



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation Contrôle et Optimisation**

THEME :

**Equations aux dérivées partielles de type des
ondes sur le segment $[0,1]$**

Etudiant(e) : « **KEDDARI Amina** »

« **TOUATI Mahdjouba** »

Président : « Mr H. BOUZIT »

Encadrant : « Mme S. OULD ALI »

Examinatrice : « Mme N. ABLAOUI »

Année Universitaire 2015/2016

Equations aux dérivées partielles de type des ondes sur le segment $[0, 1]$

KEDDARI Amina
TOUATI Mahdjouba

Université de Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem
Faculté Des Sciences Exactes Et D'Informatique
Filière: Mathématiques

Mémoire *Master*
Option: *Modélisation, Contrôle et Optimisation*

29 Mai 2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

السَّلَامُ عَلَيْكُمْ وَرَحْمَةُ اللَّهِ وَبَرَكَاتُهُ

Equations aux dérivées partielles des ondes sur le segment $[0, 1]$

- **Introduction**

- **Introduction**
- **Chapitre 0:** Préliminaires et quelques résultats sur les EDP's.

- **Introduction**
- **Chapitre 0:** Préliminaires et quelques résultats sur les EDP's.
- **Chapitre 1:** Équation des ondes.

- **Introduction**
- **Chapitre 0:** Préliminaires et quelques résultats sur les EDP's.
- **Chapitre 1:** Équation des ondes.
- **Chapitre 2:** Résolution numérique de l'équation des ondes.

- **Introduction**
- **Chapitre 0:** Préliminaires et quelques résultats sur les EDP's.
- **Chapitre 1:** Équation des ondes.
- **Chapitre 2:** Résolution numérique de l'équation des ondes.
- **Conclusion**

Introduction

La plupart des phénomènes physiques, chimiques, ..., sont modélisés par des équations aux dérivées partielles notées en abrégé EDP. Les plus fréquentes d'entre elles sont celles du second ordre, en particulier l'équation des ondes. Cette dernière modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration par exemple elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour, corde de guitare).

Au repos, cette membrane occupe un domaine plan Ω . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité f , elle se déforme et son déplacement normal est noté u .

On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont u est solution est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

avec u_0 représentant l'écart de la position d'équilibre et v_0 l'écart de vitesse, Δ est le laplacien.

Ce mémoire ne constitue qu'une petite introduction à cette classe particulière d'EDP. Nous nous sommes intéressés à la résolution numérique et analytique de l'équation des ondes d'une corde vibrante sur $\Omega = [0, 1]$.

Préliminaires et quelques résultats sur les EDP's _{[1],[2],[3]}

Dans tout ce qui suit, on considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

Definition

Soit u une fonction définie sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R} et suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient un sens. Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u , les variables (x_1, \dots, x_d) et un nombre fini des dérivées partielles de u , $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, \dots, x_d, u, D_1 u, \dots, D_d u, D_1 D_1 u, D_1 D_2 u, \dots, D^\alpha u, \dots) = f(x_1, \dots, x_d) \quad (2)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et f est une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

Definition

"L'ordre d'une équation aux dérivées partielles" L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation.

Definition

"Les EDP's linéaires, quasi-linéaires, non linéaires"

- 1 Une équation aux dérivées partielles est linéaire si F est linéaire par rapport à u et à toutes ses dérivées partielles.
- 2 Une équation aux dérivées partielles est dite quasi-linéaire si F est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé.
- 3 En dehors des critères cités ci-dessus l'EDP est non linéaire.

Exemple

- 1 L'équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients non constants est de la forme:

$$A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(X) \frac{\partial u}{\partial x_2} = B(x)$$

Exemple

- 1 L'équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients non constants est de la forme:

$$A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(X) \frac{\partial u}{\partial x_2} = B(x)$$

- 2 L'équation aux dérivées partielles

$$a \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = c$$

est quasi-linéaire si a , b et c sont des fonctions réelles de x , y et u .

Exemple

- ① L'équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients non constants est de la forme:

$$A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} = B(x)$$

- ② L'équation aux dérivées partielles

$$a \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = c$$

est quasi-linéaire si a , b et c sont des fonctions réelles de x , y et u .

- ③ L'équation aux dérivées partielles non linéaire est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(x, y) + e^x u(x, y) - y = 0$$

Classifications des équations aux dérivées partielles linéaires

On considère une EDP linéaire à deux variables d'ordre 2.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = B \quad (3)$$

On lui associe son polynôme caractéristique en α et β

$$p(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f \quad (4)$$

Les propriétés de p déterminent la nature de l'EDP selon le discriminant $b^2 - ac$, l'EDP est dite :

- 1 Hyperbolique si $b^2 - ac > 0$.

Classifications des équations aux dérivées partielles linéaires

On considère une EDP linéaire à deux variables d'ordre 2.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = B \quad (3)$$

On lui associe son polynôme caractéristique en α et β

$$p(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f \quad (4)$$

Les propriétés de p déterminent la nature de l'EDP selon le discriminant $b^2 - ac$, l'EDP est dite :

- 1 Hyperbolique si $b^2 - ac > 0$.
- 2 Parabolique si $b^2 - ac = 0$.

Classifications des équations aux dérivées partielles linéaires

On considère une EDP linéaire à deux variables d'ordre 2.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = B \quad (3)$$

On lui associe son polynôme caractéristique en α et β

$$p(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f \quad (4)$$

Les propriétés de p déterminent la nature de l'EDP selon le discriminant $b^2 - ac$, l'EDP est dite :

- 1 Hyperbolique si $b^2 - ac > 0$.
- 2 Parabolique si $b^2 - ac = 0$.
- 3 Elliptique si $b^2 - ac < 0$.

Exemple

- L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

est de type hyperbolique.

- L'équation de Poisson

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x), \quad x \in \Omega$$

est de type elliptique, pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ou $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et l'inconnue est la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple

- L'équation de la chaleur est de type parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad u : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Definition

On dit que u est solution d'une EDP dans Ω un ouvert de \mathbb{R}^d après substitution de u et ses dérivées partielles dans (2), F s'annule pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$.

Definitions

"Problème bien posé" Soit une EDP valide dans Ω , muni des conditions aux frontières. Le problème est bien posé si:

- 1 Il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions aux frontières (existence).
- 2 La solution doit être unique (unicité).
- 3 La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilisé).

Definition

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$, si pour tout x de \mathbb{R} on a $f(x + T) = f(x)$.

Par exemple les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques, la fonction $x \mapsto \exp(ix/T)$ est $(2\pi/T)$ -périodique.

Séries trigonométriques

Definition

Une série de fonctions de terme général $f_n(t)$ est appelée série trigonométrique lorsque la fonction f_0 est constante et qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels telles que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0, T]$ on ait

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (5)$$

On pose alors $a_0 = 2f_0(t)$ et l'on écrit

$$\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (6)$$

Théorème de convergence simple de Dirichlet

Definition

Une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continuellement dérivable par morceaux (de classe C^1 par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi]$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a, b]$ tels que

- 1 f est continue sur $]a, b[$, de plus f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b .
- 2 f est dérivable sur $]a, b[$ et f' est continue par morceaux sur cet intervalle.

Théorème de convergence simple de Dirichlet

Theorem

"de Dirichlet" Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique continuellement dérivable par morceaux sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier de f converge simplement et sa somme vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} [a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)] = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

où $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x . En particulier si f est continue en un point x , alors on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Equation des ondes[6],[4],[5]

On considère l'équation des ondes homogène dans le cas monodimensionnel, appelée équation des cordes vibrantes sur $\Omega = [0, 1]$ avec les conditions de Dirichlet, formulée dans le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{array} \right. \quad (7)$$

où la constante c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et v_0 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.

