psi \in C^\infty([0,1],X). \\ LMR(.,\psi,Q) = e^{\cdot Q}LMe^{L+M-Q}\psi \in C^\infty([0,1],X). \\ Q^2R(.,\psi,Q) = e^{\cdot Q}Q^2e^{L+M-Q}\psi \in C^\infty([0,1],X). \end{cases}$$

2. On a $T\phi \in D(Q)$. En appliquant la proposition (1.8), on obtient le résultat.
3. On écrit

$$\begin{aligned}
& (L+M-Q)S_2(x,g,Q) \\
= \; & -Te^{xQ}(L+M-Q)\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}(g(s)-g(0))ds \\
& -Te^{xQ}(L+M-Q)\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}g(0)ds \\
= \; & -Te^{xQ}(L+M-Q)\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}(g(s)-g(0))ds \\
& -Te^{xQ}[e^{(L+M-Q)}g(0)-g(0)] \\
= \; & -Te^{xQ}(L+M-Q)\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}(g(s6)-g(0))ds \\
& -Te^{xQ}e^{(L+M-Q)}g(0)-Te^{xQ}g(0).
\end{aligned}$$

D'après Sinestrari [14],

$$(L+M-Q)\int_0^1 e^{s((L+M-Q))}(g(s)-g(0))ds \in (D(L+M-Q),X)_{1-\theta,\infty},$$

donc en utilisant le premier point du théorème 1.3, on aura

$$-Te^{\cdot Q}(L+M-Q)\int_0^1 e^{s((L+M-Q))}(g(s)-g(0))ds \in C^\theta([0,1],X).$$

Comme pour le premier point, on a

$$Te^{\cdot Q}e^{(L+M-Q)}g(0) \in C^\infty([0,1],X),$$

finalement on déduit que

$$(L+M-Q)S_2(.,g,Q) \simeq_\theta Te^{\cdot Q}g(0).$$

□

Si on pose pour $g \in C^\theta([0,1];X)$, $Q \in \{L,M\}$ et $\phi \in D(Q)$,

$$S(x,\phi,g,Q) = (L+M)^{-1}S_1(x,(L+M)\phi,g,Q) + (L+M)^{-1}S_2(x,g,Q). \tag{3.7}$$

Alors on a

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$ et pour tout $g \in C^\theta([0,1];X)$, $Q \in \{L,M\}$ et $\phi \in D(Q^2)$, on a*

$$LMS(.,\phi,g,Q) \simeq_\theta Te^{\cdot Q}g(0) + T(L+M-Q)e^{\cdot Q}Q\phi.$$

preuve :
D'après l'hypothèse (H_1), on a

$$(L+M-Q)Q = Q(L+M-Q) = LM,$$

donc

$$\begin{aligned} LMS(x,\phi,g,Q) &= (L+M-Q)(L+M)^{-1}QS_1(x,(L+M)\phi,g,Q) \\ &\quad +Q(L+M)^{-1}(L+M-Q)S_2(x,g,Q). \end{aligned}$$

Comme Q est un opérateur fermé, $(L+M)^{-1} \in L(X)$ et

$$(L+M)^{-1}(X) \subset D(L+M) = D(Q),$$

d'après la proposition 1.6,

$$(L+M-Q)(L+M)^{-1}, \quad Q(L+M)^{-1} \in L(X).$$

On a aussi

$$(L+M)\phi \in D(Q),$$

donc en appliquant le lemme précédent on obtient

$$\begin{aligned} & LMS(.,\phi,g,Q) \\ \backsimeq\ & {}_\theta(L+M-Q)(L+M)^{-1}e^{\cdot Q}(QT(L+M)\phi + g(0)) \\ & +Q(L+M)^{-1}Te^{\cdot Q}g(0) \\ \backsimeq\ & {}_\theta e^{\cdot Q}((L+M-Q)+QT)(L+M)^{-1}g(0) \\ & +(L+M-Q)e^{\cdot Q}QT\phi \\ \backsimeq\ & {}_\theta Te^{\cdot Q}((I-e^{L+M})((L+M-Q)+Q)(L+M)^{-1}g(0) \\ & +(L+M-Q)e^{\cdot Q}QT\phi \\ \backsimeq\ & {}_\theta Te^{\cdot Q}[(L+M-e^{L+M})(L+M-Q)](L+M)^{-1}g(0) \\ & +(L+M-Q)e^{\cdot Q}QT\phi \\ \backsimeq\ & {}_\theta e^{\cdot Q}Tg(0) - Te^{\cdot Q}e^{L+M}(L+M-Q)(L+M)^{-1}g(0) \\ & +(L+M-Q)e^{\cdot Q}QT\phi, \end{aligned}$$

