MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation Contrôle et Optimisation**

THEME :

Les Equations Différentielles Ordinaires

Etudiant(e) : « **ALI CHERIF Abdelkader** »

« **RAHIS Omar** »

Président : « M^r DAHMANI Zoubir »
Encadrant : « Mme HAMMOU Amouria »
Examinatrice : « LADJAL Nouria»

Année Universitaire 2015/2016

Résumé

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques. Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations différentielles ordinaires. De telles équations apparaissent chaque fois que l'on veut décrire l'évolution déterministe d'un système au cours du temps: systèmes de points matériels, réactions chimiques, problèmes d'évolution de population, de diffusion d'épidémies, bref chaque fois que l'on étudie la dépendance d'un système par rapport à une variable.

Notre mémoire est sur les équations différentielles ordinaires. Il est décomposé sur quatre chapitres comme suite:

Le premier chapitre est un préliminaire et certaines définitions sur les équations différentielles ordinaires homogènes et non homogènes, a coefficients constantes où des fonctions continues avec leures différent types des solutions.

Le deuxième chapitre est un résultat d'existence et d'unicité locale et globale de problème de Cauchy générale avec des théorèmes, des lemmes et des propositions démontré comme le théorème de Cauchy-Lipchitz et le lemme de Granwall, et aussi des exemples pour bien comprendre.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la résolvante des équations linéaires dans le cas autonome et de dimension finie avec la formule de Duhamel.

Enfin, nous choisissons quelques applications de la physique, de la mécanique et de la dynamique de population.

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème

Les Equations Différentielles Ordinaires

Présenté par

Ali Cherif Abdelkader

RAHIS Omar

Soutenu le 24 /05/2016

Devant le jury

Mr	**Président**	**U. MOSTAGANEM.**
Mr	**Examinateur**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme Hammou	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. Si, dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit ; c'est qu'en effet le problème fondamental de la théorie des équations différentielles est de déduire les propriétés des solutions d'une équation ou d'un système donné de la forme analytique de ceux-ci ; or, en général, les équations qui résultent d'une investigation théorique en mathématiques ou en physique ne sont pas explicitement intégrables et constituent, bien souvent, la principale source pour la définition de nouvelles fonctions dont les propriétés peuvent être prévues par une analyse systématique de grandes classes d'équations ou de systèmes.

Ce mémoire présente une introduction aux équations différentielles ordinaires, dans le chapitre 1 on va parler du rappel et des définitions sur les EDO.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des problèmes d'existence, d'unicité de solution du problème de Cauchy et sa dépendance de la condition initiale.

Dans le chapitre 3, on étudie les équations différentielles linéaires à coefficients constants, et finalement dans le dernier chapitre on présente quelques applications.

Chapitre 1

Rappels et notations

1.1 Equation différentielle ordinaire

Définition 1.1.1 *([3]) Une équation différentielle ordinaire, également noté EDO, d'ordre* n *est une relation entre la variable réelle* t*, une fonction inconnue* $t \mapsto y(t)$ *et ses dérivées* $y', y'', ..., y^{(n)}$ *au point* t *définit par :*

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1.1}$$

L'entier n *s'appelle ordre de l'équation différentielle (1.1.1).*
Intégrer l'équation différentielle (1.1.1), c'est trouver toutes les fonctions y *qui vérifie la relation (1.1.1), le graphe de la fonction* y *est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle (1.1.1). Intégrer l'équation (1.1.1) revient à trouver toutes les courbes intégrales.*

1.2 Equation différentielle ordinaire linéaire

Définition 1.2.1 *Une équation différentielle ordinaire de type (1.1.1) d'ordre* n *est linéaire si elle est de la forme :*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \tag{1.2.1}$$

avec tous les $y_i^{(i)}$ *de degré* 1 *et tous le coefficients dépendant au plus de* t*.*

1. L'équation $y''(t) - 2y'(t) + y = 0$ est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre deux à coefficient constantes.

2. L'équation $(t-1)y'''(t) + ty'(t) - 5y = e^{(t)}$ est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficient dépendant de t.

1.3 Equation différentielle autonome

Définition 1.3.1 *On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toutes équations de la forme :*

$$F(y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.3.1}$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 1.3.1 *L'équation $y' - 2y = 0$ est équation de premier ordre autonome.*

1.4 Résolution des équations différentielles ordinaires linéaire

1.4.1 Classification des équations différentielles ordinaires du premier ordre

Définition 1.4.1 *Une équation différentielle du premier ordre est de la forme :*

$$F(t, y, y') = 0. \tag{1.4.1}$$

On distingue trois classes principales d'équations différentielles du premier ordre :

1. Équations dont on peut séparer les variables.

2. Équations homogènes.

3. Équations linéaires.

Ces dernières peuvent être à coefficients constants ou non, sans second membre (équations homogènes) ou avec second membre. Ce sont les équations différentielles les plus utilisées dans toutes les branches de la physique (mécanique, électricité,...).

1.4.2 Les équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.4.2 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme*

$$y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)\,, \tag{1.4.2}$$

où a et b sont deux fonctions de la variable réelle t continues sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On appelle solution de (1.4.2) toute fonction y dérivable sur I qui vérifie (1.4.2).
Lorsque le second membre $b(t)$ est nul, on dit que l'équation différentielle (1.4.2) est sans second membre (équation homogène).

Résolution d'une équation différentielle linéaire sans second membre

Proposition 1.4.1 *Soit $a(t)$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, la solution générale de l'équation différentielle sans second membre*

$$y' + a(t)y = 0, \tag{1.4.3}$$

est

$$y = k \ \exp(-A(t)),$$

où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ et k est une constante réelle.