On cherche à résoudre cette équation de deux manières différentes, méthode de Fourier et méthode de D'Alembert

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

La méthode de Fourier pour la résolution d'une EDP linéaire homogène consiste à chercher d'abord des solutions particulières d'un type spéciale de cette équation dont chacune d'elle est le produit des fonctions dépendant d'une variable. Dans les cas simples, on trouve un ensemble infini de telles solutions u_n ($n = 1, 2, \dots$) linéairement indépendantes entre elles pour tout ensemble fini et vérifiant les conditions aux limites données. La solution u qu'on cherche se met sous forme de série par rapport à ces solutions particulières

$$u = \sum_{n \geq 1} c_n u_n$$

On détermine les coefficients c_n à l'aide des conditions initiales.

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Theorem

La solution u du problème (7) est donnée par la formule

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi c} \sin(n\pi ct) \int_0^1 v_0(x) \sin(n\pi x) dx + 2 \cos(n\pi ct) \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx \right) \sin(n\pi x) \quad (8)$$

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

Pour la preuve de ce théorème, on procède à la résolution de l'équation (7) en suivant cinq étapes

1^{ère} étape:

- On suppose qu'il existe des fonctions (inconnues) ψ et φ , d'une variable réelle telles que

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$$

On calcule les dérivées partielles secondes de u par rapport à x et t , on substitue dans l'équation (7).

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

Pour la preuve de ce théorème, on procède à la résolution de l'équation (7) en suivant cinq étapes

1^{ère} étape:

- On suppose qu'il existe des fonctions (inconnues) ψ et φ , d'une variable réelle telles que

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$$

On calcule les dérivées partielles secondes de u par rapport à x et t , on substitue dans l'équation (7).

- On divise alors formellement par $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

2^{ème} étape:

- On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, pour cela, on considère le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

ainsi, deux cas se présentent $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$



Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

2^{ème} étape:

- On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, pour cela, on considère le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

ainsi, deux cas se présentent $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$

- 1^{er} cas: $\lambda = 0$, on obtient alors

$$\varphi(x) = Ax + B, \quad \text{où } B = \text{constante}$$

Des conditions, on obtient donc la solution de (9) est la solution nulle.



Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

- 2^{eme} cas: $\lambda \neq 0$. On associe à l'EDO du problème (9) l'équation caractéristique

$$r^2 - \lambda = 0 \quad (10)$$

donc

- Si $\lambda > 0$ l'équation (10) devient

$$r = \pm\sqrt{\lambda}$$

d'où la solution est

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

En tenant compte des conditions aux limites, d'où

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

$$A = B = 0$$

Il n'y a donc pas des solutions non nulles dans ce cas.

- Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\beta$, tel que $\beta > 0$ donc la solution est alors

$$\varphi(x) = A \cos(\sqrt{\beta}x) + B \sin(-\sqrt{\beta}x), \quad \text{tel que } \beta > 0$$

En tenant compte des conditions aux limites, ou bien $B = 0$ ou bien $\sqrt{\beta} = n\pi$, n un entier positif.

Il existe donc des solutions non nulles

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n > 0 \tag{11}$$

associées aux valeurs de λ suivantes $\lambda_n = -(n\pi c)^2$

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

- 3^{ème} étape: Le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

orthogonalise toujours la suite des $\varphi_n(x)$.



Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

- 4^{ème} étape: On résout maintenant l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t)$$

qui a pour solutions, étant donné que $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = c_n \cos(n\pi ct) + d_n \sin(n\pi ct) \quad (12)$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2 on trouve un espace vectoriel de dimension 2 des solutions, c_n et d_n sont des constantes arbitraires. A ce stade, les fonctions

$$(c_n \sin(n\pi ct) + d_n \cos(n\pi ct)) \varphi_n(x) \quad (13)$$

Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

sont solutions de l'E.D.P, avec des conditions aux limites mais pas avec la condition initiale.

- 5^{ème} étape: D'après le principe du superposition

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \varphi_n(x)$$

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \sin(n\pi ct) + d_n \cos(n\pi ct)) \sin(n\pi x) \quad (14)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n et d_n dans l'équation (14) grâce aux conditions initiales considérées comme des fonctions périodiques et de calculer leur coefficient de Fourier, ce qui donne pour $u(0, x) = u_0(x)$

Résolution de l'équation des des cordes vibrantes par la méthode de Fourier

Proof.

soit

$$d_n = \frac{\langle u_o(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = 2 \int_0^1 u_o(x) \sin(n\pi x) dx$$

Quand à la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x)$, l'équation (14) donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n\pi c \sin(n\pi x) = v_0$$

On obtient donc

$$c_n = \frac{1}{n\pi c} \frac{\langle v_o(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^1 v_o(x) \sin(n\pi x) dx$$

D'où le résultat. □

Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert

Theorem

(Formule de D'Alembert) *La solution du problème (7) est une fonction différentiable de la forme:*

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (15)$$

Il y a trois techniques différentes pour démontrer cette formule. On propose celle du changement de variables.

Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert

Proof.

On peut écrire la solution $u(t, x)$ sous la forme

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (16)$$

où F et G sont des fonctions à déterminer. les conditions initiales impliquent alors que:

$$u(0, x) = u_0(x) = F(x) + G(x) \quad (17)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = c(F'(x) - G'(x)) \quad (18)$$



Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert

Proof.

En dérivant, on obtient le système

$$\begin{cases} F'(x) + G'(x) = u'_0(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{v'_0(x)}{c} \end{cases} \quad (19)$$

qui a pour solution:

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{cu'_0(x) + v'_0(x)}{2c} \\ G'(x) = \frac{cu'_0(x) - v'_0(x)}{2c} \end{cases} \quad (20)$$



Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert

Proof.

ce qui donne:

$$F(x) = c_1 + \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy \quad (21)$$

$$G(x) = c_2 + \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy \quad (22)$$

□

Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert

Proof.

la condition initiale nous aide à déterminer les constantes d'intégrations:

$$u_0(0) = u(0,0) = F(0) + G(0) = c_1 + c_2 + u_0(0)$$

ce qui entraîne

$$c_1 + c_2 = 0$$

et en sommant $F(x+ct)$ et $G(x-ct)$ on obtient le résultat. □

Definition

"**L'énergie du système (7)**" soit $u(t, x)$ une solution de l'équation du problème (7), on appelle l'énergie à l'instant t de $u(t, x)$ la quantité suivante

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right] dx$$

Proposition

Le problème de Cauchy (7) admet au plus une solution.

Proof.

On suppose qu'il existe deux solutions du problème (7) notées u_1 et u_2 , et on démontre que $u_1 - u_2 = 0$. L'énergie à l'instant t de la solution $(u_1 - u_2)(t, x)$ notée $E(t)$ est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, x) \right)^2 \right] dx \quad (23)$$

En dérivant (23), on obtient

$$\frac{dE}{dt}(t) = c^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, 1) \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 1) - \frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, 0) \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 0) \right] = 0, \forall t \quad (24)$$



Proof.

car

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) (t, 1) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} (t, 1) - \frac{\partial u_2}{\partial t} (t, 1) \\ &= \beta' (t) - \beta' (t) \\ &= 0\end{aligned}$$

tel que $u_1 (t, 1) = u_2 (t, 1) = \beta (t) = 0$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) (t, 0) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} (t, 0) - \frac{\partial u_2}{\partial t} (t, 0) \\ &= \alpha' (t) - \alpha' (t) \\ &= 0\end{aligned}$$



L'unicité de l'équation des ondes

Proof.

tel que $u_1(t, 0) = u_2(t, 0) = \alpha(t) = 0$. D'où

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \forall t \Rightarrow E(t) = cte = E(0)$$

avec

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(0, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(0, x) \right)^2 \right] dx$$

tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(0, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, x) \\ &= v_0(x) - v_0(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'unicité de l'équation des ondes

Proof.