mais d'après la première assertion du lemme précédent,

$$Te^{\cdot Q}e^{L+M}(L+M-Q)(L+M)^{-1}g(0) \in C^{\infty}([0,1],X),$$

puisque $L+M$ génère un semi-groupe analytique.
Finalement

$$LMS(.,\phi,g,Q) \simeq_{\theta} Te^{\cdot Q}g(0) + T(L+M-Q)e^{Q}Q\phi.$$

□

Lemme 3.3 *On suppose que les hypothèses* $(H_1) \sim (H_4)$ *sont vérifiées. Alors pour tout* $g \in C^{\theta}([0,1];X)$, $Q \in \{L,M\}$, $\phi \in D(Q^2)$ *et* $\lambda \in \rho(L+M-Q)$, *on a*

1. $QS(.,\phi,g,Q) \simeq_{\theta} 0$.
2. $Q^2S(.,\phi,g,Q) \simeq_{\theta} Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}LMS(.,\phi,g,Q)$.

Preuve :

1 On a

$$\begin{aligned} QS(.,\phi,g,Q) &= Q(L+M)^{-1}S_1(x,(L+M)\phi,g,Q) + Q(L+M)^{-1}S_2(x,g,Q) \\ &= Q\left[e^{xQ}T\phi + \int_0^x e^{(x-s)Q}(L+M)^{-1}g(s)ds\right] \\ &\quad -Q(L+M)^{-1}\left[Te^{xQ}\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}g(s)ds\right] \\ &= Q[w_1(x)] - Q(L+M)^{-1}[w_2(x)], \end{aligned}$$

tel que

$$w_1(x) = e^{xQ}T\phi + \int_0^x e^{(x-s)Q}(L+M)^{-1}g(s)ds,$$

$$w_2(x) = Te^{xQ}\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}g(s)ds.$$

$L+M-Q$ génère un semi groupe analytique généralisé, donc

$$\int_0^1 e^{s(L+M-Q)}g(s)ds \in D(L+M-Q) = D(Q) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,\infty},$$

et $w_2(.) \simeq_{\theta} 0$. De plus on a d'après la proposition 1.8,

$$Qw_1(.) \simeq_{\theta} e^{\cdot Q}(QT\phi + (L+M)^{-1}g(0)),$$

et comme

$$QT\phi + (L+M)^{-1}g(0) \in D(L) = D(Q) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,\infty},$$

donc d'après le théorème 1.3, on déduit que

$$e^{\cdot Q}(QT\phi + (L+M)^{-1}g(0)) \in C^{\theta}([0,1],X)$$

d'où

$$Qw_1(.) \backsimeq_\theta 0.$$

Finalement

$$QS(.,\phi,g,Q) \backsimeq_\theta 0.$$

2 On écrit

$$\begin{aligned}
Q^2S(.,\phi,g,Q) &= Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}(L+M-Q-\lambda)QS(.,\phi,g,Q) \\
&= Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}(L+M-Q)QS(.,\phi,g,Q) \\
&\quad -Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}\lambda QS(.,\phi,g,Q) \\
&= Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}LMS(.,\phi,g,Q) \\
&\quad -\lambda Q(L+M-Q-\lambda)^{-1}QS(.,\phi,g,Q),
\end{aligned}$$

en utilisant le premier point, on obtient le résultat. □

3.2 Résultats principaux

On rappelle que la solution formelle u de (3.1), (3.2) est donnée en fonction de R, S_1 et S_2 par

$$\begin{aligned}
u(x) &= (L+M)^{-1}S_1(x,(L+M)u_0,f,M) \\
&\quad +(L+M)^{-1}S_2(x,f,M) - TR(x,f_1,M) \\
&\quad +(L+M)^{-1}S_1(1-x,(L+M)u_1,f(1-.),L) \\
&\quad +(L+M)^{-1}S_2(1-x,f(1-.),L) - TR(1-x,f_0,L) \\
&= S(x,u_0,f,M) + S(1-x,u_1,f(1-.),L) \\
&\quad -TR(x,f_1,M) - TR(1-x,f_0,L),
\end{aligned}$$

d'après (3.7). Si on pose de plus

$$\tilde{f} = f(1-.),$$

on aura tout simplement

$$\begin{aligned} u(x) &= S(x,u_0,f,M)+S(1-x,u_1,\tilde{f},L) \\ &\quad -TR(x,f_1,M)-TR(1-x,f_0,L). \end{aligned} \tag{3.8}$$