Preuve Si y ne s'annule pas sur I on peut séparer les variables

$$\frac{y'}{y} = -a(t). \tag{1.4.4}$$

En intégrant les deux membres de (1.4.4), on obtient :

$$\ln(|y|) = \int_I - a(t)dt.$$

On déduit que si $A = \int_I a(t)dt$ est une primitive de $a(t)$ sur I alors

$$\ln(|y|) = -A(t) + c, (c \ \in \mathbb{R})\,.$$

D'où

$$|y| = e^{(-A(t)+c)} \ \Rightarrow y = e^c e^{-A(t)}.$$

En posant $k = \pm e^c$, la solution de l'équation différentielle (1.4.3) devient :

$$y = k\ e^{-A(t)} = k\ \exp\left(-\int_I a(t)dt\right),\ (k\ \in \mathbb{R}). \tag{1.4.5}$$

Exemple 1.4.1 *Soit l'équation différentielle du premier ordre sans second membre suivante :*

$$y' + y\ \sin(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$y = k\ e^{\cos(t)},\ (k \in \mathbb{R}).$$

Résolution d'une équation différentielle non homogène (avec second membre)

Théorème 1.4.1 *La solution générale de l'équation avec second membre (1.4.2) est*

$$y = e^{-A(t)} \int_I b(t)e^{A(t)}dt,$$

où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$.

Preuve :

Pour résoudre l'équation différentielle (1.4.2), on procède de la manière suivante :

Etape 1 : Résolution de l'équation homogène (1.4.3) (sans second membre).

Etape 2 : On applique la méthode de variation de la constante.

En posant $k \equiv k(t)$, la solution (1.4.5) de l'équation différentielle (1.4.3) devient

$$y = k(t)e^{-A(t)},$$

et on a

$$\begin{aligned} y' &= k'(t)e^{-A(t)} - A'(t)k(t)e^{-A(t)} \\ &= k'(t)e^{-A(t)} - a(t)k(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

En remplaçant y et $y\prime$ dans l'équation (1.4.2), on obtient :

$$k'(t)e^{-A(t)} - a(t)k(t)e^{-A(t)} + a(t)k(t)e^{-A(t)} = b(t).$$

D'où

$$k'(t)e^{-A(t)} = b(t) \Longrightarrow k'(t) = b(t)e^{A(t)}. \tag{1.4.6}$$

En intégrant les deux membres de l'équation (1.4.6), on trouve

$$k(t) = \int_I b(t)e^{A(t)}dt.$$

Donc la solution générale de l'équation (1.4.2) est

$$y = e^{-A(t)} \int_I b(t)e^{A(t)}dt.$$

Exemple 1.4.2 *On considère l'équation différentielle suivante*

$$y' + \frac{1}{t}y = 3t, \ \ (t \in \mathbb{R}^*)\,. \tag{1.4.7}$$

Etape 1 : *On commence par la résolution de l'équation homogène*

$$y' + \frac{1}{t}y = 0, \ (t \in \mathbb{R}^*)\,. \tag{1.4.8}$$

On écrit l'équation différentielle (1.4.8) sous la forme

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t}. \tag{1.4.9}$$

En intégrant les deux membres de (1.4.9), on obtient

$$y = k \ \exp(-\ln(t)) = \frac{k}{t}, \ (t \in \mathbb{R}^*)\,.$$

Etape 2 : *La méthode de variation de la constante. On pose $k \equiv k(t)$, comme*

$$y(t) = \frac{k(t)}{t}, \ (t \in \mathbb{R}^*)\,,$$

est une solution de l'équation différentielle (1.4.7), alors

$$\frac{t\ k'(t) - k(t)}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{k\,(t)}{t} = 3t,$$

ce qui implique

$$k'(t) = 3t^2.$$

On intègre cette dernière équation, on trouve

$$k(t) = t^3 + c, \ (c \in \mathbb{R}) .$$

Donc la solution générale de l'équation (1.4.7) est

$$y = \frac{t^3 + c}{t},$$

où c est une constante réelle et $(t \in \mathbb{R}^*)$.

1.4.3 Équations différentielles linéaires d'ordre n

Cas d'une équation non homogène

Une équation différentielle linéaire d'ordre n, $(n \in \mathbb{N})$ à coefficients fonctions continues à valeurs réelles est de la forme suivante

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = r(t) \tag{1.4.10}$$

où $y^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$ sont les dérivées d'ordre i de la fonction y par rapport à t, et a_i , $1 \leq i \leq n$ sont des fonctions continues à valeurs réelles.

Une solution de cette équation est une fonction $y(t)$, n fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Cependant pour trouver cette solution, on commence tout d'abord par la résolution de l'équation homogène associée pour trouver la solution dite homogène ou complémentaire puis on utilise une méthode analogue à la méthode de variation de la constante définie précédemment.

Cas d'une équation homogène

L'équation homogène associée à l'équation différentielle (1.4.10) est

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0. \tag{1.4.11}$$

Proposition 1.4.2 *Toute combinaison linéaire de fonctions solutions de l'équation différentielle homogène (1.4.11) est aussi une solution de cette équation.*

Preuve Si les fonctions $y_1, y_2, ...y_n$ sont toutes solutions de (1.4.11) linéairement indépendantes, alors

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y_1^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y_1' + a_0(t)\, y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y_2^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y_2' + a_0(t)\, y_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y_n^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y_n^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y_n' + a_0(t)\, y_n = 0 \end{array}\right. . \tag{1.4.12}$$

En multipliant chaque ligne i du système (1.4.12) par une constante $C_i, 1 \leq i \leq n$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right)^{(n)} + a_{n-1}(t) \left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right)^{(n-1)} + \ldots + a_i(t) \left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right)^{(i)} +$$

$$\ldots + a_1(t) \left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right)^{(1)} + a_0(t) \left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) = 0.$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ est solution de (1.4.11).

Définition 1.4.3 *La solution générale de l'équation homogène est une combinaison linéaire des n formes solutions $y_1, \ldots, y_n$ toutes linéairement indépendantes*

$$y_h = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \ .$$

Lorsque les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont toutes linéairement indépendantes, on dit que l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ forme une base de solutions de l'équation (1.4.11).