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2) (0, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} (0, x) - \frac{\partial u_2}{\partial x} (0, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} v_0 (x) - \frac{\partial}{\partial x} v_0 (x) \\ &= v_0' (x) - v_0' (x) \\ &= 0\end{aligned}$$

alors $E(t) = E(0) = 0, \forall t$, et la fonction intégrée est positive, on a donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) (t, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2) (t, x) \right)^2 = 0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) (t, x) = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2) (t, x) = 0$$

Proof.

alors

$$d(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = cte$$

en particulier pour $t = 0$, on obtient

$$(u_1 - u_2)(t, x) = (u_1 - u_2)(0, x) = cte$$

ainsi

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = v_0(x) - v_0(x) = 0$$

donc $u_1 = u_2$, d'où le résultat cherché. □

Chapitre2: Résolution numérique de l'équation des ondes[7]

Principe de la méthode des différences finies

Nous présentons une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies. Cette méthode consiste à approcher la dérivée de la fonction inconnue en un point par une somme finie des valeurs de l'inconnue u en un certain nombre des points.

Cette approximation est basée sur la définition de la dérivée et éventuellement sur le développement limité de la fonction inconnue.

Les différents schémas pour approcher la première dérivée

On peut avoir l'approximation suivante:

- L'équation (25)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (25)$$

est appelé schéma aux différences décentré à droite (ou progressif).

Les différents schémas pour approcher la première dérivée

On peut avoir l'approximation suivante:

- L'équation (25)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (25)$$

est appelé schéma aux différences décentré à droite (ou progressif).

- L'équation (26)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \quad (26)$$

est appelé schéma aux différences décentré à gauche (ou régressif).

Les différents schémas pour approcher la première dérivée

On peut avoir l'approximation suivante:

- L'équation (25)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (25)$$

est appelé schéma aux différences décentré à droite (ou progressif).

- L'équation (26)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \quad (26)$$

est appelé schéma aux différences décentré à gauche (ou régressif).

- L'équation (27)

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} \quad (27)$$

est appelé schéma centré.

Sachant que $u''(x_0) = (u')'(x_0)$.

- on applique deux fois le schéma (25), avec

$$u'(x_0 + h) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - u(x_0 + h)}{2h} \text{ et } u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}, \text{ donc}$$

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - 2u(x_0 + h) + u(x_0)}{h^2} \quad (28)$$

Sachant que $u''(x_0) = (u')'(x_0)$.

- on applique deux fois le schéma (25), avec

$$u'(x_0 + h) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - u(x_0 + h)}{2h} \text{ et } u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}, \text{ donc}$$

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - 2u(x_0 + h) + u(x_0)}{h^2} \quad (28)$$

- En appliquant deux fois de suite le schéma (26), on obtient

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - 2u(x_0 - h) + u(x_0 - 2h)}{h^2}$$

Les différents schémas pour approcher la dérivée second

Pour obtenir le schéma centré, on fait un développement limité à l'ordre 4 de $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, ainsi

$$u(x_0 + h) \simeq u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\tilde{\zeta}_1 \quad (29)$$

$$u(x_0 - h) \simeq u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\tilde{\zeta}_2 \quad (30)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\zeta}_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\zeta}_2(h) = 0$.

Les différents schémas pour approcher la dérivée second

En sommant $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, on obtient l'approximation

$$u(x_0 + h) + u(x_0 - h) \simeq 2u(x_0) + h^2 u''(x_0) + 2 \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(x_0) + h^4 (\xi(h))$$

d'où

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} + h^2 \left(-\frac{1}{12} u^{(4)}(x_0) - \xi(h) \right)$$

or $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \left(-\frac{1}{12} u^{(4)}(x_0) - \xi(h) \right) = 0$, donc

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \quad (31)$$

Pour une fonction $u = u(x, y)$, les deux schémas (28) et (31) deviennent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \simeq \frac{u(x_0, y_0 + k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - k)}{k^2}$$

Il est normal pour que le schéma des différences finies soit réalisable, d'assurer la stabilité du système discret.

Definition

Le système discret est dit stable si

- 1 il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|u^{(n)}\| \leq \kappa \|u^{(0)}\|$$

ou bien

- 2 il existe une constante κ vérifiant: $0 < \kappa < 1$ et $\|u^{(n)}\| \leq \kappa \|u^{(n-1)}\|$.

Definition

On appelle erreur de consistance le vecteur ε^h défini par:

$$\varepsilon^h(x_i) = Lu(x_i) - L_h u(x_i), \quad \forall i$$

où L est un opérateur différentiel du problème continue et L_h associé du problème discret.

Definition

On dit que le problème discret est dit:

- 1 consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \varepsilon^h(x_i) \right| = 0$$

- 2 consistant d'ordre m , s'il existe une constante c indépendante de h tel que

$$\left\| \varepsilon^h \right\| \leq ch^m$$

Application à l'équation des ondes

Nous allons appliquer le schéma aux différences finies à l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & \text{sur }]0, T[\times]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & \text{sur }]0, T[\\ u(0, x) = w(x), & \text{sur }]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & \end{array} \right. \quad (32)$$

En appliquant un schéma centré par rapport au temps et l'espace et après la discrétisation du domaine $[0, T] \times [0, L]$ aux points (t_n, x_j) définis par: $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N_T}$ (N_T donné), $x_j = j\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{L}{N}$ (N donné),

on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

l'équation du problème continu est approché par

$$u_j^{n+1} = pu_{j-1}^n + 2(1-p)u_j^n + pu_{j+1}^n - u_j^{n-1} + (\Delta t)^2 f_j^n \quad (33)$$

$\forall 1 \leq j \leq N-1$ et $1 \leq n \leq N_T$, avec $p = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$

La discrétisation des conditions:

$$u(t_n, 0) = u_0^n = 0 \quad (34)$$

$$u(t_n, L) = u_N^n = 0 \quad (35)$$

$$u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0 \quad (36)$$

$$u_j^1 = u_j^0 \quad (37)$$

le système linéaire est équivalent

$$\begin{cases} u^{(n+1)} = Au^{(n)} - u^{(n-1)} + F^{(n)}, \forall n \geq 1 \\ u^{(0)} = (w_j)_{1 \leq j \leq N-1}, u^{(1)} = u^{(0)} \end{cases} \quad (38)$$

Application à l'équation des ondes

où $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{N-1}^{(n)})^t$, $F^{(n)} = (\Delta t^2 f_1^n, \Delta t^2 f_2^n, \dots, \Delta t^2 f_{N-1}^n)^t$ et

$$A = \begin{bmatrix} 2(1-p) & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 2(1-p) & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 2(1-p) & p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p & 2(1-p) & p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & p & 2(1-p) \end{bmatrix}$$

- Le problème (38) associé au problème des ondes est un schéma à 2 pas de temps.

Application à l'équation des ondes

où $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{N-1}^{(n)})^t$, $F^{(n)} = (\Delta t^2 f_1^n, \Delta t^2 f_2^n, \dots, \Delta t^2 f_{N-1}^n)^t$ et

$$A = \begin{bmatrix} 2(1-p) & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 2(1-p) & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 2(1-p) & p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p & 2(1-p) & p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & p & 2(1-p) \end{bmatrix}$$

- Le problème (38) associé au problème des ondes est un schéma à 2 pas de temps.
- Le problème (38) est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

Dans ce mémoire, on a étudié une EDP de type onde sur le segment $[0, 1]$ plus précisément l'équation des cordes vibrantes avec des conditions de Dirichlet et de Neumann. On a illustré cette étude par une application numérique sur Matlab.