On vérifie d'abord que cette représentation est bien une solution du problème (3.1) : on a

$$\begin{aligned} u^{'}(x) &= S^{'}(x,u_0,f,M)+S^{'}(1-x,u_1,\tilde{f},L) \\ &\quad -TR^{'}(x,f_1,M)-TR^{'}(1-x,f_0,L), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S^{'}(x,u_0,f,M) &= (L+M)^{-1}S_1^{'}(x,(L+M)u_0,f,M)+(L+M)^{-1}S_2^{'}(x,f,M) \\ &= (L+M)^{-1}\left[Me^{xM}T(L+M)u_0+M\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds+f(x)\right] \\ &\quad +(L+M)^{-1}\left[-TMe^{xM}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\right] \\ &= M(L+M)^{-1}S_1(x,(L+M)u_0,f,M)+(L+M)^{-1}f(x) \\ &\quad +M(L+M)^{-1}S_2(x,f,M) \\ &= MS(x,u_0,f,M)+(L+M)^{-1}f(x). \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$S^{'}(1-x,u_1,\tilde{f},L) = -LS(1-x,u_1,\tilde{f},L)-(L+M)^{-1}f(x),$$

$$R^{'}(x,f_1,M) = MR(x,f_1,M),$$

$$R^{'}(1-x,f_0,L) = -LR(1-x,f_0,L).$$

Donc

$$\begin{aligned} u^{'}(x) &= MS(x,u_0,f,M)-MTR(x,f_1,M) \\ &\quad -LS(1-x,u_1,\tilde{f},L)+LTR(1-x,f_0,L) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u^{''}(x) &= M^2S(x,u_0,f,M)-M^2TR(x,f_1,M) \\ &\quad +L^2S(1-x,u_1,\tilde{f},L)-L^2TR(1-x,f_0,L) \\ &\quad +(L+M)(L+M)^{-1}f(x). \end{aligned}$$

ainsi d'après (H_2),

$$
\begin{aligned}
& u^{''}(x)+(L-M)u^{'}(x)-LMu(x) \\
= \;& u^{''}(x)+2Bu^{'}(x)+Au(x) \\
= \;& f(x).
\end{aligned}
$$

De plus u vérifie les conditions aux limites car

$$
\begin{aligned}
u(0) &= S(0,u_0,f,M)+S(1,u_1,\tilde{f},L)-TR(0,f_1,M)-TR(1,f_0,L) \\
&= (L+M)^{-1}\left[T(L+M)u_0-T\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\right] \\
&\quad +(L+M)^{-1}\left[e^{L}T(L+M)u_1+\int_0^1 e^{(1-s)L}\tilde{f}(s)ds-Te^{L}\int_0^1 e^{sM}\tilde{f}(s)ds\right] \\
&\quad -Te^{L}\left[u_1-(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds\right] \\
&\quad -Te^{L+M}\left[u_0-(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\right] \\
&= u_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(1) &= S(1,u_0,f,M)+S(0,u_1,\tilde{f},L)-TR(1,f_1,M)-TR(0,f_0,L) \\
&= (L+M)^{-1}\left[e^{M}T(L+M)u_0+\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds-Te^{M}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\right] \\
&\quad +(L+M)^{-1}\left[T(L+M)u_1-Te^{L}\int_0^1 e^{sM}\tilde{f}(s)ds\right] \\
&\quad -Te^{L+M}\left[u_1-(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds\right] \\
&\quad -Te^{M}\left[u_0-(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\right] \\
&= u_1.
\end{aligned}
$$