Remarque 1.4.1 *Si les fonctions a_i , $1 \leq i \leq n$ sont toutes constantes sur $\mathbb{R}$, l'équation (1.4.10) est dite équation différentielle d'ordre n à coefficients constants avec second membres.*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_i y^{(i)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(t)\,. \tag{1.4.13}$$

Définition 1.4.4 *On définit le polynôme caractéristique de l'équation (1.4.13) par*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{1.4.14}$$

Théorème 1.4.2 *([4]) Lorsque le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ a des racines $\lambda_1, ..., \lambda_k$ d'ordre de multiplicité respectif $r_1, ..., r_k$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1.4.11) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension m ayant pour base les fonctions*

$$y_{j,q}(x) = l^q e^{\lambda_j t} \ , \ 1 \leq j \leq k \ , \ 0 \leq q \leq r_j - 1.$$

1.5 Problème avec conditions initiales

En général, les problèmes physiques font intervenir des conditions initiales sur la fonction y et ses dérivées $y', y'', ..., y^{(n)}$ afin d'obtenir un certain comportement de la solution y de l'équation différentielle (1.4.10). Dans cette section on s'intéresse à la résolution des équations différentielles (homogènes ou non-homogènes) d'ordre n et de n conditions initiales de type

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_i(t)\, y^{(i)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y & = & r(t) \\ y(0) & = & k_0 \\ y'(0) & = & k_1 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ y^{(n-1)} & = & k_{n-1} \end{array}\right. . \tag{1.5.1}$$

Théorème 1.5.1 *([4], [1])* ***"Existence et unicité de la solution"***
Si les fonctions $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont toutes continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors le problème (1.5.1) a une solution unique.

Exemple 1.5.1 *On résout le problème :*

$$\left\{\begin{array}{lcll} y'' - 4y & = & 0 & (a) \\ y(0) & = & 1 & (b) \\ y'(0) & = & 2 & (c) \end{array}\right. , \tag{1.5.2}$$

où (a) est une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants sans second membre, (b) et (c) sont deux conditions initiales.
L'équation caractéristique associée à (a) est

$$r^2 - 4 = 0. \tag{1.5.3}$$

elle admet deux racines $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$. L'ensemble des solutions de l'équation (a) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme y vérifie les conditions initiales (b) et (c), alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 & = & 1 \\ c_1 - c_2 & = & 1 \end{array}\right. .$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy général

2.1 Problème de Cauchy général

Dans ce chapitre, on étudie les problèmes d'existence et d'unicité locale et globale du problème de Cauchy.

Définition 2.1.1 *([2]) Le problème de Cauchy étant donnés par :*

1. *Un interval $I \subset \mathbb{R}$.*
2. *Une fonction f, définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:*

$$f: \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, y) & \mapsto & f(t, y) \end{array},$$

trouver une fonction $y \in C^1(I)$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) & = & f\left(t, y\left(t\right)\right), & \forall t \in I,\ \forall y \in \mathbb{R}^n & \\ y(t_0) & = & y_0, & t_0 \in I & \text{(Condition Initiale)} \end{cases}. \tag{2.1.1}$$

Outre la donnée d'un intervalle et d'une fonction f, le problème de Cauchy se caractérise par la donnée d'une condition dite condition de Cauchy ou condition initiale. La forme de cette condition est essentielle.

Le problème de Cauchy peut se mettre sous une forme équivalente donnée par le théorème suivante :

Théorème 2.1.1 *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si la fonction y est continue et $\forall t \in I$; $(t, y(t)) \in I \times \mathbb{R}^n$ et*

$$\forall t \in I,\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{2.1.2}$$

Preuve

Si y vérifie les deux hypothèses de ce problème alors y est différentiable et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Réciproquement, si les relations du problème de Cauchy (2.1.1) sont satisfaites, l'équation (2.1.2) se déduit directement par intégration.

Exemple 2.1.1 *Soit le problème suivant :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & e^{-t^2} + y^2 \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 < |y| < b \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce problème est un problème de Cauchy.

La fonction f est définie par : $(t, y) \mapsto f(t, y) = e^{-t^2} + y^2$ est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}$ avec la condition initiale : $y(t_0) = y(0) = 0$.

On a y est une fonction continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, donc par intégration sur $[0; t]$ de la fonction f on trouve :

$$\begin{array}{rcl} \int_0^t y'(s)ds & = & \int_0^t f(s, y(s))ds \\ \Longrightarrow \quad y(t) - y(0) & = & \int_0^t \left[e^{-s^2} + y^2(s)\right] ds \\ \Longrightarrow \quad y(t) & = & \int_0^t f(s, y(s))ds. \end{array}$$

2.2 Résolution du problème de Cauchy par les approximations successives de Picard

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right. . \tag{*}$$

Description de la méthode :

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_n(\tau))d\tau. \qquad (**)$$

Etape 1 : Décrire la condition initiale.

Etape 2 : Déterminer les termes de la suite y_n via la relation $(**)$ i.e.

Pour $n = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau))d\tau.$

Pour $n = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau.$

.

.

.

Pour $n - 1 \quad \rightarrow \quad y_n = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau.$

Etape 3 : Etudier la convergence de cette suite de fonction.

Etape 4 : La suite converge vers la solution du $(*)$.

Exemple 2.2.1 *Soit le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Etape 1 : $t_0 = 0, y(t_0) = y(0) = y_0 = 1.$

Etape 2 :

Pour $n = 0$:

$$\begin{array}{lrcl} & y_1 & = & 1 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau))d\tau \\ & & = & 1 + \int_{0}^{t} y_0(\tau)d\tau \\ \text{donc} & y_1(t) & = & 1 + t. \end{array}$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{array}{lrcl} & y_2 & = & y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau \\ & & = & 1 + \int_{0}^{t} y_1(\tau)d\tau \\ \text{donc} & y_2(t) & = & 1 + t + \frac{1}{2}t^2. \end{array}$$

Pour $n = 2$:
$$y_3(t) = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3.$$
.
.
.
Pour n $$y_n(t) = 1 + t + \tfrac{1}{2!}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!}t^n.$$
Etape 3 : La convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $y_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$, alors :

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$ c'est une série qui converge vers $y = \exp(t)$.

Etape 4 : donc $y = \exp(t)$ est la solution du problème de Cauchy.

2.3 Lemme de Gronwall

Avec la formule de Duhamel, le lemme de Gronwall (où inégalité) est l'un des outils fondamentaux dans la théorie des équations différentielles.

Il en existe plusieurs versions mais l'idée est toujours d'obtenir une estimation pour une fonction y à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait une inégalité implicite.

2.3.1 Inégalités différentielles

On appelle souvent lemme de Gronwall l'observation suivante. Supposons qu'une fonction $y \in C^1(I;\mathbb{R})$ vérifie $y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t)$ avec a et $b \in C(I;\mathbb{R})$.