-  **J. Quint:** Cours Élémentaires de Mathématique Supérieures (4-Equations Différentielles 1977).
-  **Aude Rondepierre & Adeline Rouchon:** Introduction aux Équations aux Dérivées Partielle 2012-2013.
-  **B.Helffer:** Cours "Introduction aux EDP Analyse de Fourier" pour Les Étudiants de l'ENS de Bucarest.
-  **V. Volpert: Ecole Centrale de Lyon:** Dynamique des Systèmes Non Linéaires 2011-2012.
-  **Pedro Ferreira et Sylvie Mas-Gallic:** Équations aux Dérivées Partielles 11 décembre 2001.
-  **Laurent Schwartz.** Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
-  Cours "La Méthode des Différences Finies" Mastèr 1 (MCO 2014-2015) F.S.E.I-Mostaganem.

Fin de la présentation

Merci de votre attention

Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Mastère LMD

Spécialité : Modélisation contrôle et optimisation

Thème

Equations aux dérivées partielles de type ondes sur le segment $[0, 1]$

Présenté par :

Keddari amina

Touati mahdjouba

Soutenu le /05/2016

Année Universitaire 2015 -2016

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles [1],[2]	2
1.1.1 Définitions et propriétés des équations aux dérivées partielles	2
1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires	4
1.1.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles	5
1.1.4 Les opérateurs différentiels	5
1.1.5 Les conditions initiales	6
1.1.6 Classification des conditions aux limites	6
1.1.7 Solution d'une équation aux dérivées partielles	7
1.2 Rappels sur les séries de Fourier [1],[3]	7
1.2.1 Applications périodiques	7
1.2.2 Séries trigonométriques	8
1.2.3 Quelques propriétés	9
1.2.4 Théorème de convergence simple de Dirichlet	9

2	Equation des ondes[6]	11
2.1	Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier[4] . . .	12
2.2	Résolution de l'équation des cordes vibrante par la formule de D'Alembert[4] .	16
2.3	L'unicité de la solution de l'équation des ondes[5]	18
3	Résolution numérique de l'équation des ondes[7]	20
3.1	Principe de la méthode des différences finies	20
3.1.1	Les différents schémas pour approcher la 1 ^{er} dérivée	20
3.1.2	Les différents schémas pour approcher la dérivée seconde	22
3.1.3	Stabilité et consistance du système discret	23
3.2	Application à l'équation des ondes	24
3.3	Programmation de la méthode sur Matlab	26
3.3.1	Exemple 1	27
3.3.2	Exemple 2	28
	Conclusion	30
	Bibliographie	31

Dédicace

Grâce à dieu, nous avons pu terminer ce mémoire que nous dédie avec nous sentiments les plus profonds :

Nous remerciant de tous cœurs mais parents : "N.KEDDARI" et "N.BOUNABE", "A.TOUATI" et "A.TOUATI", de leurs guident et de leurs aident dans nos enseignement et de leurs encouragement.

Nous félicitons tous nos professeurs de ces patiences Sans oublier ma petite sœur "IBTIHAL".
Et ma petite sœur "SALSABIL".

A ma sœur "CHAIMAA", elle me pousse toujours son arrêt.

A nos amis de nos promotion 2016 en particulier nos collègues de notre Spécialité « MCO» , et nos camarades fidèles.

Enfin chers madame, l'assurance de nos sentiments affectueusement dévoués.

Je pris de tout cœur notre "DIEU".

Milles merci à tous du plus profond

De nos cœurs . . .

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux !

Avant tout, nous remercions "DIEU" le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute cette période de recherche.

Nous saisissons cette opportunité pour remercier chaleureusement le Recteur, et en particulier les professeurs qui nous avons permis chacun pour le domaine qui concerne de mieux appréhender la complexité du domaine des mathématiques ainsi que la faculté des sciences exactes et d'informatique.

Je remercie particulièrement Mme "Ould ali-Belmouhob.Soumia" mon encadreur pour ses courtoisies, sa disponibilité et sa gentillesse.

Merci à toutes les personnes qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire de Mastère.

Keddari & Touati.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à résoudre l'équation des ondes sur le segment $[0, 1]$ analytiquement et numériquement. On se met dans le cadre des problèmes d'une corde vibrante.

On présente l'existence et l'unicité de la solution du problème modélisant l'équation des ondes par la méthode de séparation des variables et pour la résolution numérique, on a choisit la méthode des différences finies.

INTRODUCTION

Dans la plupart des phénomènes physiques, chimiques, météorologiques et même dans d'autres domaines, on doit formuler les problèmes par des modèles mathématiques. Ces modèles génèrent souvent des équations aux dérivées partielles notées en abrégé EDP.

La formulation des EDP a vu le jour au cours du 17^{ème} siècle lors de la naissance de la mécanique rationnelle (Newton, Leibniz,...), et s'est élargi à d'autres sciences, en particulier en physique, on cite les équations de la mécanique quantique, de l'électromagnétisme, de la mécanique des fluides, etc...

Les EDP les plus fréquentes en physique sont celles du second ordre leur étude est donc d'un grand intérêt pratique.

On s'intéresse, en particulier à l'équation des ondes avec une corde vibrante à laquelle on ajoute les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, elle est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés sur les EDP's, ainsi que quelques généralités tels que séries de Fourier.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution de l'équation des ondes d'une corde vibrante sur le segment $[0, 1]$. Nous présentons cette résolution par deux méthodes, la méthode de Fourier et celle de D'Alembert.

Dans le dernier chapitre, nous établissons une résolution numérique de l'équation considérée par la méthode des différences finies après avoir présenté celle-ci.

A la fin de mémoire, une conclusion générale sera présentée.

Préliminaires

Dans cette partie, on introduit quelques notions fondamentales sur les équations aux dérivées partielles et différentes propriétés nécessaires pour la suite de notre travail.

1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles [1],[2]

Dans tout ce qui suit, on considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

1.1.1 Définitions et propriétés des équations aux dérivées partielles

Définition 1.1.1 Soit u une fonction définie sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R} et suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient un sens. Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u , les variables (x_1, \dots, x_d) et un nombre fini des dérivées partielles de u , $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, \dots, x_d, u, D_1u, \dots, D_du, D_1D_1u, D_1D_2u, \dots, D^\alpha u, \dots) = f(x_1, \dots, x_d) \quad (1.1.1)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et f est une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

Remarque 1.1.1 Pour les dérivées partielles d'ordre supérieure d'une fonction u de classe $C^k(\Omega)$, on utilisera les multi-indices. Un multi-indice est un élément $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Pour tout multi-indice α on définit

$$D^\alpha u(x) := \partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Définition 1.1.2 "*L'ordre d'une équation aux dérivées partielles*" L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation.

Exemple 1.1.1 L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

est d'ordre 2.

Définition 1.1.3 "*Les EDP's linéaires, quasi-linéaires, non linéaires*"

1. Une équation aux dérivées partielles est linéaire si F est linéaire par rapport à u et à toutes ses dérivées partielles.
2. Une équation aux dérivées partielles est dite quasi-linéaire si F est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé.
3. En dehors des critères cités ci-dessus l'EDP est non linéaire.

Exemple 1.1.2 – L'équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients non constants est de la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x)$$

où m est l'ordre de l'équation, A et B sont des fonctions linéaires en x .

– L'équation aux dérivées partielles

$$a \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = c$$

est quasi-linéaire si a, b et c sont des fonctions réelles de x, y et u .

– L'équation aux dérivées partielles

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

est non linéaire.

– L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = x + y$$

n'est ni linéaire, ni quasi-linéaire.

Définition 1.1.4 "*Les EDP's linéaires homogènes*" l'équation aux dérivées partielles (1.1.1) est dite homogène si $f = 0$.

1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires

On s'intéresse aux dérivées partielles linéaires plus particulièrement celles du second ordre à deux variables.