Maintenant pour démontrer l'unicité, on décompose la solution u en

$$u=v+w$$

où

$$\begin{cases} v = L(L+M)^{-1}u + (L+M)^{-1}u', \\ \\ w = M(L+M)^{-1}u - (L+M)^{-1}u', \end{cases}$$

donc, on aura

$$\begin{aligned} v' &= L(L+M)^{-1}u' + (L+M)^{-1}u'' \\ \\ &= L(L+M)^{-1}u' - (L+M)^{-1}((L-M)u' - LMu - f) \\ \\ &= Mv + (L+M)^{-1}f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w' &= M(L+M)^{-1}u' - (L+M)^{-1}u'' \\ \\ &= M(L+M)^{-1}u' + (L+M)^{-1}((L-M)u' - LMu - f) \\ \\ &= -Lw - (L+M)^{-1}f, \end{aligned}$$

et

$$\tilde{w}' = L\tilde{w} - (L+M)^{-1}f(1-.),$$

où

$$\tilde{w} = w(1-.).$$

Les solutions des deux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} v' = Mv + (L+M)^{-1}f \\ \\ \tilde{w}' = L\tilde{w} + (L+M)^{-1}f(1-.), \end{cases}$$

sont données par

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{xM}\varepsilon_0 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\ \tilde{w}(x) &= e^{xL}\varepsilon_1 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)L}f(1-s)ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x) + \tilde{w}(1-x) \\ &= e^{xM}\varepsilon_0 + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\ &\quad + e^{(1-x)L}\varepsilon_1 + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(\sigma-x)L}f(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Comme

$$u_0 = u(0),\ u_1 = u(1),$$

on aura

$$\begin{cases} \varepsilon_0 + e^L\varepsilon_1 + (L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL}f(s)ds = u_0 \\ e^M\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + (L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds = u_1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= T(u_0 - e^L u_1) - T(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad +T(L+M)^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}ds, \\ \varepsilon_1 &= T(u_1 - e^M u_0) - T(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad +T(L+M)^{-1}e^M\int_0^1 e^{sL}ds, \end{aligned}$$

ainsi u est forcément donnée par (3.6).

Le théorème suivant précise les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution stricte.

Théorème 3.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_1) \sim (H_4)$ *sont vérifiées et soit* $f \in C^\theta([0,1], X)$. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème* $(3.1)-(3.2)$ *admet une unique* (L,M) *solution stricte* u.
2. $u_0,\ u_1 \in D(LM)$ *et*
$$f(i) - Au_i \in \overline{D(LM)}, \quad i = 0,1.$$

preuve :

Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$. On suppose qu'il existe une (L,M) solution stricte u du problème (3.1)- (3.2). Alors

$$u_0 \in D(LM), \quad u_1 \in D(LM),$$

et comme

$$LMu(.) - LMS(.,u_0,f,M) - LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L)$$

$$= \quad -LMR(1-.,f_0,L) - LMR(.,f_1,M),$$

d'après les lemmes 3.1 et 3.2, on a

$$LMu(.) \simeq_\theta LMS(.,u_0,f,M) + LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L)$$

où

$$\begin{aligned} LMS(.,u_0,f,M) &\simeq {}_{\theta}Te^{\cdot M}f(0)+TLe^{\cdot M}Mu_0 \\ &\simeq {}_{\theta}T[e^{\cdot M}f(0)+Le^{\cdot M}Mu_0] \\ &\simeq {}_{\theta}T[e^{\cdot M}(f(0)-Au_0)], \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L) &\simeq {}_{\theta}Te^{(1-.)L}\tilde{f}(0)+TMe^{(1-.)L}Lu_1 \\ &\simeq {}_{\theta}T[e^{(1-.)L}f(1)+Me^{(1-.)L}Lu_1] \\ &\simeq {}_{\theta}T[e^{(1-.)L}(f(1)-Au_1)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme

$$LMS(.,u_0,f,M)\in C^1(]0,1],X),\ \ LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L)\in C^1([0,1[,X), \tag{3.11}$$

on aura

$$\begin{aligned} LMu &\in C([0,1],X) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\cdot M}(f(0)-Au_0)\in C([0,1],X) \\ e^{(1-.)L}(f(1)-Au_1)\in C([0,1],X) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (f(0)-Au_0)\in \overline{D(M)} \\ (f(1)-Au_1)\in \overline{D(L)}, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

d'après le premier point de la proposition 1.7. De plus on a d'après Haase [9]

$$\begin{cases} \overline{D(M)}=\overline{D(M^2)}=\overline{D(LM)} \\ \overline{D(L)}=\overline{D(L^2)}=\overline{D(LM)}, \end{cases}$$

d'où le résultat.