Alors en s'inspirant de la résolution de l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$, on multiplie l'inégalité par le nombre strictement positif $\exp(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau)$ et l'on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)\right) y(t) \leq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) b(t),$$

d'ou en intégrant :

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) y(t) - y(0) \leq \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Et finalement :

$$y(t) \leq y(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t}\left[\exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau\right) b(s)\right] ds.$$

Inéquation intégrales

Lemme 2.3.1 ***(de Gronwall)***

Si $y \in C([0,T];\mathbb{R}^+)$ est telle qu'il existe $a \in C([0,T];\mathbb{R}^+)$ et $c \in C([0,T];\mathbb{R})$ avec

$$y(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)y(\tau)d\tau, \text{ pour tout } t \in [0,T], \tag{2.3.1}$$

alors

$$y(t) \leq c(t) + \int_0^t \left[c(\tau)a(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)\right] d\tau \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Démonstration :

L'astuce consiste à démontrer l'inégalité voulue non pas pour y directement mais pour le second membre de l'inégalité *(2.3.1)*

$$z(t) := \int_0^t a(\tau)y(\tau)d\tau.$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on pose $y'(t) = a(t)y(t) \leq a(t)(c(t)+z(t))$ puisque $a \geq 0$. Ainsi z satisfait une équation différentielle comme au paragraphe précédent, avec $b(t) = a(t)c(t)$.
En observant que $z(0) = 0$, on en déduit que

$$z(t) \leq \int_0^t \left[a(\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)\right] d\tau, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

On conclue par transitivité entre cette majoration de $z(t)$ et l'inégalité *(2.3.1)*.

2.4 Existence et unicité locale de solution

Dans cette section, on va étudier l'unicité de solution locale. La condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que si f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable) alors l'unicité de la solution est assurée. Pour cela, on aura besoin du lemme de Gronwall qui est un outil très important dans l'étude.

Définition 2.4.1 ***(Solution locale)***

On appelle solution locale du problème de Cauchy (2.1.1) la donnée un couple (J,y) ou J est un interval de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de t_0 dans I et où y est une fonction de classe C^1 sur J.

2.4.1 Résoudre un problème de Cauchy (localement)

Pour résoudre un problème de Cauchy localement, il faut trouver un interval $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction ψ de classe C^1 sur J satisfaisant (2.1.1).

On appel solution de l'équation $y' = f(t, y)$ avec condition initiale de Cauchy $(t_0, y(t_0))$ l'application : $\psi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est vérifiant :

a) $t_0 \in I$ et $(t, \psi(t)) \in \mathbb{R}^n$ quelque soit $t \in I$.

b) $\psi(t_0) = \psi_0$ quelque soit $t_0 \in I$.

c) $\psi'(t_0) = f(t, \psi(t))$.

Théorème 2.4.1 ***(Cauchy-Lipchitz)***
Soient $f \in C(I \times U; X)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert d'un espace de Banach X,et $(t_0, y_0) \in I \times U$.
On suppose qu'il existe un voisinage de (t_0, y_0) dans $I \times U$ et $L > 0$ tel que pour tous (t_0, y_1) et (t_0, y_2) dans ce voisinage

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| .$$

Alors on a :

1. ***Existence :*** *Il existe $\tau > 0$ et $y \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ solution du problème de Cauchy (2.1.1).*
2. ***Unicité*** *: Si z est une autre solution de (2.1.1), elle coïncide avec y sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*
3. ***Régularité :*** *Si de plus f de classe C^r, $r \geq 1$, alors y est de classe C^{r+1}.*

Démonstration
Pour simplifier, on va démontrer les résultats en remplaçant l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ par $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau > t_0$ (le cas de l'intervalle $[t_0 + \tau, t_0]$ s'en déduisant par le changement de variable $t \to 2t_0 - t$) : Cela évite le recours à des valeurs absolues.

Etape 1 : On commence par choisit un voisinage de $[t_0, y_0]$, par fois appelé cylindre de sécurité $C(t_+, R) := [t_0, t_+] \times \overline{B}(y_0, R) \subset I \times U$ avec $t_+ > t_0$ et $R > 0$, où $\overline{B}(y_0,R)$ désigne la boule fermé de centre y_0 et de rayan R, dans le quel f est bornée, disons par une constante M :

$$\|f(t,y)\| \leq M,\ \forall\ (t,y) \in [t_0,t_+] \times \overline{B}(y_0,R),$$

et aussi Lipchitzienne :

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L\,\|y_1 - y_2\| \text{ pour tout } (t,y_1),(t,y_2) \in C(t_+,R).$$

La nœud de la démonstration consiste alors à réécrire le problème de Cauchy *(2.1.1)* sous la forme intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

et à chercher une solution comme limite de la suite $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$y(t_0) = y_0,\ y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^n(\tau)d\tau.$$

<u>Etape 2 :</u> Elle consiste à vérifier que pour t_+ assez proche de t_0, la suite $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie dans $[t_0,t_+]$ et à valeurs dans $\overline{B}(y_0,R)$. En effet, la fonction y constante est bien à valeur dans $\overline{B}(y_0,R)$. Supposons qu'on ait construit y^n continue sur $[t_0,t_+]$ et à valeur dans $\overline{B}(y,R)$.

Alors y^{n+1} est bien définie et de plus :

$$\left\|y^{n+1}(t) - y_0\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, y^n(\tau)\|\,d\tau \leq (t_+ - t_0)M.$$

Donc il suffit que $(t_+ - t_0)M \leq R$ pour que y^{n+1} soit aussi à valeur dans $\overline{B}(y_0,R)$.

<u>Etape 3 :</u> Est de montrer que, quitte à diminuer t_+, la suite $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente dans l'espace de Banach $C([t_0,t_+];\mathbb{R}^n)$(muni de la norme uniforme).