Soient a, b, c, d, e, f et B des fonctions définies dans un ouvert D de \mathbb{R}^2 et on considère l'EDP linéaire du second ordre, d'inconue u

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = B \quad (1.1.2)$$

On lui associe son polynôme caractéristique en α et β

$$p(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f$$

Les propriétés de p déterminent la nature de L'EDP selon le distriminant $b^2 - ac$, ainsi on peut les classer en trois grandes familles : "elliptique", "hyperbolique" et "parabolique" comme suit :

Proposition 1.1.1 *L'EDP est dite hyperbolique sur $D \subset \mathbb{R}^2$, si*

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in D \quad (1.1.3)$$

L'EDP est dite elliptique sur $D \subset \mathbb{R}^2$, si

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0, \quad \forall (x, y) \in D \quad (1.1.4)$$

L'EDP est dite parabolique sur $D \subset \mathbb{R}^2$, si

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in D \quad (1.1.5)$$

1.1.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

1. L'équation de transport est de type hyperbolique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $t > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.

2. L'équation de Laplace

$$\Delta u(t, x) = 0, \quad x \in \Omega$$

est de type elliptique.

3. L'équation de Poisson est de type elliptique

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x), \quad x \in \Omega$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ou $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et l'inconnue est la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

4. L'équation de la chaleur est de type parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, l'inconnue est la fonction $u : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

1.1.4 Les opérateurs différentiels

Définition 1.1.5 "Le gradient" Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Le gradient de u noté ∇u ou $\overrightarrow{\text{grad}} u$ est donné par

$$\begin{aligned} \nabla u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}(x) \right)^t \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Définition 1.1.6 "La divergence" soit g une fonction de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} g : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x_1, \dots, x_d) &\mapsto g(x_1, \dots, x_d) = (g_1(x_1, \dots, x_d), \dots, g_d(x_1, \dots, x_d)) \end{aligned}$$

la divergence de g noté par $\operatorname{div} g$ est donné par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} g &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \operatorname{div} g(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x) = \operatorname{tr}(\operatorname{Jac} g(x)) \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Définition 1.1.7 "Le laplacien" Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Le laplacien de u noté Δu est définie par

$$\begin{aligned} \Delta u &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Définition 1.1.8 "La dérivée normale" Soit \vec{N} le vecteur normal au bord de Ω ($\Gamma = \partial\Omega$), orienté à l'extérieur de Ω .

La dérivée normale de u noté $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} &: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(x) = \nabla u(x) \cdot \vec{N}(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot N_i(x) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

1.1.5 Les conditions initiales

Définition 1.1.9 Quand les conditions ne portent que sur une partie du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle conditions initiales ou de Cauchy (en temps).

1.1.6 Classification des conditions aux limites

Définition 1.1.10 1. Les conditions de type Dirichlet : La donnée de l'inconnue u sur le bord du domaine d'étude $u|_{\Gamma} = 0$.

2. Les conditions de type Neumann : La donnée de la dérivée normale de l'inconnue u sur le bord du domaine d'étude $\frac{\partial u}{\partial N|_{\Gamma}} = g$.

3. Les conditions mixtes : La donnée de Dirichlet sur une partie de Γ notée Γ_1 et de condition de type Neumann sur une autre partie de Γ notée Γ_2 , $\left(u_{/\Gamma_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial \vec{N}_{/\Gamma_2}} = g \right)$.
4. Les conditions de type Robin : C'est la combinaison des conditions de type Dirichlet et de type Neumann sur le bord.

1.1.7 Solution d'une équation aux dérivées partielles

Définition 1.1.11 On dit que u est solution d'une EDP dans Ω un ouvert de \mathbb{R}^d après substitution de u et ses dérivées partielles dans (1.1.1), F s'annule pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$.

Définition 1.1.12 "Problème bien posé" Soit une EDP valide dans Ω , muni des conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

- Il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions aux frontières (existence).
- La solution doit être unique (unicité).
- La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilisé).

Propriétés des solutions d'une EDP

1. si u_1 et u_2 sont deux solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire homogène, alors pour α_1 et α_2 des réels quelconques, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est aussi solution.
2. si u_h est solution de l'équation linéaire homogène et u_p est solution de l'équation linéaire non homogène, alors $u_h + u_p$ est solution de l'équation complète.

1.2 Rappels sur les séries de Fourier [1],[3]

1.2.1 Applications périodiques

Définition 1.2.1 On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$, si pour tout x de \mathbb{R} on a $f(x + T) = f(x)$.

Par exemple les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques, la fonction $x \mapsto \exp(ix/T)$ est $(2\pi/T)$ -périodique.

Proposition 1.2.1 *Soit f une application T -périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et l'on a*

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad (1.2.1)$$

1.2.2 Séries trigonométriques

Définition 1.2.2 *Une série de fonctions de terme général $f_n(t)$ est appelée série trigonométrique lorsque la fonction f_0 est constante et qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels telles que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0, T]$ on ait*

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (1.2.2)$$

On pose alors $a_0 = 2f_0(t)$ et l'on écrit

$$\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (1.2.3)$$

Nous utiliserons plutôt la notation exponentielle, posons en effet $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et, pour tout $n \geq 1$

$$c_n = (a_n - ib_n) \text{ et } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

On obtient

$$\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \quad (1.2.4)$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = 2c_0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Définition 1.2.3 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes c_n définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (1.2.5)$$

et on appelle les coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres a_n et b_n sont définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (1.2.6)$$

1.2.3 Quelques propriétés

Voici d'abord quelques propriétés très simples des coefficients de Fourier.

1. On a $b_0 = 0$, et $a_0/2$ est la valeur moyenne de f sur une période 2π .
2. Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacée par n'importe quel intervalle de longueur deux π .
3. Si f est une fonction à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels et $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n .
4. Si f est une fonction paire, tous les b_n sont nuls. De même si f est impaire, tous les a_n sont nuls.
5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les relations

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2}, \quad c_{-n} = \frac{(a_n + ib_n)}{2}$$

1.2.4 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Définition 1.2.4 Une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continuellement dérivable par morceaux (de classe C^1 par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi]$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a, b]$ tels que

1. f est continue sur $]a, b[$, de plus f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b .
2. f est dérivable sur $]a, b[$ et f' est continue par morceaux sur cet intervalle.

Théorème 1.2.1 "de Dirichlet" Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique continuellement dérivable par morceaux sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier de f converge simplement et sa somme vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} [a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)] = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

où $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x . En particulier si f est continue en un point x , alors on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Définition 1.2.5 On désigne par $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ le sous ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_n |x_n|^2 < +\infty \quad (1.2.7)$$

Définition 1.2.6 L'ensemble $L^2(0, T)$ désigne les fonctions à valeurs réelles ou complexes, périodiques, de période T , telles que $|f|^2$ est intégrable sur $[0, T]$, c'est à dire

$$L^2(0, T) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ de période } T \text{ et } \int_0^T |f|^2 dt < +\infty \right\} \quad (1.2.8)$$

Définition 1.2.7 "Le produit scalaire" l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle & : L^2(0, T) \times L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{C} \\ \langle f, g \rangle & \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \bar{g}(x) dx \end{aligned}$$

est appelée produit scalaire si elle vérifié les propriétés suivantes : $\forall f, g, h \in L^2(0, T)$;
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:

1. $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$
2. $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$
3. $\langle f, f \rangle \geq 0$.

Equation des ondes[6]

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration par exemple elle est un modèle pour étudier les vibrations longitudinales d'une colonne liquide ou gazeuse, elle est aussi en dimension 2 d'espace, un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour, corde de guitare)

Au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité f , elle se déforme et son déplacement normal est noté u . On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont u est solution est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.0.1)$$

avec u_0 représentant l'écart de la position d'équilibre et v_0 l'écart de vitesse.

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u . On dira que cette équation est hyperbolique.