Inversement, si $u_0,\ u_1\in D(LM)$ et

$$f(i)-Au_i\in\overline{D(LM)},\quad i=0,1,$$

donc d'après (3.12),

$$LMS(.,u_0,f,M),\ \ LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L)\in C([0,1],X),$$

le deuxième point du lemme 3.3 donne

$$M^2S(.,u_0,f,M),\ \ L^2S(1-.,u_1,\tilde{f},L) \in C([0,1],X),$$

mais

$$\begin{aligned}(L-M)u^{'}(.) &\simeq {}_\theta(L-M)MS(.,u_0,f,M)-(L-M)LS(1-.,u_1,\tilde{f},L)\\ &\simeq {}_\theta LMS(.,u_0,f,M)-M^2S(.,u_0,f,M) \\ &+MLS(1-.,u_1,\tilde{f},L)-L^2S(1-.,u_1,\tilde{f},L)\end{aligned}\tag{3.13}$$

donc

$$(L-M)u^{'} \in C([0,1],X),$$

et comme

$$u^{''}=f-(L-M)u^{'}+LMu \in C([0,1],X),$$

on déduit que u est une (L,M) solution stricte du problème (3.1)-(3.2). □

Pour la régularité maximale de la solution stricte on a

Théorème 3.2 *On suppose que les hypothèses $(H_1)\sim(H_4)$ sont vérifiées et soit $\theta\in\,]0,1[$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème $(3.1)-(3.2)$ admet une unique (L,M) solution stricte u qui vérifie la propriété de la régularité maximale*

$$u^{''},Bu^{'},Au \in C^\theta([0,1],X).$$

2. $f\in C^\theta([0,1],X)$, u_0, $u_1\in D(LM)$ *et*

$$f(i)-Au_i \in (D(LM),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty},\quad i=0,1.\tag{3.14}$$

preuve :

On suppose qu'il existe une (L,M) solution stricte u du problème (3.1)-(3.2) ayant la propriété de la régularité maximale. Alors on a nécessairement

$$\begin{cases} u_0,\ u_1\in D(LM)\\ f=u^{''}+2Bu^{'}+Au\in C^\theta([0,1],X).\end{cases}$$

De plus

$$Au=-LMu\in C^\theta([0,1],X),$$

en utilisant (3.9), (3.10) et (3.11) et par analogie avec la preuve du théorème précédent, on obtient par le premier point du théorème 1.3,

$$\begin{aligned}
LMu &\in C^{\theta}([0,1],X) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\cdot M}(f(0)-Au_0) \in C^{\theta}([0,1],X) \\ e^{(1-.)L}(f(1)-Au_1)) \in C^{\theta}([0,1],X) \end{cases} \qquad (3.15)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)-Au_0 \in (D(M),X)_{1-\theta,\infty} \\ f(1)-Au_1 \in (D(L),X)_{1-\theta,\infty}, \end{cases}
\end{aligned}$$

on déduit le résultat en utilisant la propriété de réitération de Lions-Peetre :

$$\begin{aligned}
(D(M),X)_{1-\theta,\infty} &= (D(L),X)_{1-\theta,\infty} \\
&= (D(L^2),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty} \\
&= (D(M^2),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty} \\
&= (D(LM),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}.
\end{aligned}$$

Inversement, si $f \in C^{\theta}([0,1],X)$, u_0, $u_1 \in D(LM)$ et

$$f(i)-Au_i \in (D(LM),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}, \quad i=0,1,$$

d'après (3.15),

$$LMS(.,u_0,f,M),\ LMS(1-.,u_1,\tilde{f},L) \in C^{\theta}([0,1],X),$$

et d'après le lemme 3.3,

$$M^2S(.,u_0,f,M),\ L^2S(1-.,u_1,\tilde{f},L) \in C^{\theta}([0,1],X),$$

de (3.13) on conclut que

$$(L-M)u^{'} \in C^{\theta}([0,1],X), \quad u^{''} = f-(L-M)u^{'}+LMu \in C^{\theta}([0,1],X).$$

□

3.3 Exemple typique des opérateurs L et M

Dans cette section on donne un exemple d'un couple d'opérateurs (L,M) vérifiant les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$.