Pour $n \geq 1$ on a :

$$\left\|y^{n+1}(t) - y^n(t)\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\|f(\tau, y^n(\tau) - f(\tau, y^{n-1}(\tau)\right\| d\tau \leq (t_+ - t_0)L \sup_{[t_0,t_+]} \left\|y^n - y^{n-1}\right\|.$$

Donc, par exemple t_+ tel que :

$$(t_+ - t_0)L \leq \frac{1}{2}.$$

On a par un récurrence immédiate :

$$\sup_{[t_0,t_+]} \left\| y^{n+1} - y^n \right\| \leq \frac{1}{2^n} \sup_{[t_0,t_+]} \left\| y^1 - y^0 \right\|.$$

On en déduit aisément que la suite $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Etape 4 : Il faut vérifier que la limite y est solution de notre problème.

Or, par passage à la limite dans l'égalité

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^n(\tau)d\tau,$$

on voir que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Comme y est continue ainsi que f, le second membre de cette égalité est de classe C^1 et donc y aussi. (Plus généralement, si f est de classe $C^r, r \geq 0, y$ est de classe C^{r+1}).

Et y vérifie

$$y(t) = f(t, y(t)) \text{ pour tout } t \in [t_0, t_+].$$

Ceci achève la preuve de l'existence d'une solution.

La preuve de l'unicité locale est très facile grâce au lemme de Gronwall. En effet, si z est une autre solution du même problème de Cauchy, elle est à valeurs dans $\overline{B}(y_0, R)$, sur un intervalle $[t_0, t_1], 0 < t_1 \leq t_+$. Et on a

$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))d\tau.$$

Et donc

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|y(\tau) - z(\tau)\| \, d\tau.$$

Par conséquent, une version simplissime du lemme de Gronwall implique :

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \exp(Lt) \|y(t_0) - z(t_0)\| = 0 \text{ pour tout } t \in [t_0, t_+].$$

Exemple 2.4.1 *Application du théorème d'existence et d'unicité pour le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) &= \exp(-t^2) + y^2 \\ y_0 &= 0 \; sur \; 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, |y| < b \end{cases}.$$

La fonction f est définie par

$$(t, y) \to f(t, y) = \exp(-t^2) + y^2.$$

Nous allons regardé si le théorème d'existence et d'unicité est bien applicable pour ce problème :

Les conditions initiales sont : $y(t_0) = y(0) = y_0 = 0$.

Etape 1 : $D = \left\{(t, y)/\,|t| < \frac{1}{2}, |y| \leq b, b > 0, a = \frac{1}{2}\right\}$.

Etape 2 : *f est lipchitzienne en y.*

Etape 3 : *D'après le théorème d'existence et d'unicité, notre problème possède une unique solution sur l'intervelle $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$, or $t_0 = 0$, donc $I_\tau =]-\tau, \tau[$.*

Etape 4 : *Recherche de τ.*

$\tau = \min(a, \frac{b}{M})$ *ou* $M = \max\limits_{]-t,\tau[} |f(t, y)| = \max\limits_{]-t,\tau[} |\exp(-t^2) + y^2| \leq 1 + b^2$.

Alors

$$\begin{aligned} \tau &= \min(\tfrac{1}{2}, \tfrac{b}{M}) \\ &= \min(\tfrac{1}{2}, \tfrac{b}{1+b^2}) \\ &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.4.2 Prolongement des solutions locales

Lemme 2.4.1 *Soient (y_1, I) et (y_2, J) deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que (y_2, J) est un prolongement de (y_1, I) si $I \subset J$ et $y_2 |_I = y_1$.*

2.4.3 Solutions maximales

Le théorème d'existence et d'unicité, fournit des solutions locales. L'unicité de ces solutions permet de démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.4.2 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz, si $y_1 \in C^1(J_1; U)$ et $y_2 \in C^1(J_2; U)$ sont deux solutions sur des intervalles J_1 et J_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) = y_0(t_0)$, alors*

$$y_1(t) = y_2(t), \text{ pour tout } t \in J_1 \cap J_2.$$

Démonstration

C'est une application classique de la notion de connexité. On remarque que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide par hypothèse et on considère l'ensemble :

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2; y_1(t) = y_2(t)\}.$$

D'après l'unicité locale des solutions, A est un ouvert. De plus, il est clairement ferme par continuité de y_1 et y_2. Donc A est égal à $J_1 \cap J_2$.

Ce lemme montre qu'il existe un plus grand intervalle J sur lequel le problème de Cauchy admet une solution, et que cette solution est unique.

Cette solution est appelée solution maximale : par définition, on ne peut pas la prolonger a $\frac{I}{J}$. Lorsque $J = I$, on dit que cette solution est globale.

Supposons que f soit continue, bornée et Lipchitzienne par rapport a y dans $[\underline{t} - 2\underline{\tau}, \underline{t} + 2\underline{\tau}]$ $\times \overline{B}(\underline{y}, 2R)$ pour $\underline{\tau} > 0$ et $R > 0$. Alors il existe $\tau \in]0, \underline{\tau}]$ tel que pour tout $(t_0, y_0) \in [\underline{t} - \underline{\tau}, \underline{t} + \underline{\tau}] \times \overline{B}(\underline{y}, R)$, la solution maximale du problème de Cauchy soit définie sur un intervalle contenant $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

2.4.4 Existences et unicités globale du solution

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales sont globales. C'est le cas si la fonction f est définie sur X tout entier et si elle est globalement Lipchitzienne : car alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni du domaine de validité de sa constante de Lipchitz.

Théorème 2.4.2 *On suppose $f \in C(I \times X; X)$ et globalement Lipchitzienne par rapport a y. Alors, quel que soit $(t_0, y_0) \in I \times X$, il existe (une unique) $y \in C^1(I; X)$ solution de problème de Cauchy.*

Démonstration

Reprendre la démonstration du théorème 2.1.1 et la remarque qui le suit : en utilisant la constante de Lipchitz globale de f, quels que soient a, b tels que $t_0 \in [a, b] \subset I$, on construit une suite de solutions approchées (u_n) qui est de Cauchy dans $C([a, b]; X)$.

2.4.5 Dépendance par rapport aux données initiales

On a entrevu dans le lemme 2.4.3 ce que l'on peut attendre lorsqu'on fait varier la condition initiale. En fait, on peut préciser ce lemme, pour comparer effectivement deux solutions de données initiales distinctes.