L'équation des ondes a la propriété importante de propagation à vitesse finie ainsi que la propriété d'invariance par changement du sens du temps i.e si on change t en $-t$, la forme de l'équation ne change pas.

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'équation des ondes dans le cas monodimensionnel, appelée équation des cordes vibrantes sur $\Omega = [0, 1]$.

2.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier[4]

La méthode de Fourier pour la résolution d'une EDP linéaire homogène consiste à chercher d'abord des solutions particulières d'un type spéciale de cette équation dont chacune d'elle est le produit de fonctions dépendant d'une variable. Dans les cas simples, on trouve un ensemble infini de telles solutions u_n ($n = 1, 2, \dots$) linéairement indépendantes entre elles pour tout ensemble fini et vérifiant les conditions aux limites données. La solution u qu'on cherche se met sous forme de série par rapport à ces solutions particulières

$$u = \sum_{n \geq 1} c_n u_n$$

on détermine les coefficients c_n à l'aide des conditions initiales.

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

par la méthode de Fourier dite aussi méthode de séparation des variables, où la constante c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et v_0 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale

$$u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0$$

Théorème 2.1.1 *La solution du problème (2.1.1) est donnée par la formule*

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi c} \sin(n\pi ct) \int_0^1 v_0(x) \sin(n\pi x) dx + 2 \cos(n\pi ct) \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx \right) \sin(n\pi x)$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, on procède à la résolution de l'équation (2.1.1) en suivant les étapes :

1^{ère} étape : On suppose qu'il existe des fonctions (inconnues) ψ et φ , d'une variable réelle telles que

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$$

2.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier [4]3

On calcule les dérivées partielles secondes de u par rapport à x et t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \psi''(t)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \psi(t)\varphi''(x)$$

on substitue dans l'équation (2.1.1), on obtient alors

$$\psi''(t)\varphi(x) = c^2\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise alors formellement par $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (2.1.2)$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite ne dépend que de x , qu'ils sont constant, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

d'où

$$\psi''(t) = \lambda c^2 \psi(t) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$$

et ainsi on a obtenu deux équations à variables séparées.

2^{ème} étape : On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, pour cela, on considère le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

ainsi, deux cas se présentent $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$

1^{er} cas : $\lambda = 0$

l'équation (2.1.3) devient alors

$$\varphi''(x) = 0$$

donc

$$\varphi'(x) = A = \text{constante}$$

on obtient alors

$$\varphi(x) = Ax + B, \quad \text{où } B = \text{constante}$$

2.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier[4]4

Des conditions $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$, on obtient

$$B = 0 \text{ et } A = B$$

donc la solution de (2.1.3) est la solution nulle.

2^{eme} cas : $\lambda \neq 0$

On associe à l'EDO du problème (2.1.3) l'équation caractéristique

$$r^2 - \lambda = 0 \tag{2.1.4}$$

donc :

Si $\lambda > 0$

l'équation (2.1.4) devient

$$r = \pm\sqrt{\lambda}$$

d'où la solution est

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

En tenant compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(1) = 0 &\Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$A = B = 0$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

Si $\lambda < 0$

alors on a

$$r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = \lambda$$

on pose $\lambda = -\beta$, tel que $\beta > 0$ donc

$$r = \pm i\sqrt{\beta}$$

la solution est alors

$$\varphi(x) = A \cos(\sqrt{\beta}x) + B \sin(-\sqrt{\beta}x), \text{ tel que } \beta > 0$$

2.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de Fourier [4]5

En tenant compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned}\varphi(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ \varphi(1) = 0 &\Rightarrow B \sin(\sqrt{\beta}) = 0\end{aligned}$$

ou bien $B = 0$ ou bien $\sqrt{\beta} = n\pi$, n un entier positif. Dans ce cas, il existe donc des solutions non nulles données par

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n > 0 \quad (2.1.5)$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -n^2\pi^2c^2 \quad (2.1.6)$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ . On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme le vecteur propre en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif près.

3^{ème} étape : Le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

orthogonalise toujours la suite des $\varphi_n(x)$.

4^{ème} étape : On résout maintenant l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment (2.1.6) et sans se préoccuper de la condition initiale. On a donc à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t)$$

qui a pour solutions, étant donné que $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = c_n \cos(n\pi ct) + d_n \sin(n\pi ct) \quad (2.1.7)$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2 on trouve un espace vectoriel de dimension 2 des solutions, c_n et d_n sont des constantes arbitraires.

A ce stade, les fonctions

$$(c_n \sin(n\pi ct) + d_n \cos(n\pi ct)) \varphi_n(x)$$

sont solutions de l'E.D.P. avec des conditions aux limites mais pas avec la condition initiale.

5^{ème} étape : On écrit à nouveau la solution $u(t, x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires (d'après le principe du superposition)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \sin(n\pi ct) + d_n \cos(n\pi ct)) \sin(n\pi x) \quad (2.1.8)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n et d_n dans l'équation (2.1.8) grâce aux conditions initiales considérées comme des fonctions périodiques et de calculer leur coefficient de Fourier, ce qui donne pour $u(0, x) = u_0(x)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\pi x) = u_0$$

Les d_n peuvent donc s'interpréter comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$, soit

$$d_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx$$

Quand à la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x)$, l'équation (2.1.8) donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n\pi c \sin(n\pi x) = v_0$$

On obtient donc

$$c_n = \frac{1}{n\pi c} \frac{\langle v_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^1 v_0(x) \sin(n\pi x) dx$$

Donc la solution devient

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi c} \sin(n\pi ct) \int_0^1 v_0(x) \sin(n\pi x) dx + 2 \cos(n\pi ct) \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx \right) \sin(n\pi x)$$

□

2.2 Résolution de l'équation des cordes vibrante par la formule de D'Alembert[4]

Théorème 2.2.1 (Formule de D'Alembert) La solution du problème (2.1.1) est une fonction différentiable de la forme :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (2.2.1)$$

Il y a trois techniques différentes pour démontrer cette formule. On propose celle du changement de variables.

Preuve. On peut écrire la solution $u(t, x)$ sous la forme

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

où F et G sont des fonctions à déterminer. les conditions initiales impliquent alors que :

$$u(0, x) = u_0(x) = F(x) + G(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = c(F'(x) - G'(x))$$

En dérivant, on obtient le système

$$\begin{cases} F'(x) + G'(x) = u'_0(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{v'_0(x)}{c} \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{cu'_0(x) + v'_0(x)}{2c} \\ G'(x) = \frac{cu'_0(x) - v'_0(x)}{2c} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$F(x) = c_1 + \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy$$

$$G(x) = c_2 + \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy$$

la condition initiale nous aide à déterminer les constantes d'intégrations :

$$u_0(0) = u(0, 0) = F(0) + G(0) = c_1 + c_2 + u_0(0)$$

ce qui entraîne

$$c_1 + c_2 = 0$$

et en sommant $F(x + ct)$ et $G(x - ct)$ on obtient le résultat. □

2.3 L'unicité de la solution de l'équation des ondes[5]

Définition 2.3.1 "L'énergie de l'équation du problème (2.1.1)" soit $u(t, x)$ une solution de l'équation du problème (2.1.1), on appelle l'énergie à l'instant t de $u(t, x)$ la quantité suivante

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right] dx$$

Proposition 2.3.1 Le problème de Cauchy (2.1.1) admet au plus une solution.

Preuve. On suppose qu'il existe deux solutions du problème (2.1.1) notées u_1 et u_2 , et on démontre que $u_1 - u_2 = 0$.