On suppose que les opérateurs A et B sont tels que

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est fermé et } \mathbb{R}_- \subset \rho(B^2 - A) \\ \exists c > 0 : \forall \lambda \geq 0, \quad \left\| (\lambda I + B^2 - A)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \dfrac{c}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{3.16}$$

(dans ce cas il est connu que $-(B^2 - A)^{1/2}$ génère un semi groupe analytique généralisé),

$$\begin{cases} D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \subseteq D(B) \text{ et } \forall y \in D(B) \\ B(B^2 - A)^{-1/2} y = (B^2 - A)^{-1/2} B y, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} L := B - (B^2 - A)^{1/2}, \quad M := -B - (B^2 - A)^{1/2} \\ \text{génèrent des semi groupes analytiques généralisés sur } X, \end{cases} \tag{3.18}$$

alors, on a

Lemme 3.4 *Sous les hypothèses (3.16), (3.17) et (3.18), on a*

$$\begin{cases} D(M) = D(L) = D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \\ D(ML) = D(LM) = D(B^2 - A) \\ ML = LM \subset -A, \end{cases}$$

et

$$(L + M)^{-1} = -\frac{1}{2}(B^2 - A)^{-1/2} \in L(X).$$

Pour la preuve voir [6].

Chapitre 4

Applications

4.1 Première application

On considère un opérateur C générateur d'un semi-groupe analytique généralisé borné tel que $0 \in \rho(C)$.
On pose

$$B = bC, \quad A = -aC^2,$$

où

$$a,\ b \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ \sqrt{b^2 + a} > 0.$$

Les hypothèses $(H_1) \sim (H_4)$ sont vérifiées pour les opérateurs

$$\begin{cases} L = (b + \sqrt{b^2 + a})C \\ M = (-b + \sqrt{b^2 + a})C, \end{cases}$$

ainsi on peut résoudre le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2bCu'(x) - aC^2 u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Par exemple on peut prendre C l'opérateur défini dans $X = C([0,1])$ par

$$\begin{cases} D(C) = \{v \in C^2([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\} \\ Cv = v'', \quad v \in D(C), \end{cases} \tag{4.1}$$

donc

$$\begin{cases} D(A) = D(C^2) = \left\{v \in C^4([0,1]) : v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0\right\} \\ Av = -av^{(4)}, \quad v \in D(A). \end{cases}$$

Pour l'opérateur C, on a pour $\mathrm{Re}\sqrt{z} > 0$,

$$\left[(C - zI)^{-1} g\right](y) = -\int_0^1 K_{\sqrt{z}}(y,s)\, g(s)\, ds,$$

où

$$K_{\sqrt{z}}(y,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{z}\,(1-y)\sinh\sqrt{z}s}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}, & \text{si } 0 \le s \le y \\ \dfrac{\sinh\sqrt{z}\,(1-s)\sinh\sqrt{z}y}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}, & \text{si } y \le s \le 1. \end{cases}.$$

C est inversible et

$$\left(C^{-1}g\right)(y) = \int_0^y (y-s)g(s)ds - y\int_0^1 (1-s)g(s)ds.$$

De plus $[0,+\infty[\, \subset \rho(C)$ et pour tout $\lambda \in [0,+\infty[\,$,

$$\exists k > 0 : \left\|(C - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \le \frac{k}{1+\lambda}.$$

On note que $D(C)$ n'est pas dense dans X car

$$\overline{D(C)} = \{v \in C([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

On considère alors le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2b\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}(x,y) - a\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1), \quad x \in (0,1) \\ u(0,y) = u_0(y), \quad u(1,y) = u_1(y), \quad y \in (0,1). \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour obtenir l'écriture abstraite du problème, on utilise la notation vectorielle usuelle suivante

$$\begin{cases} u(x,y) = u(x,.)(y) = u(x)(y) \\ f(x,y) = f(x,.)(y) = f(x)(y). \end{cases}$$

Dans ce cas on peut appliquer les résultats précédents et le théorème 3.1 se traduit en