Lemme 2.4.3 *Dans le cadre du lemme 2.4.3, il existe $C > 0$ tel que si $(t_i, z_i) \in [t-\tau, t+\tau] \times \overline{B}(y, R)$ pour $i = 1$ ou 2, avec $|t_2 - t_1| \leq \tau$, les solutions y_i des problèmes de Cauchy correspondants vérifient l'estimation :*

$$\| y_1(t) - y_2(t) \| \leq C \| z_1 - z_2 \| + C|t_1 - t_2| \text{ pour tout } t \in [t_1 - \tau, t_1 + \tau] \cap [t_2 - \tau, t_2 + \tau].$$

Démonstration

Par hypothèse, l'intervalle $[t_1 - \tau, t_1 + \tau] \cap [t_2 - \tau, t_2 + \tau]$ est non vide et contient l'intervalle d'extrémités t_1 et t_2. En faisant la différence des deux relations :

$$y_i(t) = z_i + \int_{t_i}^{t} f(\tau, y_i(\tau))d\tau,$$

on obtient l'inégalité :

$$\| y_1(t) - y_2(t) \| \leq \| z_1 - z_2 \| + M|t_1 - t_2| + L \int_{t_1}^{t} \| y_1(s) - y_2(s) \| ds.$$

D'ou par le lemme de Gronwall :

$$\| y_1(t) - y_2(t) \| \leq \exp(L\tau)(\| z_1 - z_2 \| + M|t_1 - t_2|).$$

Chapitre 3

Equations linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse exclusivement aux équations différentielles du type

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + b(t) , \tag{3.0.1}$$

avec $b \in C(I; X)$ et $A \in C(I; L(X))$, (où $L(X)$ désigne l'espace des application linéaire continues dans l'espace de Banach X).
On dit que *(3.0.1)* est linéaire car $A(t)$ est linéaire forcée ou avec terme source, le terme $b(t)$ étant généralement dû à une source extérieure, éventuellement variable.

3.1 Existence globale

Théorème 3.1.1 ***(point fixe)***

Soient E un espace de Banach et $T : E \to E$ dont une puissance est contractante. Alors T admet un point fixe unique.
Démonstration :
Ce résultat est une conséquence facile du théorème de point fixe de Banach-Picard. Par hypothèse, il existe un entier k tel que T^k soit contractant et donc admette un point fixe unique y.
Alors

$$T^k(T(y)) = T(T^k(y)) = T(y).$$

Donc $T(y)$ est aussi un point fixe de T^k. À cause de l'unicité de ce point fixe on a ainsi $T(y) = y$.

De plus, tout point fixe de T étant évidemment un point fixe de T^k, y est l'unique point fixe de T.

Théorème 3.1.2 *Pour $b \in C(I;X)$ et $A \in C(I;L(X))$, quel que soit $(t_0, y_0) \in I \times X$, il existe une unique fonction $y \in C^1(I;X)$ solution de (3.0.1) telle que $y(t_0) = y_0$.*

Démonstration :

Pour résoudre le problème de Cauchy de donnée initiale $y(t_0) = y_0$, on cherche une solution continue de l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + b(s)]\, ds,$$

qui équivaut à

$$y(t) = z(t) + y_0, \quad \text{avec} \quad z(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)(z(s) + y_0) + b(s)]\, ds \ .$$

Pour simplifier on suppose $t_0 = 0$.

On ne peut pas travailler directement dans I, mais on le va le faire dans un intervalle compact arbitraire $[\alpha, \beta] \subset I$ (avec $\alpha < 0 < \beta$).

Définissons l'opérateur :

$$\begin{array}{rccc} T: & C([\alpha,\beta];X) & \rightarrow & C([\alpha,\beta];X) \\ & z & \mapsto & Tz \end{array},$$

avec

$$Tz(t) = \int_{0}^{t} [A(s)(z(s) + y_0) + b(s)]\, ds.$$

Quels que soient z et w dans $C([\alpha,\beta];X)$ on a

$$Tz(t) - Tw(t) = \int_{0}^{t} [A(s)(z(s) - w(s)]\, ds,$$

et donc

$$\| Tz(t) - Tw(t) \| \leq Ct \max_{s\in[0,t]} \| z - w \| \quad \text{avec} \quad C := \max_{s\in[\alpha,\beta]} \| A(s) \| \ .$$

Montrons par récurrence que

$$\| T^n z(t) - T^n w(t) \| \quad \leq \quad C^n \frac{t^n}{n!} \max_{s\in[0,t]} \| z - w \| \ ,$$

pour tout $t \in [0,t]$. C'est vrai à l'ordre 1 comme on vient de le voir. Supposons l'inégalité vraie à l'ordre n.

Alors

$$\begin{array}{rcl} \| T^{n+1}z(t) - T^{n+1}w(t) \| & = & \| T(T^n z)(t) - T(T^n w)(t) \| \\ & \leq & C \int\limits_0^t \| T^n z(t) - T^n w(t) \| \, ds \\ & \leq & C \max\limits_{s\in[0,t]} \| z - w \| \int\limits_0^t C^n \frac{s^n}{n!} ds. \end{array}$$

D'après l'hypothèse de récurrence. En évaluant l'intégrale on obtient immédiatement l'inégalité à l'ordre $n+1$:

$$\| T^{n+1}z(t) - T^{n+1}w(t) \| \quad \leq \quad C^{n+1} \tfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} \| z - w \| \ .$$

Par conséquent, on a

$$\| T^n z - T^n w \| \quad \leq \quad C^n \tfrac{(\beta-\alpha)^n}{n!} \| z - w \| \ ,$$

quels que soient z et w. Donc T^n est contractant pour n assez grand et d'après le théorème de point fixe, T admet un point fixe unique.

3.2 Résolvante

Considérons l'équation différentielle linéaire dans $L(X)$:

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \circ M(t. \tag{3.2.1}$$

En dimension finie, si l'on identifie $M(t)$ et $A(t)$ avec des matrices comme on le fera occasionnellement, le produit de composition $''\circ''$ est simplement à remplacer par le produit matriciel.

Définition 3.2.1 *On appelle résolvante de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

l'application

$$R: \begin{array}{ccc} I \times I & \rightarrow & L(X) \\ (t,t_0) & \mapsto & R(t,t_0) \end{array},$$

où $t \rightarrow R(t,t_0)$ est la solution du problème de Cauchy pour (3.0.1) avec la condition initiale $R(t_0,t_0) = I_X$.