L'énergie à l'instant t de la solution $(u_1 - u_2)(t, x)$ notée $E(t)$ est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, x) \right)^2 \right] dx. \quad (2.3.1)$$

En dérivant (2.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= c^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, 1) \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 1) - \frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(t, 0) \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 0) \right] \\ &= 0, \quad \forall t \end{aligned}$$

car

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 1) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, 1) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, 1) = 0$$

tel que $u_1(t, 1) = u_2(t, 1) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(t, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, 0) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, 0) = 0$$

tel que $u_1(t, 0) = u_2(t, 0) = 0$. D'où

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \Rightarrow E(t) = cte = E(0)$$

avec

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2)(0, x) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)(0, x) \right)^2 \right] dx$$

tel que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(0, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, x) \\ &= v_0(x) - v_0(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2)(0, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, x) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}v_0(x) - \frac{\partial}{\partial x}v_0(x) \\ &= v_0'(x) - v_0'(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

alors $E(t) = E(0) = 0, \forall t$, et la fonction intégrée est positive, on a donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t, x)\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2)(t, x)\right)^2 = 0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t, x) = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2)(t, x) = 0$$

alors

$$d(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = cte$$

en particulier pour $t = 0$, on obtient

$$(u_1 - u_2)(t, x) = (u_1 - u_2)(0, x) = cte$$

ainsi

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = v_0(x) - v_0(x) = 0$$

donc $u_1 = u_2$, d'où le résultat cherché. □

Résolution numérique de l'équation des ondes[7]

Le recours au calcul numérique sur ordinateur est parfois nécessaire pour estimer qualitativement et quantitativement, les solutions de différents modèles d'équations aux dérivées partielles. Il existe de nombreuses méthodes de résolution numérique des EDP, qui consiste à obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est à dire en nombre fini) qui approchent la solution exacte. Dans ce chapitre, nous présentons une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies.

3.1 Principe de la méthode des différences finies

Cette méthode consiste à approcher la dérivée de la fonction inconnue (d'un problème donné) en un point par une somme finie des valeurs de l'inconnue u en un certain nombre de points. Ces points apparaissent lors du maillage du domaine dans lequel le problème est vérifié. Cette approximation est basée sur la définition de la dérivée et éventuellement sur le développement limité de la fonction inconnue.

3.1.1 Les différents schémas pour approcher la 1^{er} dérivée

Par la définition de la limite on a pour $x_0 \in \Omega$ un ouvert de \mathbb{R}^d

$$u'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$$

donc si h est petit, on peut avoir l'approximation suivante

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (3.1.1)$$

l'équation (3.1.1) est appelé schéma aux différences décentré à droite (ou progressif).

En appliquant un développement limité à l'ordre 1 de $u(x_0 - h)$ on obtient

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + h\xi_1(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_1(h) = 0$, h est petit on a

$$u(x_0 - h) \simeq u(x_0) - hu'(x_0) \Rightarrow u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \quad (3.1.2)$$

l'équation (3.1.2) est appelé schéma aux différences à gauche (ou régressif).

Un développement limité de u à l'ordre 1 dans le point $(x_0 + h)$ donne

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + h\xi_2(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_2(h) = 0$.

La différence des deux développements limités implique

$$u(x_0 + h) - u(x_0 - h) = 2hu'(x_0) + h\xi_3(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_3(h) = 0$, d'où

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} \quad (3.1.3)$$

l'équation (3.1.3) est appelé schéma centré.

Pour une fonction $u = u(x, y)$, les trois schémas (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.3) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &\simeq \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &\simeq \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0, y_0 - k)}{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &\simeq \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{2h} \end{aligned}$$

3.1.2 Les différents schémas pour approcher la dérivée seconde

Sachant que $u''(x_0) = (u')'(x_0)$, on applique deux fois le schéma (3.1.1), on obtient :

$$u''(x_0) \simeq \frac{u'(x_0 + h) - u'(x_0)}{h}$$

avec $u'(x_0 + h) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - u(x_0 + h)}{2h}$ et $u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$, donc

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - 2u(x_0 + h) + u(x_0)}{h^2} \quad (3.1.4)$$

En appliquant deux fois de suite le schéma (3.1.2) on obtient :

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - 2u(x_0 - h) + u(x_0 - 2h)}{h^2} \quad (3.1.5)$$

Pour obtenir le schéma centré, on fait un développement limité à l'ordre 4 de $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, ainsi

$$u(x_0 + h) \simeq u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\xi_1(h) \quad (3.1.6)$$

$$u(x_0 - h) \simeq u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\xi_2(h) \quad (3.1.7)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \xi_2(h) = 0$.

En sommant $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, on obtient l'approximation

$$u(x_0 + h) + u(x_0 - h) \simeq 2u(x_0) + h^2u''(x_0) + 2\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4(\xi(h))$$

d'où

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} + h^2 \left(-\frac{1}{12}u^{(4)}(x_0) - \xi(h) \right)$$

or $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \left(-\frac{1}{12}u^{(4)}(x_0) - \xi(h) \right) = 0$, donc

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \quad (3.1.8)$$

Pour une fonction $u = u(x, y)$, les deux schémas (3.1.4) et (3.1.8) deviennent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \simeq \frac{u(x_0, y_0 + k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - k)}{k^2}$$

Définition 3.1.1 *On dit qu'un problème discret est à k pas de temps s'il prend la forme suivante :*

$$u^{(n+1)} = F(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u^{(n-k+1)})$$

3.1.3 Stabilité et consistance du système discret

Il est crucial lorsqu'on souhaite mettre en oeuvre un schéma aux différences finies de vérifier, ou plus exactement de trouver une condition assurant la stabilité du système discret.

De manière générale, on a à étudier le problème continu

$$\begin{cases} Lu = f \text{ sur } D \\ + \text{conditions} \end{cases} \quad (3.1.9)$$

où L est un opérateur différentiel. Après un choix de discrétisation du domaine D (choix des points x_i de discrétisation), on approche le problème (3.1.9) par un problème discret

$$\begin{cases} L_h u = f \text{ sur } D \\ + \text{conditions} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

aux points x_i .

Théorème 3.1.1 "de convergence" *On suppose que $u \in C^4([0, L])$, alors il existe une constante c indépendante de h tel que*

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - u_h(x_i)| \leq ch^2 M$$

tel que u_h la solution approché

Définition 3.1.2 *Le système discret est dit stable si*

1. *il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|u^{(n)}\| \leq \kappa \|u^{(0)}\|$$

ou bien

2. *il existe une constante κ vérifiant : $0 < \kappa < 1$ et $\|u^{(n)}\| \leq \kappa \|u^{(n-1)}\|$.*

Définition 3.1.3 *On appelle erreur de consistance le vecteur ε^h défini par :*

$$\varepsilon^h(x_i) = Lu(x_i) - L_h u(x_i), \quad \forall i$$

Définition 3.1.4 On dit que le problème (3.1.10) est dit :

1. consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\varepsilon^h(x_i)| = 0$$

2. consistant d'ordre m , s'il existe une constante c indépendante de h tel que

$$\|\varepsilon^h\| \leq ch^m$$

3.2 Application à l'équation des ondes

Nous allons appliquer le schéma aux différences finies à l'équation des ondes modélisant le problème de la propagation d'une onde le long d'une corde de longueur L fixée aux extrémités et qui est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & \text{sur }]0, T[\times]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & \text{sur }]0, T[\\ u(0, x) = w(x), & \text{sur }]0, L[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

En appliquant un schéma centré par rapport au temps et l'espace et après la discrétisation du domaine $[0, T] \times [0, L]$ aux points (t_n, x_j) définis par : $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N_T}$ (N_T donné), $x_j = j\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{L}{N}$ (N donné), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) &\simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - 2u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j))}{\Delta t^2} \simeq \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) &\simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{\Delta x^2} \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

l'équation du problème continu est approché par

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = f_j^n, \quad \forall 1 \leq j \leq N-1 \text{ et } 1 \leq n \leq N_T$$

qui est équivalente à

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + (\Delta t)^2 f_j^n$$

on obtient alors

$$u_j^{n+1} = pu_{j-1}^n + 2(1-p)u_j^n + pu_{j+1}^n - u_j^{n-1} + (\Delta t)^2 f_j^n, \quad \text{tel que } p = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad (3.2.2)$$