Théorème 4.1 *Soient $\theta \in \,]0,1[$ et $f \in C^\theta([0,1];X)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.2) admet une unique solution stricte.*

2. *Pour* $i \in \{0,1\}$

$$\begin{cases} u_i \in C^4([0,1]),\ u_i(0)=u_i(1)=u_i^{''}(0)=u_i^{''}(1)=0 \ \textit{et} \\ \\ f(i,.)+au_i^{(4)}(.) \in C([0,1]), \\ \\ f(i,0)+au_i^{(4)}(0)=f(i,1)+au_i^{(4)}(1)=0. \end{cases}$$

Pour $\theta \in]0,1[$, on a

$$(D(A),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}=(D(M),X)_{1-\theta,\infty}=(D(C),X)_{1-\theta,\infty},$$

il est connu que cet espace coïncide avec

$$\left\{v \in Z^\theta([0,1]) : v(0)=v(1)=0\right\},$$

où

$$Z^\theta([0,1]) = \begin{cases} C^{2\theta}([0,1]) & \text{si } \ 2\theta<1 \\ C^{1,*}([0,1]) & \text{si } \ 2\theta=1 \\ C^{1,2\theta-1}([0,1]) & \text{si } \ 2\theta>1. \end{cases}$$

Ici $C^{1,*}([0,1])$ est l'espace de Zigmund définit par

$$\left\{v \in C([0,1]) / \sup_{y_1 \neq y_2} \frac{|v(y_1)-2v((y_1+y_2)/2)+v(y_2)|}{|y_1-y_2|} < \infty\right\}.$$

Le théorème 3.2 devient alors

Théorème 4.2 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.2) admet une unique solution stricte vérifiant la propriété de la régularité maximale*
$$u^{''},\quad Bu^{'},\quad Au \in C^\theta([0,1],X).$$
2. $f \in C^\theta([0,1];X)$ *et pour* $i \in \{0,1\}$

$$\begin{cases} u_i \in C^4([0,1]),\ u_i(0)=u_i(1)=u_i^{''}(0)=u_i^{''}(1)=0 \ \textit{et} \\ \\ f(i,.)+au_i^{(4)}(.) \in Z^\theta([0,1]), \\ \\ f(i,0)+au_i^{(4)}(0)=f(i,1)+au_i^{(4)}(1)=0. \end{cases}$$

4.2 Deuxième application

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On pose

$$\Sigma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg \lambda| < \alpha\}.$$

On rappelle que l'opérateur Q dans X appartient à $Sect(\alpha)$ si

$$\sigma(Q) \subset \overline{\Sigma_\alpha} \text{ et pour } \alpha < \acute{\alpha} < \pi, \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{\Sigma}_{\acute{\alpha}}} \left\| \lambda(\lambda I - Q)^{-1} \right\|_{L(X)} < \infty.$$

De plus on a la propriété suivante [9],

$$\left(Q \in Sect(\alpha) \text{ et } \beta \in]0, \frac{\pi}{\alpha}[\right) \Rightarrow Q^\beta \in Sect(\beta\alpha). \tag{4.3}$$

On note que $Q \in Sect(\alpha)$ pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si et seulement si $-Q$ génère un semi-groupe analytique généralisé borné sur X.

On considère C un opérateur dans X tel que C et $-C^2$ génèrent des semi groupes analytiques généralisés bornés sur X et $0 \in \rho(C)$.

Si $C \in Sect(\alpha)$ pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$, alors d'après (4.3),

$$C^2 \in sect(2\alpha), \; 2\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

On pose

$$B = b(C + C^2), \quad A = 4b^2 C^3, \quad b > 0,$$

alors $(H_1) \sim (H_4)$ sont vérifiées pour

$$L = 2bC, \quad M = -2bC^2,$$

donc on peut résoudre le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2b(C + C^2)u'(x) + 4b^2 C^3 u(x) = f(x) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \end{cases}$$

On peut considérer l'opérateur C définit par (4.1) pour avoir le problème concret suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial x}(x,y) + 2b\dfrac{\partial^5 u}{\partial y^4 \partial x}(x,y) + 4b^2\dfrac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)^2 \\ u(x,0) = u(x,1) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2}(x,1) = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0,y) = u_0(y), \quad u(1,y) = u_1(y), \quad y \in (0,1). \end{cases} \tag{4.4}$$