Remarque :

On observe que pour tout $y_0 \in X$, l'application $y : t \to R(t, t_0)y_0$ est la solution du problème de Cauchy pour (3) et la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Autrement dit, le flot de *(3.0.1)* est donne par

$$\varphi^{t_0}(t, y_0) = R(t, t_0)y_0.$$

Proposition 3.2.1 *La résolvante est telle que $R(t, s) \circ R(s, t_0) = R(t, t_0)$ quels que soient $t, s, t_0 \in I$.*

Démonstration :

Soit $y_0 \in X$ et $y(t) = R(t, t_0)y_0$. Alors la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt} & = & A(t) \\ z(s) & = & y(s) \end{array} \right. ,$$

n'est autre que y, mais elle s'exprime aussi comme

$$z : \quad t \mapsto z(t) \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \begin{array}{l} R(t, s)y(s) \\ R(t, s) \circ R(s, t_0)y_0 \end{array} .$$

D'où

$$R(t, t_0)y_0 \quad = \quad R(t, s) \circ R(s, t_0)y_0 \ .$$

Ceci étant vrai quel que soit y_0, on en déduit la formule voulue.

3.2.1 Cas des équations linéaires autonomes

Si A est indépendant de t, la résolvante de (1.3.1) s'exprime à l'aide de l'exponentielle, dont on rappelle la :

Définition 3.2.2 *Pour tout $A \in L(X)$, on a*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

(La série ci-dessus est normalement convergente dans $L(X)$)

Lemme 3.2.1 *Pour tout $A \in L(X)$, l'application $t \mapsto e^{tA}$ est continument dérivable (et même de classe C^∞), et*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} \quad = \quad Ae^{tA} \quad = \quad e^{tA}A \ .$$

3.2.2 Cas des équations linéaires en dimension finie

Dimension 1

Les équations différentielles (d'ordre 1) linéaires scalaires, pour lesquelles $X = \mathbb{R}$, se résolvent explicitement la résolvante de

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y(t),$$

ou l'inconnue y est a valeures réelles et $a : I \to \mathbb{R}$ est continue est donnée par

$$R(t,s) = \exp\left(\int_t^s a(\tau)d\tau\right).$$

Dimension 2 **et plus**

Il est tentant de généraliser la formule précédente. Cependant, si les matrices $A(t)$ ne commutent pas deux a deux, une telle formule est fausse : ceci est lie au fait que e^{A+B} n'est pas le produit de e^A et e^B lorsque les matrices A et B ne commutent pas.
Tout ce que l'on peut dire est que la résolvante est liée à une base de solutions.

Proposition 3.2.2 *Soit $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ continue, et $R : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante de*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y , \tag{3.2.2}$$

c'est-a-dire que pout tout $(t,s) \in I \times I$,

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = A(t)R(t,s) \quad et \quad R(s,s) = I_n .$$

Remarque 3.2.1 *Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors les applications $t \to R(t,t_0)e_i$ (pour $i \in \{1, ..., n\}$) forment une famille indépendante de solutions de (3.2.2).*

Inversement, si $y_1, ..., y_n$ est une famille indépendante de solutions de (3.2.2), soit $B : t \in I \to B(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ dont les valeures colonnes sont $y_1(t), ..., y_n(t)$.
Alors la résolvante de (3.2.2) est donnée par

$$R(t,s) = B(t)B(s)^{-1} .$$

3.3 Formule de Duhamel

Ce paragraphe est consacré à un résultat très facile à démontrer et néanmoins fondamental. Il exprime le principe de superposition bien connu selon lequel : la solution générale d'une équation linéaire avec terme source est donnée par la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation avec terme source.

Proposition 3.3.1 ***(Formule de Duhamel)***

Soit $A \in C(I; L(X))$ et R la résolvante de l'équation différentielle homogène :

$$\tfrac{dy}{dt} \quad = \quad A(t)y \ .$$

Soit $b \in C(I; X)$ et φ^{t_0} le flot en $t_0 \in I$ de l'équation (3.0.1)

Alors pour tout $(t, z) \in I \times X$,

$$\varphi^{t_0}(t,z) \quad = \quad R(t,t_0) \cdot z \quad + \quad \int\limits_0^t R(t,s) \cdot b(s)ds \ .$$

Démonstration :

On vérifie par un calcul facile que l'application

$$t \quad \mapsto \quad \int\limits_0^t R(t,s) \cdot b(s)ds \ ,$$

est solution de l'équation avec le terme source b.

Comme $t \to R(t,t_0) \cdot z$ est solution de l'équation homogène, la somme des deux est, par linéarité, solution de l'équation avec terme source. De plus elle vaut z à $t = t_0$. Donc c'est l'unique solution cherchée.

Chapitre 4

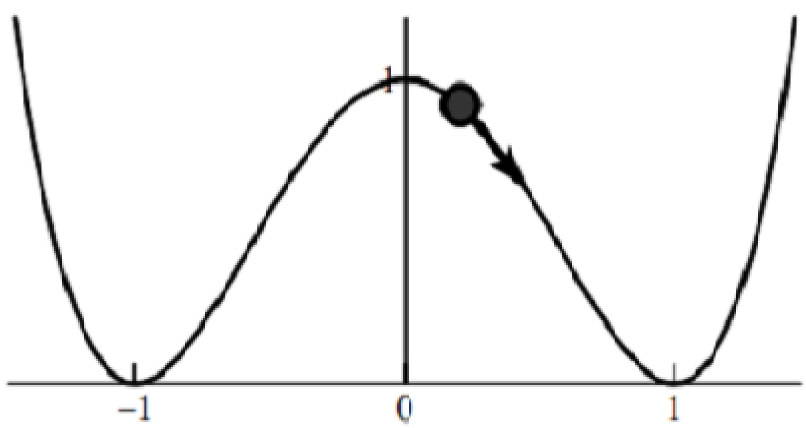
Applications

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous-disciplines, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

4.1 Mécanique

Problème : (un point qui glisse sur une courbe)

On veut connaître le mouvement d'un point de masse glissant, sous effet de la gravité et sans frottement, sur une courbe donnée, par exemple $y = (1 - x^2)^2$ **(voir FIG 1)**.