La discrétisation des conditions :

$$u(t_n, 0) = u_0^n = 0 \quad (3.2.3)$$

$$u(t_n, L) = u_N^n = 0 \quad (3.2.4)$$

$$u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0 \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_j) \simeq \frac{u(t_0 + \Delta t, x_j) - u(t_0, x_j)}{\Delta t} = 0$$

nous donne

$$u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j)$$

c'est à dire

$$u_j^1 = u_j^0 \quad (3.2.6)$$

pour $j = 1$: $u_1^{n+1} = pu_0^n + 2(1-p)u_1^n + pu_2^n - u_1^{n-1} + (\Delta t)^2 f_1^n$

pour $j = 2$: $u_2^{n+1} = pu_1^n + 2(1-p)u_2^n + pu_3^n - u_2^{n-1} + (\Delta t)^2 f_2^n$

⋮

pour $j = N - 1$: $u_{N-1}^{n+1} = pu_{N-2}^n + 2(1-p)u_{N-1}^n + pu_N^n - u_{N-1}^{n-1} + (\Delta t)^2 f_{N-1}^n$

Le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^{n+1} = pu_{j-1}^n + 2(1-p)u_j^n + pu_{j+1}^n - u_j^{n-1} + (\Delta t)^2 f_j^n \\ u(t_n, 0) = u_0^n = 0 \\ u(t_n, L) = u_N^n = 0 \\ u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0 \\ u_j^1 = u_j^0 \end{array} \right.$$

est donc équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(n+1)} = Au^{(n)} - u^{(n-1)} + F^{(n)}, \forall n \geq 1 \\ u^{(0)} = (w_j)_{1 \leq j \leq N-1}, u^{(1)} = u^{(0)} \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

où $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{N-1}^{(n)})^t$, $F^{(n)} = (\Delta t^2 f_1^n, \Delta t^2 f_2^n, \dots, \Delta t^2 f_{N-1}^n)^t$ et

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc} 2(1-p) & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & 2(1-p) & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p & 2(1-p) & p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p & 2(1-p) & p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & p & 2(1-p) \end{array} \right]$$

Remarque 3.2.1 *Le problème (3.2.7) associé au problème des ondes est un schéma à 2 pas de temps.*

le problème (3.2.7) est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

3.3 Programmation de la méthode sur Matlab

On va donner le programme de la méthode des différences finies sur Matlab pour deux exemples, le premier est le modèle donné par (3.2.1), le second est le modèle (3.2.1) avec une modification de la condition de Dirichlet et de Neumann.

3.3.1 Exemple 1

Explications
(On crée un fichier
sur Matlab pour
définir la matrice A)

(On crée un fichier
sur Matlab pour
définir le vecteur F)

Nettoyage

Nombredesponts pour l'espace
Nombre des points pour le temps

L'erreur
Vitesse des ondes
Fonction de second membre
Condition initiale

Le programme
function A=Matrix(nx,p)

```
A=diag(2*(1-p)*ones(nx-1,1))+diag(p*ones(nx-2,1),1)
+diag(p*ones(nx-2,1),-1);
end
```

```
functionF=VectF(f,dt,nx,t)
```

```
x=linspace(0,1,nx);
F=dt^2*f(x(1 :nx-1),t);
end
```

```
clc
```

```
clear all
```

```
nx=4;
```

```
nt=5;
```

```
x=linspace(0,1,nx);
```

```
t=linspace(0,1,nt);
```

```
Tol=1e-2;
```

```
er=1;
```

```
c=1;
```

```
f=@(x,t)
```

```
U0=0;
```

```
U1=0;
```

```
p=c*((nx-1)/(nt-1))^2;
```

```
A=Matrix(nx,p);
```

```
i=2;
```

```
while er>Tol
```

```
    i=i+1;
```

```
F=VectF(f,dt,nx,t(i));
```

```
U2=A*U1-U0+F;
```

```
er=norm(U2-U1);
```

```
U0=U1;
```

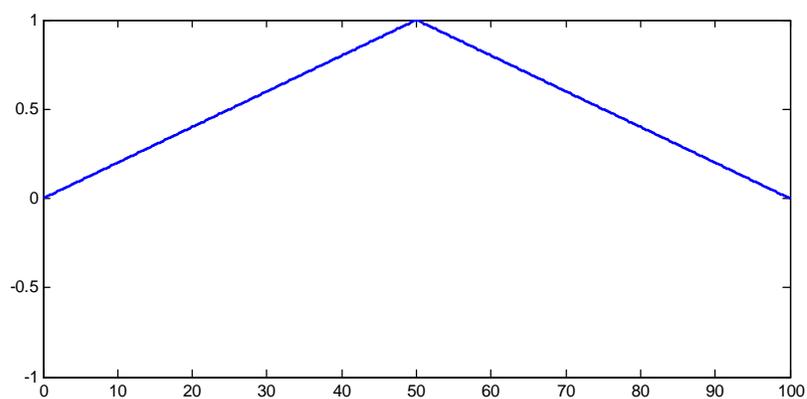
```
U1=U2;
```

```
end
```

3.3.2 Exemple 2

Explication	Programme
Nettoyage	clear all
Vitesse des ondes	c=1;
Longueur du domaine spatial	L=100;
Borne inférieure du domaine	xm=0;
Borne supérieure du domaine	xp=xm+L;
Nombre des points	J=500;
Pas d'espace	dx=L/(J-1);
Noeuds du maillage	x=xm :dx :xp;
Condition initiale	umax=1;
	u0=2.*umax.*(L/2-umax.*abs(x-L./2))./L;
	umax1=1;
	u1=2.*umax1.*(L/2-umax1.*abs(x-L./2))./L;
Tracé initial	plot(x,u0,'LineWidth',2)
	up=max(umax,umax1);
	axis([xmxp-upup])
	pause
CFL	cfl=1;
	s=cfl^2;
Pas de temps	dt=cfl*dx/c;
Temps de calcul	T=1000*dt;
Démarrage	temps=0;
Début de boucle	while temps<T
	temps=temps+dt;
	u1past=[u1(1)u1(1 :J-1)];
	u1forwd=[u1(2 :J)u1(J)];
	u=s.*(u1past+u1forwd)+2.*(1-s).*u1-u0;
Bord gauche	u(1)=0;
Bord droit	u(J)=0;
	u0=u1;
	u1=u;
Tracé	plot(x,u0,'LineWidth',2)
	axis([xmxp-upup])
	drawnow
Findeboucle	end

L'exécution de l'exemple 2 donné par la figure suivant :



CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté l'équation des cordes vibrantes avec une résolution analytique et on a illustré cette étude par une application numérique sur Matlab.

Bibliographie

- [1] **J. Quint** : Cours Élémentaires de Mathématiques Supérieures (4-Équations Différentielles 1977).
- [2] **Aude Rondepierre & Adeline Rouchon** : Introduction aux Équations aux Dérivées Partielle 2012-2013.
- [3] **B.Helffer** : Cours "Introduction aux EDP Analyse de Fourier" pour Les Étudiants de l'ENS de Bucarest.
- [4] **V. Volpert** : Ecole Centrale de Lyon : Dynamique des Systèmes Non Linéaires 2011-2012.
- [5] **Pedro Ferreira et Sylvie Mas-Gallic** : Équations aux Dérivées Partielles 11 décembre 2001.
- [6] Laurent Schwartz. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [7] Cours "La Méthode des Différences Finies" Mastèr 1 (MCO 2014-2015) F.S.E.I-Mostaganem.