Les théorèmes correspondants à cet exemple sont

Théorème 4.3 *Soient $\theta \in (0,1)$ et $f \in C^{\theta}([0,1],X)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.4) admet une unique solution stricte.*
2. *Pour $i \in \{0,1\}$*

$$\begin{cases} u_i \in C^6([0,1]),\ u_i(0) = u_i(1) = u_i^{''}(0) = u_i^{''}(1) = u_i^{(4)}(0) = u_i^{(4)}(1) = 0 \ \textit{et} \\ \\ f(i,.) - 4b^2 u_i^{(6)}(.) \in C([0,1]), \\ \\ f(i,0) - 4b^2 u_i^{(6)}(0) = f(i,1) - 4b^2 u_i^{(6)}(1) = 0. \end{cases}$$

Théorème 4.4 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.4) admet une unique solution stricte vérifiant la propriété de la régularité maximale*
$$u^{''}, \quad Bu^{'}, \quad Au \in C^{\theta}([0,1],X).$$
2. *$f \in C^{\theta}([0,1];X)$ et pour $i \in \{0,1\}$,*

$$\begin{cases} u_i \in C^4([0,1]), u_i(0) = u_i(1) = u_i^{''}(0) = u_i^{''}(1) = u_i^{(4)}(0) = u_i^{(4)}(1) = 0, \\ \\ f(i,.) - 4b^2 u_i^{(6)}(.) \in (D(A),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}, \\ \\ f(i,0) - 4b^2 u_i^{(6)}(0) = f(i,1) - 4b^2 u_i^{(6)}(1) = 0. \end{cases}$$

Conclusion :

En introduisant deux nouveaux opérateurs L et M liés avec A et B, on a facilité l'étude de l'équation complète, obtenu une représentation simple de la solution et démontré par la suite le résultat essentiel de l'existence, de l'unicité et de la régularité maximale de cette solution pourvu que les données vérifient certaines conditions de compatibilité liées à l'équation.

Bibliographie

[1] **A. V. Balakrishnan.** : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them,* Pacif. J. Math., Vol 10 (1960), pp. 419-437.

[2] **G. Da Prato et P. Grisvard.** : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Équations Différentielles Opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser., 54, (1975), pp. 305-387.

[3] **G. Da Prato**. : *Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization,* Proceed, Symposia. Pure Math., Part I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 45 (1986), 359–370.

[4] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi**. : *On the Solvability and Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type,* Funkc. Ekv., 47 (2004), pp. 423-452.

[5] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi**. : *Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD spaces,* Funkc. Ekv., 49 (2006), pp. 193-214.

[6] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi**. : *A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications,* Funkc. Ekv., 51 (2008), pp. 165-187.

[7] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi**. : *Necessary and sufficient conditions for maximal regularity in the study of elliptic differential equations in Hölder spaces,* Discrete and continuous dynamical systems, 22 N° 4 (2008), pp. 973-987.

[8] **P. Grisvard. :** *Spazi di Tracce e Applicazioni*, Rendiconti di Matematica, 4, Vol. 5, série VI, (1972), pp. 657-729.

[9] **M. Haase. :** *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications,* Vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[10] **S. G. Krein**. : *Linear Differential Equations in Banach Space,* Moscow, 1967, English Translation : AMS, Providence, 1971.

[11] **R. Labbas. :** *Problèmes aux Limites pour Une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[12] **J. L. Lions and J. Peetre. :** *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math., Vol. 19, (1964), pp. 5-68.

[13] **A. Lunardi. :** *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, Basel, 1995.

[14] **E. Sinestrari. :** *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions*, J. Math. Anal. App., 66 (1985), pp. 16-66.

[15] **H. Triebel**. : *Interpolation Theory, Function spaces, Differential operators,* North Holland, Amsterdam, 1978.

Résumé :

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète dans les espaces de Hölder.

On démontre l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte sous certaines conditions de compatibilité naturelles liées à l'équation.

Ici, les techniques utilisées reposent essentiellement sur la théorie des semi-groupes analytiques et sur les résultats de régularité de Sinestrari.

Mots clés :

Semi-groupes, Espaces d'interpolation, Espaces da Hölder, Solution stricte, Régularité maximale.