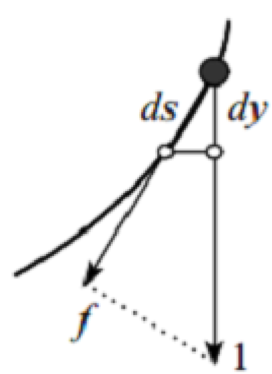


FIG 1

Solution

Malgré le fait que tout enfant faisant de la luge connaît le problème, la solution analytique est assez difficile. Prenons la longueur d'arc s, avec

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+p^2}dx \text{ où } p = \frac{dy}{dx},$$

comme coordonnée pour déterminer la position du corps. La force accélératrice f est, par Thales, $f = mg\cdot\frac{dy}{ds}$ (voir Fig 1), où nous posons pour la masse et la constante de gravitation $m = 1$ et $g = 1$. Ainsi $f = \frac{dy}{ds} = \frac{dy/dx}{ds/dx} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Avec la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$, la loi fondamentale de Newton (1687), remaniée par Euler (1747) en équation différentielle, devient

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{4.1.1}$$

et

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \tag{4.1.2}$$

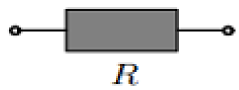
Cela ne suffit pas ; à chaque instant nous devons connaître le p, pour notre exemple $p = y\prime = 4x^3 - 4x$, Ce qui nécessite la connaissance de x. Pour son calcul, nous rajoutons le x avec $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ à nos équations différentielles comme troisième équation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1+p^2}} \text{ avec } p = 4x^3 - 4x \tag{4.1.3}$$

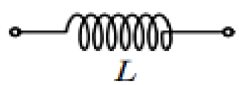
Les équations (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) forment un système d'équations différentielles pour les trois fonctions $s(t)$, $v(t)$ et $x(t)$; elles permettent de calculer numériquement ces fonctions, seulement si on disposait de méthodes numériques pour leur calcul.

4.2 Electricité

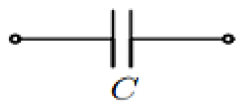
Soit **I** le courant (en Ampères) qui passe dans un conducteur, et soit U (en Volt) la tension entre deux nœuds. Alors on a les lois :

Résistance : 

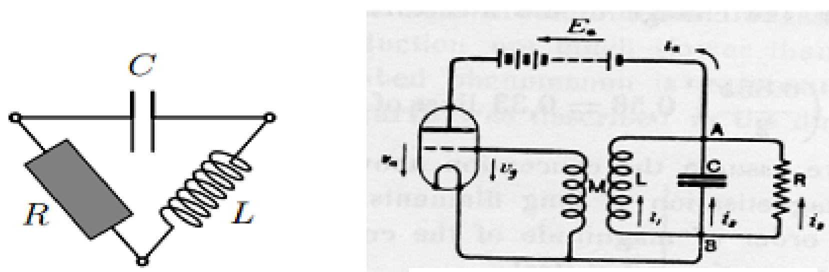
$U = I \cdot R$ **(Ohm)**

Inductivité : 

$U = L \cdot \dfrac{dI}{dt}$ **(Faraday)**

Condensateur : 

$I = C \cdot \dfrac{dU}{dt}$ **(Capacité)**



Circuit RCL — circuit de Van der Pol (1926)

FIG 2

Si nous avons maintenant un circuit RCL (à gauche dans la Fig 2), alors sont valables les lois de Kirchhoff, pour cet exemple $IR = IC = IL$ et $UR + UC + UL = 0$, i.e.

$$I\ R + L\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = 0,$$

ou, après différentiation,

$$L\,\frac{d^2}{dt^2}\,I + R\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\,I = 0.$$

Cette équation est de la forme (si nous prenons $LC = 1$)

$$y'' + \alpha y\prime + y = 0 \Rightarrow y = (\exp(-\frac{\alpha}{2}x))(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)),$$

une oscillation amortie.

Idée : On rajoute une triode **(voir FIG 2)** et une batterie. Ainsi, la résistance R (ou α) va dépendre de y. Ceci a comme effet d'augmenter l'ènergie pour y petit et nous arrivons à

$$y'' + f(y)y\prime + y = 0,$$

avec

$$\begin{cases} f(y) < 0 & \text{si} \quad y \text{ petit} \\ f(y) > 0 & \text{si} \quad y \text{ grand} \end{cases} .$$

Le modèle le plus simple est

$$y'' \;+\; \xi(y^2-1)y' \;+\; y \;=\; 0 \;,$$

ou

$$\begin{cases} y' & = & v \\ v' & = & \xi(1-y^2)v - y \end{cases} ,$$

où $\xi > 0$ est un paramètre.

4.3 Dynamique des Populations

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\begin{cases} \dot{N} & = & bN \;-\; dN \\ \\ N(0) & = & N_0 \end{cases} .$$

Lorsque $b = 0$, on reconnait dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas ou $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{N} & = & \alpha N\left(1-\frac{N}{k}\right) \\ \\ N(0) & = & N_0 \end{cases} ,$$

où α et k sont des constantes positives.

Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = k$.

CONCLUSION

l'utilisation des équations différentielles est devenu nécéssaire pour résoudre des problème dans des différents domaines et sciences.

Dans ce thème, nous avons présenté une contribution à l'étude des équations différentielles ordinaires linéaires en dimension fini avec l'existence et l'unicité du problème de cauchy et des applications dans quelque domaines.

Bibliographie

[1] S. Benzoni-Gavage : Calcul Différentiel et Équations Différentielles. Dunod, Paris, (2010).

[2] S. Benzoni-Gavage : Équations Différentielles Ordinaires. Dunod, Paris, (2007).

[3] S-D. Chatterji : Equations Différentielles Ordinaires et aux Dérivées Partielles. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Suisse, (1998)

[4] S. Guerre-Delabrière, M, Postel : Méthodes d'Approximation, Équations Différentielles, Applications Scilab. Ellipses Edition Marketing S.A, (2004).

[5] J-M. Ledermann : Équations Différentielles. Cours, Paris, (2012).